＜論文＞

計量アファイン重力理論におけるWeyl不変性の拡張実現について

On the Weyl invariant extension of metric-affine theory of gravity

佐藤 喜一郎（Ki-ichiro SATO）

１　はじめに

筆者は、Weyl不変性に基づく量子重力理論を研究し、量子重力理論におけるくりこみの問題や、宇宙論的な課題を解決できないか調べている。

量子重力理論を場の量子論として定式化する基本問題に、ユニタリティとくりこみ可能性の両立がある。高階微分を含む作用を出発とするとくりこみ可能であるが［1］,［2］、ユニタリティを壊し、階数を制限してユニタリな理論を作るとユニタリではあるが［3］くりこみ可能ではなくなる。この図式に最近変化が生じている。高階微分の理論の基盤としてアファイン接続を導入する非計量接続一般の理論で運動方程式レベルの自由度が調べられ、ユニタリな理論の構築が示唆されている［4］,［5］。この具体的な場の量子論に関しては、捩率のみを扱った場合に調べられているが［6］、アファイン接続の視点にたてば、同時に共形接続をとることで、筆者が長年研究しているWeylのゲージ場の存在する理論［7］,［8］などがその範疇に入ってくるので、この理論で類似のユニタリティの回復があるのか、興味がもたれる。

そこで、筆者は、一般のアファイン接続として導入されるMetric-Affine 接続理論（L_4, g）［9］としてWeylゲージ理論を見直し（Y_4, Weyl-Cartan空間）計量$g_{\mu\nu}$, torsion$T_{\mu\nu}{}^{\lambda}$、Weylゲージ場W_μの３つの場による量子重力理論の構成を目指したが、アイディアが不足しあまりにも素朴な方法でアプローチしたため、成果を上げることには至らなかった［10］。

今回筆者は、Mikuraらが提唱した『計量アファインゲージ理論の接続は、計量のWeyl変換と接続は全く独立に考える』という立場［11］に触発され、アファイン接続をWeyl不変性に基づいてボトムアップで構成していく試みを行った。本稿では、その中でも簡単なモデルについての報告を行う。

２　計量アファインゲージ理論とWeyl変換

一般相対性理論といて知られる、Einstei の重力理論は計量テンソルを基本場とし、幾何学的にはレビ・チビタ接続を導入する理論であり、

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \text{で特徴づけられる。} \tag{1}$$

ここで、共変微分∇_μは、$\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}$はChristoffelの記号で表されるレビチビタ接続のもとで定義されるものを使う。

$$\{^{\lambda}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right), \tag{2}$$

重力理論を拡張する意味で先鞭をつけたのはWeylのゲージ理論で、これは計量テンソルを

$$g_{\mu\nu} \to \mathrm{e}^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}, \quad \delta_W g_{\mu\nu} = 2\sigma, \tag{3}$$

のように、時空の場所ごとに変化させる理論であった。現在これは、名前としては素粒子の標準模型を記述する理論に残っているが、重力理論としてまったく死んだわけではない。

ゲージ理論の一般化は接続の理論で、幾何学としてはアファイン接続を導入するが、その例としてWeylゲージ場を導入することはできる。アファイン幾何学では必ずしも計量テンソルを必要とするわけではないが、物理学の要請で作用などを書き下す必要が生じると計量テンソルが必要となる。そのような理論は計量アファイン理論（Metric-Affine Theory）と呼ばれる［12］。この理論を特徴づける量は、計量テンソル$g_{\mu\nu}$に対するレビチビタ接続にもとづく共変微分が、ゼロではない度合、すなわち、

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = Q_{\lambda\mu\nu}, \tag{4}$$

で定義される非計量性（non-metricity）$Q_{\lambda\mu\nu}$である。あとは、アファイン接続的要素にはtorsionがあるが、今回は話を簡単化するために省略する。

Weylのゲージ場の話題に戻ると、このQを

$$Q_{\lambda\mu\nu} = W_\mu g_{\nu\lambda} + W_\nu g_{\mu\lambda} - W_\lambda g_{\mu\nu} \tag{5}$$

で与えるというのがWeylゲージ理論の別の見方である。今回はこれを押し進めて、非計量性の部分を、Weyl不変性をガイドラインに簡単な場で構成できないかというアプローチで、莫大な独立成分をもつアファイン接続$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$の理論を分析していきたい。

３　Weyl 不変性なアファイン接続の実現

アファイン接続$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$は対称で、以下のような構成をとっているものとする。

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \left\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right\} - W_\mu \delta^\lambda{}_\nu - W_\nu \delta^\lambda{}_\mu + W_\omega g^{\lambda\omega} g_{\mu\nu} + Q^\lambda{}_{\mu\nu}, \tag{6}$$

第１項と第２項は、Weyl変換にもとないWeylのゲージ場を

$$\delta_W W_\mu = -\partial_\mu \sigma, \tag{7}$$

と変換することで不変になっている。従って、アファイン的な要素は第３項の$Q^\lambda{}_{\mu\nu}$となる。以下では、これをWeyl不変性で候補を絞っていくことを考える。

これは、純粋に２階共変１階反変の３階のテンソルで、ベクトル３つ、あるいは、ベクトルと２階のテンソルで構成される部分と､本質的に３階テンソルのみで記述される部分に分けられる。ただし、使用できるベクトル場は共変ベクトルのみと考えてよい。何故なら、添え字の上げ下げは計量テンソルで行わないと一般座標変換の変換性と矛盾がでてしまうので、仮に独立な反変ベクトルが別にあってもそれは共変ベクトルから計量テンソルを使って作られるからである。同様の理由で２階のテンソルも２階共変テンソルのみを独立に採用することになる。ただし､クロネッカーのδは１階反変１階共変のテンソルで、これを使用することもできる。クロネッカーのδは

$$\delta^\mu{}_\nu = g^{\mu\omega} g_{\omega\nu}, \tag{8}$$

のように計量テンソルで表されることは覚えておくべきことである。クロネッカーのδはWeyl不変であるが、Weyl不変だけなら次の計量テンソルの積もWeyl不変でああるので、非計量接性の構成要素にはこれらも加えておく必要がある。

まず、ベクトル場1 つとクロネッカーのδ・計量テンソルでできる項は

$$\alpha_1 (A_\mu \delta^\lambda{}_\nu + A\mu \delta^\lambda{}_\mu) + \alpha_2 A_\omega g^{\lambda\omega} g_{\mu\nu}, \tag{9}$$

である。

次に複雑なのはベクトルを２つ使いものであるが、ベクトル２つを使用すると３階テンソルに組むことができないので、次はベクトル３個の組み合わせになる。

$$\beta_1(A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu)C_\omega g^{\lambda\omega} + (\text{ABC の入れ替え}), \tag{10}$$

さかのぼると、実は、() は原理的には３種類ある。ただし、$A_\mu = B_\mu = C_\mu$であれば、もっとシンプルに

$$\beta' A_\mu A_\nu A_\omega g^{\lambda\omega}, \tag{11}$$

の１項だけになる。

あと、ベクトル１個とテンソル１個の組み合わせもある。

$$\gamma_1(A_\mu H_{\omega\nu} + A_\nu H_{\mu\omega})g^{\lambda\omega} + \gamma_2 A_\omega H_{\mu\nu} g^{\lambda\omega}, \tag{12}$$

注意したいのは、テンソル場$H_{\mu\nu}$は対称テンソルであることに加え、Weyl変換で

$$\delta_W H_{\mu\nu} = 2\sigma, \tag{13}$$

のように計量テンソルと同じ変換性を持つようにしておく必要があることである。これは、ベクトル場A_μ, B_μ, C_μがWeyl不変として定義せざろうえないことからの帰結である。

ちなみに、対称テンソル$H_{\mu\nu}$は、座標変換の変換性からはベクトルから共変微分して

$$H_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu + \nabla_\nu A_\mu, \tag{14}$$

のように作れそうであるが、これではWeyl 変換で計量テンソルと同じ変換性にはならない。それではと、Weylゲージ場を入れた共変微分を作るとWeyl不変なものは作れるが、やはり計量テンソルと同じ変換性にはならない。もし、一般のアファイン接続であれば、もっと微分でできる場の複雑な項を考えることができるので、接続自身のWey不変性の要請で、小さいspinの場、すなわち、階数の低いテンソルに分解できる可能性はWeyl不変性で制限されたとみることができる。

あとは、本質的にWeyl不変な３階テンソルである。

$$\bar{Q}^\lambda_{\mu\nu}, \tag{15}$$

4　Weyl 不変なアファインゲージ理論の最小化モデル

沢山の候補がでてきたが、この理論の構造を理解するために、なるべく少ない数の場で構成される理論を作ってみよう。

まず、純粋３階テンソルはないものとしよう。

$$\bar{Q}^\lambda_{\mu\nu} = 0, \tag{16}$$

これがあると、ゴーストのありなしの判定が物凄く複雑化することは、すでに前例がある [13]。

次に、ベクトル場は１つにする。これは極めて明快な単純化である。その上で、まず、ベクトル場１つで記述できた項を分析する。実は、この項は$\alpha_2 = -\alpha_1$の場合には、Weylのゲージ場を

$$W_\mu \to W_\mu - \alpha_1 A_\mu, \tag{17}$$

のようにシフトすると実現できる。$\alpha_2 = -\alpha_1$は一般には期待できそうもないが、アファインゲージ理論では、左右の射影ゲージ変換

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \to \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + A_\mu \delta^\lambda{}_\nu \tag{18}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \to \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + A_\nu \delta^\lambda{}_\mu \tag{19}$$

を行うことができるので、$\alpha_2 = -\alpha_1$がいつでも実現可能である。アファインゲージ理論としての射影ゲージ変換の性質を議論するのであれば、この項は必要であるが、Weyl不変性を議論するだけなら一旦忘れておくことができる。

これで、β'、γ_1、γ_2がゼロではないパラメータとして残った。

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \{^{\lambda}_{\mu\nu}\} - W_\mu \delta^\lambda - W_\nu \delta^\lambda{}_\mu + W_\omega g^{\omega\lambda} g_{\mu\nu} + \beta' A_\mu A_\nu A_\omega g^{\omega\lambda} + \gamma_1 (A_\mu H_{\omega\nu} + A_\nu H_{\mu\omega}) g^{\lambda\omega} + \gamma_2 A_\omega H_{\mu\nu} g^{\lambda\omega}, \tag{20}$$

最後のこの３つのうち１つだけ採用したものが、最小モデルとなる。今回は、γ_2 を残したもので考察してみる。

まず、Riemann-Christoffel 曲率を計算する。*有がWeylのゲージ場を含むアファイン接続としての量、なしが普通のレビチビタ接続の量である。

$$\begin{aligned}
{}^*R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho &= \partial_\mu {}^*\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \partial_\nu {}^*\Gamma^\rho_{\lambda\mu} + {}^*\Gamma^\rho_{\mu\omega} {}^*\Gamma^\omega_{\lambda\nu} - {}^*\Gamma^\rho_{\nu\omega} {}^*\Gamma^\omega_{\lambda\mu} \\
&= R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho \\
&\quad + \delta^\rho{}_\lambda (\nabla_\mu W_\nu - \nabla_\nu W_\mu) + (\delta^\rho{}_\nu \nabla_\mu W_\lambda - \delta^\rho{}_\mu \nabla_\nu W_\lambda) - g^{\rho\omega} (g_{\lambda\nu} \nabla_\mu W_\omega - g_{\lambda\mu} \nabla_\nu W_\omega) \\
&\quad + (\delta^\rho{}_\mu W_\nu - \delta^\rho{}_\nu W_\mu) W_\lambda - (\delta^\rho{}_\mu g_{\lambda\nu} - \delta^\rho{}_\nu g_{\lambda\mu}) g^{\sigma\omega} W_\sigma W_\omega - g^{\rho\omega} (g_{\mu\lambda} W_\nu - g_{\nu\lambda} W_\mu) W_\omega, \\
&\quad + (\nabla_\mu A_\omega H_{\nu\rho} - \nabla_\nu A_\omega H_{\mu\rho}) g^{\lambda\omega} - A_\omega g^{\lambda\omega} (\nabla_\mu H_{\nu\rho} - \nabla_\nu H_{\mu\rho}) \\
&\quad - A_\sigma g^{\lambda\sigma} W_\kappa g^{\kappa\omega} (H_{\mu\omega} g_{\nu\rho} - H_{\nu\omega} g_{\mu\rho}) \\
&\quad + A_\kappa g^{\omega\kappa} W_\omega (\delta^\lambda{}_\mu H_{\nu\rho} - \delta^\lambda{}_\nu H_{\mu\rho}) \\
&\quad - W_\sigma g^{\lambda\sigma} (A_\mu H_{\nu\rho} - A_\nu H_{\mu\rho}) \\
&\quad + A_\sigma g^{\lambda\sigma} A_\kappa g^{\omega\kappa} (H_{mu\omega} H_{\nu\rho} - H_{\nu\omega} H_{\mu\rho})
\end{aligned} \tag{21}$$

次にRicci曲率を計算する。

$$\begin{aligned}
{}^*R_{\mu\nu} &= {}^*R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda + (\nabla_\mu W_\nu - \nabla_\nu W_\mu) + (D-2) \nabla_\mu W_\nu + g_{\mu\nu} g^{\sigma\omega} \nabla_\sigma W_\omega \\
&\quad + (2-D) W_\mu W_\nu - (2-D) g_{\mu\nu} g^{\sigma\omega} W_\sigma W_\omega, \\
&\quad \nabla_\mu A_\omega g^{\lambda\omega} H_{\lambda\rho} - \nabla_\lambda g^{\lambda\omega} H_{\mu\rho} - A_\omega g^{\lambda\omega} (\nabla_\mu H_{\lambda\rho} - \nabla_\lambda H_{\mu\rho}) \\
&\quad - A_\sigma g^{\lambda\sigma} W_\kappa g^{\kappa\omega} (H_{\mu\omega} g_{\lambda\rho} - H_\lambda g_{\mu\rho}) \\
&\quad + A_\kappa g^{\omega\kappa} W_\omega (1-D) H_{\mu\rho} - W_\sigma g^{\lambda\sigma} (A_\mu H_{\lambda\rho} - A_\lambda H_{\mu\rho}) \\
&\quad + A_\sigma g^{\lambda\sigma} A_\kappa g^{\omega\kappa} (H_{\mu\omega} H_{\lambda\rho} - H_{\lambda\omega} H_{\mu\rho}),
\end{aligned} \tag{22}$$

最後に、スカラー曲率を計算しよう。

$$\begin{aligned}
{}^*R &= R + 2(D-1) g^{\lambda\rho} \nabla_\lambda W_\rho + (D-1)(D-2) g^{\lambda\rho} W_\lambda W_\rho, \\
&\quad g^{\mu\rho} \nabla_\mu A_\omega g^{\lambda\omega} H_{\lambda\rho} - \nabla_\lambda g^{\lambda\omega} H_{\mu\rho} - g^{\mu\rho} A_\omega g^{\lambda\omega} (\nabla_\mu H_{\lambda\rho} - \nabla_\lambda H_{\mu\rho}) \\
&\quad - g^{\mu\rho} A_\sigma g^{\lambda\sigma} W_\kappa g^{\kappa\omega} (H_{\mu\omega} g_{\lambda\rho} - H_\lambda g_{\mu\rho}) \\
&\quad + g^{\mu\rho} A_\kappa g^{\omega\kappa} W_\omega (1-D) H_{\mu\rho} - g^{\mu\rho} W_\sigma g^{\lambda\sigma} (A_\mu H_{\lambda\rho} - A_\lambda H_{\mu\rho}) \\
&\quad + g^{\mu\rho} A_\sigma g^{\lambda\sigma} A_\kappa g^{\omega\kappa} (H_{\mu\omega} H_{\lambda\rho} - H_{\lambda\omega} H_{\mu\rho}),
\end{aligned} \tag{23}$$

Weyl不変なラグランジアンは、スカラー場を ϕ として、スカラー場の運動項は除くと、

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \phi^{2*} R + a \sqrt{-g} ({}^*R)^2 + b \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho*} R_{\mu\nu}{}^* R_{\lambda\rho} \tag{24}$$

となる。Weylのゲージ場のみの場合には、ゲージ固定後、Weylのゲージ場がPlanck質量の質量を持ち、重力とのみ結合する理論になったが、今回は、対称テンソル場 $H_{\mu\nu}$ に質量項が生じそうにみえるが、ベクトル場が結合しているため、ベクトル場の真空期待値０周りの展開が直感的ではないのでラグランジアンを見ただけで質量があるという即断はできない。曲率２次の項を許すと、ベクトル場やテンソル場に運動項がでてくるのは良いが、Weylゲージ場を含めて４点相互作用がある理論になってしまう。ともあれ、アファインゲージ理論から出発して、Weyl不変で自明ではない拡張の重力理論理論ができたのは喜ばしいことだ。

５　まとめと展望

アファインゲージ理論視点でWeyl不変な理論を見直すことは、以前にもチャレンジしたがそのときはあまりに素直に過ぎて何ら成果を得られなかった。今回は、MikuraらがWeyl不変性をアファイン接続とは独立に課す理論が作れることに触発されて、ボトムアップ的にWeyl不変な理論の拡張を行うことができた。

まだ、最小構成の理論の作用が書けた段階で、量子化をどうするのかとか、どういう物理的な意味があるのか（ないのか）が全く議論されていないので、その仕事を行う必要がある。また、最小構成の少し上の理論がまったく探求されていないので、ある程度の一般性のある理論で作用を構成することも検討していく必要があるであろう。そのときには、Weylゲージ場に吸収されたベクトル場の射影的ゲージ変換性などを真剣に議論する必要があるであろう。新たに導入された場がダークマターやダークエネルギーの解決に寄与するようなことがあることを期待して、本稿の終わりとする。

参考文献

[1] K. S. Stell, Phys. Rev. D**16** (1977), 953-969.

[2] N. Otha etal, Phys. Rev. D**98** (2018), 026027.

[3] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **59** (1978)972.

[4] D. Langlois and K. Noui, JCAP **1607** (2016), 016.

[5] H. Motohashi, K. Noui, T. Suyama, M. Yamaguchi and D. Langlois, JCAP **07** (2016)033.

[6] K. Aoki and S. Mukohyama, Phys. Rev. D**100** (2019), 064061.

[7] 佐藤喜一郎, 東京理科大学紀要（教養篇）第43号，2011, 337-345.

[8] 佐藤喜一郎, 東京理科大学紀要（教養篇）第50号，2018, 309-317, 第52号, 2020, 299-307.

[9] F. W. Hehl, J. D. MacCrea, E. W. Mielke, Y. Ne'eman, Phys. Rep. **258** (1995), 1

[10] 佐藤喜一郎, 東京理科大学紀要（教養篇）第53号，2021,

[11] Y. Mikura, Y. Tada and S. Yokoyama, EPL, **132** (2020), 39001.

[12] K. Aoki and K. Shimada, Phys. Rev. D**100** (2019), 044037, K. Aoki, K. Shimada and K.-I. Maeda, Phys. Rev. D**99** (2019), 104020.

[13] R. Percacci and E. Segzin, “A New Class of Ghost and Tachyon Free Metric Affine Gravities”, arXiv:1912.01023v2.