＜査読論文＞

集合とタブローの方法

Sets and Tableau Method

金井 範夫（Norio KANAI）

0 はじめに

古典述語論理の式（論理式）

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x) \to R(x))$$

を考えてみる。これは議論領域を$D=\{[c]\}$（ある一つの元からなる集合で、その元を$[c]$と表しておく）とし、述語記号P, Q, Rに、それぞれDの部分集合$\{[c]\}, \{[c]\}, \phi$（空集合）を対応させる解釈を考えると、与式は偽となる（すなわち反例がある）。一方、議論領域を$D=\{[c]\}$とし、述語記号P, Q, Rに、例えばそれぞれDの部分集合$\phi, \{[c]\}, \{[c]\}$を対応させる解釈を考えると、与式は真となる（すなわち充足例がある）。

このように、与えられた式に対してその反例や充足例が存在するが、式が複雑になるにつれて、これらを求めることは容易ではない。本論文では、任意に与えられた式に対して、反例や充足例を構成できる一般的な手続きについて述べる。本論文は［1］～［3］の議論を発展させたものである。

なお、これらの手続きはタブローの方法による式の取り扱いから得られ、構成される反例や充足例はともに集合論的な例である（本論文では省くが、集合論的な例を発展させて日常的な事例も構成できる）。タブローの方法の基礎事項については、たとえば［4］、［5］を参照されたい。

1 準備：古典述語論理と式

数理論理学上の事柄及びその周辺（とくにタブローの方法や閉じたタブロー、閉じていないタブロー、等々）は既知とする。そのうちいくつかについて、本節と次節で概説しておく。

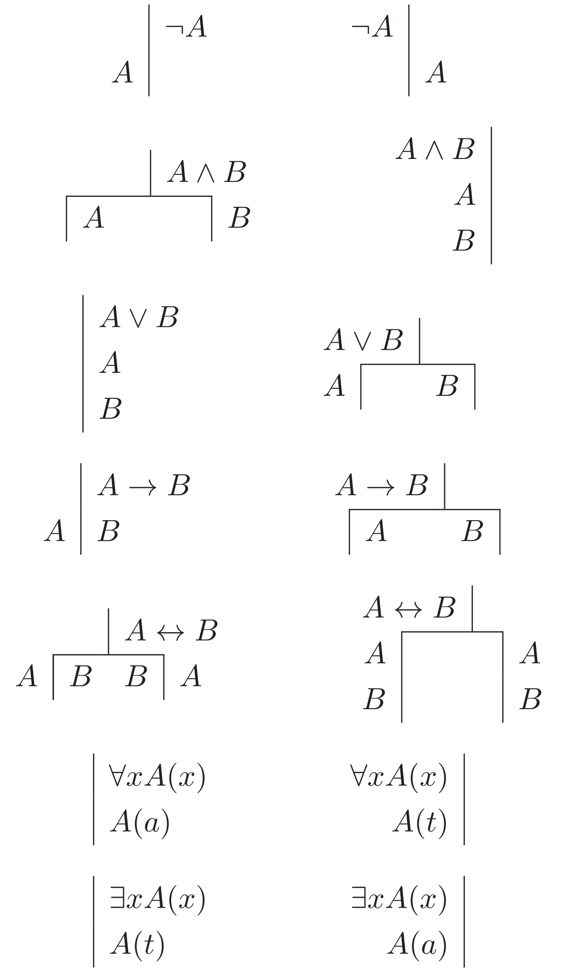
本論文では古典述語論理を扱うが、議論を簡略化するために、述語記号は１変数のものとし関数記号は含まないする。したがって、項は個体定数か自由変数のいずれかである。なお、この場合の述語論理は決定可能であることに注意する。

式は次の記号を用いて、よく知られた仕方によって与えられる：

個体定数	c, $d\cdots$
自由変数	a, b,$\cdots$
束縛変数	x, y,$\cdots$
項	t,$\cdots$
述語記号	P, Q, R,$\cdots$
論理記号	$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$
括弧	(,)

2 準備：タブローの方法

タブローの方法は、反例や充足例の構成に最適なものである。この方法は、A, Bを式として、次の還元規則に基づいて与えられる（aは新しく登場させた自由変数、tは任意の項）：



このタブローの方法によって、一般の古典述語論理の完全性定理（健全性及び完全性）が成り立つ。

3 反例の構成

本節で、集合論的な反例を構成する手続き（以下の【1】〜【4】）を示す。分かりやすくするために例を用いて説明する。

妥当式でない式

$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$

についてタブローを作ると、図のような開いたタブローが得られる（a, bは新しく登場させた自由変数で$a \neq b$）。

このタブローの閉じていない枝は中央の枝のみであり、そこから次の情報を得る。

【1】$P(a)$, $Q(a)$, $P(b)$, $R(b)$は真の領域に、$R(a)$, $Q(b)$は偽の領域にある。

これから議論領域をDとして、自由変数a, b（定数記号でも同様）および述語記号P, Q, Rのそれぞれに、次のようなDの元$[a]$, $[b]$およびDの部分集合$[P]$, $[Q]$, $[R]$を割り当てる。

【2】$[a] \in [P], [a] \in [Q], [b] \in [P], [b] \in [R], [a] \notin [R], [b] \notin [Q]$

また一般性を失わないように、次の条件を付与する。

【3】$[a] \neq [b]$

そして、各集合D, $[P]$, $[Q]$, $[R]$が最小となるものを考える。すなわち、

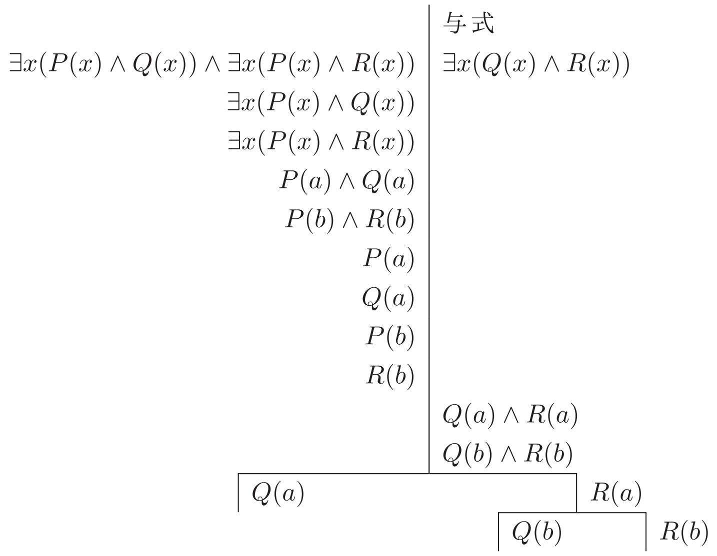
【4】D, $[P]$, $[Q]$, $[R]$の元の個数が最小になるようにする。

すると、最終的に、次の与式の反例（与式を偽とするモデル）得られる：

$D = \{[a], [b]\}([a] \neq [b]), [P] = \{[a], [b]\}, [Q] = \{[a]\}, [R] = \{[b]\}$

これが反例であるのは、構成の手続きの【1】と【2】とタブローの性質から明らかである。また他に閉じていない枝があれば、そこから同様に与式を偽とする反例が得られる。ただし、異なる枝から同じ反例が得られることもある。

なお、この手続きによって得られる反例は最も簡単なもの（最小なもの）であるが、これらを膨らませればもっと大きい反例も得られる。



4 充足例の構成

与えられた矛盾式でない式Aに対して$\neg A$を考えると、妥当式ではないので３節の仕方で反例が構成できる。この反例は、Aに対しては充足例である。すなわち、充足例を構成する方法が得られたことになる。

例えば、矛盾式でない式

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \land \exists x(Q(x) \land R(x)) \land \neg\exists x(P(x) \land R(x))$$

について否定を作り､そのタブローを作ると、図のような開いたタブローが得られる（aは新しく登場させた自由変数)。

このタブローの閉じていない枝は２つある。この最左端の閉じていない枝から得られる情報は、次の通りである。

【１】$Q(a)$, $R(a)$は真の領域に、$P(a)$は偽の領域にある。

これから議論領域をDとして､自由変数a（定数記号でも同様）および述語記号P, Q, Rの解釈を考える。つまり、自由変数aおよび述語記号P, Q, Rのそれぞれに、次のようなDの元$[a]$およびDの部分集合$[P]$, $[Q]$, $[R]$を割り当てる。

【２】$[a] \notin [P], [a] \in [Q], [a] \in [R]$

【３】ここでは不要であるが、$[b]$などもあれば$[a] \neq [b]$とする。

そして、各集合D, $[P]$, $[Q]$, $[R]$が最小となるものを考える。すなわち、

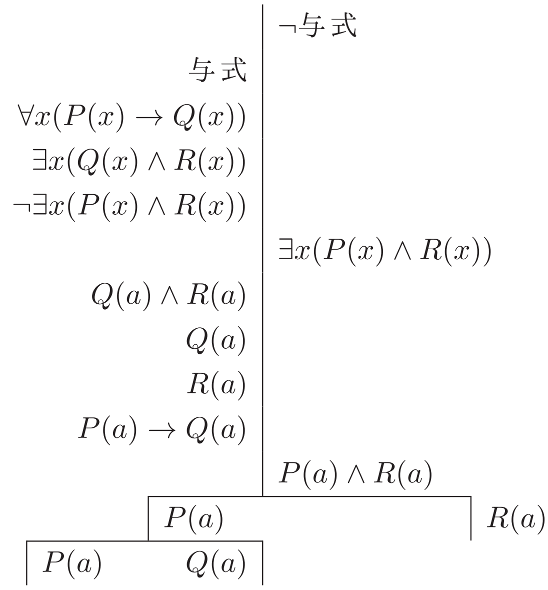
【４】D, $[P]$, $[Q]$, $[R]$の元の個数が最小になるようにする。

すると、最終的に、次の与式の充足例（与式を真とするモデル）得られる：

$$D = \{[a]\}, [P] = \phi, [Q] = \{[a]\}, [R] = \{[a]\}$$

これが充足例であるのは、構成の手続きの【１】と【２】とタブローの性質から明らかである。また中央の閉じていない枝からも、ここに得られたものと同じ充足例が得られる。

なお、この手続きによって得られる充足例は最も簡単なもの（最小なもの）であるが、これらを膨らませればもっと大きい充足例も得られる。

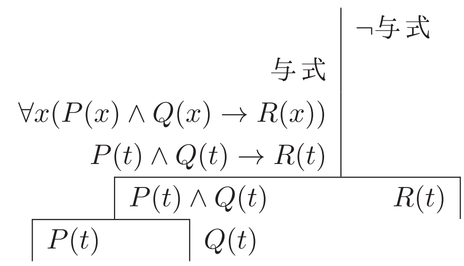


最後の例として、０節で扱った矛盾式でない式

$$\forall x(P(x) \land Q(x) \to R(x))$$

について考える。

この否定を作り、そのタブローを作ると、図のような開いたタブローが得られる。このタブローはいずれの枝も閉じていない。この最左端の閉じていない枝から、いままでと同様の議論により０節にあげた充足例が得られる。



参考文献

[1] Norio Kanai; The Characterization of the Aristoteliean Syllogistic by the Countable Models (abstract), Proceedings of VIII International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Vol.1 pp.260–262, Moscow, 1987.

[2] 金井範夫; 三段論法のゲンツェン式定式化とその一階述語論理のモデルに関する完全性（理学博士 学位論文1988), 石本

新 編著『自然言語の論理とその存在論—レスニェウスキー存在論の立場から—』（多賀出版）所収，第XV章pp.269-389, 1990.

［3］Norio Kanai; Tableau Method for Boolean Algebra, 東京理科大学紀要（教養篇）第54号, pp.305-312, 2022.

［4］Graham Priest; “An Introduction to Non-Classical Logic, From If to Is”, 2nd ed., Ch.1 Ch.12 Cambridge University Press, 2008.

［5］高橋金久;『学んでみよう！ 記号論理学』, 日本評論社, 2014.