ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.956.3
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-37-50

Поступила в редакцию 02.06.2022
Received 02.06.2022

В. И. Корзюк[1,2], Я. В. Рудько[1]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ИЗ МЕХАНИКИ С НЕГЛАДКИМИ УСЛОВИЯМИ КОШИ

Аннотация. Изучается смешанная задача в четверти плоскости для одной системы дифференциальных уравнений, описывающая колебания в однородных релаксирующих стержнях постоянного поперечного сечения, которые соответствуют модели Максвелла. На нижнем основании задаются условия Коши, причем одно из них имеет разрыв первого рода в точке. На боковой границе задается гладкое граничное условие. Для одной из функций системы выводится смешанная задача для уравнения Клейна – Гордона – Фока. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение интегрального уравнения. Доказывается единственность и устанавливаются условия, при которых существует кусочно-гладкое решение. Для второй функции системы рассматривается задача Коши. Устанавливаются условия, при которых решение системы обладает достаточной степенью гладкости.

Ключевые слова: модель Максвелла, уравнение Клейна – Гордона – Фока, метод характеристик, классическое решение, смешанная задача

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение задачи для системы уравнений из механики с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, Я. В Рудько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 37–50. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-37-50

Viktor I. Korzyuk[1,2], Jan V. Rudzko[1]

[1]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF A PROBLEM FOR A SYSTEM OF EQUATIONS FROM MECHANICS WITH NONSMOOTH CAUCHY CONDITIONS

Abstract. In this article, we study a mixed problem in a quarter-plane for one system of differential equations, which describes vibrations in the string from viscoelastic material, which corresponds to the Maxwell model. At the bottom of the boundary, we pose the Cauchy conditions, and one of them has a discontinuity of the first kind at one point. We set a smooth boundary condition on the lateral boundary. We derive the Klein – Gordon – Fock equation for one function of the studied system. We use the method of characteristics to build the classical solution as a solution of some integral equation. We prove the uniqueness and establish conditions under which a piecewise smooth solution exists. The Cauchy problem is considered the system's second function. We determine the conditions under which the solution of the system has sufficient smoothness.

Keywords: Maxwell material, Klein – Gordon – Fock equation, method of characteristics, classical solution, mixed problem

For citation. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of a problem for a system of equations from mechanics with nonsmooth Cauchy conditions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 37–50 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-37-50

Введение. Настоящая работа является фактическим продолжением работы [1]. В ней строится решение смешанной задачи для системы, которая моделирует различные колебательные процессы в стержнях, соответствующих моделям типа Максвелла [2]. Первое уравнение системы представляет собой уравнение движения [3] (аналог второго закона Ньютона), а второе является аналогом закона Гука в моделях типа Максвелла [2].

В ходе решения задачи мы столкнемся со смешанной задачей для уравнения Клейна – Гордона – Фока, которую удастся решить. Это уравнение используется для описания динамики квантовой частицы с нулевым спином и ненулевой массой покоя (например, бозон Хиггса, пион и каон) при скоростях, близких к скорости света [4]. К уравнению Клейна – Гордона – Фока сво-

© Корзюк В. И., Рудько Я. В., 2023

дится [5] телеграфное уравнение, описывающее процессы протекания тока в цепи с учетом как активной, так и реактивной нагрузки [6]. Также к этому уравнению приводится и уравнение, описывающее колебание струны при наличии сопротивления среды [7].

На данный момент для телеграфного уравнения изучены в основном следующие типы граничных задач: задача Коши [6, 8–12], смешанные задачи в полуполосе [6, 13–16], смешанная задача в случае сопряжения разнородных областей в виде полуполос [17], смешанная задача в криволинейной полуполосе [18, 19]. Но следует сказать, что в настоящее время представляет интерес рассмотрение задач в полуплоскости для Клейна – Гордона – Фока, хотя в [20] строится формальное решение такой задачи с однородными условиями Коши, но не изучается вопрос единственности решения.

Постановка задачи. В области $Q=(0,\infty)\times(0,\infty)$ двух независимых переменных $(t,x)\in\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему уравнений

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)+f(t,x),\quad \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(t,x)=\beta\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)+w(t,x), \tag{1}$$

где ρ, γ и β – некоторые положительные константы. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$w(0,x)=\sigma(x),\quad u(0,x)=\varphi(x),\quad x\in[0,\infty),\quad \partial_t w(0,0)=w_0,\quad \partial_t u(0,x)=\psi(x)=\begin{cases}\psi_1, & x=0,\\ \psi_2(x), & x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{2}$$

на другой части границы – граничное условие Дирихле

$$w(t,0)=\mu(t),\qquad t\in[0,\infty), \tag{3}$$

где w_0 и ψ_1 – некоторые константы.

Будем полагать, что функции f, σ, φ, ψ_2, μ достаточно гладкие, а именно: $f\in C^{1,2}(\overline{Q})$, $\varphi\in C^3([0,\infty))$, $\sigma\in C^2([0,\infty))$, $\psi_2\in C^2([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$; $C^{m,s}(\overline{Q})$ – множество непрерывно-дифференцируемых функций порядка $\min(m,s)$ на множестве $\overline{Q}$, имеющих на $\overline{Q}$ непрерывные производные порядка m по переменной t и порядка s переменной x.

Физическая постановка задачи (1)–(3) исследована в статье [1]. Там же показано, что задача (1)–(3) эквивалентна смешанной задаче для функции v, определяемой формулой $w(t,x)=v(t,x)\exp\left(-t/(2\beta)\right)$, и задаче Коши для функции u, если $u\in C^{2,1}(\overline{Q})\cap C^{2,1}_{t,x}(\overline{Q})\cap C^{1,1}_{t,x}(\overline{Q})$ и $w\in C^2(\overline{Q})$, где множества $C^{2,1}_{t,x}(\Omega)=\{u\mid\partial_t\partial_t\partial_x u\in C(\Omega)\wedge\partial_t\partial_x\partial_t u\in C(\Omega)\wedge\partial_x\partial_t\partial_t u\in C(\Omega)\}$ и $C^{1,1}_{t,x}(\Omega)=\{u\mid\partial_t\partial_x u\in C(\Omega)\wedge\partial_x\partial_t u\in C(\Omega)\}$.

Требуется определить функцию v, удовлетворяющую на множестве $\tilde{Q}=$ $=\left(\overline{Q}\setminus\{(t,0)\mid t\in[0,\infty)\}\right)\setminus\{(t,at)\mid t\in[0,\infty)\}$ уравнению Клейна – Гордона – Фока в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{4\beta^2}\right)v(t,x)=\frac{\gamma}{\rho\beta}\exp\left(\frac{t}{2\beta}\right)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x), \tag{4}$$

и граничным условиям

$$v(0,x)=\sigma(x),\quad \partial_t v(0,x)=\begin{cases}w_0+\sigma(0)/(2\beta), & x=0,\\ \dfrac{\gamma}{\beta}\psi_2'(x)-\dfrac{1}{2\beta}\sigma(x), & x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{5}$$

$$v(t,0)=\mu(t)\exp\left(\frac{t}{2\beta}\right),\quad t\in[0,\infty). \tag{6}$$

Для удобства проведения дальнейших расчетов введем обозначения: $a^2=\gamma/(\rho\beta)$, $c^2=1/(4\beta^2)$, $\tilde{f}(t,x)=a^2\exp\left(t/(2\beta)\right)\partial_x f(t,x)$, $\tilde{\mu}(t)=\mu(t)\exp\left(t/(2\beta)\right)$, $\vartheta_1=w_0+\sigma(0)/(2\beta)$, $\vartheta_2(x)=$ $=\left(2\gamma\psi_2'(x)-\sigma(x)\right)/(2\beta)$.

Построение решения смешанной задачи. Для построения решения задачи (4)–(6) рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения Клейна – Гордона – Фока (4) в области Q. К уравнению (4) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$v(0,x) = \sigma(x), \partial_t v(0,x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x \in [0, x^*), \\ \tilde{\psi}_2(x), & x \in (x^*, \infty), \end{cases} \tag{7}$$

и граничное условие (6). При этом полагаем, что $x^* > 0$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty))$, $\tilde{\psi}_2(x) = \vartheta_2(x)$ для $x \in (x^*,\infty)$, $\tilde{\psi}_1(0) = \vartheta_1$.

Как известно [1, 21], общее решение неоднородного уравнения (4) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Пусть $v_p : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ – частное решение неоднородного уравнения (4), удовлетворяющее однородным условиям Коши $v_p(0,x) = \partial_t v_p(0,x) = 0$, $\partial_t^2 v_p(0,x) = \tilde{f}(0,x)$. Такое решение v_p существует [1]. Если $\tilde{f} \in C^1(\overline{Q})$, то $v_p \in C^2(\overline{Q})$.

Тогда общее решение уравнения (4) записывается в виде

$$v(t,x) = v_p(t,x) + q(t,x), \tag{8}$$

где q – общее решение однородного уравнения (4). Функция q может быть определена как решение задачи

$$\partial_t^2 q - a^2 \partial_x^2 q - c^2 q = 0, \tag{9}$$

$$q(0,x) = \sigma(x), \quad x \in [0,\infty), \quad \partial_t q(0,x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x \in [0,x^*), \\ \tilde{\psi}_2(x), & x \in (x^*,\infty), \end{cases} \tag{10}$$

$$q(t,0) = \tilde{\tilde{\mu}}(t) = \tilde{\mu}(t) - v_p(t,0), \quad t \in [0,\infty). \tag{11}$$

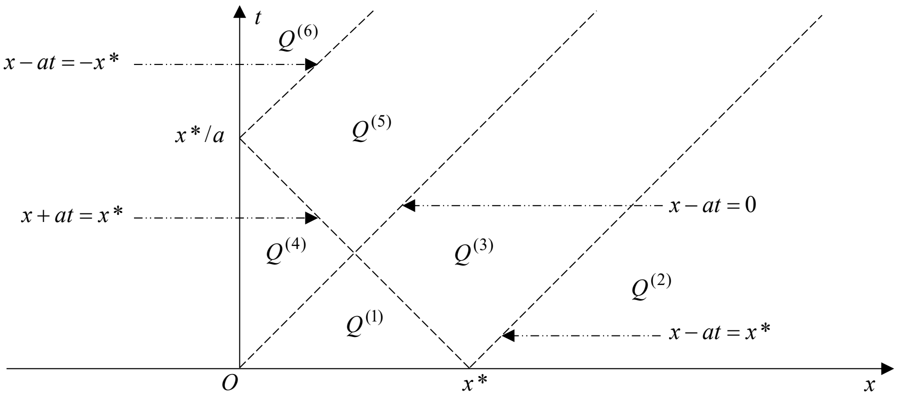
Заметим, что $\tilde{\tilde{\mu}}(0) = \tilde{\mu}(0)$, $\tilde{\tilde{\mu}}'(0) = \tilde{\mu}'(0)$ и $\tilde{\tilde{\mu}}''(0) = \tilde{\mu}''(0) - \tilde{f}(0,0)$. Кроме того, можно сказать, что гладкость решения v задачи (4), (6), (7) зависит только от гладкости решения q задачи (9)–(11), поскольку $v_p \in C^2(\overline{Q})$ при $\tilde{f} \in C^1(\overline{Q})$. Предположим, что мы хотим найти разрыв функции v (или ее какой-то частной производной, не превышающей второго порядка) на кривой вида $x = r(t)$, тогда имеем

$$\left[(\partial_t^k \partial_x^l v)^+ - (\partial_t^k \partial_x^l v)^-\right]\Big|_{x=r(t)} = \left[(\partial_t^k \partial_x^l v_p)^+ - (\partial_t^k \partial_x^l v_p)^-\right]\Big|_{x=r(t)} + \left[(\partial_t^k \partial_x^l q)^+ - (\partial_t^k \partial_x^l q)^-\right]\Big|_{x=r(t)} =$$
$$= \left[(\partial_t^k \partial_x^l q)^+ - (\partial_t^k \partial_x^l q)^-\right]\Big|_{x=r(t)}, \quad t>0, \ x>0, \ k \ge 0, \ l \ge 0, \ k+l \le 2. \tag{12}$$

Здесь было использовано обозначение $()^{\pm}$ – предельные значения функций v, v_p и q и их производных $\partial_t^k \partial_x^l$ с разных сторон на кривой вида $x = r(t)$, т. е. $\left(\partial_t^k \partial_x^l v\right)^{\pm}(t, r(t)) = \lim\limits_{\Delta t \to 0+} \partial_t^k \partial_x^l v(t, r(t) \pm \Delta t)$, где r – функция действительного переменного.

Для построения решения q задачи (9)–(11) разделим область Q на шесть подобластей (рисунок):

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= Q \cap \{(t,x) \mid x + at < x^*, x - at < x^*, x - at > 0\}, \\ Q^{(2)} &= Q \cap \{(t,x) \mid x + at > x^*, x - at > x^*, x - at > 0\}, \\ Q^{(3)} &= Q \cap \{(t,x) \mid x + at > x^*, x - at < x^*, x - at > 0\}, \\ Q^{(4)} &= Q \cap \{(t,x) \mid x + at < x^*, x - at < x^*, x - at < 0\}, \\ Q^{(5)} &= Q \cap \{(t,x) \mid x + at > x^*, x - at > -x^*, x - at < 0\}, \\ Q^{(6)} &= Q \cap \{(t,x) \mid x - at < -x^*\}. \end{aligned} \tag{13}$$



Разделение области Q характеристиками $x-at=0$, $x+at=x^*$, $x-at=x^*$ и $x-at=-x^*$ на шесть подобластей $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ и $Q^{(6)}$

The partition of the domain Q by the characteristics $x-at=0$, $x+at=x^*$, $x-at=x^*$ and $x-at=-x^*$ into six subdomains $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ and $Q^{(6)}$

Определим функции $v^{(i)}$ и $q^{(i)}$ как локальные решения задач (4), (6), (7) и (9)–(11) соответственно в подобластях $Q^{(i)}$, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Пусть

$$v(t,x)=v^{(i)}(t,x),\quad q(t,x)=q^{(i)}(t,x),\ \text{если}\ (t,x)\in Q^{(i)},\ i\in\{1,2,3,4,5,6\}. \tag{14}$$

Определение 1. *Функцию v, определяемую формулой* (14)*, назовем классическим решением задачи* (4)*,* (6)*,* (7)*, если $v^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$ для каждого $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$, функция $v^{(j)}$ удовлетворяет уравнению* (4) *в $Q^{(j)}$, функция v удовлетворяет первому из* (7) *условию $v(0,x)=\sigma(x)$, $x\in[0,\infty)$, и граничному условию* (6)*, функция $v^{(1)}$ удовлетворяет второму из* (7) *условию Коши на полуоткрытом отрезке $[0,x^*)$, функция $v^{(2)}$ удовлетворяет этому условию на полупрямой (x^*,∞). Функции $v^{(j)}$ на границах $\partial Q^{(j)}$ раздела области Q удовлетворяют соответствующим условиям сопряжения* (33)*,* (40)*,* (42).

В силу (8) и (14) имеем

$$v^{(i)}(t,x)=v_p(t,x)+q^{(i)}(t,x),\quad i\in\{1,2,3,4,5,6\},\ (t,x)\in Q^{(i)}, \tag{15}$$

где $q^{(i)}$ – решение однородного уравнения (9) в области $Q^{(i)}$.

В области $Q^{(1)}$ общее решение $q^{(1)}$ однородного уравнения (9) удовлетворяет интегральному уравнению второго рода

$$q^{(1)}(t,x)=p^{(1)}(x-at)+g^{(1)}(x+at)-\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{x-at}^{x+at}c^2q^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dz,\quad (t,x)\in Q^{(1)}, \tag{16}$$

где $p^{(1)}$ и $g^{(1)}$ – некоторые дважды непрерывно-дифференцируемые функции, которые выбираются из условий Коши (2). В этом случае имеем систему уравнений

$$\begin{cases} p^{(1)}(x)+g^{(1)}(x)=\sigma(x), \quad 0\le x\le x^* \\ -aDp^{(1)}(x)+aDg^{(1)}(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x c^2q^{(1)}\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)dy=\tilde{\psi}_1(x), \quad 0\le x\le x^*. \end{cases} \tag{17}$$

Проинтегрировав второе уравнение от 0 до x^*, получим

$$\begin{cases} p^{(1)}(x)+g^{(1)}(x)=\sigma(x), \quad 0\le x\le x^*, \\ -p^{(1)}(x)+g^{(1)}(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\tilde{\psi}_1(z)}{a}dz+2C_1+\frac{1}{2a^2}\int_0^x dz\int_0^z c^2q^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy, \quad 0\le x\le x^*. \end{cases} \tag{18}$$

Откуда

$$p^{(1)}(x)=\frac{\sigma(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^x\tilde{\psi}_1(z)dz-C_1-\frac{1}{4a^2}\int_0^x dz\int_0^z c^2q^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,\quad x\in[0,x^*],$$
$$g^{(1)}(x)=\frac{\sigma(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^x\tilde{\psi}_1(z)dz+C_1+\frac{1}{4a^2}\int_0^x dz\int_0^z c^2q^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,\quad x\in[0,x^*], \tag{19}$$

где C_1 – произвольная константа из множества действительных чисел. Следовательно, решение однородного уравнения (9) в области $Q^{(1)}$ примет вид

$$q^{(1)}(t,x)=\frac{\sigma(x+at)+\sigma(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_1(z)dz+\frac{1}{4a^2}\int_{x-at}^{x+at}dz\int_0^z c^2q^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,\quad (t,x)\in Q^{(1)}. \tag{20}$$

В области $Q^{(2)}$ общее решение однородного уравнения имеет вид

$$q^{(2)}(t,x)=p^{(2)}(x-at)+g^{(2)}(x+at)-\frac{1}{4a^2}\int_{x^*}^{x-at}dy\int_{x-at}^{x+at}c^2q^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dz,\quad (t,x)\in Q^{(2)}, \tag{21}$$

где $p^{(2)}$ и $g^{(2)}$ – некоторые дважды непрерывно-дифференцируемые функции, которые выбираются из условий Коши. Проделав аналогичные преобразования, получим

$$p^{(2)}(x)=\frac{\sigma(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x^*}^x\tilde{\psi}_2(z)dz-C_2-\frac{1}{4a^2}\int_{x^*}^x dz\int_{x^*}^z c^2q^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,\quad x\in[x^*,\infty),$$
$$g^{(2)}(x)=\frac{\sigma(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^x\tilde{\psi}_2(z)dz+C_2+\frac{1}{4a^2}\int_{x^*}^x dz\int_{x^*}^z c^2q^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,\quad x\in[x^*,\infty), \tag{22}$$

где C_2 – произвольная константа из множества действительных чисел. Тогда решение однородного уравнения в области $Q^{(2)}$ примет вид

$$q^{(2)}(t,x)=\frac{\sigma(x+at)+\sigma(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_2(z)dz+\frac{1}{4a^2}\int_{x-at}^{x+at}dz\int_{x^*}^z c^2q^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,\quad (t,x)\in Q^{(2)}. \tag{23}$$

Из формул (20) и (23) видно, что функции $q^{(j)}$ из класса дважды непрерывно-дифференцируемых $C^2(\overline{Q^{(j)}})$, j = 1,2, если, например, $\sigma\in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1\in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2\in C^1([x^*,\infty))$, $\tilde{f}\in C^1(\overline{Q})$, где $\overline{Q^{(j)}}$, $\overline{Q}$ – замыкания областей $Q^{(j)}$ и Q соответственно. Кроме того, функция $q^{(1,2)}(t,x)=q^{(j)}(t,x)$, $(t,x)\in\overline{Q^{(j)}}$ является непрерывной на части границы $\gamma^{(1,3)}\cup\gamma^{(2,3)}$ области $Q^{(3)}$, где $\gamma^{(j,3)}=\overline{Q^{(j)}}\cap\overline{Q^{(3)}}$, j = 1,2. Учитывая данный факт, функцию $q^{(3)}$ определяем как решение уравнения (9) в области $Q^{(3)}$ с условиями Гурса на характеристиках

$$q^{(3)}\Big|_{x+at=x^*}=q^{(1)}\Big|_{x+at=x^*},\qquad q^{(3)}\Big|_{x-at=x^*}=q^{(2)}\Big|_{x-at=x^*}. \tag{24}$$

Значит, функция $q^{(3)}$ – это решение задачи Гурса для уравнения (9) с граничными условиями (24). Такое решение существует, и оно принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(3)}})$, поскольку в общей точке $(0,x^*)$ значения функций $q^{(1)}\Big|_{x+at=x^*}$ и $q^{(2)}\Big|_{x-at=x^*}$ совпадают. Это доказывается в работе [22].

Построим $q^{(3)}$, исходя из общего решения уравнения (6) в подобласти $Q^{(3)}$

$$q^{(3)}(t,x)=p^{(3)}(x-at)+g^{(3)}(x+at)-\frac{1}{4a^2}\int_{x^*}^{x-at}dy\int_{x^*}^{x+at}c^2q^{(3)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dz,\quad (t,x)\in Q^{(3)}. \tag{25}$$

Подставив (25) в (24), получим систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} p^{(3)}(x^*-2at)+g^{(3)}(x^*)=p^{(1)}(x^*-2at)+g^{(1)}(x^*)-\dfrac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x^*-2at}dz\int\limits_{x^*-2at}^{x^*}c^2q^{(1)}\left(\dfrac{z-y}{2a},\dfrac{z+y}{2}\right)dy=h^{(1)}(t), \\ p^{(3)}(x^*)+g^{(3)}(x+2at)=p^{(2)}(x^*)+g^{(2)}(x+2at)=h^{(2)}(t). \end{cases} \tag{26}$$

Сделав замены $t=\dfrac{x^*-z}{2a}$ и $t=-\dfrac{x^*-z}{2a}$ соответственно в первом и втором уравнении в (26), получим систему

$$\begin{cases} p^{(3)}(z)+g^{(3)}(x^*)=h^{(1)}\left(\dfrac{x^*-z}{2a}\right), \quad z\in[0,x^*], \\ p^{(3)}(x^*)+g^{(3)}(z)=h^{(2)}\left(-\dfrac{x^*-z}{2a}\right), \quad z\in[x^*,\infty). \end{cases} \tag{27}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to x^*,t\to 0}q^{(3)}(t,x)=g^{(3)}(x^*)+p^{(3)}(x^*)=\sigma(x^*)$, то пусть $g^{(3)}(x^*)=C_3$, тогда $p^{(3)}(x^*)=\sigma(x^*)-C_3$. В таком случае имеют место представления

$$\begin{aligned} p^{(3)}(z)&=h^{(1)}\left(\dfrac{x^*-z}{2a}\right)-C_3, \quad z\in[0,x^*], \\ g^{(3)}(z)&=h^{(2)}\left(-\dfrac{x^*-z}{2a}\right)+C_3-\sigma(x^*), \quad z\in[x^*,\infty). \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, решение однородного уравнения в области $Q^{(3)}$ примет вид

$$\begin{aligned} q^{(3)}(t,x)=&\frac{\sigma(x+at)+\sigma(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(z)dz+\frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_2(z)dz+ \\ &+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x^*}^{x+at}dz\int\limits_{x^*}^{z}c^2q^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dy-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x^*}^{x-at}dy\int\limits_{x^*}^{x+at}c^2q^{(3)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dz+ \\ &+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x^*}dz\int\limits_{x-at}^{z}c^2q^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dy,\ (t,x)\in Q^{(3)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Замечание. Сравнивая формулы, приведенные в [23] для волнового уравнения, с формулой Д'Аламбера [22], мы можем выписать явные представления для функций $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ и $q^{(3)}$ посредством проведения сравнения с аналогом формулы Д'Аламбера для уравнения Клейна – Гордона – Фока [5, 9]. Для строгого обоснования этих формул необходимо непосредственной проверкой убедиться в том, что определяемые ими функции удовлетворяют уравнению (9) и начальным условиям (10):

$$\begin{aligned} q^{(1)}(t,x)=&\frac{\sigma(x+at)+\sigma(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}I_0\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}\right)\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi+ \\ &+\frac{ct}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}}I_1\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}\right)\sigma(\xi)d\xi,\ (t,x)\in Q^{(1)}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} q^{(2)}(t,x)=&\frac{\sigma(x+at)+\sigma(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}I_0\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}\right)\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi+ \\ &+\frac{ct}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}}I_1\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}\right)\sigma(\xi)d\xi,\ (t,x)\in Q^{(2)}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$q^{(3)}(t,x)=\frac{\sigma(x+at)+\sigma(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x^*}I_0\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}\right)\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x+at}I_0\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}\right)\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}}I_1\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}\right)\sigma(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in Q^{(3)}. \tag{32}$$

Здесь использовано обозначение I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n.

Непосредственными вычислениями находим некоторые разрывы

$$(v^{(3)}-v^{(1)})\Big|_{x=x^*-at}=(v^{(2)}-v^{(3)})\Big|_{x=x^*+at}=0,$$

$$\left(\partial_t v^{(3)}-\partial_t v^{(1)}\right)\Big|_{x=x^*-at}=\left(\partial_t v^{(2)}-\partial_t v^{(3)}\right)\Big|_{x=x^*+at}=\left(\tilde{\psi}_2(x^*)-\tilde{\psi}_1(x^*)\right)/2,$$

$$\left(\partial_x v^{(3)}-\partial_x v^{(1)}\right)\Big|_{x=x^*-at}=-\left(\partial_x v^{(2)}-\partial_x v^{(3)}\right)\Big|_{x=x^*+at}=\left(\tilde{\psi}_2(x^*)-\tilde{\psi}_1(x^*)\right)/(2a),$$

$$\left(\partial_t^2 v^{(3)}-\partial_t^2 v^{(1)}\right)\Big|_{x=x^*-at}=a^2\left(\partial_x^2 v^{(3)}-\partial_x^2 v^{(1)}\right)\Big|_{x=x^*-at}=\left(c^2t\left(\tilde{\psi}_2(x^*)-\tilde{\psi}_1(x^*)\right)+2a\left(\tilde{\psi}'_2(x^*)-\tilde{\psi}'_1(x^*)\right)\right)/4,$$

$$\left(\partial_t^2 v^{(2)}-\partial_t^2 v^{(3)}\right)\Big|_{x=x^*+at}=a^2\left(\partial_t^2 v^{(2)}-\partial_t^2 v^{(3)}\right)\Big|_{x=x^*+at}=\left(c^2t\left(\tilde{\psi}_2(x^*)-\tilde{\psi}_1(x^*)\right)+2a\left(\tilde{\psi}'_1(x^*)-\tilde{\psi}'_2(x^*)\right)\right)/4,$$

$$\left(\partial_t\partial_x v^{(3)}-\partial_t\partial_x v^{(1)}\right)\Big|_{x=x^*-at}=a^{-1}\left(\partial_t^2 v^{(3)}-\partial_t^2 v^{(1)}\right)\Big|_{x=x^*-at},\ \left(\partial_t\partial_x v^{(2)}-\partial_t\partial_x v^{(3)}\right)\Big|_{x=x^*+at}=$$
$$=-a^{-1}\left(\partial_t^2 v^{(2)}-\partial_t^2 v^{(3)}\right)\Big|_{x=x^*+at}. \tag{33}$$

Формулы (33) согласуются с условиями, приведенными в [23, 24].

Для построения решения в областях $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ и $Q^{(6)}$ введем области

$$\begin{aligned} Q^{(123)}&=Q\cap\{(t,x)\,|\,x-at>0\},\\ Q^{(456)}&=Q\cap\{(t,x)\,|\,x-at<0\}.\end{aligned} \tag{34}$$

Теперь пусть $q(t,x)=q^{(ijk)}(t,x)$, если $(t,x)\in Q^{(ijk)}$, $ijk\in\{123,456\}$. При этом имеют место выражения

$$\begin{aligned} q^{(123)}(t,x)&=p^{(123)}(x-at)+g(x+at)-\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{x-at}^{x+at}c^2q^{(123)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dz,\quad (t,x)\in Q^{(123)},\\ q^{(456)}(t,x)&=p^{(456)}(x-at)+g(x+at)-\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{at-x}^{x+at}c^2q^{(456)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dz,\quad (t,x)\in Q^{(456)},\end{aligned} \tag{35}$$

где функции $p^{(123)}$, $p^{(456)}$ и g непрерывны всюду в области определения и дважды непрерывно-дифференцируемы почти всюду в области определения. Функции $p^{(123)}$ и g определяются таким образом, чтобы выполнялись начальные условия (7). Удовлетворив начальные условия (7), получим выражения для $p^{(123)}$ и g:

$$\begin{aligned} p^{(123)}(x)&=\frac{\sigma(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^x\tilde{\psi}(z)dz-C_{123}-\frac{1}{4a^2}\int_0^x dz\int_0^z c^2q^{(123)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,\quad x\in[0,\infty),\\ g(x)&=\frac{\sigma(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^x\tilde{\psi}(z)dz+C_{123}+\frac{1}{4a^2}\int_0^x dz\int_0^z c^2q^{(123)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,\quad x\in[0,\infty),\end{aligned} \tag{36}$$

где C_{123} – произвольная константа из множества действительных чисел. Тогда решение однородного уравнения в области $Q^{(123)}$ примет вид

$$q^{(123)}(t,x)=\frac{\sigma(x+at)+\sigma(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(z)dz+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{0}^{z}c^2q^{(123)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,\ (t,x)\in Q^{(123)}. \quad (37)$$

Функцию $p^{(456)}$ определим из граничного условия

$$q^{(456)}(t,x)=\tilde{\tilde{\mu}}(t)=p^{(456)}(-at)+g(at). \quad (38)$$

Сделав замену $t=-z/a$, получим

$$p^{(456)}(z)=\tilde{\tilde{\mu}}\left(-\frac{z}{a}\right)-g(-z). \quad (39)$$

Вычислим разрывы функции v и ее частных производных до второго порядка на характеристике $x-at=0$:

$$[(v)^+-(v)^-]\Big|_{x=at}=\sigma(0)-\tilde{\mu}(0),$$

$$[(\partial_t v)^+-(\partial_t v)^-]\Big|_{x=at}=-a[(\partial_x v)^+-(\partial_x v)^-]\Big|_{x=at}=\tilde{\psi}_1(0)-\tilde{\mu}'(0)+c^2t\big(\sigma(0)-\tilde{\mu}(0)\big)/2,$$

$$[(\partial_t^2 v)^+-(\partial_t^2 v)^-]\Big|_{x=at}=\frac{1}{4}\Big(4a^2\sigma''(0)+c^4t^2\big(\sigma(0)-\tilde{\mu}(0)\big)+2c^2\big(t\big(\tilde{\psi}_1(0)-\tilde{\mu}'(0)\big)+2\sigma(0)\big)-4\big(\tilde{\mu}''(0)-\tilde{f}(0,0)\big)\Big),$$

$$[(\partial_x^2 v)^+-(\partial_x^2 v)^-]\Big|_{x=at}=\frac{4a^2\sigma''(0)+c^4t^2\big(\sigma(0)-\tilde{\mu}(0)\big)+2c^2\big(2\tilde{\mu}(0)+t\big(\tilde{\psi}_1(0)-\tilde{\mu}'(0)\big)\big)-4\big(\tilde{\mu}''(0)-\tilde{f}(0,0)\big)}{4a^2},$$

$$[(\partial_t\partial_x v)^+-(\partial_t\partial_x v)^-]\Big|_{x=at}=$$

$$=\frac{4\big(\tilde{\mu}''(0)-\tilde{f}(0,0)-a^2\sigma''(0)\big)+c^4t^2\big(\tilde{\mu}(0)-\sigma(0)\big)-2c^2\big(\tilde{\mu}(0)-t\tilde{\mu}'(0)+t\tilde{\psi}_1(0)+\sigma(0)\big)}{4a}. \quad (40)$$

Формулы (40) согласуются с условиями, приведенными в [25]. Но на самом деле $q^{(123)}$ уже была определена ранее как

$$q^{(123)}(t,x)=\begin{cases} q^{(1)}(t,x), & (t,x)\in Q^{(1)}, \\ q^{(2)}(t,x), & (t,x)\in Q^{(2)}, \\ q^{(3)}(t,x), & (t,x)\in Q^{(3)}, \end{cases} \quad (41)$$

и было показано, что функция $q^{(123)}$ является непрерывной, но ее частные производные первого и второго порядков терпят разрыв на характеристиках $x\pm at=x^*$. В [1] показано, что непрерывность функции $q^{(123)}$ и ее частных производных зависит только и только от функций $p^{(123)}$ и g, а непрерывность функции $q^{(456)}$ и ее частных производных – от функций $p^{(123)}$ и g. Из вышесказанного заключаем, что производные $p^{(123)}$ разрывны при значении аргумента, равном x^*, а g – при x^*. В таком случае производные функции $p^{(456)}$, которая определена формулой (39), будут разрывны при значении аргумента, равном $-x^*$. Отсюда заключаем, что частные производные первого и второго порядков функции $q^{(456)}$ терпят разрывы на характеристиках $x+at=x^*$ и $x-at=-x^*$. Из требований непрерывности в таком случае имеет место равенство

$$[(v)^+-(v)^-]\Big|_{x=at-x^*}=0. \quad (42)$$

Т е о р е м а 1. *Если выполняются условия гладкости для заданных функций:* $\tilde{f} \in C^1(\overline{Q})$, $\sigma \in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty))$, $\tilde{\mu} \in C^2([0,\infty))$, *то существует единственное классическое решение задачи* (4), (6), (7) *в смысле определения* 1, *и оно представляется формулами* (15), (35), (37), (39) *и* (41).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из формул (15), (35), (37), (39) и (41). Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции удовлетворяют уравнению (4) и условиям (6), (7). Единственность доказывается методом от противного. Если предположить, что существуют два решения, тогда для их разности получаем однородное уравнение (4) и однородные условия (6), (7), из которых следует единственное нулевое решение согласно работе [26].

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются условия* $\tilde{f} \in C^1(\overline{Q})$, $\sigma \in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty))$, $\tilde{\mu} \in C^2([0,\infty))$. *Тогда решение задачи* (4), (6), (7) *в смысле определения* 1, *которое представлено формулами* (15), (35), (37), (39) *и* (41), *принадлежит классу* $C(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\mu}(0) = \sigma(0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как было показано ранее, $q \in C(\overline{Q^{(123)}}) \cap C(\overline{Q^{(456)}})$, поэтому $v \in C(\overline{Q^{(123)}}) \cap C(\overline{Q^{(456)}})$. Чтобы решение v было непрерывным в $\overline{Q}$, необходимо и достаточно выполнение равенства $[(v)^+ - (v)^-]\big|_{x=at} = 0$, что эквивалентно $\tilde{\mu}(0) = \sigma(0)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия* $\tilde{f} \in C^1(\overline{Q})$, $\sigma \in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty))$, $\tilde{\mu} \in C^2([0,\infty))$. *Тогда решение задачи* (4), (6), (7) *в смысле определения* 1, *которое представлено формулами* (15), (35), (37), (39) *и* (41), *принадлежит классу* $C^1(\overline{Q^{(123)}}) \cap C^1(\overline{Q^{(456)}})$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ранее было показано, что условие $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$ влечет равенства

$$\left(\partial_t^k \partial_x^l v^{(3)} - \partial_t^k \partial_x^l v^{(1)}\right)\Big|_{x=x^*-at} = \left(\partial_t^k \partial_x^l v^{(2)} - \partial_t^k \partial_x^l v^{(3)}\right)\Big|_{x=x^*+at} = 0, \quad k \ge 0, \ l \ge 0, \ k+l \le 1. \tag{43}$$

Поскольку при условиях гладкости, указанных в теореме, $q^{(i)} \in C^1(\overline{Q^{(i)}})$, $i \in \{1,2,3\}$, то с учетом (43) имеем $q \in C^1(\overline{Q^{(123)}})$, откуда следует $p^{(123)} \in C^1([0,\infty))$ и $g \in C^1([0,\infty))$, а тогда $p^{(456)} \in C^1((-\infty,0])$. Значит, $q \in C^1(\overline{Q^{(456)}})$. Откуда получаем $v \in C^1(\overline{Q^{(123)}}) \cap C^1(\overline{Q^{(456)}})$.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняются условия* $\tilde{f} \in C^1(\overline{Q})$, $\sigma \in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty))$, $\tilde{\mu} \in C^2([0,\infty))$. *Тогда решение задачи* (4), (6), (7) *в смысле определения* 1, *которое представлено формулами* (15), (35), (37), (39) *и* (41), *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q^{(123)}}) \cap C^2(\overline{Q^{(456)}})$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\psi}'_1(x^*) = \tilde{\psi}'_2(x^*)$ *и* $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ранее было показано, что условия $\tilde{\psi}'_1(x^*) = \tilde{\psi}'_2(x^*)$ и $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$ влекут равенства

$$\left(\partial_t^k \partial_x^l v^{(3)} - \partial_t^k \partial_x^l v^{(1)}\right)\Big|_{x=x^*-at} = \left(\partial_t^k \partial_x^l v^{(2)} - \partial_t^k \partial_x^l v^{(3)}\right)\Big|_{x=x^*+at} = 0, \quad k \ge 0, \ l \ge 0, \ k+l \le 2. \tag{44}$$

Поскольку при условиях гладкости, указанных в теореме, $q^{(i)} \in C^2(\overline{Q^{(i)}})$, $i \in \{1,2,3\}$, то с учетом (44) имеем $q \in C^2(\overline{Q^{(123)}})$, откуда следует $p^{(123)} \in C^2([0,\infty))$ и $g \in C^2([0,\infty))$, а тогда $p^{(456)} \in C^2((-\infty,0])$. Значит, $q \in C^2(\overline{Q^{(456)}})$. Откуда получаем $v \in C^2(\overline{Q^{(123)}}) \cap C^2(\overline{Q^{(456)}})$.

Предельный переход. Возвращаемся к задаче (4)–(6). Ее решение может быть получено предельным переходом из решения задачи (4), (6), (7). Устремив x^* к нулю, получим, что области $Q^{(1)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(5)}$ уменьшаются и в пределе становятся пустыми множествами, но их значения будут влиять на значения решения на характеристике $x - at = 0$, поскольку замыкание множеств $Q^{(3)}$ и $Q^{(5)}$ станет характеристикой $x - at = 0$, а замыкание $Q^{(1)}$ и $Q^{(4)}$ станет точкой (0,0). В то же время области $Q^{(2)}$ и $Q^{(6)}$ останутся, и решение будет иметь вид

$$v(t,x)=\begin{cases} v^{(2)}(t,x), \quad x-at>0,\\ [v^{(1)} \text{ или } v^{(4)}](t,x), \quad t=0, \quad x=0,\\ [v^{(3)} \text{ или } v^{(5)}](t,x), \quad x-at=0, \ t>0, \ x>0,\\ v^{(6)}(t,x), \quad x-at<0, \end{cases} \tag{45}$$

где функции $v^{(2)}$, $v^{(3)}$, $v^{(5)}$ и $v^{(6)}$ определены формулами (15), (35), (37), (39) и (41) при $x^*=0$.

Для корректности предельного перехода необходимо, чтобы кусочно-заданная функция v была дважды непрерывно-дифференцируемой в $Q^{(i)}$ для каждого $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Это будет выполнятся, если будет выполняться условия гладкости: $\tilde f\in C^1(\overline{Q})$, $\sigma\in C^2([0,\infty))$, $\tilde\psi_1\in C^1([0,x^*])$, $\tilde\psi_2\in C^1([x^*,\infty))$, $\tilde\mu\in C^2([0,\infty))$. Для единственности решения необходимы равенства функций $v^{(3)}$ и $v^{(5)}$, а также их частных производных до второго порядка включительно, на характеристике $x-at=0$, что будет выполнено при выполнении условий $\tilde\mu''(0)=a^2\sigma''(0)+c^2\sigma(0)+\tilde f(0,0)$, $\tilde\mu'(0)=\tilde\psi_1(0)$, и $\tilde\mu(0)=\sigma(0)$.

В точке $(0,0)$ можно положить v равным $\sigma(0)$. Такой же результат можно получить непосредственно из формулы (45) предельным переходом, так как непрерывность v на множестве $\overline{Q}$ будет сохранена. Также останутся в силе и некоторые другие свойства решения, относящиеся к непрерывности. Так, например, если выполнены условия $\tilde f\in C^1(\overline{Q})$, $\sigma\in C^2([0,\infty))$, $\tilde\psi_2\in C^1([0,\infty))$, $\tilde\mu\in C^2([0,\infty))$, то решение будет из классов $C(\overline{Q})$, $C^2\left(\{(t,x)\,|\,t>0,x>0,x-at>0\}\right)$ и $C^2\left(\{(t,x)\,|\,t>0,x>0,x-at<0\}\right)$. Более того, v будет принадлежать классу $C(\overline{Q})\cap C^2(Q_-)\cap C^2(Q_+)$, где

$$\begin{aligned} Q_-&=\{(t,x)\,|\,t>0,x>0,x-at>0\},\\ Q_+&=\{(t,x)\,|\,t>0,x>0,x-at<0\}. \end{aligned} \tag{46}$$

Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* $\tilde f\in C^1(\overline{Q})$, $\sigma\in C^2([0,\infty))$, $\vartheta_2\in C^1([0,\infty))$, $\tilde\mu\in C^2([0,\infty))$, *тогда решение задачи* (4)–(6) *в смысле определения* 1 *при* $x^*=0$, *представленное формулой* (45), *является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* $\tilde\mu''(0)=a^2\sigma''(0)+c^2\sigma(0)+\tilde f(0,0)$, $\tilde\mu'(0)=\vartheta_1$ *и* $\tilde\mu(0)=\sigma(0)$. *Кроме того, оно принадлежит классу* $C(\overline{Q})\cap C^2(Q_-)\cap C^2(Q_+)$ *и удовлетворяет следующим условиям сопряжения:*

$$[(v)^+-(v)^-]\Big|_{x=at}=\sigma(0)-\tilde\mu(0),$$

$$[(\partial_t v)^+-(\partial_t v)^-]\Big|_{x=at}=-a[(\partial_x v)^+-(\partial_x v)^-]\Big|_{x=at}=\tilde\psi_2(0+)-\tilde\mu'(0)+c^2t(\sigma(0)-\tilde\mu(0))/2,$$

$$[(\partial_t^2 v)^+-(\partial_t^2 v)^-]\Big|_{x=at}=$$

$$=\frac14\Big(4a^2\sigma''(0)+c^4t^2\left(\sigma(0)-\tilde\mu(0)\right)+2c^2\left(t\left(\tilde\psi_2(0+)-\tilde\mu'(0)\right)+2\sigma(0)\right)-4\left(\tilde\mu''(0)-\tilde f(0,0)\right)\Big),$$

$$[(\partial_x^2 v)^+-(\partial_x^2 v)^-]\Big|_{x=at}=$$

$$=\frac{4a^2\sigma''(0)+c^4t^2\left(\sigma(0)-\tilde\mu(0)\right)+2c^2\left(2\tilde\mu(0)+t\left(\tilde\psi_2(0+)-\tilde\mu'(0)\right)\right)-4\left(\tilde\mu''(0)-\tilde f(0,0)\right)}{4a^2},$$

$$[(\partial_t\partial_x v)^+-(\partial_t\partial_x v)^-]\Big|_{x=at}=$$

$$=\frac{4\left(\tilde\mu''(0)-\tilde f(0,0)-a^2\sigma''(0)\right)+c^4t^2\left(\tilde\mu(0)-\sigma(0)\right)-2c^2\left(\tilde\mu(0)-t\tilde\mu'(0)+t\tilde\psi_2(0+)+\sigma(0)\right)}{4a}.$$

Доказательство следует из рассуждений выше.

Классическое решение системы уравнений. Возвращаемся к исходной системе (2)–(4). Сформулируем теорему.

Теорема 6. *Функция v, определяемая как* $w(t,x) = v(t,x)\exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right)$, *принадлежит классу* $C^m(\Omega)$, *где* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *тогда и только тогда, когда* $w \in C^m(\Omega)$.

Доказательство следует из формулы Лейбница.

Используя выводы, полученные ранее, заключаем, что задача (4)–(6) имеет классическое решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{\mu(0)}{4\beta^2} + \frac{\mu'(0)}{\beta} + \mu''(0) = \frac{\gamma}{\rho\beta}\sigma''(0) + \frac{1}{4\beta^2}\sigma(0) + \frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \tag{47}$$

$$\mu'(0) + \frac{\mu(0)}{2\beta} = w_0 + \frac{\sigma(0)}{2\beta}, \tag{48}$$

$$\mu(0) = \sigma(0). \tag{49}$$

Теперь определим функцию *u*. Ее можно найти как решение первого уравнения из (1) с условиями Коши (2). В результате получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) + f(t,x)\right), \tag{50}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \psi(x) + \frac{1}{\rho}\int_0^t \left(\frac{\partial w}{\partial x} + f\right)(\tau,x)d\tau, \tag{51}$$

$$u(t,x) = \varphi(x) + t\psi(x) + \frac{1}{\rho}\int_0^t d\lambda \int_0^\lambda \left(\frac{\partial w}{\partial x} + f\right)(\tau,x)d\tau, \tag{52}$$

$$w(t,x) = v(t,x)\exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right). \tag{53}$$

Из формулы (52) приходим к выводу, что, вообще говоря, $u \notin C(\overline{Q})$, поскольку в общем случае $\psi(0) \neq \psi(0+)$, а данное условие является необходимым для непрерывности функции *u* на множестве $\overline{Q}$. Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* $f \in C^{1,2}(\overline{Q})$, $\varphi \in C^3([0,\infty))$, $\sigma \in C^2([0,\infty))$, $\psi_2 \in C^2([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$. *Тогда решение задачи* (4)–(6)*, представленное формулами* (45)*,* (52) *и* (53)*, является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (47)–(49)*. Кроме того,* $u \in C^{2,1}(Q_-) \cap C^{2,1}(Q_+) \cap C^{2,1}_{t,x}(Q_-) \cap C^{2,1}_{t,x}(Q_+) \cap C^{1,1}_{t,x}(Q_-) \cap C^{1,1}_{t,x}(Q_+)$ *и* $w \in C(\overline{Q}) \cap C^2(Q_-) \cap C^2(Q_+)$.

Доказательство следует из рассуждений выше.

Заключение. Была рассмотрена одна система дифференциальных уравнений, описывающих колебания в однородных релаксирующих стержнях постоянного поперечного сечения. Краевая задача для такой системы была сведена к краевой задаче для уравнения Клейна – Гордона – Фока и задаче Коши для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. Построено решение краевой задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока. Доказана единственность такого решения, выведены условия, при которых такое решение будет классическим. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия для гладкости решения краевой задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока. Построено решение исходной системы дифференциальных уравнений, показана зависимость его гладкости от функции, присутствующей в системе. Одним из важнейших результатов работы является рассмотрение задачи, когда одна функция из условий Коши задается на множестве нулевой меры Жордана. В этом случае были получены не только условия существования решения, но и доказаны достаточные условия для единственности решения.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Частное решение задачи для системы уравнений из механики с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 3. – С. 300–311. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-300-311

2. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 418 с.

3. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 7: Теория упругости. – 264 с.

4. Greiner, W. Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations / W. Greiner. – 3rd ed. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – 424 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04275-5

5. Polyanin, A. D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists / A. D. Polyanin. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2001. – 800 p. https://doi.org/10.1201/9781420035322

6. Harrington, R. F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields / R. F. Harrington. – New York: Wiley-IEEE-Press, 2001. – 496 p. https://doi.org/10.1109/9780470546710

7. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 288 с.

8. Пикулин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2004. – 208 с.

9. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – 24-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – Т. 2. – 848 с.

10. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для телеграфного уравнения методом характеристик / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, Ю. В. Шейко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 4. – С. 48–54.

11. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд. – М.: Наука, 1986. – 545 с.

12. Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А. В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

13. Chen, J. Analytical solution for time-fractional telegraph equation by the method of separating variables / J. Chen, F. Liu, V. Ahn // J. Math. Anal. Appl. – 2008. –Vol. 338, № 2. – P. 1364–1377. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.023

14. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1108–1117.

15. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 391–403. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

16. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с характеристическими косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 7–21. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

17. Smirnov, I. N. Mixed problems for the telegraph equation in case of a system consisting of two segments with different densities and elasticities but equal impedances / I. N. Smirnov // Doklady Mathematics. – 2010. – Vol. 82, № 3. – P. 887–891. https://doi.org/10.1134/s106456241006013x

18. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в криволинейной полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 3. – С. 9–15.

19. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 77–88.

20. Giusti, A. Dispersive Wave Solutions of the Klein-Gordon equation in Cosmology [Electronic resource] / A. Giusti. – Università di Bologna, 2013. – Mode of access: https://amslaurea.unibo.it/id/eprint/6148. – Date of access: 02.03.2021.

21. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций: в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск: БГУ, 2012. – Ч. 3. – 52 с.

22. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: URSS, 2021. – 480 с.

23. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 1. – С. 23–32. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32

24. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузырный // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 22–31.

25. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с неоднородными условиями согласования / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 1. – С. 7–13. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-7-13

26. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Дифференц. уравнения. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 174–184. https://doi.org/10.31857/S0374064122020042

References

1. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. A particular solution of a problem for a system of equations from mechanics with nonsmooth Cauchy conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 300–311 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-300-31

2. Rzhanitsyn A. R. *Theory of Creep*. Moscow, Stroiizdat Publ., 1968. 418 p. (in Russian).

3. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Theoretical Physics: in 10 vol. Vol. 7. Elasticity theory*. 5th ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 264 p. (in Russian).

4. Greiner W. *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*. 3rd ed. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2000. 424 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04275-5

5. Polyanin A. D. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. New York, Chapman and Hall/CRC, 2001. 800 p. https://doi.org/10.1201/9781420035322

6. Harrington R. F. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. New York, Wiley-IEEE-Press, 2001. 496 p. https://doi.org/10.1109/9780470546710

7. Aramanovich I. G., Levin V. I. *Equations of Mathematical Physics*. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p. (in Russian).

8. Pikulin V. P., Pohozaev S. I. *Equations in Mathematical Physics: A practical course*. Basel, Springer, 2001. 207 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0268-0

9. Smirnov V. I. *A Course of Higher Mathematics. Integration and Functional Analysis*. Oxford, Pergamon Press, 1964, pp. 367–631. https://doi.org/10.1016/b978-1-4831-9747-0.50010-8

10. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Sheiko Yu. V. Solution of the Cauchy problem for the telegraph equation by the method of characteristics. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics serie*, 2011, no. 4, pp. 48–54 (in Russian).

11. Bronshtein I. N., Semendyayev K. A., Musiol G., Mühlig H. *Handbook of Mathematics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2015. XLIV, 1207 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-46221-8

12. Bitsadze A. V. *Some Classes of Partial Differential Equations*. New York, Gordon and Breach, 1988. 520 p.

13. Chen J., Liu F., Ahn V. Analytical solution for time-fractional telegraph equation by the method of separating variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 338, no. 2, pp. 1364–1377. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.023

14. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. doi.org/10.1134/s0012266114080084

15. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the halfstrip with curve derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391403

16. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation with characteristic oblique derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 7–21 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

17. Smirnov I. N. Mixed problems for the telegraph equation in case of a system consisting of two segments with different densities and elasticities but equal impedances. *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 82, no. 3, pp. 887–891. https://doi.org/10.1134/s106456241006013x

18. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the first mixed problem for Klein – Gordon – Fock equation in the curvilinear half-strip. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 9–15 (in Russian).

19. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficient. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 77–85. doi.org/10.1134/S0012266117010074

20. Giusti A. *Dispersive Wave Solutions of the Klein-Gordon equation in Cosmology*. Università di Bologna, 2013. 64 p. Available at: http://amslaurea.unibo.it/6148/ (accessed 02 March 2021).

21. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical Solutions of Problems for Hyperbolic Equations. Part 3*. Minsk, Belarusian State University, 2022. 52 p. (in Russian).

22. Korzyuk V. I. *Equations of Mathematical Physics*. 2nd ed. Moscow, URSS Publ., 2021. 480 p. (in Russian).

23. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. The classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the nonsmooth second initial condition. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matem-atychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 1, pp. 23–32 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32

24. Korzyuk V. I., Puzyrnyi S. I. Classical solution of mixed problems for the one-dimensional wave equation with Cauchy nonsmooth conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 2, pp. 22–31 (in Russian).

25. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution for the first mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation with inhomogeneous matching conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 1, pp. 7–13 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-7-13

26. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential. *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 175–186. https://doi.org/10.1134/s0012266122020045

Информация об авторах

Виктор Иванович Корзюк – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь); Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Рудько Ян Вячеславович – аспирант, магистр (математика и компьютерные науки), Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: janycz@yahoo.com. https://orcid.org/0000-0002-1482-9106

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Jan V. Rudzko – Postgraduate Student, Master of Mathematics and Computer Science, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: janycz@yahoo.com. https://orcid.org/0000-0002-1482-9106