

Алгоритм обнаружения треков на основе вычисления корреляции следов в аккумуляторе Хафа

А. А. Монаков✉

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия

✉ a_monakov@mail.ru

Аннотация

Введение. Обнаружение треков – одна из основных задач, решаемых системой траекторной обработки (СТО). Известным и эффективным методом обнаружения треков является преобразование Хафа (Hough Transform). Трек считается обнаруженным, если количество отметок, полученных в последовательных обзорах и попавших в одну и ту же область пространства параметров (аккумулятора), превысило порог обнаружения. Однако, как показывает практика, для эффективного применения преобразования Хафа в СТО необходимо достаточно большое время накопления отметок. При малом количестве обзоров, отведенных для обнаружения треков, отметки целей также накапливаются в тех ячейках аккумулятора, где происходят пересечения их следов. Поэтому для обнаружения треков необходима дополнительная обработка, позволяющая выделить кластеры отметок от целей по признаку их геометрической близости. Кроме того, большой объем памяти и вычислительных операций по обслуживанию аккумулятора в значительной мере увеличивают нагрузку вычислителя СТО.

Цель работы. Получение простого и устойчивого к ложным обнаружениям алгоритма завязки треков на основе преобразования Хафа без создания в памяти вычислителя аккумулятора.

Материалы и методы. В предлагаемом алгоритме построение следов отметок в аккумуляторе с последующим выделением ячеек с максимальным количеством прошедших через них следов заменено на вычисление взаимных корреляций следов и кластеризации отметок по признаку максимального подобия следов.

Результаты. Математическое моделирование при выбранных в работе сценарных параметрах подтвердило, что предлагаемый алгоритм правильно обнаружил все существующие в зоне ответственности СТО треки и осуществил безошибочное объединение отметок целей.

Заключение. Создан помехоустойчивый алгоритм обнаружения треков, не требующий организации в памяти вычислителя аккумулятора Хафа.

Ключевые слова: траекторная обработка, обнаружение треков, преобразование Хафа

Для цитирования: Монаков А. А. Алгоритм обнаружения треков на основе вычисления корреляции следов в аккумуляторе Хафа // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2023. Т. 26, № 2. С. 65–77. doi: 10.32603/1993-8985-2023-26-2-65-77

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 13.12.2022; принята к публикации после рецензирования 09.03.2023; опубликована онлайн 28.04.2023



Track Detection Algorithm Based on Trace Correlation Using Hough Transform

Andrey A. Monakov✉

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St Petersburg, Russia

✉a_monakov@mail.ru

Abstract

Introduction. Track detection is one of the main tasks to be solved in trajectory processing. This task can be efficiently solved using the Hough Transform. A track is considered detected if the number of position measurements received in a number of consecutive radar scans and falling into the same cell of the parameter space (accumulator) has exceeded the detection threshold. However, the effective practical application of the Hough transform requires a sufficiently long time of measurement. Under a small number of scans given for track detection, measurements are also accumulated in those accumulator cells where their traces intersect. Therefore, in order to detect true tracks, additional processing is required to distinguish measurement clusters from different targets based on their geometric proximity. In addition, a large amount of memory and computational operations for the accumulator maintenance significantly increase the computation load of the trajectory processor.

Aim. To design a simple and false-detection resilient algorithm for detecting tracks without the Hough accumulator in the processor memory.

Materials and methods. In the proposed algorithm, the construction of measurement traces in the Hough accumulator followed by selection of cells with the largest number of traces passed through them is replaced by computation of the cross correlations of the traces and clustering of measurements based on the maximum similarity of their traces.

Results. Mathematical simulation with the scenario parameters selected in the paper confirmed the accuracy of the proposed algorithm in detecting all tracks existing in the radar field of view and its efficiency in conducting error free association of target position measurements.

Conclusion. A false-detection resilient algorithm for track detection was created based on the Hough transform. The algorithm does not require the Hough accumulator in the processor memory.

Keywords: trajectory processing, track detection, Hough transform

For citation: Monakov A. A. Track Detection Algorithm Based on Trace Correlation Using Hough Transform. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2023, vol. 26, no. 2, pp. 65–77. doi: 10.32603/1993-8985-2023-26-2-65-77

Conflict of interest. The author declares no conflicts of interest.

Submitted 13.12.2022; accepted 09.03.2023; published online 28.04.2023

Введение. Получение треков – оценок траекторий движения сопровождаемых целей в радиолокации и радионавигации – предполагает последовательное решение следующих задач: обнаружение треков, ассоциацию поступивших отметок целей с обнаруженными треками и фильтрацию треков [1, 2]. Обнаружение треков является первой из решаемых при траекторной обработке задач. Одним из эффективных алгоритмов для обнаружения треков является алгоритм, использующий преобразование Хафа (ПХ) (англ. Hough Transform). Это преобразование первоначально было предложено для распознавания границ объектов на изображениях

[3, 4]. В дальнейшем область его использования была расширена, а также определены его функциональные свойства [5, 6]. Использованию ПХ для обнаружения треков посвящено достаточно большое количество публикаций, в которых рассмотрены вопросы адаптации преобразования к условиям радиолокационного и радионавигационного наблюдения [7–12], осуществлено расширение ПХ на случай многоцелевой мультирадарной траекторной обработки [13–17], исследована решающая статистика и ее вероятностные характеристики [18–20], дан анализ качества выносимых решений [19–21], предло-

жен способ оценки количества истинных и ложных обнаруженных треков [22].

Применение ПХ в траекторной обработке предполагает накопление радиолокационных отметок наблюдаемых целей в ячейках особой области памяти сигнального процессора – аккумулятора. Каждая радиолокационная отметка порождает в аккумуляторе след – синусоидальную кривую, точки которой соответствуют проекциям отметки на вращающуюся вокруг начала координат прямую. При этом следы, порожденные отметками одного трека при отсутствии ошибок оценивания координат сопровождаемого объекта, пересекаются в одной ячейке аккумулятора. В этой ячейке происходит накопление отметок трека. Простая пороговая процедура позволяет осуществить необходимое объединение отметок и обнаружить трек. Однако применение такого алгоритма возможно, если количество отметок от наблюдаемых целей достаточно велико. При малом количестве отметок (а такая ситуация характерна для обнаружения треков в радиолокаторах систем управления воздушным движением) ситуация осложняется тем, что в аккумуляторе появляются ячейки, где пересекаются следы отметок, принадлежащих разным трекам. В этих ячейках количество накопленных отметок может также превысить порог, и, следовательно, в системе траекторной обработки могут возникнуть ложные треки.

В настоящей статье предложен простой алгоритм, который позволяет не только обнаруживать треки и объединять поступающие на вход СТО отметки при их малом количестве, но и отказаться от организации и обслуживания аккумулятора. Последнее свойство способствует значительному сокращению нагрузки вычислителя СТО. В научно-технической литературе известны способы реализации ПХ без аккумулятора. Однако они создавались либо для обработки изображений и сложны при реализации [23, 24], либо для ориентации роботов в стационарных сценах при использовании высокоточных лазерных дальнометров [25].

Статья структурирована следующим образом. Вначале дан краткий обзор ПХ применительно к радиолокационному наблюдению. Далее приводится и обосновывается предлагаемый алгоритм. Затем обсуждаются результаты

математического моделирования алгоритма. В заключении сформулированы основные выводы по работе.

Преобразование Хафа. Рассмотрим сектор сканирования радиолокатора с обнаруженными за время наблюдения $T_{\text{набл}}$ отметками от цели (черные кружки) и ложными отметками (белые кружки), представленный на рис. 1. Сплошная линия на рисунке соответствует траектории движения цели. Если бы курсовой угол θ траектории цели был известен, то, как следует из рисунка, для обнаружения сигнала цели достаточно было спроецировать все отметки на прямую OP , ортогональную траектории движения цели, угол наклона которой $\Phi = \theta - \pi/2$, и подсчитать количество отметок, имеющих одинаковое проекционное расстояние P от начала координат. Если паспорт отметки содержит информацию о породившем ее сигнале, то подсчет количества отметок заменяется суммированием самих сигналов. Такая процедура гарантирует когерентное или некогерентное накопление сигнала цели. Сигналы ложных отметок в силу случайного их положения в секторе сканирования РЛС не накапливаются. Таким образом реализовалась бы оптимальная процедура обнаружения сигнала цели. Однако курсовой угол цели θ априорно не известен, поэтому для обнаружения трека необходимо осуществлять описанную процедуру накопления для отметок, имеющих одинаковую проекцию, на прямую OP , угол поворота Φ которой

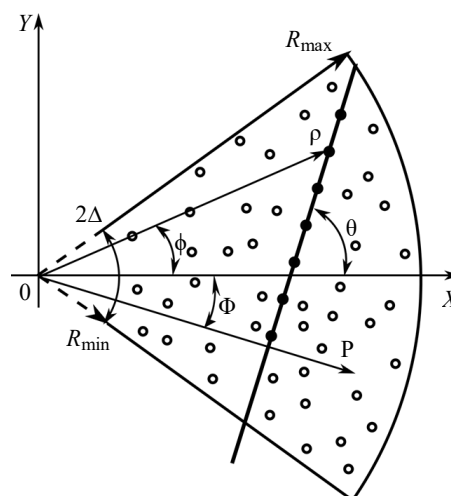


Рис. 1. Преобразование Хафа

Fig. 1. Hough transform

изменяется. Очевидно, что при изменении Φ в пределах $[0, \pi]$ найдется такое угловое положение Φ_0 прямой OP , при котором все отметки, принадлежащие траектории цели, будут спроецированы в одну и ту же точку, расстояние которой от начала координат $P_0 = P(\Phi_0)$.

Описанная процедура накопления может быть организована следующим образом. Пусть некоторая отметка имеет полярные координаты (ϕ, ρ) , а угол наклона прямой OP равен Φ . Тогда координата этой точки на линии OP :

$$P(\Phi) = \rho \cos(\phi - \Phi) = x \cos \Phi + y \sin \Phi, \quad (1)$$

$$0 \leq \Phi \leq \pi,$$

где (x, y) – декартовы координаты и (ρ, ϕ) – полярные координаты отметки.

Преобразование (1), известное как тригонометрическая форма ПХ [4], является отображением области плоскости XOY , которой принадлежит сектор сканирования, в пространство полярных координат (P, Φ) . Множество (P, Φ) , на которое отображаются точки сектора, в литературе получило название "аккумулятор". При этом точке сектора сканирования (x, y) в аккумуляторе ставится в соответствие след – синусоида $P(\theta) = A(x, y) \cos[\Phi - \psi(x, y)]$ с амплитудой $A(x, y) = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и фазой $\psi(x, y) = \phi = \arctg(x, y)$, где $\arctg(x, y)$ – расширенная на интервал $[-\pi, \pi]$ обратная тригонометрическая функция $\arctg(y/x)$.

Из геометрических соображений ясно, что точкам, принадлежащим траектории цели в секторе сканирования, в аккумуляторе будут соответствовать следы, пересекающиеся в одной-единственной точке с координатами

$$\Phi = \Phi_0 = \theta_0 - \pi/2; P = P_0 = P(\Phi_0 - \phi),$$

где θ_0 – угол наклона траектории цели; (ϕ, ρ) – полярные координаты любой точки, принадлежащей прямой. Суммируя сигналы или подсчитывая количество самих проходящих через

точку (P_0, Φ_0) следов за несколько периодов сканирования, можно решить задачу обнаружения. Для реализации обнаружителя аккумулятор разбивают на множество одинаковых ячеек, имеющих размер ΔP и $\Delta \Phi$ вдоль соответствующих координат. При попадании следа в ячейку к результату предыдущих накоплений прибавляется сигнал, соответствующий следу, а также запоминаются координаты точки сектора (ϕ, ρ) , которая породила след. Таким образом, к моменту конца наблюдения, когда необходимо вынести решение о наличии цели, в ячейках аккумулятора будет содержаться следующая информация: количество следов m , прошедших через ячейку; координаты отметок (ϕ, ρ) , породивших прошедшие через ячейку следы; накопленный сигнал S .

Данная ситуация иллюстрируется на рис. 2 и соответствует наблюдению четырех целей при сценарных параметрах, приведенных при описании результатов математического моделирования. На рисунке четко видны 4 множества следов, каждое из которых соответствует цели, находящейся в зоне ответственности РЛС. Количество следов в каждом множестве равно количеству обнаруженных отметок и лежит в пределах от трех до пяти. Количество отметок в точках пересечения множеств следов оказывается достаточно большим, чтобы превзойти порог обнаружения, который рассчитывался в предположении отсутствия в паспорте информации о сигнале цели и равнялся

$$N_{\text{пор}} = B^{-1}(1 - F; J, f), \quad (2)$$

где $B^{-1}(1 - F; J, f)$ – обратная функция для интегральной функции распределения биномиального закона

$$B(x; J, f) = \sum_{j=0}^x \binom{J}{j} f^j (1 - f)^{J-j};$$

F – вероятность ложного обнаружения трека; J – максимальное количество следов, которые могут пройти через выбранную ячейку [12]; f – вероятность ложной тревоги РЛС. Несмотря на то, что в ячейках, где пересекаются следы, со-

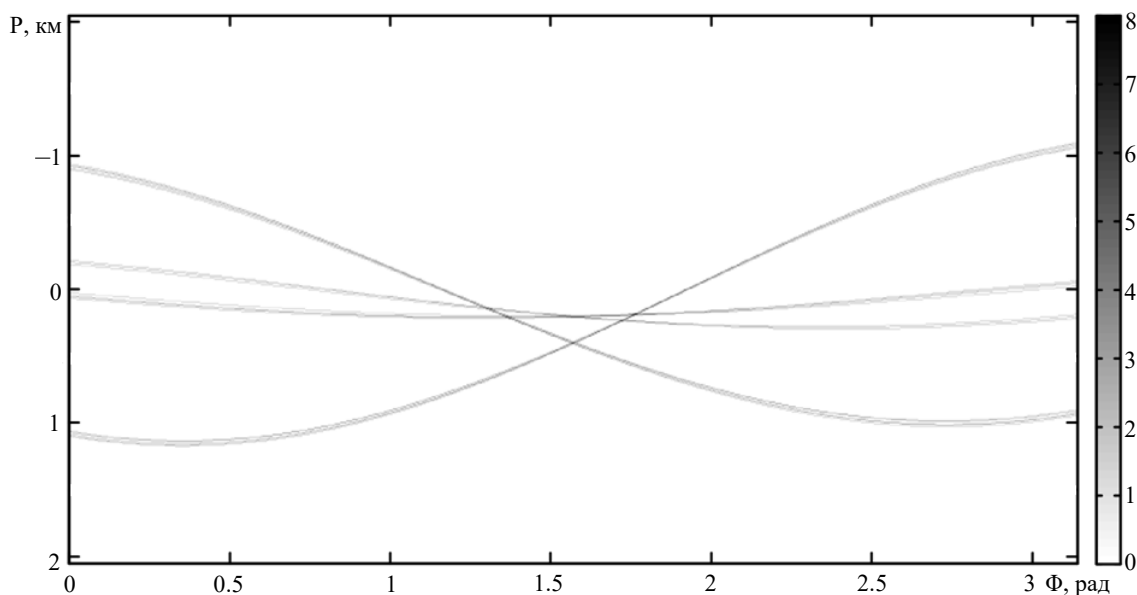


Рис. 2. Следы отметок в аккумуляторе

Fig. 2. Plot traces in the accumulator

держатся истинные отметки, они принадлежат разным целям, поэтому требуется специальная проверка, позволяющая рассортировать отметки перед завязкой новых треков. Эта сортировка может быть осуществлена на основании оценки расстояния между отметками и требует дополнительных вычислений, что усложняет процедуру обнаружения треков с использованием алгоритма ПХ.

Алгоритм обнаружения треков. Можно предложить более простой алгоритм обнаружения треков, который не требует создания в памяти сигнального процессора РЛС аккумулятора и выполнения большого количества вычислительных операций, связанных с его обслуживанием. Действительно, воспользуемся тем, что при малом количестве обзоров, отведенных на обнаружение треков, следы истинных отметок от одной и той же цели практически совпадают, а сами следы, как следует из (1), являются отрезками гармонических функций вида

$$P(\Phi) = \rho \cos(\phi - \Phi) = x \cos \Phi + y \sin \Phi; \Phi \in [0, \pi],$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\phi = \arctg(y, x)$ – полярные координаты отметки; (x, y) – прямоугольные координаты отметки. Поскольку следы, порожденные одной и той же целью, практически совпадают друг с другом, они должны быть сильно коррелированными, и наоборот, следы отметок

от разных целей – слабо коррелированы. В связи с этим для выделения отметок одной цели можно предложить следующий алгоритм:

1. Вычисляются взаимные корреляции следов отметок

$$R_{mn} = \int_0^\pi P_m(\Phi) P_n(\Phi) d\Phi = \rho_m \rho_n \cos(\phi_m - \phi_n) = x_m x_n + y_m y_n, \quad (3)$$

где индексы у переменных соответствуют отметкам с номерами m и n .

2. Вычисленные корреляции нормируются:

$$c_{mn} = \frac{4R_{mn}}{(\sqrt{R_{mm}} + \sqrt{R_{nn}})^2} = \left[\frac{2\sqrt{\rho_m \rho_n}}{\rho_m + \rho_n} \right]^2 \cos(\phi_m - \phi_n) = U_\rho U_\phi, \quad (4)$$

где $U_\rho = 4\rho_m \rho_n / (\rho_m + \rho_n)^2$; $U_\phi = \cos(\phi_m - \phi_n)$.

В итоге получается квадратная симметрическая матрица $C = \{c_{mn}\}$, на главной диагонали которой стоят единицы, а значения других элементов принадлежат интервалу $[-1, 1]$. Поскольку коэффициент в квадратных скобках уравнения (4), стоящий перед косинусом, и сам косинус принимают максимальные значения, равные 1, при $\rho_m = \rho_n$ и $\phi_m = \phi_n$, максимальные значения коэффициентов $c_{mn} \approx 1$ будут наблюдаться при близких значениях полярных координат точек.

3. Определяются положения максимумов (пиков) в каждой m -й строке C_m матрицы нормированных корреляций C :

$$\mathbf{N}_m = \{n_{m1}, \dots, n_{mJ_m}\}; n_{mj} = \max_n (c_{mn} \geq T_C),$$

где n_{mj} – номер столбца, соответствующий j -му пику в m -й строке, значение которого больше некоторого заранее определенного порога $T_C \in (0, 1)$; J_m – количество выделенных пиков в m -й строке. Выделение пиков можно также реализовать раздельным сравнением статистик U_ρ и U_ϕ со своими порогами T_ρ и T_ϕ , значения которых несложно определить на основании статистического анализа, проведенного в Приложении, где получены вероятностные характеристики случайных величин U_ρ и U_ϕ . Эти результаты также могут быть использованы для вычисления единого порога T_C , если задать вероятность превышения порога $P_{\text{пор}} = \Pr[c \geq T_C]$, а сам порог вычислить решая уравнение $F(T_C) = 1 - P_{\text{пор}}$, где $F(c)$ – интегральная функция распределения случайной величины c .

4. Вычисляется степень подобия для каждой пары множеств

$$D_{pq} = \frac{\text{card}(\mathbf{N}_p \cap \mathbf{N}_q)}{[\text{card}(\mathbf{N}_p) \text{card}(\mathbf{N}_q)]^{1/2}},$$

где $\text{card}(\cdot)$ – кардинальное число (количество элементов) множества.

5. Множества \mathbf{N}_p и \mathbf{N}_q , мера подобия которых $D_{pq} \geq T_D$, где $T_D \in (0, 1)$ – заранее выбранный порог, считаются принадлежащими одной и той же цели.

6. В результате оценки степени подобия все множества распадаются на непересекающиеся классы, количество которых равно количеству обнаруженных треков.

7. Номера отметок, которые порождены одной и той же целью, определяются в результате вычисления пересечений множеств \mathbf{N}_p , степень близости которых была установлена на предыдущем шаге.

Отметим, что нормировка корреляции R_{mn} к $0.25(\sqrt{R_{mm}} + \sqrt{R_{nn}})^2$ в (4) позволяет сохранить информацию о близости отметок не только по азимуту, но и по дальности. В случае нормировки R_{mn} к $\sqrt{R_{mm}R_{nn}}$ и превращения матрицы C в матрицу коэффициентов корреляции мера близости отметок зависела бы только от разницы их азимутальных координат, что неминуемо сказалось бы на качестве кластеризации. Статистический анализ случайной величины U_ρ , данный в Приложении, показывает, что ее математическое ожидание и дисперсия при $\rho_m, \rho_n \gg \sigma_\rho$, где σ_ρ – СКО ошибки измерения дальности, равны:

$$E[U_\rho] \approx 1 - 0.5(\sigma_\rho^2 + 0.5\Delta\rho^2)/\rho^2,$$

$$D[U_\rho] \approx 0.5\sigma_\rho^2(\sigma_\rho^2 + \Delta\rho^2)/\rho^4.$$

Здесь $\Delta\rho = P_m - P_n$ и $\rho = (P_m + P_n)/2$, причем интегральная функция $F(u_\rho)$ распределения носит релейный характер, изменяясь "скачком" в точке $u_\rho = E[U_\rho]$ от очень малых значений до значений, примерно равных единице. Такой характер интегральной функции способствует качественной кластеризации отметок целей сравнением статистики U_ρ с порогом T_ρ , значение которого, в силу отмеченного характера $F(u_\rho)$, несложно определить, считая, что случайная величина U_ρ имеет нормальное распределение $N(u; E[U_\rho], D[U_\rho])$, и задавая вероятность $P_{\text{пор}} = \Pr[U_\rho \geq T_\rho]$.

Таким образом, задачи объединения отметок и обнаружения треков можно считать решенными. Предлагаемый алгоритм не требует создания в памяти сигнального процессора РЛС аккумулятора и вычислительных операций по его обслуживанию. Вместо построения следов отметок в алгоритме вычисляются их корреляции в соответствии с (3) на основе знания полярных координат отметок.

Отмеченные особенности предлагаемого алгоритма в значительной степени сокращают ко-

личество необходимой памяти и объем вычислений. Действительно, если для аккумулятора вне зависимости от количества принятых отметок требуется $Q_a \approx \pi(R_{\max} - R_{\min})/(\Delta\Phi\Delta\rho)$ ячеек памяти, где $\Delta\Phi$ и $\Delta\rho$ – размеры ячейки аккумулятора, которые соизмеримы с СКО ошибок измерения азимута и дальности, то объем памяти, необходимый для хранения матрицы взаимных корреляций следов отметок C : $Q_C \approx N_{\text{отм}}^2/2$. Здесь $N_{\text{отм}}$ – количество полученных СТО отметок. Тогда выигрыш по объему необходимой памяти будет равен отношению Q_a/Q_C . Так при $(R_{\max} - R_{\min}) = 5$ км, $\Delta\Phi = 7.2$ мин, $\Delta\rho = 2$ м (взяты обычные для радиолокаторов наблюдения летного поля показатели) и $N_{\text{отм}} = 100$ получим $Q_a/Q_C = 7.5 \cdot 10^4$. Значительный выигрыш получается и в объеме вычислений. Так для построения $N_{\text{отм}}$ следов в аккумуляторе необходимо выполнить $P_a = 2\pi N_{\text{отм}}/\Delta\Phi$ умножений (см. (1)) при условии, что значения $\cos\Phi$ и $\sin\Phi$ находятся в памяти процессора. Для вычисления элементов матрицы взаимных корреляций следов C это количество равно $Q_C \approx N_{\text{отм}}^2/2$, поэтому $P_a/Q_C \approx 4\pi/(N_{\text{отм}}\Delta\Phi) = 60$.

Результаты математического моделирования. Для проверки предлагаемого алгоритма было выполнено математическое моделирова-

ние движения воздушных судов по летному полю при следующих сценарных параметрах:

- период обзора зоны ответственности РЛС $\Delta t = 1$ с;
- количество периодов обзора, отведенных для обнаружения трека, $N = 5$;
- вероятность обнаружения сигнала цели $d = 0.9$;
- вероятность ложной тревоги $f = 10^{-6}$;
- СКО оценки дальности $\sigma_R = 2$ м;
- СКО оценки азимута $\sigma_\alpha = 7.2$ мин;
- размеры ячейки аккумулятора $\Delta\rho = 10$ м, $\Delta\Phi = \pi/1024$ рад;
- порог обнаружения пиков взаимной корреляции $T_C = 0.5$;
- порог для оценки меры подобия следов $T_D = 0.9$.

В ходе работы были смоделированы отметки РЛС от четырех целей. В таблице приведены номера полученных отметок в порядке их появления, штамп времени, истинные и измеренные координаты, а также номера отметок, ассоциированных алгоритмом с обнаруженными треками. Отметки в таблице для удобства сгруппированы по принадлежности к порождающим их целям. На рис. 3 приведены следы четырех целей в аккумуляторе в увеличенном по сравнению с рис. 2 масштабе. Окрестности точек пересечения следов, порожденных одной

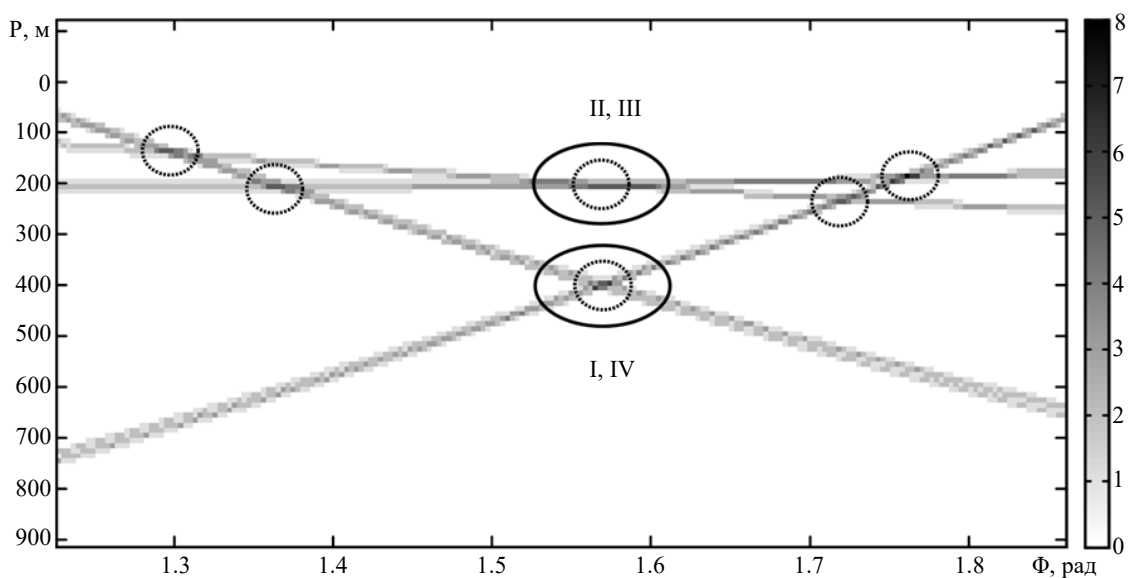


Рис. 3. Следы отметок в аккумуляторе в увеличенном масштабе

Fig. 3. Scaled-up plot traces in the accumulator

Отметки целей и результат объединения

Target plots and results of their association

Номер трека	Номер ячейки	Штамп времени t , с	Истинные координаты		Измененные координаты		Номер ассоциированной отметки
			x , м	y , м	x , м	y , м	
I	1	0.3730	-899.6634	399.8238	-898.7563	398.8534	1
	5	1.3730	-909.6634	399.8238	-907.6323	391.1264	5
	8	2.3720	-919.6534	399.8238	-924.9623	406.5322	8
	11	3.3720	-929.6534	399.8238	-930.1899	395.9363	11
	15	4.3710	-939.6434	399.8238	-942.0323	407.9914	15
II	2	0.4120	-213.9732	200.0182	-215.8605	202.1931	2
	6	1.4120	-203.9732	200.0182	-203.3763	199.6645	6
	12	3.4140	-183.9532	200.0182	-187.4555	204.2876	12
III	3	0.4250	24.2500	200.0000	24.1063	196.9889	3
	9	2.4270	44.2700	200.0000	45.4462	204.4560	9
	13	3.4270	54.2700	200.0000	54.1245	200.0606	13
	16	4.4280	64.2800	200.0000	65.4425	203.6434	16
IV	4	0.4900	1099.20	399.8238	1098.60	403.2108	4
	7	1.4890	1089.20	399.8238	1091.90	396.6038	7
	10	2.4890	1079.20	399.8238	1080.00	400.3823	10
	14	3.4880	1069.20	399.8238	1066.80	388.7595	14
	17	4.4880	1059.20	399.8238	1060.20	395.9164	17

и той же целью, выделены на рисунке сплошными линиями и пронумерованы римскими цифрами. Назовем такие окрестности истинными. Поскольку цели двигались по двум параллельным дорожкам, расстояние которых от начала координат было равно 200 и 400 м, а РЛС располагалась в начале прямоугольной системы координат XOY , точки, где пересекались следы отметок от одной и той же цели, приходились на точку с абсциссой $\Phi \approx \pi/2$ для всех отметок, а значения самих следов $P(\Phi)$ принадлежали окрестностям точек $P=200$ и 400 м. Как раз в этих точках и находятся центры овалов, очерченных сплошной линией. Пунктирной линией на рисунке очерчены окрестности точек пересечения следов, порожденных отметками разных целей. Существует 6 таких окрестностей, поскольку при общем количестве целей равном K возможно появление

$$(K-1) + (K-2) + \dots + 1 = \frac{K(K-1)}{2}$$

таких областей. Назовем такие окрестности ложными. Особенностью рассматриваемого случая является попарное совпадение четырех истинных (I, IV и II, III) и двух ложных окрестностей с двумя истинными. Как следует из рисунка, количество накопленных в ячейках аккумулятора отметок в истинных окрестностях

не больше, а в некоторых случаях даже меньше соответствующего количества в ложных окрестностях. Таким образом, при реализации обнаружителя треков, который основан на использовании ПХ, потребовались бы дополнительное вычисление и проверка геометрических расстояний между отметками, чьи следы в аккумуляторе попали в ячейки с количеством накопленных следов, превысившим порог обнаружения $N_{\text{пор}}$ (см. (2)). Предлагаемый алгоритм в рассматриваемой ситуации благополучно справился с обнаружением треков и правильным объединением отметок. Об этом свидетельствует последний столбец таблицы, где помещены номера отметок, приписанных алгоритмом к обнаруженным им четырем трекам. Этот столбец совпадает со вторым столбцом таблицы, где размещены исходные номера отметок, которые они получили в порядке поступления на вход СТО. Следовательно, количество обнаруженных треков равно количеству целей, и все полученные отметки правильно ассоциированы со своими треками.

Таким образом, математическое моделирование подтвердило правильность работы предлагаемого алгоритма.

Заключение. В статье описан алгоритм обнаружения треков на основе ПХ, отличающийся тем, что реализация алгоритма не требует

создания в памяти вычислителя аккумулятора, расчета следов полученных отметок и обнаружения ячеек аккумулятора, где количество прошедших через них следов превысило порог обнаружения треков. Работа алгоритма основана на вычислении взаимных корреляций следов отметок в аккумуляторе и кластеризации отметок по уровню вычисленных взаимных корреляций следов. По количеству вычислительных операций, а также по объему необходимой памяти предлагаемый алгоритм значительно проще. В то же время, как показало математическое моделирование, эффективность алгоритма высока. При выбранных в работе сценарных параметрах алгоритм безошибочно объединил полученные отметки и правильно обнаружил все треки.

Приложение. Вероятностный анализ решающей статистики.

Вероятностный анализ случайной величины

$$c_{mn} = \left[\frac{2\sqrt{\rho_m \rho_n}}{\rho_m + \rho_n} \right]^2 \cos(\phi_m - \phi_n) = U_\rho U_\phi$$

проведем отдельно для случайных величин $U_\rho = 4\rho_m \rho_n / (\rho_m + \rho_n)^2$ и $U_\phi = \cos(\phi_m - \phi_n)$, поскольку можно считать, что дальности ρ_m , ρ_n и углы ϕ_m , ϕ_n являются оценками соответствующих параметров и получаются в статистически независимых измерителях.

В целях упрощения статистического анализа случайной величины U_ρ предположим, что оценки ρ_m и ρ_n статистически независимы, а их СКО σ_ρ значительно меньше, чем истинные значения P_m и P_n . Эти предположения позволяют считать случайные величины ρ_m и ρ_n независимыми и нормальными с распределениями $N(\rho; P_m, \sigma_\rho^2)$ и $N(\rho; P_n, \sigma_\rho^2)$.

При сделанных допущениях плотность распределения случайной величины U_ρ :

$$f(u_\rho) = \frac{\exp\left[-0.5\left(R_m^2 + R_n^2\right)\right]}{\pi\sqrt{1-u_\rho}(2-u_\rho)} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x_+ \exp(x_+^2) \operatorname{erf}(x_+) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x_- \exp(x_-^2) \operatorname{erf}(x_-) \right], -\infty < u_\rho \leq 1,$$

где $R_m = P_m / \sigma_\rho$ и $R_n = P_n / \sigma_\rho$ – математические ожидания, нормированные к СКО ошибок измерения; $x_\pm = 0.5 \left[(R_m + R_n) \pm (R_m - R_n) \sqrt{1-u_\rho} \right] / \sqrt{2-u_\rho}$;

$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp[-t^2] dt$ – функция ошибок.

Согласно последнему уравнению область определения плотности $f(u_\rho)$ есть интервал $(-\infty, 1]$, в то время как сама случайная величина $U_\rho = 4\rho_m \rho_n / (\rho_m + \rho_n)^2 \in [0, 1]$. Это несоответствие является следствием сделанного ранее допущения о нормальности случайных величин ρ_m и ρ_n . Поэтому необходимо оценить вероятность $\operatorname{Pr}[U_\rho < 0]$. Для этого введем параметры $R = (R_m + R_n) / 2$ и $\Delta R = (R_m - R_n)$. Перепишем выражение для плотности $f(u_\rho)$:

$$f(u_\rho) = \frac{\exp[-a^2]}{\pi\sqrt{1-u_\rho}(2-u_\rho)} \times \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x_+ \exp(x_+^2) \operatorname{erf}(x_+) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x_- \exp(x_-^2) \operatorname{erf}(x_-) \right], -\infty < u_\rho \leq 1,$$

где $x_\pm = \left[R \frac{1}{\sqrt{2-u_\rho}} \pm 0.5\Delta R \sqrt{1-\frac{1}{2-u_\rho}} \right]$ и

$a = \sqrt{R^2 + 0.25\Delta R^2}$. Тогда оцениваемая вероятность

$$\operatorname{Pr}[U_\rho < 0] = \int_{-\infty}^0 \frac{\exp[-a^2]}{\pi\sqrt{1-u_\rho}(2-u_\rho)} \times \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x_+ \exp(x_+^2) \operatorname{erf}(x_+) + \exp(x_+^2) \operatorname{erf}(x_+) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x_- \exp(x_-^2) \operatorname{erf}(x_-) \right] du_\rho.$$

Учитывая, что $|x_{\pm}| \leq R \frac{1}{\sqrt{2-u_{\rho}}} + \frac{|\Delta R|}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2-u_{\rho}}} = a \sin(\varphi + \psi)$, где $\sin \varphi = 1/\sqrt{2-u_{\rho}}$, $\cos \psi = R/a$ и $\sin \psi = 0.5\Delta R/a$, а также что $x \operatorname{erf}(x) \leq |x|$, справедливо следующее неравенство:

$$\Pr[U_{\rho} < 0] \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \left\{ \exp(-a^2) + \sqrt{\pi} a |\sin(\varphi + \psi)| \exp[-a^2 \cos^2(\varphi + \psi)] \right\} d\varphi.$$

В силу того, что всегда $0.5|\Delta R| < R$, для ψ справедливо неравенство $\psi < \pi/4$, поэтому $a^2 \cos^2(\varphi + \psi) \geq a^2 \cos^2(\pi/4 + \psi) = 0.5[R - 0.5|\Delta R|]^2 = 0.5 \min(R_m^2, R_n^2)$. Следовательно,

$$\Pr[U_{\rho} < 0] \leq 0.25 \left\{ \exp[-0.5(R_m^2 + R_n^2)] + \sqrt{\pi} a \exp[-0.5 \min(R_m^2, R_n^2)] \right\}.$$

При $R_m^2, R_n^2 \gg 1$, что всегда выполняется на практике, $\Pr[U_{\rho} < 0] \approx 0$ и плотность $f(u_{\rho})$ можно считать сосредоточенной на интервале $u_{\rho} \in [0, 1]$. Определить моменты случайной величины U_{ρ} непосредственно по плотности $f(u_{\rho})$ сложно. Однако, используя метод характеристических функций, можно вычислить первые 2 начальных момента:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= E[U_{\rho}] = 1 - (1 + \Delta R^2/2)S(R); \\ \mu_2 &= E[U_{\rho}^2] = 1 - 2(1 + \Delta R^2/2)S(R) + \\ &+ (1 + \Delta R^2 + \Delta R^4/12) \left[(R^2 - 3/2)S(R) - 1/2 \right], \end{aligned}$$

где $S(R) = (\sqrt{\pi} R \exp[-R^2] \operatorname{erfi}(R) - 1)$; $\operatorname{erfi}(R) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^R \exp[t^2] dt$ – интеграл вероятности мнимого аргумента. Для функции $S(R)$ при $R \gg 1$ справедливо асимптотическое представление

$$S(R) = \frac{1}{2R^2} + \frac{3}{4R^4} + \frac{5}{8R^6} + \dots$$

Несложно показать, что при $R \gg 1$ математическое ожидание и дисперсия случайной величины U_{ρ} соответственно равны:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 - (1 + \Delta R^2/2)/(2R^2); \\ \delta^2 &= (1 + \Delta R^2)/(2R^4). \end{aligned}$$

Интегральная функция распределения $F(u_{\rho}) = \Pr[U_{\rho} < u_{\rho}]$ случайной величины U_{ρ} имеет "релейный" характер, изменяясь скачкообразно от очень малых значений до значений, близких к единице в окрестности точки $u_{\rho} = E[U_{\rho}]$. Такое поведение интегральной функции позволяет достаточно просто найти порог сравнения T_{ρ} для случайной величины U_{ρ} при $R \gg 1$, считая, что случайная величина U_{ρ} имеет нормальное распределение $N(u; \mu_1, \delta^2)$.

Рассмотрим теперь случайную величину $U_{\phi} = \cos(\phi_m - \phi_n)$. Предположим, что случайные величины ϕ_m и ϕ_n статистически независимы, а их разность $\Delta\phi = \phi_m - \phi_n$ имеет распределение Мизеса

$$f(\varphi) = \frac{\exp[a \cos(\varphi - \Delta\Phi)]}{2\pi I_0(a)},$$

где $\Delta\Phi = (\Phi_m - \Phi_n)$ – разность математических ожиданий случайных величин ϕ_m и ϕ_n ; $a \approx 1/\sigma_{\phi}^2$ – параметр, который примерно обратно пропорционален дисперсии ϕ_m и ϕ_n ; $I_n(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка. Выбор распределения Мизеса объясняется тем, что, во-первых, это распределение идеально подходит для угловых случайных величин (т.е. случайных величин, распределенных на окружности), и, во-вторых, при малых значениях дисперсии ошибок измерения угловых координат σ_{ϕ}^2 это распределение асимптотически приближается к нормальному распределению $N(\varphi; \Delta\Phi, \sigma_{\phi}^2)$.

Плотность распределения случайной величины U_ϕ равна:

$$f(u_\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(a)} \times \\ \times \left\{ \exp \left[a \left(u_\phi \cos \Delta\Phi + \sqrt{1 - u_\phi^2} \sin \Delta\Phi \right) \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[a \left(u_\phi \cos \Delta\Phi - \sqrt{1 - u_\phi^2} \sin \Delta\Phi \right) \right] \right\}.$$

Первые 2 начальных момента случайной величины U_ϕ равны:

$$v_1 = E[U_\phi] = \frac{I_1(a)}{I_0(a)} \cos \Delta\Phi; \\ v_2 = E[U_\phi^2] = \frac{I_2(a)}{I_0(a)} \cos 2\Delta\Phi + 1.$$

Интегральная функция распределения при $a \gg 1$ также имеет "релейный" характер. Ее скачок приходится на точку $u_\phi = E[U_\phi]$, поэтому при малых σ_ϕ^2 можно найти порог сравнения T_ϕ для случайной величины U_ϕ , считая что она имеет нормальное распределение $N(u; v_1, v_2 - v_1^2)$.

Список литературы

1. Коновалов А. А. Основы траекторной обработки радиолокационной информации. Ч. 1. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2013. 164 с.
2. Киселев В. Ю., Монаков А. А. Оценка качества алгоритмов траекторной обработки в радиолокационных системах управления воздушным движением: обнаружение треков // Радиотехника. 2016. Т. 80, № 3. С. 28–36.
3. Pat. US 3069654. Methods and means for recognizing complex patterns / P. V. C. Hough. Publ. 18.12.1962.
4. Duda R. O., Hart P. E. Use of the Hough transform to detect lines and curves in pictures // Communication of the ACM. 1972. Vol. 15, № 1. P. 11–15. doi: 10.1145/361237.361242
5. Illingworth J., Kittler J. A survey of the Hough transform // Computer Vision. Graphics and Image Processing. 1988. Vol. 44, № 1. P. 87–116. doi: 10.1016/0734-189x(88)90071-0
6. Mukhopadhyay P., Chaudhuri B. B. A survey of Hough Transform // Pattern Recognition. 2015. Vol. 48, № 3. P. 993–1010. doi: 10.1016/j.patcog.2014.08.027
7. Carlson B. D., Evans E. D., Wilson S. L. Search radar detection and track with the Hough transform. Part I: System concept // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1994. Vol. 30, № 1. P. 102–108. doi: 10.1109/7.250410
8. Yankowich S. W., Farooq M. A Hough transform based multisensor, multitarget track initiation technique // Proc. of the 36th IEEE Conf. on Decision and Control. 1997. Vol. 5. P. 5018–5023. doi: 10.1109/cdc.1997.649856
9. Alexiev K. Implementation of Hough transform as track detector // Proc. of the Third Intern. Conf. on Information Fusion, Paris, France, 10–13 July 2000. IEEE, 2000. Vol. 2. doi: 10.1109/ific.2000.859896
10. An effective Hough transform based track initiation / S. Jin, Y. Liang, P. He, G. Pan, Q. Pan, Y. Cheng // Intern. Conf. on Machine Learning and Cybernetics, Dalian, China, 13–16 Aug. 2006. IEEE, 2006. P. 3196–3200. doi: 10.1109/icmlc.2006.258425
11. Ворошилина Е. П., Ворошилин Е. П., Тисленко В. И. Алгоритмы завязки траекторий подвижных объектов // Докл. ТУСУР. 2009. Т. 20, № 2. С. 48–52.
12. Семенов А. Н. Обнаружение радиолокационных целей с помощью преобразования Хафа // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 12. С. 619–632. doi: 10.7463/1214.0738733
13. Multiple hypothesis tracking using Hough transform track detector / E. Semerdjiev, K. Alexiev, E. Djerassi, P. Konstantinova // Information & Security: An Intern. J. 1999. Vol. 2. P. 113–121. doi: 10.11610/isij.0210
14. Alexiev K. M., Bojilov L. V. A Hough transform track initiation algorithm for multiple passive sensors // Proc. of the 3rd Intern. Conf. on Information Fusion, Paris, France, 10–13 July 2000. IEEE, 2000. Vol. 1. doi: 10.1109/ific.2000.862662
15. Multitarget track initiation using a modified Hough transform / T. Lo, J. Litva, H. Leung, A. W. Bridgewater // AGARD, Pointing and Tracking Systems. England: Technivision Services, 1994. P. 25–1–25-8.
16. Cooperative track initiation for distributed radar network based on target track information / H. Liu, H. W. Liu, X. Dan, S. Zhou, J. Liu // IET Radar Sonar Navig. 2016. Vol. 10, № 4. P. 735–741. doi: 10.1049/iet-rsn.2015.0312
17. Spratling A. A neural implementation of the Hough transform and the advantages of explaining away // Image and Vision Computing. 2016. Vol. 52. P. 15–24. doi: 10.1016/j.imavis.2016.05.001
18. Carlson B. D., Evans E. D., Wilson S. L. Search radar detection and track with the Hough transform. Part II: Detection Statistics // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1994. Vol. 30, no. 1. P. 109–115. doi: 10.1109/7.250411

19. Монаков А. А. Обнаружитель движущейся цели для оптического приемника на основе алгоритма Хафа // XIX Междунар. науч.-техн. конф. "Радиолокация, навигация, связь". 2013. Т. 3. С. 1434–1443.

20. Монаков А. А. Обнаружитель движущейся цели для радиолокационного приемника на основе алгоритма Хафа // XX Междунар. науч.-техн. конф. "Радиолокация, навигация, связь". 2014. Т. 3. С. 1584–1594.

21. Carlson B. D., Evans E. D., Wilson S. L. Search radar detection and track with the Hough transform, Part III: Detection performance with binary integration // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1994. Vol. 30, no. 1. P. 116–125. doi: 10.1109/7.250412

22. Prior knowledge-based statistical estimation of linear false tracks in uniform distributed clutter / F. Wang,

W. Lu, C. Shi, J. Zhou // IET Radar Sonar & Navigation. 2021. Vol. 15, № 10. P. 1237–1246. doi: 10.1049/rsn2.12107

23. Imiya A., Hada T., Tatara K. The Hough Transform without the Accumulators // Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition. Lecture Notes in Computer Science. 2002. Vol. 2396. P. 823–832. doi: 10.1007/3-540-70659-3_87

24. A robust and accumulator-free ellipse Hough transform / X. Yu, H. W. Leong, C. Xu, Q. Tian // Proc. of the 12th ACM Intern. Conf. on Multimedia. New York, USA, 10–16 Oct. 2004. P. 256–259. doi: 10.1145/1027527.1027585

25. Kurniawan R., Fuadi Z., Adriman R. Accumulator-free Hough Transform for Sequence Collinear Points // Aceh Intern. J. of Science and Technology. 2021. P. 74–83. doi: 10.13170/aijst.10.2.20894

Информация об авторе

Монаков Андрей Алексеевич – доктор технических наук (2000), профессор (2005) кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Почетный машиностроитель РФ (2005), почетный работник высшего профессионального образования РФ (2006). Автор более 200 научных работ. Сфера научных интересов – радиолокация протяженных целей; цифровая обработка сигналов; радиолокаторы с синтезированной апертурой; исследование природных сред радиотехническими методами; управление воздушным движением.

Адрес: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Большая Морская, д. 67 А, Санкт-Петербург, 190000, Россия

E-mail: a_monakov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>

References

1. Konovalov A. A. *Osnovy traektornoi obrabotki radiolocatziionnoi informatzii* [Foundations of the Trajectory Surveillance of Radar Targets]. Part. 1. St Petersburg, ETU Publishing House, 2013, 164 p. (In Russ.)

2. Kiselev V. Yu., Monakov A. A. Assessment of Trajectory Processing Algorithms in Air Traffic Control Radar Systems: Track Detection. J. Radioengineering. 2016, vol. 80, no. 3, pp. 28–36.

3. Hough P. V. C. Methods and Means for Recognizing Complex Patterns. Pat. US 3069654. Publ. 18.12.1962.

4. Duda R. O., Hart P. E. Use of the Hough Transform to Detect Lines and Curves in Pictures. Communication of the ACM. 1972, vol. 15, no. 1, pp. 11–15. doi: 10.1145/361237.361242

5. Illingworth J., Kittler J. A Survey of the Hough Transform. Computer Vision. Graphics and Image Processing. 1988, vol. 44, no. 1, pp. 87–116. doi: 10.1016/0734-189x(88)90071-0

6. Mukhopadhyay P., Chaudhuri B. B. A Survey of Hough Transform. Pattern Recognition. 2015, vol. 48, no. 3, pp. 993–1010. doi: 10.1016/j.patcog.2014.08.027

7. Carlson B. D., Evans E. D., Wilson S. L. Search Radar Detection and Track with the Hough Transform, Part I: System Concept. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1994, vol. 30, no. 1, pp. 102–108. doi: 10.1109/7.250410

8. Yankowich S. W., Farooq M. A Hough Transform Based Multisensor, Multitarget Track Initiation Technique. Proc. of the 36th IEEE Conf. on Decision and Control. 1997, vol. 5, pp. 5018–5023. doi: 10.1109/cdc.1997.649856

9. Alexiev K. Implementation of Hough Transform as Track Detector. Proc. of the Third Intern. Conf. on Information Fusion, Paris, France, 10-13 July 2000. IEEE, 2000, vol. 2. doi: 10.1109/ific.2000.859896

10. Jin S., Liang Y., He P., Pan G., Pan Q., Cheng Y. An Effective Hough Transform Based Track Initiation. Intern. Conf. on Machine Learning and Cybernetics, Dalian, China, 13–16 Aug. 2006. IEEE, 2006. P. 3196–3200. doi: 10.1109/icmlc.2006.258425

11. Voroshilina E. P., Voroshilin E. P., Tislenko V. I. Track initiation methods for moving targets. Proc. of TUSUR University. 2009, vol. 20, no. 2, pp. 48–52. (In Russ.)

12. Semenov A. N. Radar Target Detection by Means of the Hough Transform. Science and Education. MGТУ Electron J. 2014, no. 12, pp. 619–632. doi: 10.7463/1214.0738733 (In Russ.)

13. Semerdjiev E., Alexiev K., Djerassi E., Konstantinova P. Multiple Hypothesis Tracking Using Hough Transform Track Detector. Information & Security: An Intern. J. 1999, vol. 2, pp. 113–121. doi: 10.11610/isij.0210

14. Alexiev K. M., Bojilov L. V. A Hough Transform Track Initiation Algorithm for Multiple Passive Sensors.

Proc. of the 3rd Intern. Conf. on Information Fusion, Paris, France, 10–13 July 2000. IEEE, 2000, vol. 1. doi: 10.1109/ific.2000.862662

15. Lo T., Litva J., Leung H., Bridgewater A. W. Multitarget Track Initiation Using a Modified Hough Transform. AGARD, Pointing and Tracking Systems. England, Technivision Services, 1994, pp. 25-1–25-8.

16. Liu H., Liu H. W., Dan X., Zhou S., Liu J. Cooperative Track Initiation for Distributed Radar Network Based on Target Track Information. IET Radar Sonar Navig. 2016, vol. 10, no. 4, pp. 735–741. doi: 10.1049/iet-rsn.2015.0312

17. Spratling A. A Neural Implementation of the Hough Transform and the Advantages of Explaining Away. Image and Vision Computing. 2016, vol. 52, pp. 15–24. doi: 10.1016/j.imavis.2016.05.001

18. Carlson B. D., Evans E. D., Wilson S. L. Search Radar Detection and Track with the Hough Transform, Part II: Detection Statistics. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1994, vol. 30, no. 1, p. 109–115. doi: 10.1109/7.250411

19. Monakov A. A. Detector of a Moving Optic Target Based on the Hough Transform. Proc. of XIX Intern. Conf. "Radar, Navigation and Communication". 2013, vol. 3. pp. 1434–1443. (In Russ.)

20. Monakov A. A. Detector of a Moving Radar Target Based on the Hough Transform. Proc. of XX Intern.

Conf. "Radar, Navigation and Communication". 2014, vol. 3, pp. 1584–1594. (In Russ.)

21. Carlson B. D., Evans E. D., Wilson S. L. Search Radar Detection and Track with the Hough Transform, Part III: Detection Performance with Binary Integration. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1994, vol. 30, no. 1, p. 116–125. doi: 10.1109/7.250412

22. Wang F., Lu W., Shi C., Zhou J. Prior Knowledge-Based Statistical Estimation of Linear False Tracks in Uniform Distributed Clutter. IET Radar Sonar & Navigation. 2021, vol. 15, no. 10, pp. 1237–1246. doi: 10.1049/rsn2.12107

23. Imiya A., Hada T., Tatara K. The Hough Transform without the Accumulators. Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition. Lecture Notes in Computer Science. 2002, vol. 2396, pp. 823–832. doi: 10.1007/3-540-70659-3_87

24. Yu X., Leong H. W., Xu C., Tian Q. A Robust and Accumulator-Free Ellipse Hough Transform. Proc. of the 12th ACM Intern. Conf. on Multimedia. New York, USA, 10–16 Oct. 2004, pp. 256–259. doi: 10.1145/1027527.1027585

25. Kurniawan R., Fuadi Z., Adriman R. Accumulator-free Hough Transform for Sequence Collinear Points. Aceh Intern. J. of Science and Technology. 2021, pp. 74–83. doi: 10.13170/aijst.10.2.20894

Information about the author

Andrey A. Monakov, Dr Sci. (Eng.) (2000), Professor (2005) of the Department of Radio Engineering Systems of Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation. Honored Mechanical Engineer of the Russian Federation (2005), Honored Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation (2006). The author of more than 200 scientific publications. Area of expertise: extended radar targets; digital signal processing; synthetic aperture radar; remote sensing; air traffic control.

Address: Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67 A, Bolshaya Morskaya St., St Petersburg 190000, Russia

E-mail: a_monakov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>