



Osaka Gakuin University Repository

Title	対数正規確率変数の指数変換の分布の形状について On Shapes of Distributions of the Exponential Transformation of Lognormal Random Variables
Author(s)	鍵原 理人 (Masato Kagihara)
Citation	大阪学院大学 経済論集 (THE OSAKA GAKUIN REVIEW OF ECONOMICS), 第 36 巻第 1-2 号 : 43-67
Issue Date	2022.12.31
Resource Type	NOTE/ 研究ノート
Resource Version	
URL	
Right	
Additional Information	

対数正規確率変数の指数変換の分布の形状について

鍵 原 理 人*

概 要

本稿において、対数正規分布に従う確率変数（対数正規確率変数）の指数変換の分布について考察する。具体的には、その密度関数を構成した上で、密度と母数の関係について分析する。その結果として、対数正規確率変数の指数変換の密度関数は、その母数の値に応じて、単調的に減少する（単調減少型）か、もしくは、単調的にはないが減少する（非単調減少型）かのいずれかである事が明らかにされる。これにより、対数正規確率変数の指数変換の分布はその母数の値に応じて単調減少型か非単調減少型という二種類の形状を示す事が分かる。

キーワード：対数正規分布、指数変換、密度関数

JEL分類番号：C46, C20.

* 大阪学院大学経済学部, e-mail: masato.kagihara@ogu.ac.jp

1 序 論

無限区間 $(0, \infty)$ 上に定義される指数分布は、連続型の確率分布として最も基本的な分布の一つである。その指数分布に従う確率変数に対して負の指数変換を施せば、新たに単位区間 $(0, 1)$ に値を取る確率変数が導かれ、かつ、その分布は一様分布に帰着する。単位区間 $(0, 1)$ 上に定義される一様分布は、指数分布と同様にして、連続型の確率分布として最も基本的な分布である。

上述の事実に基づいて、本稿は、無限区間 $(0, \infty)$ 上に定義される確率分布として、指数分布と同様に基本的な分布である対数正規分布を対象として、上述したところと同じ変換を施す。即ち、対数正規分布に従う確率変数（対数正規確率変数）に対して、負の指数変換を施すことによって単位区間 $(0, 1)$ に値を取る確率変数を導く。そして、その密度関数を導出した上で、その形状と母数の関係について分析し、その結果として得られる知見を命題として整理する（命題1参照）。なお、このようにして本稿で生成される分布族については、確率分布族についての文献である蓑谷（2010）や Johnson, Kotz and Balakrishnan（1994）、Stuart and Ord（1994）、Balakrishnan and Nevzorov（2003）、Leemis and McQueston（2008）、Forbes, Evans, Hastings and Peacock（2011）、Song and Chen（2011）、Leemis, Lockett, Powell and Vermeer（2012）、Krishnamoorthy（2016）、Crooks（2019）、また、特に正規分布や対数正規分布についての文献である柴田（1981）や蓑谷（2012）、Aitchison and Brown（1957）、Crow and Shimizu eds.（1988）、Patel and Read（1996）、Limpert, Stahel and Abbt（2001）、Simon（2002）、Limpert and Stahel（2017）には言及を見出せない。

本稿は、以下において、次のように構成される。先ず、第2節において、対数正規確率変数の負の指数変換の分布としてその密度関数を導出する。次に、第3節において、対数正規確率変数の負の指数変換の分布について、その母数と密度の形状の関係を体系的に検討し、その結果として得られる知見を命題1

として提示する．また，参考として，対数正規分布についての同様の議論を付録Aに提示する．以上の検討の過程で得られる密度関数のグラフについては全て付録Bに提示する．なお，本稿において提示される図は全てMapleを用いて作図されたものである．最後に，第4節で結論を述べる．

2 対数正規確率変数の指数変換とその分布

正の実数値を取る確率変数 Y に対して，その対数変換 $X := \log Y$ が正規分布に従う時， Y の確率分布を対数正規分布と呼ぶ．ここで，等号 $:=$ はその左辺をその右辺によって定義することを意味する．この時，例えば，平均が μ で分散が σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に対して， $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ であるならば， $Y \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ などと表記する．

さて， $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ として， X の分布関数と密度関数をそれぞれ Ψ と ψ と表記すると， $x \in (-\infty, \infty)$ に対して次の表現を得る：

$$\Psi(x|\mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^x \psi(t|\mu, \sigma^2) dt, \quad \psi(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

先ず， $X = \log Y$ ， $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ に対して， Y の密度関数を導出する．定義により， Y は対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数である事に注意する．ここで， Y の分布関数を G と表記すると，分布関数の定義により，

$$\Psi(x|\mu, \sigma^2) := P(X \leq x) = P(\log Y \leq x) = P(Y \leq e^x) = G(e^x|\mu, \sigma^2)$$

を得る．但し， $P(X \leq x)$ は確率変数 X の実現値が実数 x 以下になるという事象の確率を表す．ここで， $y := e^x \iff x = \log y$ と表記すると，次式を得る：

$$G(y|\mu, \sigma^2) = \Psi(\log y|\mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\log y} \psi(t|\mu, \sigma^2) dt.$$

よって、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 Y の密度関数を g と表記すれば、

$$g(y|\mu, \sigma^2) = \frac{d}{dy}G(y|\mu, \sigma^2) = \psi(\log y|\mu, \sigma^2) \times \frac{1}{y}$$

であるので、次式が導かれる：

$$g(y|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y}} e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0. \quad (1)$$

次に、 $Y \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ に対して、その負の指数変換 $Z := e^{-Y}$ の密度関数を導出する。但し、対数正規確率変数 Y が無限区間 $(0, \infty)$ に値を取る一方で、 Z は単位区間 $(0, 1)$ に値を取る確率変数である事に注意する。 Z の分布関数を F と表記すると、 F は、その定義により、単位区間 $(0, 1)$ 内の任意の実数 z に対して次式として得られる：

$$F(z|\mu, \sigma^2) := P(Z \leq z) = P(Y \geq -\log z) = 1 - G(-\log z|\mu, \sigma^2).$$

但し、 G は対数正規確率変数 Y の分布関数である。よって、 Y の密度関数が g である事に注意すれば、

$$G(-\log z|\mu, \sigma^2) = \int_0^{-\log z} g(y|\mu, \sigma^2) dy$$

により、 Z の密度関数 f はその分布関数 F の導関数として得られる：

$$f(z|\mu, \sigma^2) = \frac{d}{dz}F(z|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{z}g(-\log z|\mu, \sigma^2).$$

従って、任意の $z \in (0, 1)$ に対して、 Z の密度関数 f は次式として与えられる ($-\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma^2 < \infty$)：

$$f(z|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma \log \frac{1}{z^z}}} \exp \left[-\frac{(\log \log \frac{1}{z} - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (2)$$

3 対数正規確率変数の指数変換の分布の形状

(2)式で定義される密度関数 f は, (1)式で定義される対数正規分布の密度関数 g と確率変数 $Y \sim g$ に対して, その負の指数変換 $Z := e^{-Y}$ の密度関数として導出された. ここで, Y と Z の密度関数の定義域はそれぞれ無限区間 $(0, \infty)$ と単位区間 $(0, 1)$ であることに注意する. なお, 以下においては, 次のような略記法を適宜に採用する ($y \in (0, \infty)$, $z \in (0, 1)$):

$$g(y) := g(y|\mu, \sigma^2), \quad f(z) := f(z|\mu, \sigma^2).$$

但し, $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma^2 < \infty$ である.

さて, 任意の $z \in (0, 1)$ に対して,

$$f(z) = \frac{1}{z} g(-\log z)$$

であることに注意すると, その両辺を z で微分することにより, 次の関係式が得られる:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \{g(-\log z) + g'(-\log z)\}.$$

ここで, 任意の $y \in (0, \infty)$ に対して次式の表現が得られることに注意する (付録A (5)式参照):

$$g'(y) = -\frac{\sigma^2 + \log y - \mu}{\sqrt{2\pi}\sigma^3 y^2} e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}} = -\frac{1}{y} \left(1 + \frac{\log y - \mu}{\sigma^2}\right) g(y).$$

よって,

$$g(y) + g'(y) = -\frac{1}{y} \left(1 - y + \frac{\log y - \mu}{\sigma^2}\right) g(y)$$

により, 次の表現が導かれる:

$$f'(z) = -\frac{g(-\log z)}{z^2 \log z} \left(1 + \log z + \frac{\log \log \frac{1}{z} - \mu}{\sigma^2}\right).$$

ここで、任意の $z \in (0, 1)$ に対して、 $z^2 > 0$ と $\log z < 0$ 、 $g(-\log z) > 0$ であることに注意すると、次の同値関係を得る ($z \in (0, 1)$) :

$$f'(z) \leq 0 \iff 1 + \log z + \frac{\log \log \frac{1}{z} - \mu}{\sigma^2} \leq 0.$$

この同値関係について、対数による z の単調減少変換を $y := -\log z \in (0, \infty)$ と表記すると、

$$\begin{aligned} f'(z) \leq 0 &\iff 1 - y + \frac{\log y - \mu}{\sigma^2} \leq 0 \\ &\iff \log y \leq (\mu - \sigma^2) + \sigma^2 y \end{aligned}$$

により、次の表現を得る :

$$\begin{aligned} f'(z) \leq 0 &\iff D(y) \geq \log y \\ \text{但し、} D(y) &:= (\mu - \sigma^2) + \sigma^2 y, \quad y = -\log z, \quad z \in (0, 1). \end{aligned} \tag{3}$$

任意の $\sigma^2 \in (0, \infty)$ に対して、傾きが σ^2 で切片が $\mu - \sigma^2$ の直線 $D(y)$ が対数関数 $\log y$ の接線となる $\mu \in (-\infty, \infty)$ が存在する。実際、そのような μ は次のようにして求まる。対数関数 $\log y$ の傾きが $d(\log y)/dy = 1/y$ であることに注意すれば、

$$\sigma^2 = \frac{1}{y} \iff y = \frac{1}{\sigma^2}$$

により、 $y = 1/\sigma^2$ において対数関数 $\log y$ の傾きは σ^2 となるので、対数関数 $\log y$ と傾き σ^2 の直線 $D(y)$ の $y = 1/\sigma^2$ における値を等置させればよい :

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{\sigma^2} &= D\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = 1 + \mu - \sigma^2 \\ &\iff \mu = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1. \end{aligned}$$

以下では、このようにして σ^2 に応じて定まる μ を μ_* と表記する :

$$\mu_* := \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1. \tag{4}$$

これにより、任意の $\sigma^2 \in (0, \infty)$ に対して、 $\mu > \mu_*$ の場合、 $\forall y > 0$ に対して $D(y) > \log y$ であり、 $\mu = \mu_*$ の場合、 $\forall y \neq 1/\sigma^2$ に対して $D(y) > \log y$ にして $y = 1/\sigma^2$ に対して $D(y) = \log y$ であり、 $\mu < \mu_*$ の場合、適当な $0 < \exists y_1 < \exists y_2 < \infty$ が存在して、 $y = y_1, y_2$ に対しては $D(y) = \log y$ であり、 $\forall y < y_1$ または $y_2 < \forall y$ に対しては $D(y) > \log y$ 、 $y_1 < \forall y < y_2$ に対しては $D(y) < \log y$ であることが分かる（図1，図2，図3参照）。

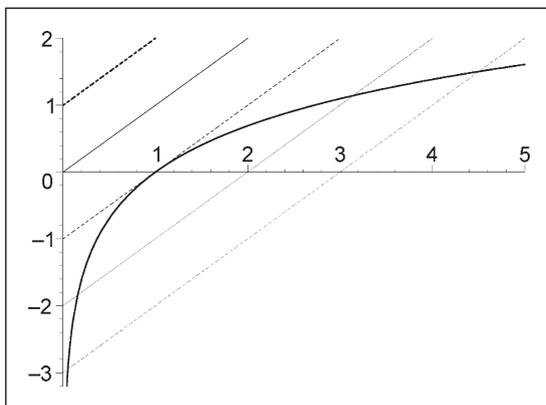


図1 対数関数 $\log y$ (太実線) と $D(y)$ のグラフ ($\sigma^2 = 1$ の場合, 横軸 y): $\mu = 2$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = \mu_* = 0$ (点線), $\mu = -1$ (細実線), $\mu = -2$ (細点線) の場合

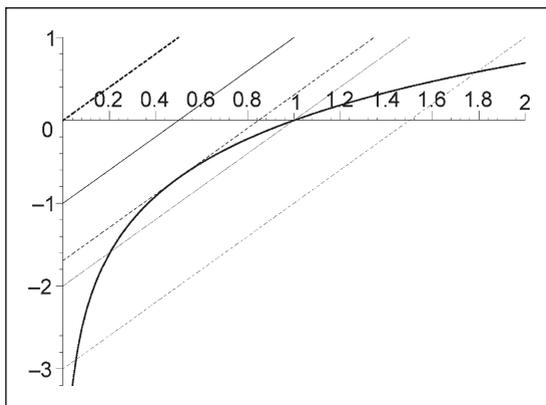


図2 対数関数 $\log y$ (太実線) と $D(y)$ のグラフ ($\sigma^2 = 2 > 1$ の場合, 横軸 y) :
 $\mu = 2$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = \mu_* = 1 - \log 2$ (点線), $\mu = 0$ (細実線),
 $\mu = -1$ (細点線) の場合

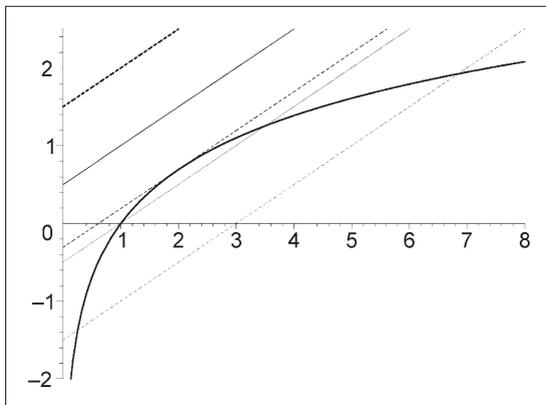


図3 対数関数 $\log y$ (太実線) と $D(y)$ のグラフ ($\sigma^2 = 1/2 < 1$ の場合, 横軸 y) :
 $\mu = 2$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = \mu_* = -1/2 + \log 2$ (点線), $\mu = 0$ (細実線),
 $\mu = -1$ (細点線) の場合

以上によって、同値関係(3)式に注意すれば、(2)式で定義される密度関数 f の増減表は表 1 として得られることが分かる。但し、 z と y は互いに単調減少変換の関係 $z = e^{-y} \iff y = -\log z$ にあることに注意する。また、上記の $y_1 < y_2$ に対して $z_1 := e^{-y_1}$, $z_2 := e^{-y_2}$ と表記した： $z_1 > z_2$ 。

表 1 密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ の増減表：上段表 ($-\infty < \mu < \mu_*$ の場合)，下段左表 ($\mu = \mu_*$ の場合)，下段右表 ($\mu_* < \mu < \infty$ の場合)。但し、 $\mu_* = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1$ 。

z	0	...	z_2	...	z_1	...	1
f'		-	0	+	0	-	
f		↘		↗		↘	

z	0	...	e^{-1/σ^2}	...	1
f'		-	0	-	
f		↘		↘	

z	0	...	1
f'		-	
f		↘	

これによって、密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ は、(4)式で定義される μ_* に応じて、 $\mu < \mu_*$ の場合に単調ではないものの右下がりの形状（非単調減少型）を示し、 $\mu \geq \mu_*$ の場合に単調な右下がりの形状（単調減少型）を示す事が判明する（命題 1 参照）。なお、表 2 は命題 1 の知見を表として整理する。

命題 1（対数正規確率変数の指数変換の分布の形状）(2)式で定義される密度関数 f のグラフ $\{(z, f(z|\mu, \sigma^2)) | z \in (0, 1)\}$ の形状は、2つの母数 μ と σ^2 に応じて以下のように定まる（表 2 参照）。但し、 $\mu \in (-\infty, \infty)$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$ である。また、

$$\mu_* = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1$$

である。なお、以下では、 $f(z) := f(z|\mu, \sigma^2)$ と略記する。図については、付録 B（特に、B. 2 節）を参照されたい。

1. $-\infty < \mu < \mu_*$ の場合：非単調減少型

密度関数 $f(z)$ のグラフは、 $0 < z_2 < z_1 < 1$ なる z_2 と z_1 が存在して、 z_2 を極小点、 z_1 を極大点として減少・増加・減少という形状（非単調な右下りの形状、表1上段表参照）を示す。

2. $\mu_* \leq \mu < \infty$ の場合：単調減少型

密度関数 $f(z)$ は z の単調減少関数であり、そのグラフは単調な右下りの形状を示す。

表2 密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ の形状の分類（命題1参照）

	$-\infty < \mu < \mu_*$	$\mu_* \leq \mu < \infty$
$0 < \sigma^2 < \infty$	非単調減少型	単調減少型

* 但し、 $\mu_* = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1$ 。

最後に、任意の $\sigma^2 > 0$ に対して $\mu_* = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1 \geq 0$ であり、かつ、 $\mu_* = 0 \iff \sigma^2 = 1$ である事、更に、 σ^2 が1から遠ざかる程に μ_* が大きくなる事に注意する。これによって、十分に大きいもしくは0に近い σ^2 に対しては、 μ_* も十分に大きくなるので、(2)式で定義される密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ はより広範囲の $\mu \in (-\infty, \infty)$ に対して非単調減少型の形状を示す事が窺える。少なくとも、任意の $\sigma^2 > 0$ に対して、 $\mu < 0$ ならば密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ は非単調減少型の形状を示す。

4 結 論

本稿において、対数正規確率変数の指数変換の分布、即ち、一回の対数変換によって対数正規分布に帰着する分布、更に言い換えれば、二回の対数変換によって正規分布に帰着する分布について考察した。それは、一回の指数変換に

よって一様分布に帰着する分布を指数分布と呼び、二回の指数変換によって一様分布に帰着する分布（極値分布）を二重指数分布とも呼ぶ事に倣えば、二重対数正規分布とも呼ばれ得る分布である。本稿において構成されたその密度関数は、単位区間 $(0, 1)$ 上に定義される(2)式によって与えられ、2つの母数 $\mu \in (-\infty, \infty)$ と $\sigma^2 \in (0, \infty)$ を持つ。そして、その密度は、正值母数 σ^2 の任意の値に対して非負の実数値 μ_* が定まり、 μ_* より小なる μ に対しては非単調減少型の形状を示し、 μ_* 以上なる μ に対しては単調減少型の形状を示すことが判明した（命題1参照）。

参考文献

- [1] 柴田義貞 (1981) 『正規分布：特性と応用』東京大学出版会.
- [2] 蓑谷千風彦 (2010) 『統計分布ハンドブック（増補版）』朝倉書店.
- [3] 蓑谷千風彦 (2012) 『正規分布ハンドブック』朝倉書店.
- [4] Aitchison, J. and J. A. C. Brown (1957) *The Lognormal Distribution: with Special Reference to Its Uses in Economics*, Cambridge University Press.
- [5] Balakrishnan, N. and V. B. Nevzorov (2003) *A Primer on Statistical Distributions*, John Wiley & Sons.
- [6] Crooks, G. E. (2019) *Field Guide to Continuous Probability Distributions*, Berkeley Institute for Theoretical Sciences.
- [7] Crow, E. L. and K. Shimizu eds. (1988) *Lognormal Distributions: Theory and Applications*, Marcel Dekker.
- [8] Forbes, C., M. Evans, N. Hastings and B. Peacock (2011) *Statistical Distributions, 4th edition*, John Wiley & Sons.
- [9] Johnson, N. L., S. Kotz and N. Balakrishnan (1994) *Continuous Univariate Distributions, Volume 1, 2nd edition*, John Wiley & Sons.
- [10] Krishnamoorthy, K. (2016) *Handbook of Statistical Distributions with Applications, 2nd edition*, Taylor & Francis Group.
- [11] Leemis, M. L. and J. T. McQueston (2008) "Univariate distribution relationships", *The American Statistician*, 62, pp.45-53.
- [12] Leemis, M. L., D. J. Lockett, A. G. Powell and P. E. Vermeer (2012) "Univariate probability distributions", *Journal of Statistics Education*, 20, pp.1-11.

- [13] Limpert, E., W. A. Stahel, and M. Abbt (2001) "Log-normal distributions across the sciences: keys and clues", *BioScience*, 51, pp.341-352.
- [14] Limpert, E. and W. A. Stahel (2017) "The log-normal distribution", *Significance*, 14/1, pp.8-9.
- [15] Patel, J. K. and C. B. Read (1996) *Handbook of the Normal Distribution, 2nd edition*, Marcel Dekker.
- [16] Simon, M. K. (2002) *Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables: A Handbook for Engineers and Scientists*, Springer.
- [17] Song, W. T. and Y. Chen (2011) "Eighty univariate distributions and their relationships displayed in a matrix format", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56, pp.1979-1984.
- [18] Stuart, A. and J. K. Ord (1994) *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Volume 1: Distribution Theory, 6th edition*, Arnold.

付録 A 対数正規分布とその形状

密度関数(1)式を持つ対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ と $Y \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ に対して、 Y の負の指数変換 $Z = e^{-Y}$ の密度の形状については、既に命題 1 によって明らかにされた。本付録においては、参考として、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度の形状について命題 1 と同様の分析を提示する。

先ず、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数(1)式は、標準正規分布 $N(0, 1)$ の密度関数 $\phi(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} / \sqrt{2\pi}$ を用いて、次式として表現される：

$$g(y|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma y} \phi\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right).$$

但し、一般の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の密度関数 ψ は $N(0, 1)$ の密度関数 ϕ を用いて、 $\psi(y) = \phi((y - \mu)/\sigma)/\sigma$ と表される事に注意する。ここで、 $\phi'(y) = -y\phi(y)$ に注意すれば、以下の展開を得る：

$$\begin{aligned} g'(y|\mu, \sigma^2) &= -\frac{\sigma^2 + \log y - \mu}{\sigma^3 y^2} \phi\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right) \\ &= -\frac{\sigma^2 + \log y - \mu}{\sigma^2 y} g(y|\mu, \sigma^2). \end{aligned} \tag{5}$$

よって、密度関数が非負である事 $g(y|\mu, \sigma^2) \geq 0$ と $y > 0$, $\sigma^2 > 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} g'(y|\mu, \sigma^2) \leq 0 &\iff \sigma^2 + \log y - \mu \geq 0 \\ &\iff \log y \geq \mu - \sigma^2 \\ &\iff y \geq e^{\mu - \sigma^2} \end{aligned}$$

であり、また、次式を得る：

$$g(e^{\mu - \sigma^2} | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma e^{\mu - \sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

これにより、対数正規分布の密度関数(1)式の増減表を得る（表 3）。従っ

て、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数(1)式は、任意の $\mu \in (-\infty, \infty)$ と $\sigma^2 \in (0, \infty)$ に対して、単峰型の形状を示すことが判明する。

表3 対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数 $g(y|\mu, \sigma^2)$ の増減表

y	0		$\exp(\mu - \sigma^2)$		∞
$g'(y)$		+	0	-	
$g(y)$		↗	$\frac{\exp(-\mu + \sigma^2/2)}{\sqrt{2\pi\sigma}}$	↘	

命題2 (対数正規分布の形状) 対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数 ((1)式) のグラフ $\{(y, g(y|\mu, \sigma^2)) | y \in (0, \infty)\}$ の形状は、2つの母数 $\mu \in (-\infty, \infty)$ と $\sigma^2 \in (0, \infty)$ の任意の値に対して、 m_o を最頻値とする単峰型となる：

$$m_o := e^{\mu - \sigma^2} > 0, \tag{6}$$

これにより、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の最頻値 $m_o = e^{\mu - \sigma^2}$ は、 $\mu = \sigma^2$ で1、 $\mu < \sigma^2$ で1未満、 $\mu > \sigma^2$ で1より大となる事が分かる。また、最頻値 m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2) := g(m_o|\mu, \sigma^2)$ として次式が得られる：

$$h(\mu, \sigma^2) := g(m_o|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}}. \tag{7}$$

従って、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の最頻値と最頻値における密度について以下の結論を得る：

1. 所与の $\sigma^2 \in (0, \infty)$ に対して、最頻値 m_o は μ の単調増加関数であり、最頻値 m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は μ の単調減少関数である (図4参照)：

$$\frac{\partial m_o}{\partial \mu} = e^{\mu - \sigma^2} = m_o > 0, \quad \frac{\partial h(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}} < 0.$$

また、最頻値 m_o と m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ の極限として以下を得

る：

$$\begin{aligned} m_o &\xrightarrow{\mu \rightarrow -\infty} 0, & h(\mu, \sigma^2) &\xrightarrow{\mu \rightarrow -\infty} \infty. \\ m_o &\xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \infty, & h(\mu, \sigma^2) &\xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

2. 所与の $\mu \in (-\infty, \infty)$ に対して，最頻値 m_o は σ^2 の単調減少関数であり，最頻値 m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は， $\sigma^2 < 1$ の時に σ^2 の単調減少関数， $\sigma^2 > 1$ の時に σ^2 の単調増加関数となり， $\sigma^2 = 1$ の時に最小値を取る（図5参照）：

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_o}{\partial \sigma^2} &= -e^{\mu - \sigma^2} = -m_o < 0, \\ \frac{\partial h(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= \left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \right] \times (\sigma^2 - 1) \leq 0 \iff \sigma^2 \leq 1. \end{aligned}$$

なお，最頻値 m_o と m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は， $\sigma^2 = 1$ の時，

$$m_o = e^{\mu - 1}, \quad h(\mu, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mu + \frac{1}{2}}$$

となり，極限としては以下を得る：

$$\begin{aligned} m_o &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} e^{\mu}, & h(\mu, \sigma^2) &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty. \\ m_o &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0, & h(\mu, \sigma^2) &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

3. 任意の実数 c に対して， $\mu = c\sigma^2$ の時，最頻値 m_o と最頻値 m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は以下となる：

$$m_o = e^{(c-1)\sigma^2}, \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{2c-1}{2}\sigma^2}.$$

これにより，最頻値 m_o は $c \leq 1$ に応じて σ^2 の単調減少/単調増加となり， m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は $c > 1/2$ で σ^2 の単調減少となることが分かる。より詳細には以下の通りである：

- (a) $c < 1/2$ の場合， σ^2 に対して，最頻値 m_o は単調減少であり， m_o に

おける密度 $h(\mu, \sigma^2)$ はU字型に変化する (図5参照: $c = 0$ の場合).
 実際, $c < 1/2 \iff 1 - 2c > 0$ に注意すると,

$$\frac{\partial h(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{2c-1}{2}\sigma^2} \times [(1-2c)\sigma^2 - 1] \leq 0$$

$$\iff \sigma^2 \leq \frac{1}{1-2c} > 0.$$

を得るので, m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は, $\sigma^2 < 1/(1-2c)$ の時に減少し, $\sigma^2 > 1/(1-2c)$ の時に増加する事が分かる. なお, m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は, $\sigma^2 = 1/(1-2c)$ の時に最小値

$$h\left(c\sigma^2, \sigma^2 = \frac{1}{1-2c}\right) = \sqrt{\frac{(1-2c)e}{2\pi}} \quad \text{with } m_o = e^{-\frac{1-c}{1-2c}} < 1$$

を取り, 極限として以下を得る:

$$h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty \quad \text{with } m_o \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} 1,$$

$$h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} \infty \quad \text{with } m_o \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0.$$

(b) $1/2 \leq c < 1$ の場合, σ^2 に対して, 最頻値 m_o と m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ はいずれも単調減少であり, その極限として以下を得る (図6参照):

$$m_o \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} 1, \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty.$$

$$m_o \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0, \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0.$$

(c) $c = 1$ の場合, σ^2 に対して, 最頻値 m_o は定数 $e^0 = 1$, m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は単調減少であり, その極限として以下を得る (図7参照):

$$h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty, \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0$$

- (d) $1 < c$ の場合, σ^2 に対して, 最頻値 m_o は単調増加, m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は単調減少であり, その極限として以下を得る (図 8 参照) :

$$\begin{aligned} m_o \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} 1, & \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty, \\ m_o \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} \infty, & \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

なお, (7)式により, $\sigma^2 = 1$ であつ $\mu = \sigma^2/2 = 1/2$ ならば, 対数正規分布の最頻値の密度は標準正規分布 $N(0, 1)$ の最頻値の密度 $1/\sqrt{2\pi}$ と一致する事, つまり, $\Lambda(1/2, 1)$ と標準正規分布 $N(0, 1)$, 正規分布 $N(1/2, 1)$ の最頻値の密度は一致する事が分かる.

付録B 密度関数のグラフ

本付録においては、対数正規分布とその負の指数変換の密度関数のグラフを図示する。即ち、(1)式で定義される対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数 $g(y|\mu, \sigma^2)$ についてはB.1節において（横軸 $y \in (0, \infty)$ ）、(2)式で定義される対数正規確率変数の負の指数変換の密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ についてはB.2節において（横軸 $z \in (0, 1)$ ）、それぞれ提示する。

B.1 対数正規分布

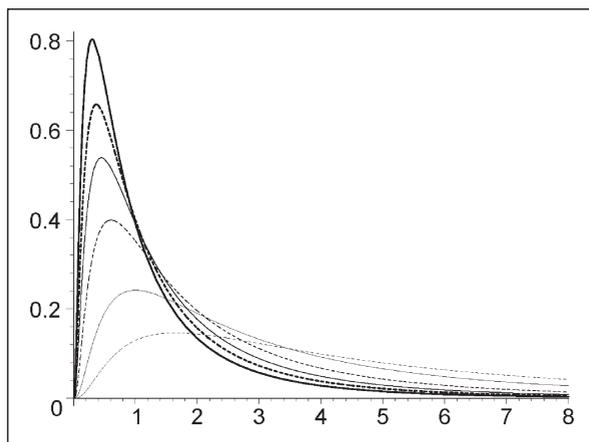


図4 対数正規分布 ($\sigma^2 = 1$): $\mu = -1/5$ (太実線), $\mu = 0$ (太点線), $\mu = 1/5$ (実線), $\mu = 1/2$ (点線), $\mu = 1$ (細実線), $\mu = 3/2$ (細点線)

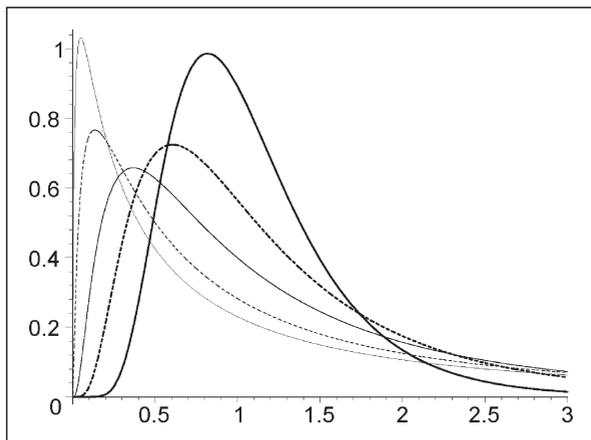


図5 対数正規分布 ($\mu=0$): $\sigma^2 = 1/5$ (太実線), $\sigma^2 = 1/2$ (太点線), $\sigma^2 = 1$ (実線), $\sigma^2 = 2$ (点線), $\sigma^2 = 3$ (細実線)

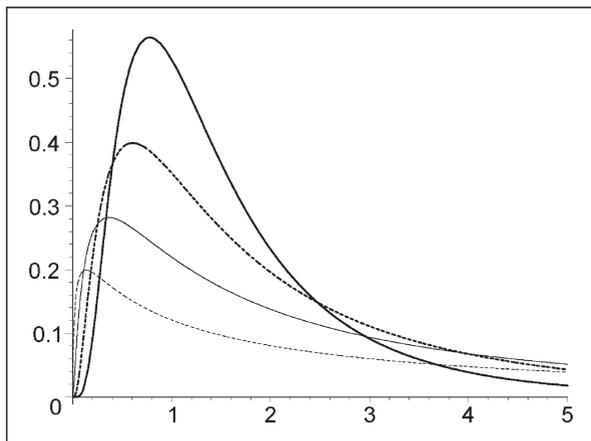


図6 対数正規分布 ($\mu = \sigma^2/2$): $\sigma^2 = 1/2$ (太実線), $\sigma^2 = 1$ (太点線), $\sigma^2 = 2$ (実線), $\sigma^2 = 4$ (点線)

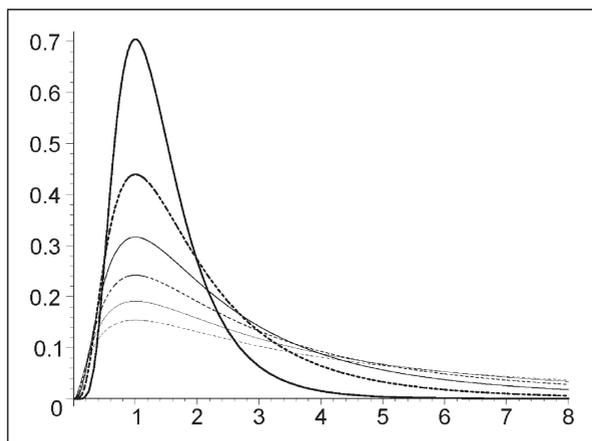


図7 対数正規分布 ($\mu = \sigma^2$) : $\sigma^2 = 1/4$ (太実線), $\sigma^2 = 1/2$ (太点線), $\sigma^2 = 3/4$ (実線), $\sigma^2 = 1$ (点線), $\sigma^2 = 5/4$ (細実線), $\sigma^2 = 3/2$ (細点線)

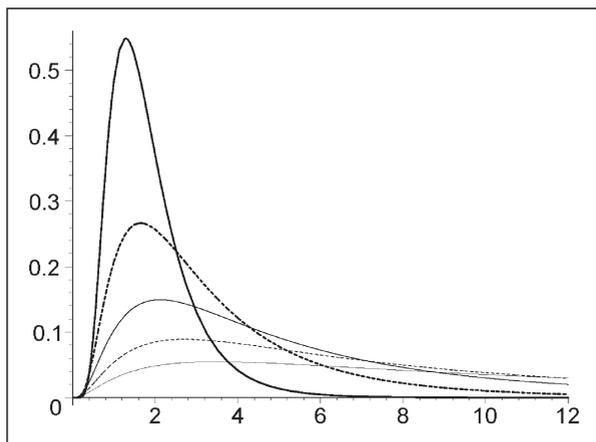


図8 対数正規分布 ($\mu = 2\sigma^2$) : $\sigma^2 = 1/4$ (太実線), $\sigma^2 = 1/2$ (太点線), $\sigma^2 = 3/4$ (実線), $\sigma^2 = 1$ (点線), $\sigma^2 = 5/4$ (細実線)

B.2 対数正規分布の指数変換

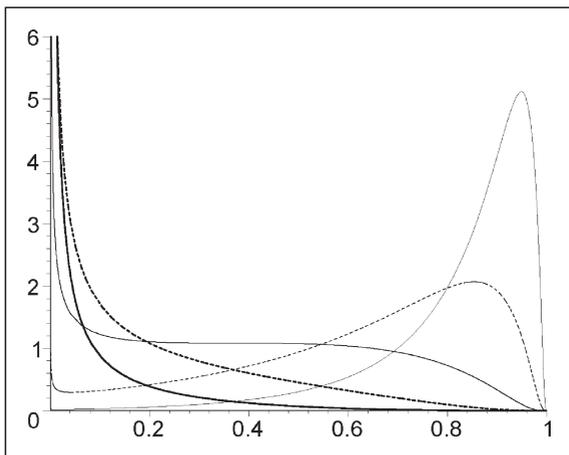


図9 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1$): $\mu = 2$ (太実線), $\mu = 1$ (太点線), $\mu = \mu_* = 0$ (実線), $\mu = -1$ (点線), $\mu = -2$ (細実線)

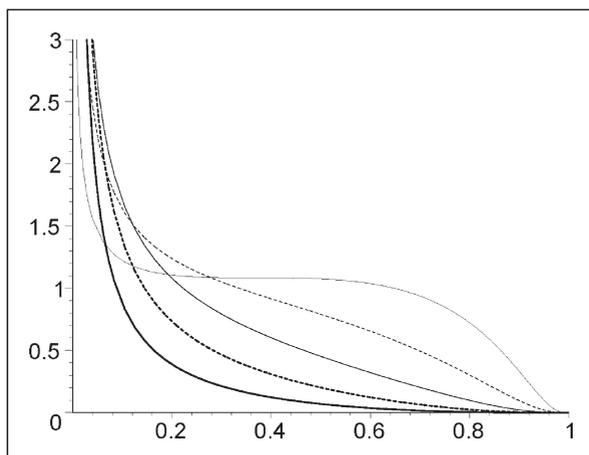


図10 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1$, 単調減少型): $\mu = 2$ (太実線), $\mu = 1.5$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = 0.5$ (点線), $\mu = \mu_* = 0$ (細実線)

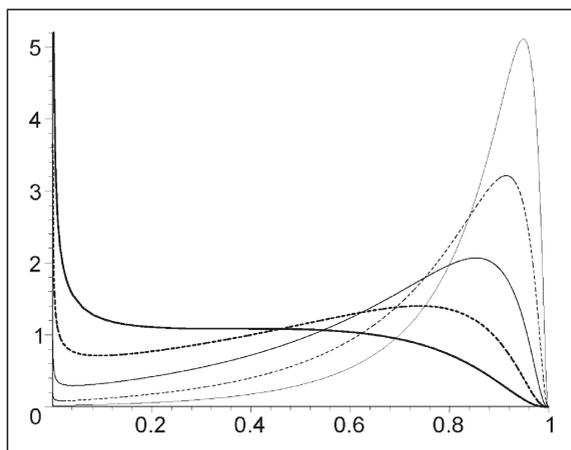


図11 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1$, 非単調減少型) : $\mu = \mu_* = 0$ (太実線), $\mu = -0.5$ (太点線), $\mu = -1$ (実線), $\mu = -1.5$ (点線), $\mu = -2$ (細実線)

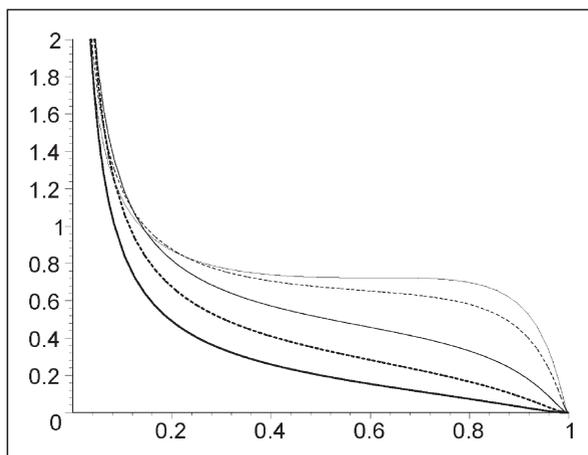


図12 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 2$, 単調減少型) : $\mu = 2$ (太実線), $\mu = 1.5$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = 0.5$ (点線), $\mu = \mu_* \simeq 0.307$ (細実線)

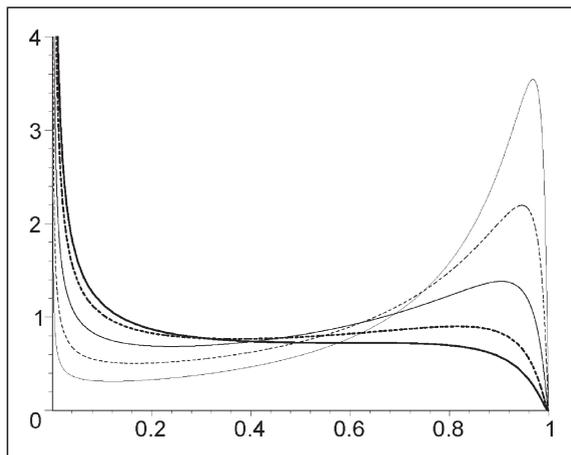


図13 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 2$, 非単調減少型) : $\mu = \mu_* \simeq 0.307$ (太実線), $\mu = 0$ (太点線), $\mu = -0.5$ (実線), $\mu = -1$ (点線), $\mu = -1.5$ (細実線)

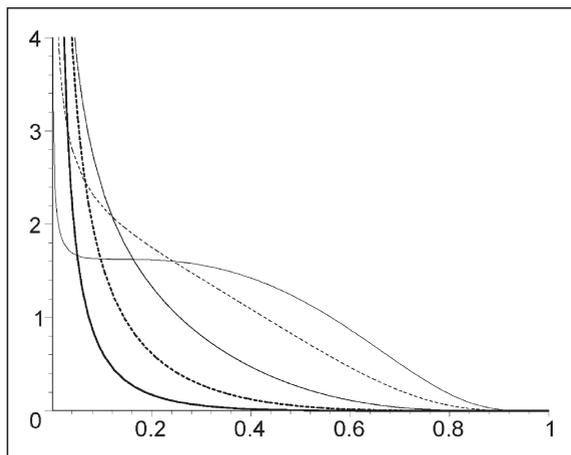


図14 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1/2$, 単調減少型) : $\mu = 2$ (太実線), $\mu = 1.5$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = 0.5$ (点線), $\mu = \mu_* \simeq 0.193$ (細実線)

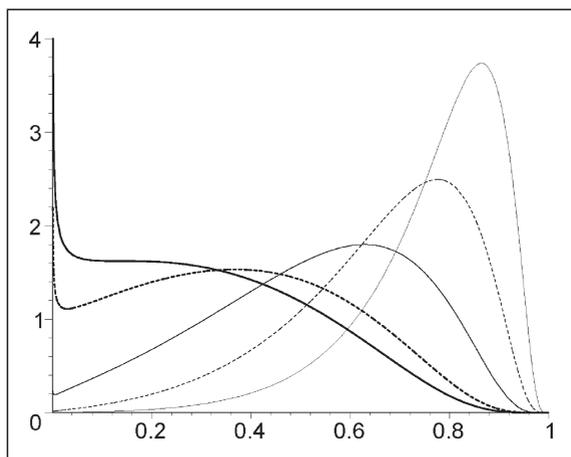


図15 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1/2$, 非単調減少型) : $\mu = \mu_* \simeq 0.193$ (太実線), $\mu = 0$ (太点線), $\mu = -0.5$ (実線), $\mu = -1$ (点線), $\mu = -1.5$ (細実線)

On Shapes of Distributions of the Exponential Transformation of Lognormal Random Variables

Masato Kagihara*

ABSTRACT

This paper considers distributions of the exponential transformation of lognormal random variables. In particular, relations between shapes and parameters of the distributions are investigated. It is shown that density functions of the distributions are monotonically decreasing for some values of the parameters and non-monotonically decreasing for the other values. Therefore, it is concluded that the distributions of the exponential transformation of lognormal random variables take on two types of shapes, a type of monotonic decrease or non-monotonic decrease, depending on the values of the parameters.

Keywords : Lognormal distributions; Exponential transformation;
Density functions

JEL Classification Numbers : C46, C20.

* Faculty of Economics, Osaka Gakuin University, e-mail: masato.kagihara@ogu.ac.jp