Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 18, No. 2 (2022), pp. 127–139. doi:10.24198/jmi.v18.n2.40448.127-139

Invers Matriks Leslie Bentuk Khusus Ordo $\mathbf{n \times n}$ $(\mathbf{n \geq 4})$

Ade Novia *, Resi Arisanti, Corry Corazon Marzuki, Fitri Aryani

Prodi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293

***Penulis koresponden : adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id**

Abstrak
Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers dari matriks *Leslie* bentuk khusus ordo $n \times n$ $(n \geq 4)$ menggunakan metode Adjoin. Terdapat tiga langkah yang dikerjakan. Pertama, diperhatikan bentuk pola determinan dari matriks *Leslie* bentuk khusus ordo 4×4 sampai 10×10 sehingga didapat bentuk umumnya. Kedua, perhatikan bentuk pola matriks kofaktor dari matriks *Leslie* berbentuk khusus ordo 4×4 sampai 10×10 sehingga didapat bentuk umumnya. Ketiga, didapatkan bentuk umum invers dari matriks *Leslie* bentuk khusus ordo $n \times n$ yang diperoleh berdasarkan Teorema 3.1 tentang bentuk umum determinan dan Teorema 3.2 berkaitan dengan bentuk umum kofaktor.
Kata kunci: matriks *Leslie*, determinan, matriks kofaktor, invers matriks, adjoin.

Abstract
This study aims to determine the inverse of the Leslie matrix of special order $n \times n$ $(n \geq 4)$ using the Adjoin method. There are three steps to do. First, note the shape of the determinant pattern of the Leslie matrix of special shapes of the order 4×4 to 10×10 so that the general form is obtained. Second, consider the shape of the cofactor matrix pattern of the Leslie matrix in the special form of the order 4×4 to 10×10 so that the general form is obtained. Third, the general form of the inverse of the Leslie matrix of the special form of order $n \times n$ is obtained based on Theorem 3.1 regarding the general form of the determinant and Theorem 3.2 relating to the general form of the cofactor.
Keywords: leslie matrix, determinant, cofactor matrix, inverse matrix, adjoin.

1. Pendahuluan

Pembahasan mengenai invers suatu matriks telah banyak diteliti oleh peneliti sebelumnya yaitu Pada tahun 2017 Aryani dan Marzuki [1] membahas tentang bentuk umum determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks toepliz berbentuk khusus. Kemudian pada tahun yang sama, Anggreini dan Hastari [4] membahas tentang penerapan matriks *Leslie* pada angka kelahiran dan harapan hidup wanita di Provinsi Jawa Timur, kemudian, Pada tahun 2018 penelitian yang dilakukan oleh Rysfan [2] membahas tentang Invers Matriks FLDcirc$_r$ dengan Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin. Selanjutnyan, Pada tahun 2019, penelitian

2000 Mathematics Subject Classification:16S50
Received: 2022-07-02, accepted: 2022-11-10.

yang dilakukan oleh Marzuki dan Malko [5] membahas tentang Karakteristik Matriks *Leslie* Ordo Empat. Selanjutnya, pada tahun 2020 penelitian oleh Balqis [6] membahas tentang matriks *Leslie* dengan tujuan untuk menganalisa model matriks *Leslie* dan penerapannya dalam memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan populasi perempuan.

Seiring berkembangnya ilmu Aljabar, banyak ditemui jenis-jenis matriks, salah satunya adalah matriks *Leslie* yang sudah dibahas oleh Anggreini dan Hastari [4], Marzuki dan Malko [5], dan Balqis[6]. Matriks *Leslie* merupakan matriks persegi yang digunakan para ahli demografi dalam pertumbuhan populasi dikembangkan oleh Sir Paul Leslie tahun 1945 yang sebelumnya dikemukakan oleh lewis pada tahun 1942. Karena dikembangkan oleh Leslie maka disebut matriks leslie (Tarumingkeng, [3]).

Bentuk umum dari matriks *Leslie* dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Matrik L (*Leslie*) diatas dengan $a_i \geq 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $0 < b_i \leq 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Bergerak dari beberapan penelitian diatas dengan mengambil kesimpulan dan masukan dari penelitian sebelumnya, penulis ingin mengulas lebih lanjut tentang matriks *Leslie*. Maka, penulis tertarik membuat sebuah formula umum untuk menentukan invers matriks *Leslie* dengan judul penelitian Invers Matriks *Leslie* Ordo $n \times n$ ($n \geq 4$) Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin. Berdasarkan Persamaan (1) dengan $a_1 = a_2 = 0, a_3 = a_4 = a_5 = \ldots = a_n = a$, dan $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_{n-1} = b$ diperoleh bentuk khusus sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah tinjauan pustaka dengan beberapa langkah dalam menyelesaikan penelitian ini yaitu pertama menentukan determinan dari matriks*Leslie*bentuk khusus berdasarkan Persamaan (2) ordo 4×4 hingga 10×10 menggunakan ekspansi kofaktor sehingga diperoleh bentuk umumnya. Kedua diperhatikan bentuk pola matriks kofaktor dari matriks *Leslie* bentuk khusus berdasarkan Persamaan (2) ordo 4×4 hingga 10×10 sehingga didapat bentuk umumnya. Ketiga, didapatkan bentuk umum invers dari matriks *Leslie* bentuk khusus ordo $n \times n$ berdasarkan Teorema 3.1 dan Teorema 3.3.

Sebelum melanjutkan ke langkah-langkah metode penelitian yang dijelaskan di atas, berikut diberikan beberapa landasan teori yang digunakan dalam penelitian ini. adapun beberapa defenisi dan teorema yang digunakan adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Kirkwood dan Kirkwood, [7]). *Matriks transpose adalah matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan baris dan kolom. Misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar dengan ukuran $m \times n$. Transpose dari matriks A ditulis dengan A^T yang menunjukkan matriks $n \times m$, didefinisikan sebagai $(A)^T_{ij}$. Matriks $n \times n$ dikatakan simetris jika $A = A^T$.*

Definisi 2.2 (Simanihuruk dan Hartanto, [8])**.** *Misalkan $L = [l_{ij}]$ adalah matriks bujursangkar berorder n sedemikian hingga dengan asumsi $l_{ij} \geq 0$, maka: $0 < \ l_{i(i-1)} \leq 1$, untuk semua $i = 2, 3, \ldots n$ dan $j = 1, 2, \ldots n$. Dan dengan asumsi $l_{ij} = 0$ berlaku untuk semua $i = 2, 3, \ldots n$, dan $j = 1, 2, \ldots n$ tetapi $j \neq i - 1$.*

Definisi 2.3 (Munir, [9])**.** *Misalkan A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} maka matriks*

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $\mathrm{adj}(A)$*.*

Teorema 2.4 (Anton dan Rorres, [10])**.** *Misalkan A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A).$$

Definisi 2.5 (Sukiman, [11])**.** *Misalkan $p(n)$ adalah suatu proposisi yang akan dibuktikan benar untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut:*

1. *Akan dibuktikan bahwa $p(1)$ benar.*
2. *Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar.*

Defenisi 2.5 induksi matematika digunakan untuk membuktikan dugaan bentuk umum determinan dan dugaan bentuk umum kofaktor.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Bentuk Umum Determinan Matriks *Leslie* Bentuk Khusus Ordo nxn$(\mathbf{n} \geq 4)$.

Diberikan matriks *Leslie* bentuk khusus sesuai Persamaan (2) ordo 4×4 sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \ (0) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{21} = (-1)^3 \ (b) \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = (-b) \ (-1)^3 \ (b) \begin{vmatrix} a & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = -ab^3,$$

$$C_{31} = (-1)^4 \ (0) \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{41} = (-1)^5 \ (0) \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinan dari matriks tersebut adalah

$$\det A_4 = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \ + a_{41}C_{41} \quad = -ab^3.$$

Maka determinan dari matriks *Leslie* ordo 4×4 adalah sebagai berikut:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix} = -ab^3 \tag{3}$$

Dengan cara yang sama, berikut di sajikan determinan matriks *Leslie* untuk ordo $A_{5\times5}$ sampai $A_{10\times10}$:

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix} = ab^4 \tag{4}$$

$$|A_6| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix} = -ab^5 \tag{5}$$

$$|A_7| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix} = ab^6 \tag{6}$$

$$|A_8| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix} = -ab^7 \tag{7}$$

$$|A_9| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & a & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix} = ab^8 \tag{8}$$

$$|A_{10}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & a & a & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix} = -ab^9 \tag{9}$$

Setelah mendapatkan nilai determinan dari matriks *Leslie* bentuk khusus pada Persamaan (3) sampai (9), maka dapat diduga bentuk umum dari determinan matriks *Leslie* ordo $n \times n$ pada Teorema 3.1 berikut.

Teorema 3.1. *Diberikan A_n suatu matriks Leslie bentuk khusus pada Persamaan (2), maka nilai determinan matriks A_n adalah: $|A_n| = (-1)^{n-1}ab^{n-1},\ n \geq 4$.*

Bukti. 1. Basis induksi. Akan ditunjukkan $p(4)$ benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p(4):\ |A_4| &= (-1)^{4-1}ab^{4-1} \\ &= -ab^3, \end{aligned}$$

dengan memperhatikan Persamaan (3) maka $p(4)$ benar.

2. Langkah induksi. Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu $p(k) : |A_k| = (-1)^{k-1}ab^{k-1},\ k \geq 4$. Selanjutnya akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$$p(k+1) : |A_{k+1}| = (-1)^k ab^k. \tag{10}$$

Pembuktian dimulai dari

$$|A_{k+1}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & \dots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_{k+1}$$

dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris keempat diperoleh:

$$C_{41} = (-1)^5\ 0 \begin{vmatrix} 0 & a & a & a & \dots & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_k = 0$$

$$C_{42} = (-1)^6 \; 0 \begin{vmatrix} 0 & a & a & a & \dots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_k = 0$$

$$\begin{aligned} C_{43} = (-1)^7 b &\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & \dots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_k \\ &= -b\,|A_k| \\ &= (-1)^1\, b^1 (-1)^{k-1} ab^{k-1} \\ &= (-1)^{k-1+1}\, ab^{k-1+1} \\ &= (-1)^k ab^k \end{aligned}$$

$$C_{44} = (-1)^8 \; 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & \dots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_k = 0$$

Berdasarkan Persamaan (10) maka di peroleh: $|A_{k+1}| = (-1)^k ab^k$.
Dengan memperhatikan langkah 1 dan langkah 2 maka Teorema 3.1 terbukti. □

3.2. **Bentuk Umum Matriks Kofaktor dari Matriks *Leslie* Bentuk Khusus Ordo $\mathbf{n \times n (n \geq 4)}$.** Setelah mendapatkan matriks kofaktor dari matriks *Leslie* bentuk khusus dari ordo 4×4 sampai 10×10 maka diperoleh formula bentuk umum matriks kofaktor dari matriks *Leslie* bentuk khusus untuk ordo $n \times n$ pada Teorema 3.2 berikut serta pembuktian menggunakan metode minor-kofaktor.

Teorema 3.2. *Diberikan A_n suatu matriks Leslie bentuk khusus berordo $n \geq 4$ pada Persamaan (2) dengan $a, b \in \mathbb{R}$ maka matriks kofaktor dari matriks A_n adalah:*

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+1} b^{n-1} \\ (-1)^{n+1} ab^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} ab^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} ab^{n-2} & \cdots & 0 & 0 & (-1)^n ab^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^n ab^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^n ab^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n+1} ab^{n-2} & 0 & (-1)^n ab^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1} ab^{n-2} & (-1)^n ab^{n-2} \end{bmatrix}$$

Bukti. Perhatikan matriks *Leslie* bentuk khusus berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Selanjutnya akan dibuktikan setiap entri dari matriks kofaktornya, mulai dari entri matriks kofaktor baris pertama dan kolom pertama sampai baris pertama kolom ke-n. Dilanjukan baris kedua dan kolom pertama sampai baris kedua kolom ke-n. Seterusnya dilakukan hal yang sama sampai baris ke-n dan kolom ke-n. Prosesnya sebagai berikut.

a. Entri baris pertama matriks kofaktor
   1. Menentukan matriks kofaktor baris pertama kolom pertama (C_{11}).

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = 0$$

   C_{11} bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris pertama.
   Hal yang sama dilakukan sampai C_{1n}, sehingga diperoleh bentuk matriks kofaktor C_{1n} sebagai berikut:
   2. Menentukan matriks kofaktor baris pertama kolom ke-n.

$$C_{1n} = (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$C_{1n} = (-1)^{n+1} b^{n-1}.$$

b. Entri baris kedua matriks kofaktor.

1. Menentukan matriks kofaktor baris kedua kolom pertama (C_{21})

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & a & a & a & \dots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Selanjutnya, ekpansi kedua sepanjang kolom ke-$(n-1)$,

$$(-1)^3 (-1)^n \, a \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$\begin{aligned} C_{21} &= (-1)^1 (-1)^n \, a \, b^{n-2} \\ &= (-1)^{n+1} a b^{n-2}. \end{aligned}$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{2n}, sehingga diperoleh bentuk matriks kofaktor C_{2n} sebagai berikut:

$$C_{2n} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & \dots & a & a & a & a \\ 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}_{n-1} = 0,$$

C_{2n} bernilai 0 karena terdapat satu kolom bilangan nol yaitu pada kolom pertama.

c. Entri baris ketiga matriks kofaktor.

1. Menentukan matriks kofaktor baris ketiga kolom pertama (C_{31})

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & a & a & a & \dots & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = 0$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{3n}, sehingga diperoleh bentuk matriks kofaktor C_{3n} sebagai berikut:

2. Menentukan matriks kofaktor baris ketiga kolom ke-n

$$C_{3n} = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & \dots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}_{n-1} = 0.$$

C_{3n} bernilai 0 karena terdapat satu kolom bilangan nol yaitu pada kolom kedua.

Entri baris ke-4,5,6 dan seterusnya dilakukan dengan cara yang sama, sehingga diperoleh entri untuk baris ke-n sebagai berikut:

d. Entri baris ke-n matriks kofaktor.

1. Menentukan matriks kofaktor baris ke-n kolom pertama (C_{n1})

$$C_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & \dots & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = 0$$

C_{n1} bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris kedua.

Hal yang sama dilakukan sampai C_{nn}, sehingga diperoleh bentuk matriks kofaktor C_{nn} sebagai berikut:

2. Menentukan matriks kofaktor baris ke-n kolom ke-n

$$C_{nn} = (-1)^{2n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a & \dots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}_{n-1},$$

Selanjutnya, ekpansi kedua sepanjang kolom ke-$(n-1)$

$$(-1)^{2n}\,(-1)^{n}\;a\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$\begin{aligned} C_{nn} &= (-1)^{2n}\,(-1)^{n}\;a\;b^{n-2} \\ &= (-1)^{n}\,(-1)^{2n}\;ab^{n-2} \\ &= (-1)^{n}ab^{n-2}. \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian di atas, maka Teorema 3.2 terbukti, sehingga diperoleh:

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+1}b^{n-1} \\ (-1)^{n+1}ab^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1}ab^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1}ab^{n-2} & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n}ab^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n}ab^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n}ab^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n+1}ab^{n-2} & 0 & (-1)^{n}ab^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1}ab^{n-2} & (-1)^{n}ab^{n-2} \end{bmatrix}$$

□

3.3. Invers Matriks *Leslie* Bentuk Khusus Ordo $\mathbf{n \times n (n \geq 4)}$. Untuk mendapatkan invers matriks *Leslie* bentuk khusus ordo $n \times n$ diperoleh sesuai dengan rumus yang terdapat pada Teorema 2.4 sebagai berikut:

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{|A_n|}\,(C_n)^{T} = \frac{1}{|A_n|}\operatorname{adj}(A_n)\,,$$

$$\frac{1}{|A_n|}\,(C_n)^{T} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & (-1)^{n+1}b^{n-1} \\ (-1)^{n+1}a\;b^{n-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1}a\;b^{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1}a\;b^{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & (-1)^{n}a\;b^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & (-1)^{n}a\;b^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n+1}a\;b^{n-2} & 0 & 0 & (-1)^{n}a\;b^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+1}a\;b^{n-2} & 0 & (-1)^{n}a\;b^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (-1)^{n+1}a\;b^{n-2} & (-1)^{n}a\;b^{n-2} \end{bmatrix}^{T}$$

Maka:

$$(A_n)^{-1}$$

$$= \frac{1}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}}\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{n+1}a\ b^{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1}a\ b^{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{n+1}a\ b^{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+1}a\ b^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (-1)^{n+1}a\ b^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & (-1)^{n+1}a\ b^{n-2} \\ (-1)^{n+1}b^{n-1} & 0 & 0 & (-1)^{n}a\ b^{n-2} & \dots & (-1)^{n}a\ b^{n-2} & (-1)^{n}a\ b^{n-2} & (-1)^{n}a\ b^{n-2} & (-1)^{n}a\ b^{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^{n+1}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^{n+1}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^{n+1}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{(-1)^{n+1}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{(-1)^{n+1}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^{n+1}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} \\ \frac{(-1)^{n+1}b^{n-1}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & 0 & 0 & \frac{(-1)^{n}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & \dots & \frac{(-1)^{n}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & \frac{(-1)^{n}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & \frac{(-1)^{n}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} & \frac{(-1)^{n}a\ b^{n-2}}{(-1)^{n-1}ab^{n-1}} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh invers dari matriks *Leslie* adalah sebagai berikut:

$$(A_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Berdasarkan dugaan diatas, diperoleh bentuk umum invers matriks *Leslie* orde $n\times n$ pada Teorema 3.3 berikut:

Teorema 3.3. *Diberikan A_n suatu matriks Leslie bentuk khusus berordo $n\geq 4$ pada Persamaan* (2) *dengan $a,b\in\mathbb{R}$ maka invers dari matriks A_n adalah:*

$$(A_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1/b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 1/b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/b \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & -1/b & -1/b & \dots & -1/b & -1/b & -1/b & -1/b & -1/b \end{bmatrix}.$$

Bukti. Pembuktian Teorema 3.3 dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $A_n(A_n)^{-1} = (A_n)^{-1}A_n = I$, maka diperoleh:

$$A_n(A_n)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a & a & \dots & a & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1/b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 1/b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/b \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & -1/b & -1/b & \dots & -1/b & -1/b & -1/b & -1/b & -1/b \end{bmatrix}_n$$

Hasil perkalian matriksnya adalah

$$A_n(A_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n = I$$

$(A_n)^{-1}A_n$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1/b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 1/b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/b \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & -1/b & -1/b & \dots & -1/b & -1/b & -1/b & -1/b & -1/b \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a & a & \dots & a & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}_n$$

Hasil perkalian matriksnya adalah

$$(A_n)^{-1}A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n = I.$$

erdasarkan pembuktian di atas, terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $A_n(A_n)^{-1} = (A_n)^{-1}A_n = I$. Sehingga, Teorema 3.3 terbukti. □

4. Simpulan

Berdasarkan uraian dan pembahasan sebelumnya dapat diperoleh beberapa kesimpulan. Pertama, bentuk umum determinan suatu matriks *Leslie* bentuk khusus sesuai Persamaan (2) adalah sebagai berikut. $|A_n| = (-1)^{n-1}ab^{n-1}$, $n \geq 4$. Kedua, bentuk umum matriks kofaktor suatu matriks *Leslie* bentuk khusus sesuai Persamaan (2) adalah sebagai berikut:

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+1}b^{n-1} \\ (-1)^{n+1}ab^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1}ab^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1}ab^{n-2} & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n}ab^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n}ab^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n}ab^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n+1}ab^{n-2} & 0 & (-1)^{n}ab^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1}ab^{n-2} & (-1)^{n}ab^{n-2} \end{bmatrix}$$

Serta yang Ketiga, bentuk umum invers suatu matriks *Leslie* bentuk khusus sesuai Persamaan (2) adalah sebagai berikut:

$$(A_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1/b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 1/b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/b \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & -1/b & -1/b & \dots & -1/b & -1/b & -1/b & -1/b & -1/b \end{bmatrix}$$

Daftar Pustaka

[1] Aryani, F., and Marzuki, C.C., 2017, Invers Matriks Toepliz Dengan Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin. *Bachelor thesis, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.*

[2] Rysfan, 2018, Menentukan Invers Matriks FLDcircr Dengan Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin. *Bachelor thesis, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.*

[3] Tarumingkeng, R., 1994, *Dinamika Populasi*, Pustaka Sinar Harapan, Jakarta.

[4] Anggreini, D. and Hastari, R.C., 2017, Penerapan matriks Leslie pada angka kelahiran dan harapan hidup wanita di Provinsi Jawa Timur, *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, Volume 12, Issue 2, Pages 109-122.*

[5] Marzuki, C.C. and Malko, O., Karakterisasi Matriks Leslie Ordo Empat, *SITEKIN: Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Volume 13, Issue 1, Pages 108-114.*

[6] Balqis, H., 2021, Analisis model matriks leslie dan penerapannya dalam memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan populasi perempuan. *Bachelor thesis, Universitas Sumatera Utara.*

[7] Kirkwood, J.R. and Kirkwood, B.H., 2017, *Elementary Linear Algebra*, Chapman and Hall/CRC.

[8] Simanihuruk, M., and Hartanto, H., 2006, Karakterisasi Matrik Leslie Ordo Tiga, *GRADIEN, Volume 2, Issue 1, Pages 134-138.*

[9] Munir, R., 2017, *Matematika diskrit*, 3rd ed, Infoematika Bandung, Bandung.

[10] Anton, H. and Rorres, C., 2004, *Aljabar Linier Elementer*, 8th ed, Erlangga, Jakarta.

[11] Sukiman, 2006, *Pengantar Teori Bilangan*, Yogyakarta: Hanggar Kreator.