

## Kontrol Optimal Menggunakan *A.aleyrodhis* Penyebaran Penyakit Virus Kuning Pada Tanaman Terong

AYUN SRI RAHMANI<sup>1</sup>, NURSANTI ANGGRIANI<sup>2</sup>, ASEP KUSWANDI SUPRIATNA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Program Magister Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran  
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang 45363

Email: ayun20001@mail.unpad.ac.id

<sup>2</sup>Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran  
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang 45363

Email: nursanti.anggriani@unpad.ac.id a.k.sipriatna@unpad.ac.id.

### Abstrak

Dalam penelitian ini dibahas model matematis penyebaran penyakit kuning pada tanaman terong dengan *protectant*. Tanaman *protectant* adalah tanaman yang dilindungi menggunakan ekstrak nabati daun pukul empat. Asumsi diberikan bahwa *protectant* menggunakan ekstrak nabati daun pukul empat dapat meningkatkan sistem imun tanaman terong muda. Akan ditunjukkan nilai *Basic Reproduction Number* (BRN)  $R_0$  dari transmisi penyakit tanaman. BRN dihitung berdasarkan nilai eigen terbesar dari *Next generation Matriks* (NGM). Hasilnya menunjukkan bahwa jika  $R_0 > 1$ , maka titik kesetimbangan endemik stabil, namun jika  $R_0 < 1$ , maka titik ekuilibrium endemik menjadi tidak stabil. Kemudian, peneliti akan membahas pengendalian kontrol optimal dari tanaman terong dan kutu kebul yang terinfeksi dengan mempertimbangkan pengobatan pencegahan menggunakan *A.aleyrodhis* yang bertujuan untuk mengurangi tanaman dan vektor yang terinfeksi dengan metode Pontrygain. Hasil kontrol optimal menunjukkan *A.aleyrodhis* dapat mengurangi jumlah tanaman dan vektor yang terinfeksi dibandingkan tanpa kontrol.

Kata Kunci: Model matematika, *protectant*, kontrol optimal.

### Abstract

*This research discusses a mathematical model of the spread of yellow virus in eggplant with a protectant. Protectant plants are plants that are protected using four o'clock leaf vegetable extracts. We assume that a protectant using four o'clock leaf vegetable extract can improve the immune system of young eggplant plants. We show the Basic Reproduction Number (BRN)  $R_0$  value of plant disease transmission. BRN is calculated from the largest eigenvalue of the Next Generate Matrix (NGM). The results show that if  $R_0 > 1$ , then the endemic equilibrium point is stable, but if  $R_0 < 1$ , then the endemic equilibrium point becomes unstable. We also discuss optimal control of infected eggplant and whitefly plants by considering preventive treatment using *A.aleyrodhis* which aims to reduce infected plants and vectors with the Pontrygain method. Optimal control results show that *A.aleyrodhis* can reduce the number of infected plants and vectors. infected compared to the uncontrolled.*

*Keywords: Model mathematic, protectant, optimal control.*

## 1. PENDAHULUAN

Terong (*Solanum melongena L*) merupakan salah satu produk hortikultura dengan nilai ekonomis dan sudah banyak tersebar di seluruh Indonesia. Terong sangat dibutuhkan masyarakat, karena mengandung banyak sumber gizi seperti protein, lemak, karbohidrat, vitamin A, vitamin B, vitamin C, Fosfor, zat besi, dan meningkatkan pendapatan para petani (Tanik, [1]). Karena meningkatnya kebutuhan terong di masyarakat, sehingga hasil panen diharapkan meningkat. Hasil panen yang sangat rendah di akibatkan oleh berbagai faktor, diantaranya pemilihan benih yang kurang bagus, tingkat kesuburan tanah yang rendah, budidaya tanaman yang kurang baik, dan adanya hama serta infeksi virus penyakit tanaman (Tanik, [1]; Taufik *et al.*, [2]).

Salah satu kendala dalam usaha budidaya tanaman terong adalah penyakit kuning yang disebabkan oleh infeksi virus gemini pada terong. Menurut Ali dan Aprilia, [3], di desa Pucungbedug petani mengalami serangan patogen virus gemini, dengan tingkat serangan terparah mencapai 100%. Virus gemini ditularkan oleh vektor serangga kutu kebul (*Bemisia tabaci*). *B. tabaci* merupakan serangga hama penghisap daun yang berperan dalam penyebaran dan penularan virus gemini di lapangan (Morales dan Anderson, [4]). *B. tabaci* menularkan virus kuning secara persisten (tetap) artinya jika kutu kebul mengambil makanan dari tanaman yang mengandung virus kuning, maka selama hidupnya dapat menularkan virus kuning (Hasyim dan Wiwin Setiawati, [5]).

Mekanisme infeksi virus kuning pada tanaman terong muncul dengan gejala daun berwarna kuning, kerdil dan menggulung ke atas. Gejala yang muncul di akibatkan oleh terhambatnya aliran nutrisi (*fotosintat*) dari source ke sink karena virus kuning yang ada dalam tanaman terong menguasai floem (*floem limited virus*). Tanaman terong yang terinfeksi pada awal pertumbuhan tidak akan menghasilkan buah dan tidak dapat tumbuh dengan normal, sedangkan jika tanaman terong terinfeksi pada fase generatif maka buah yang dihasilkan akan berbentuk kerdil dan bertekstur keras (Gunaeni *et al.*, [6]; Ariyanti, [7]). Banyak upaya yang bisa dilakukan untuk mengendalikan penyebaran penyakit virus kuning, dilakukan seperti penanaman varietas toleransi, tehnik budidaya, tanaman perangkap, rotasi tanaman, imunisasi tanaman muda, dan penggunaan pestisida kimia secara intensif (Gunaeni *et al.*, [6]; Xie *et al.*, [8]; Friarini *et al.*, [9]; Sari dan Sulisty, [10]).

Imunisasi sendiri merupakan upaya mengurangi kerentanan tumbuhan atau membuat tumbuhan *immune* (kebal) terhadap patogen yang menyerang tanaman (Sutarman, [11]). Imunisasi tanaman muda menggunakan ekstrak nabati daun pukul empat dapat membuat tanaman terong muda tahan terhadap penyakit virus kuning. *A. aleyrodinis* merupakan jamur yang dapat menginfeksi dan membunuh serangga kutu kebul (Prayogo dan Bayu, [2]). *A. aleyrodinis* merupakan salah satu spesies jamur menjanjikan yang menunjukkan virulensi yang cukup besar terhadap spesies kutu kebul (Meekes *et al.*, [13]). *A. aleyrodinis* mampu mengendalikan kutu kebul karena toleransinya yang luas terhadap kelembapan, ketahanan yang lama pada permukaan daun tumbuhan, kompatibilitas dengan musuh alami, dan kemampuannya menginfeksi serangga secara kontak langsung dan kontak sekunder (van Lenteren dan Franssen, [14]; Qiu *et al.*, [15][15]).

Banyak penelitian yang membahas tentang pemodelan matematika pada infeksi penyakit tanaman melalui vektor termasuk Allen *et al.*, [16], membahas tentang pemodelan transmisi vektor dan epidemiologi virus tumbuhan yang menginfeksi bersama. Penelitian yang dilakukan Murwayi *et al.*, [17], membahas tentang pembuatan pemodelan penyakit tanaman yang ditularkan oleh vektor serangga dengan memperhatikan perubahan iklim. Selain pemodelan epidemik pada tanaman yang ditularkan melalui vektor serangga, diperlukan juga penelitian kontrol terhadap penyebaran penyakit, seperti penelitian yang telah dilakukan oleh Anggriani *et al.*, [18], membahas tentang kontrol optimal dengan fungisida untuk mengetahui tingkat aplikasi fungisida yang tepat serta dampaknya terhadap tanaman dan menganalisis kesetabilan menggunakan model eksplisit dengan faktor kuratif. Pada tahun 2017, beliau melakukan penelitian tentang analisis efek penggunaan insektisida, dengan melakukan kontrol optimal

menggunakan model maksimum pontryagain (Anggriani *et al.*, [19]). Kemudian, pada tahun 2018 beliau melakukan penelitian kontrol optimal tentang penggunaan fungisida, dan melihat keefektivitasannya (Anggriani *et al.*, [20]). Selanjutnya Amelia *et al.*, [21], melakukan penelitian tentang kontrol optimal fungisida terhadap penyebaran penyakit tanaman menggunakan model pontryagain, serta analisis numerik.

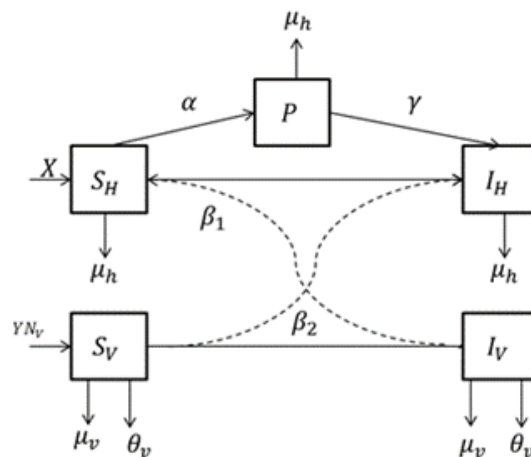
Berdasarkan penelitian sebelumnya, belum ada yang meneliti model penyebaran penyakit kuning pada tanaman terong dengan mempertimbangkan vektor dan tanaman protectant. Hal ini mengakibatkan dalam penelitian ini peneliti membahas dan menganalisis model dinamik penyebaran virus kuning pada tanaman terong dengan mempertimbangkan transmisi vektor kutu kebul dan tanaman *protectant*. Kemudian menkontruksi model kontrol optimal dengan pencegahan menggunakan *A.aleyrodhis*.

## 2. KONSTRUKSI MODEL

Asumsi model matematika diberikan  $X$  dan  $YN_v$  berturut-turut didefinisikan sebagai populasi tanaman terong dan populasi kutu kebul. Tanaman terong dibagi menjadi tiga kelas, tanaman terong rentan dilambangkan dengan  $S_H(t)$ , tanaman terong terinfeksi dilambangkan dengan  $I_H(t)$ , dan tanaman terong *protectant* dilambangkan dengan  $P(t)$ . Sementara populasi kutu kebul terbagi menjadi dua kelas, yaitu populasi kutu kebul yang rentan dilambangkan dengan  $S_V(t)$ , dan populasi kutu kebul yang terinfeksi dilambangkan dengan  $I_V(t)$ .

Tanaman terong yang rentan dapat berubah menjadi tanaman terong yang terinfeksi jika terjadi kontak langsung dengan vektor atau serangga kutu kebul yang terinfeksi virus kuning dengan laju infeksi  $\beta_1$ . Kemudian, tanaman terong yang rentan dilindungi menggunakan ekstrak nabati daun bunga pukul empat dengan laju  $\alpha$ . Selain itu tanaman terong yang diberikan ekstrak nabati daun bunga pukul empat mempunyai efektifitas dengan laju  $\gamma$ , dan laju kematian alami  $\mu_v$ .

Populasi kutu kebul rentan dapat menjadi kutu kebul terinfeksi apabila memakan makanan dari tanaman terong yang terinfeksi dengan laju infeksi  $\beta_2$ , serta kutu kebul dapat mengalami kematian alami, dan kematian akibat penggunaan *A.aleyrodhis* yang dilambangkan secara berturut-turut dengan laju  $\mu_v$ ,  $\theta_v$ . Model dikonstruksi berdasarkan penelitian (Amelia *et al.*, [22]). Masalah ini dapat dilihat pada Gambar 1.



GAMBAR 1. Diagram alir penyebaran penyakit kuning pada tanaman terong.

Berdasarkan Gambar 1 dapat dibentuk model matematika penyebaran penyakit virus kuning pada tanaman terong seperti pada persamaan (1):

$$\begin{aligned}\frac{dS_H}{dt} &= X - \alpha S_H - \beta_1 (1 - \alpha) S_H I_V - \mu_h S_H, \\ \frac{dI_H}{dt} &= \beta_1 (1 - \alpha) S_H I_V + \gamma P I_V - \mu_h I_H, \\ \frac{dP}{dt} &= \alpha S_H - \gamma P I_V - \mu_h P, \\ \frac{dS_V}{dt} &= Y N_v - \beta_2 I_H S_V - \mu_v S_V - \theta_v S_V, \\ \frac{dI_V}{dt} &= \beta_2 I_H S_V - \mu_v I_V - \theta_v I_V,\end{aligned}\tag{1}$$

### 3. ANALISIS MODEL

**3.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.** Titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh dari kompartement yang terinfeksi dari persamaan (1), sama dengan nol ( $\frac{dI_H}{dt} = \frac{dI_V}{dt} = 0$ ). Demikian sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit untuk model penyebaran penyakit virus kuning pada tanaman terong pada persamaan (2).

$$E_0 = (S_{H0}, I_{H0}, P_0, S_{V0}, I_{V0}) = \left( \frac{A}{\alpha + \mu_h}, 0, \frac{X\alpha}{\mu_h(\alpha + \mu_h)}, \frac{Y N_v}{\mu_v + \theta_v}, 0 \right).\tag{2}$$

**3.2. Basic Reproduction Number ( $R_0$ ).** Metode yang digunakan yaitu metode *Next generation Matrix* (NGM) oleh Diekmann *et al.*, [23], dengan sub populasi yang diperhatikan adalah populasi  $I_H$  dan  $I_V$ . Berdasarkan dekomposisi matriks jacobian sub populasi yang dipilih, diperoleh matriks transmisi ( $F$ ) dan matriks transisi ( $V$ ) sebagai persamaan (3) dan (4):

$$F := \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_1(1-\alpha)X}{\alpha+\mu_h} + \frac{\gamma X\alpha}{\mu_h(\alpha+\mu_h)} \\ \frac{Y N_v \beta_2}{\mu_v + \theta_v} & 0 \end{bmatrix},\tag{3}$$

$$V := \begin{bmatrix} \mu_h & 0 \\ 0 & \mu_v + \theta_v \end{bmatrix}.\tag{4}$$

Demikian sehingga diperoleh NGM sebagai berikut:

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_1(1-\alpha)X}{\alpha+\mu_h} + \frac{\gamma X\alpha}{\mu_h(\alpha+\mu_h)} \\ \frac{Y N_v \beta_2}{(\mu_v + \theta_v)\mu_h} & 0 \end{bmatrix}.\tag{5}$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari persamaan (5) sebagai persamaan (6):

$$\lambda^2 - \frac{X Y N_v \beta_2 (\alpha - \mu_h) (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma + \beta_1 \mu_h)}{\mu_h^2 (\alpha + \mu_h)^2 (\mu_v + \theta_v)^2}.\tag{6}$$

Nilai eigen dari matriks  $FV^{-1}$  yaitu:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{X Y N_v \beta_2 (\alpha + \mu_h) (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma + \beta_1 \mu_h)}{\mu_h^2 (\alpha + \mu_h)^2 (\mu_v + \theta_v)^2}}.\tag{7}$$

*Basic reproduction number* ( $R_0$ ) diperoleh berdasarkan radius spektral  $\rho$  dari matriks  $FV^{-1}$ , sehingga diperoleh persamaan (8):

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\sqrt{X Y N_v \beta_2 (\alpha + \mu_h) (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma + \beta_1 \mu_h)}}{\mu_h (\alpha + \mu_h) (\mu_v + \theta_v)}.\tag{8}$$

**3.3. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.** Substitusikan  $E_0$  ke matriks Jacobian dari persamaan (1), sehingga diperoleh persamaan (9):

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\alpha - \mu_v - \eta & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_1(1-\alpha)X}{\alpha + \mu_v} \\ 0 & -\mu_j & 0 & 0 & \frac{\beta_1(1-\alpha)X}{\alpha + \mu_h} + \frac{\gamma X \alpha}{\mu_h(\alpha + \mu_h)} \\ \alpha & 0 & \eta - \mu_h & 0 & -\frac{\gamma X \alpha}{\mu_h(\alpha + \mu_h)} \\ 0 & -\frac{Y N_v \beta_2}{\mu_v + \theta_v} & 0 & -\mu_v - \theta_v & 0 \\ 0 & \frac{Y N_v \beta_2}{\mu_v + \theta_v} & 0 & 0 & -\mu_v - \theta_v \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari persamaan (9), yaitu persamaan (10):

$$((\alpha + \mu_h + \lambda)(\mu_h + \lambda)(\mu_v + \theta_v + \lambda)(a\lambda^2 + b\lambda + c)), \quad (10)$$

di mana:

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ b &= \mu_v + \mu_h + \theta_v, \\ c &= -\frac{X Y N_v \beta_2 (\alpha \beta_1 \mu_h - \alpha \gamma + \beta_1 \mu_h) + \mu_h^2 (\mu_v + \theta_v)^2 (\alpha + \mu_h)}{\mu_h (\mu_v + \theta_v) (\alpha + \mu_h)}. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (9) diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\alpha + \mu_h) \\ \lambda_2 &= -\mu_h \\ \lambda_3 &= -(\mu_v + \theta_v). \end{aligned}$$

Nilai eigen  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  bernilai negatif, sehingga model (1) akan stabil jika  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  bernilai negatif. Persamaan karakteristik  $a\lambda^2 + b\lambda + c$  diperhatikan untuk mencari nilai eigen lainnya, persamaan akan stabil apabila  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  bernilai positif, dengan:

$$\begin{aligned} a &= 1 > 0 \\ b &= (\mu_v + \mu_h + \theta_v) > 0 \\ c &= \frac{-X Y N_v \beta_2 (\alpha \beta_1 \mu_h - \alpha \gamma + \beta_1 \mu_h) + \mu_h^2 (\mu_v + \theta_v)^2 (\alpha + \mu_h)}{\mu_h (\mu_v + \theta_v) (\alpha + \mu_h)} \\ c &= \frac{-X Y N_v \beta_2 (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma - \beta_1 \mu_h) + \mu_h^2 (\mu_v + \theta_v)^2 (\alpha + \mu_h)}{\mu_h (\mu_v + \theta_v) (\alpha + \mu_h)} > 0 \\ c &= \frac{\mu_h^2 (\mu_v + \theta_v)^2 (\alpha + \mu_h)}{a} - \frac{[X Y N_v \beta_2 (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma - \beta_1 \mu_h)]}{a} > 0 \\ c &= \frac{\mu_h^2 (\mu_v + \theta_v)^2 (\alpha + \mu_h)}{a} > \frac{[X Y N_v \beta_2 (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma - \beta_1 \mu_h)]}{a} \\ c &= \frac{\mu_h^2 (\mu_v + \theta_v)^2 (\alpha + \mu_h)}{a} > \frac{[X Y N_v \beta_2 (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma - \beta_1 \mu_h)]}{a} \\ c &= \frac{[X Y N_v \beta_2 (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma - \beta_1 \mu_h)]}{\mu_h^2 (\mu_v + \theta_v)^2 (\alpha + \mu_h)} < \frac{a}{a} \\ c &= \frac{[X Y N_v \beta_2 (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma - \beta_1 \mu_h)]}{\mu_h^2 (\mu_v + \theta_v)^2 (\alpha + \mu_h)} < 1 \\ c &= \frac{[X Y N_v \beta_2 (-\alpha \beta_1 \mu_h + \alpha \gamma - \beta_1 \mu_h)]}{\mu_h^2 (\mu_v + \theta_v)^2 (\alpha + \mu_h)} = R_0^2 < 1 \\ c &= 1 - R_0^2 > 0. \end{aligned}$$

Koefisien  $c$  lebih besar dari nol jika  $R_0 < 1$ , sehingga  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  akan bernilai negatif. Karena semua nilai eigen negatif, dapat disimpulkan sistem akan stabil jika  $R_0 < 1$ .

**3.4. Titik Ekuilibrium Endemik.** Titik ekuilibrium endemik diperoleh dengan persamaan (1), ( $\frac{dS_H}{dt} = \frac{dI_H}{dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{dS_V}{dt} = \frac{dI_V}{dt} = 0$ ) bernilai nol. Persamaan ( $\frac{dS_H}{dt} = \frac{dI_H}{dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{dS_V}{dt}$ ) diselesaikan terlebih dahulu kemudian,  $E_1$  disubstitusikan ke persamaan  $I_V$ , sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned} S_H^* &= \frac{X}{(\alpha\beta_1 I_V^* - \beta_1 I_V^* - \alpha - \mu_h)}, \\ I_H^* &= \frac{X I_V^* (\alpha\gamma\beta_1 I_V^* + \alpha\beta_1 \mu_h - \gamma\beta_1 I_V^* - \alpha\gamma - \beta_1 \mu_h)}{\mu_h (\alpha\beta_1 I_V^* + \beta_1 - \alpha - \mu_h) (\gamma I_V^* + \mu_h)}, \\ P^* &= \frac{\alpha X}{(\alpha\beta_1 I_V^* - \beta_1 I_V^* - \alpha - \mu_h) (\gamma I_V^* + \mu_h)}, \\ S_V^* &= \frac{\mu_h Y N_v (\alpha\beta_1 I_V^* - \beta_1 I_V^* - \alpha - \mu_h) (\gamma I_V^* + \mu_h)}{X \beta_2 I_V^* (\alpha\gamma\beta_1 I_V^* + \alpha\beta_1 \mu_h - \gamma\beta_1 I_V^* - \alpha\gamma\beta_1 \mu_h) + \mu_h (\theta + \mu_v) (\alpha\beta_1 I_V^* - \beta_1 I_V^* - \alpha - \mu_h) (\gamma I_V^* + \mu_h)}, \\ I_V^* &= \frac{\beta_2 I_H S_V}{\theta_v + \mu_v}. \end{aligned}$$

Populasi vektor yang terinfeksi selalu bernilai positif, sehingga titik ekuilibrium endemik akan positif jika nilai  $I_V^*$  non-negatif. Sedemikian sehingga, semua titik ekuilibrium akan bernilai positif.

**3.5. Analisis Titik Ekuilibrium Endemik.** Karena sulit menganalisis titik ekuilibrium endemik secara analitik, sehingga analisis digunakan secara numerik dengan nilai dan parameter sesuai pada Tabel 1.

TABEL 1. Nilai awal dan parameter.

Variabel/Parameter	Nilai		Variabel/Parameter	Nilai	
	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$		$R_0 < 1$	$R_0 > 1$
$N_V$	6	6	$\alpha$	0,07	0,07
$S_H$	15	15	$\mu_h$	0,03	0,03
$I_H$	1	1	$\gamma$	0,001	0,01
$P$	5	5	$\beta_1$	0,25	0,25
$S_V$	5	5	$\beta_2$	0,25	0,25
$I_V$	1	1	$\mu_v$	0,07	0,07
$X$	0.1	0.1	$\theta_v$	0,03	0,09
$Y$	0.01	0.01			

Berdasarkan Tabel 1. diperoleh titik ekuilibrium endemik

$$E^* = (0, 5798054307; 0, 939196284; 1, 432077739; 0, 598054307; 0, 1701945693).$$

Sehingga model penyebaran penyakit virus kuning pada tanaman terong akan stabil dengan  $R_0 = 1,415 > 1$ .

**3.6. Masalah Kontrol Optimal.** Agar jumlah populasi yang terinfeksi menurun, pada model dinamik penyebaran penyakit kuning pada tanaman terong diberikan pengobatan preventif menggunakan *A. aleyrodhis*. Oleh karena itu, diperlukan pengendalian optimal terhadap perlakuan yang diberikan, agar biaya yang dikeluarkan dapat seminim mungkin. Penyelesaian kontrol optimal ini, menggunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin (Lenhart dan Workman, [24]), dengan fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [A_1 I_H(t) + A_2 I_V(t) + c_1 u_1^2(t)] dt.$$

Variabel  $u_1(t)$  merupakan variabel kontrol dari pencegahan yang diberikan,  $A_1$  dan  $A_2$  merupakan bobot keseimbangan populasi yang terinfeksi, dan  $c_1$  adalah bobot biaya keseim-

bangkan pencegahan. Variabel *state* untuk model  $x(t) = \begin{bmatrix} S_H(t) \\ I_H(t) \\ P(t) \\ S_V(t) \\ I_V(t) \end{bmatrix}$ , dengan kendala

$$\begin{aligned} \frac{dS_H}{dt} &= X - \alpha S_H - (1 - u_1)\beta_1(1 - \alpha)S_H I_V - \mu_h S_H, \\ \frac{dI_H}{dt} &= (1 - u_1)\beta_1(1 - \alpha)S_H I_V + \gamma P I_V - \mu_h I_H, \\ \frac{dP}{dt} &= \alpha S_H - \gamma P I_V - \mu_d P, \\ \frac{dS_V}{dt} &= Y N_v - (1 - u_1)\beta_2 I_H S_V - \mu_v S_V - u_1 \theta_v S_V, \\ \frac{dI_V}{dt} &= (1 - u_1)\beta_2 I_H S_V - \mu_v I_V - u_1 \theta_v I_V, \end{aligned}$$

dengan kondisi batas  $t_0 < t < t_1$ ,  $0 \leq u_1 \leq 1$ ,  $S_H(0) \geq 0$ ,  $I_H(0) \geq 0$ ,  $P(0) \geq 0$ ,  $S_V(0) = S_{V0} \geq 0$ ,  $I_V(0) = I_{V0} \geq 0$ .

Persamaan Hamiltonian didefinisikan sebagai  $H = f(x, u_1, t) + \lambda'g(x, u_1, t)$ , yang ekuivalen dengan:

$$\begin{aligned} H &= A_1 I_H + A_2 I_V + c_1 u_1^2(t) + \lambda_1 (X - \alpha S_H - \beta_1(1 - \alpha)(1 - u_1)S_H I_V - \mu_h S_H) \\ &+ \lambda_2 (\beta_1(1 - \alpha)(1 - u_1)S_H I_V + \gamma P I_V - \mu_h I_H) + \lambda_3 (\alpha S_H - \gamma P I_V - \mu_h P) \\ &+ \lambda_4 (Y N_v - (1 - u_1)\beta_2 I_H S_V - \mu_v S_V - u_1 \theta_v S_V) + \lambda_5 (\beta_2(1 - u_1)I_H S_V - \mu_v I_V - u_1 \theta_v I_V), \end{aligned}$$

dengan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , dan  $\lambda_5$  merupakan variabel *co-state* atau pengali Lagrange. Kondisi yang diperlukan untuk mencapai kontrol optimal, harus memenuhi Prinsip Maksimum Pontryagin berikut:

- Persamaan *state*

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_H(t)}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = (X - \alpha S_H - (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta_1 S_H I_V - \mu_h S_H), \\ \frac{\partial I_H(t)}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = ((1 - u_1)(1 - \alpha)\beta_1 S_H I_V + \gamma P I_V - \mu_h I_H), \\ \frac{\partial P(t)}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = (\alpha S_H - \gamma P I_V - \mu_d P), \\ \frac{\partial S_V(t)}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = (Y N_v - (1 - u_1)\beta_2 I_H S_V - \mu_v S_V - u_1 \theta_v S_V), \\ \frac{\partial I_V(t)}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_5} = ((1 - u_1)\beta_2 I_H S_V - \mu_v I_V - u_1 \theta_v I_V). \end{aligned}$$

- Persamaan *co-state*

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial S_H} = -\lambda_1(-\alpha - (1-\alpha)(1-u_1)\beta_1 I_V - \mu_h) \\ &\quad - \lambda_2(1-\alpha)(1-u_1)\beta_1 I_V - \lambda_3\alpha, \\ \hat{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial I_H} = -A_1 + \lambda_2\mu_h + \lambda_4(1-u_1)\beta_2 S_V - \lambda_5(1-u_1)\beta_2 S_V, \\ \hat{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial P} = -\lambda_2\gamma - \lambda_3(-\gamma - \mu_h), \\ \hat{\lambda}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial S_V} = -\lambda_4(Y - (1-u_1)\beta_2 I_H - \mu_v - u_1\theta_v) - \lambda_5(1-u_1)\beta_2 I_H, \\ \hat{\lambda}_5 &= -\frac{\partial H}{\partial I_V} = -A_2 + \lambda_1(1-\alpha)(1-u_1)\beta_1 S_H - \lambda_2(1-\alpha)(1-u_1)\beta_1 S_H \\ &\quad + \lambda_4 Y - \lambda_5(-\mu_v - u_1\theta_v).\end{aligned}$$

- Keadaan stasioner

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \rightarrow u_1 &= \frac{1}{2c_1} (\lambda_1\alpha\beta_1 I_V S_h - \lambda_1\alpha\beta_1 I_V S_H - \lambda_4\beta_2 I_H S_V + \lambda_5\beta_2 I_H S_V \\ &\quad - \lambda_1\beta_1 I_V S_H + \lambda_2\beta_1 I_V S_H + \lambda_5\theta_v I_V + \lambda_4\theta S_V).\end{aligned}$$

Karena  $0 \leq u_1 \leq 1$ , sehingga:

$$u_1^* = \min\left\{\max\left[0, \frac{1}{2c_1} (\lambda_1\alpha\beta_1 I_V S_h - \lambda_1\alpha\beta_1 I_V S_H - \lambda_4\beta_2 I_H S_V + \lambda_5\beta_2 I_H S_V - \lambda_1\beta_1 I_V S_H + \lambda_2\beta_1 I_V S_H + \lambda_5\theta_v I_V + \lambda_4\theta S_V), 1\right], 1\right\},$$

sebagai kontrol optimal dari sistem.

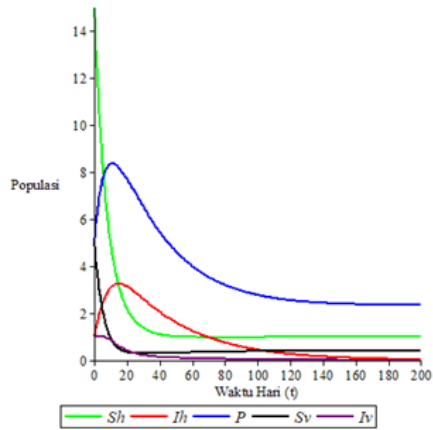
#### 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

**4.1. Simulasi Numerik.** Untuk mengilustrasikan secara numerik dinamika penyebaran virus kuning pada tanaman terong, dengan kontrol dan tanpa kontrol kami menggunakan nilai parameter pada Tabel 1. dan kondisi awal untuk setiap kompartemen masing-masing adalah  $S_H(0) = 15$ ,  $I_H(0) = 1$ ,  $P(0) = 5$ ,  $S_V(0) = 5$ ,  $I_V(0) = 1$ , dengan bobot kinfeksi  $A_1, A_2 = 1$ , dan bobot biaya  $c_1 = 1$ .

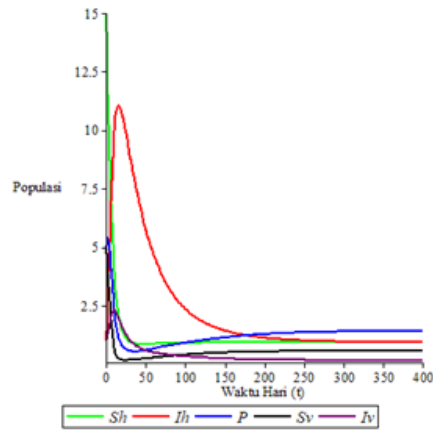
Berdasarkan Gambar 2 ketika  $R_0 < 1$ , populasi tanaman terinfeksi berkurang sampai hari 155, kemudian populasi punah, sedangkan populasi vektor yang terinfeksi berkurang, kemudian punah setelah hari ke 80. Selanjutnya populasi tanaman rentan akan berkurang, kemudian konstan setelah hari 110. Berdasarkan Gambar 3 ketika  $R_0 > 1$ , populasi tanaman terinfeksi bertambah sampai hari 30, kemudian konstan setelah hari 180, sedangkan populasi vektor yang terinfeksi bertambah sampai hari 18, kemudian konstan setelah hari ke 280. Selanjutnya populasi tanaman rentan akan berkurang, kemudian konstan setelah hari 40, populasi vektor rentan akan berkurang, kemudian konstan setelah hari ke 60. Sedangkan populasi tanaman yang terprotectan akan meningkat dan konstan setelah hari 160, ketika  $R_0 < 1$ , sedangkan ketika  $R_0 > 0$  tanman yang terprotectant akan berkurang kemudian konstan setelah hari ke 300.

Gambar 4 dan Gambar 7 menunjukkan bahwa populasi tanaman yang terinfeksi dan vektor yang terinfeksi akan berkurang. Gambar 5 menunjukkan bahwa populasi tanaman protectan akan bertambah, dan berkurang setelah hari ke 3. Gambar 6 menunjukkan bahwa populasi tanaman yang terinfeksi akan berkurang, sedangkan Gambar 8 menunjukkan bahwa populasi vektor yang terinfeksi akan berkurang, dan bertambah setelah hari ke 3. Gambar 4, Gambar 5, dan Gambar 7 memperlihatkan bahwa populasi meningkat, sedangkan Gambar 6 dan Gambar 8, menunjukkan bahwa populasi infeksi menurun.

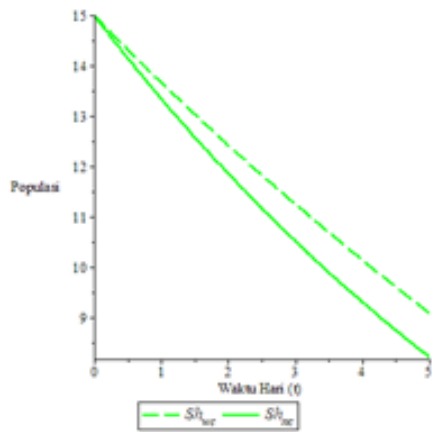




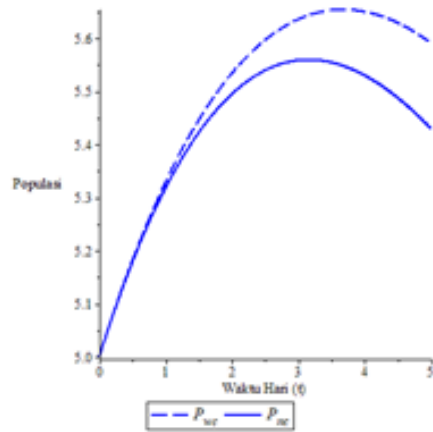
GAMBAR 2. Dinamika Populasi tanaman terong ketika  $R_0 < 1$ .



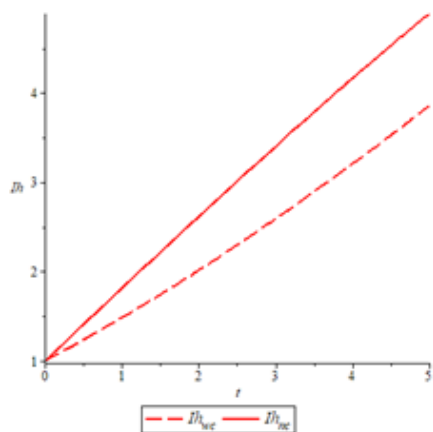
GAMBAR 3. Dinamika Populasi tanaman terong ketika  $R_0 > 1$ .



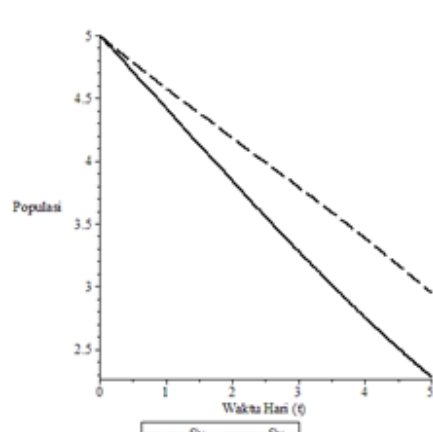
GAMBAR 4. Populasi tanaman terong rentan dengan kontrol dan tanpa kontrol.



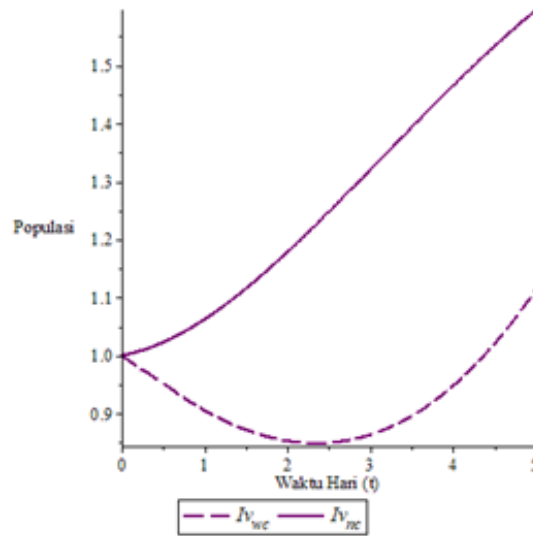
GAMBAR 5. Populasi tanaman terong *protectant* dengan kontrol dan tanpa kontrol.



GAMBAR 6. Populasi tanaman terong terinfeksi dengan kontrol dan tanpa kontrol.



GAMBAR 7. Populasi vektor rentan dengan kontrol dan tanpa kontrol.



GAMBAR 8. Populasi vektor terinfeksi dengan kontrol dan tanpa kontrol.

## 5. SIMPULAN

Pada penelitian ini dikembangkan model penyebaran penyakit kuning pada tanaman terong dengan transmisi vektor, dan protectan. Berdasarkan hasil analisis  $R_0$ , titik ekuilibrium endemik akan stabil jika  $R_0 > 1$ , namun jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium endemik tidak stabil. Diberikan pula simulasi numerik untuk menggambarkan hasil. Pada penelitian ini juga dibentuk model kontrol optimal untuk mencegah penyebaran penyakit kuning pada tanaman terong yang disebarkan oleh kutu kebul dengan efek *A.aleyrodhis*. Dapat dilihat secara numerik, bahwa strategi kontrol optimal. Simulasi numerik menunjukkan bahwa populasi vektor yang terinfeksi akan menurun sampai dua setengah hari dan kemudian akan meningkat. Sedangkan untuk populasi tanaman yang terinfeksi menunjukkan bahwa populasi akan berkurang. Populasi tanaman dan vektor yang rentan akan bertambah. Sedangkan populasi tanaman yang *protectant* akan meningkat, dan menurun setelah hari ke empat. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa perlakuan kontrol menggunakan *A.aleyrodhis* dapat mengontrol kutu kebul penyebaran penyakit virus kuning pada tanaman terong secara optimal.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Tanik, J., 2018, Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Produksi Usahatani Terong Ungu di Kelompok Tani Koko Naibate Desa Manunain A Kecamatan Insana, *Agrimor*, Volume 3, Issue 3, Pages 44-46.
- [2] Taufik, A.N., Berlian, L., Shavira, M.U., and Ramadhan, A.R., 2020, Analisis Keberadaan Virus Gemini Pada Tanaman Terong di Daerah Penancangan Kota Serang, *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan FKIP*, Volume 3, Issue 1, Pages 494-501.
- [3] Ali, F. and Aprilia, R.L., 2018, Serangan virus kuning terong pada induksi ekstrak daun Clerodendrum japonicum dan Mirabilis jalapa, *Agrovigor: Jurnal Agroekoteknologi*, Volume 11, Issue 2, Pages 101-105.
- [4] Morales, F.J. and Anderson, P.K., 2001, The emergence and dissemination of whitefly-transmitted geminiviruses in Latin America, *Archives of Virology*, Volume 146, Issue 3, Pages 415-441.
- [5] Hasyim, A., Setiawati W., Liferdi L., 2016, Kutu Kebul Bemisia tabaci Gennadius (Hemiptera: Aleyrodidae) Penyebar Penyakit Virus Mosaik Kuning pada Tanaman Terong, *IPTEK Hortikultura*, No 12, Pages 50-54.
- [6] Gunaeni, N., Setiawati, W., Murtiningsih, R., and Rubiati, T., 2008, *Virus Kuning Dan Cara Pengendaliannya*, Balai Penelitian Sayuran, Lembang.

- [7] Ariyanti, N.A., 2012, Mekanisme infeksi virus kuning cabai (Pepper yellow leaf curl virus) dan pengaruhnya terhadap proses fisiologi tanaman cabai, *Prosiding Seminar Biologi, Volume 9, Issue 1*.
- [8] Xie, W., Liu, Y., Wang, S., Wu, Q., Pan, H., Yang, X., Guo, L., and Zhang, Y., 2014, Sensitivity of Bemisia tabaci (Hemiptera: Aleyrodidae) to several new insecticides in China: Effects of insecticide type and whitefly species, strain, and stage, *Journal of Insect Science, Volume 14, Issue 1, Pages 1–7*.
- [9] Friarini, Y.P., Witjaksono, W., and Suputa, S., 2016, Study of The Use Of Maize as Barrier Crop in Chili to Control Bemisia tabaci (Gennadius) Population, *Jurnal Perlindungan Tanaman Indonesia, Volume 20, Issue 2, Pages 79–83*.
- [10] Sari, K.P. and Sulisty, A., 2018, Assessment of Soybean Resistance to Whitefly (Bemisia tabaci Genn.) Infestations, *Pertanika Journal of Tropical Agricultural Science, Volume 41, Issue 2, Pages 825–832*.
- [11] Sutarman, S., (2017), *Dasar-Dasar Ilmu Penyakit Tanaman*, UMSIDA Press.
- [12] Prayogo, Y. and Bayu, M.S.Y.I., 2020, Biological control of Bemisia tabaci gennadius by using entomopathogenic fungi Aschersonia aleyrodalis, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, Volume 456, Issue 1, Page 012041*.
- [13] Meekes, E.T.M., Fransen, J.J., and van Lenteren, J.C., 2002, Pathogenicity of Aschersonia spp. against whiteflies Bemisia argentifolii and Trialeurodes vaporariorum, *Journal of Invertebrate Pathology, Volume 81, Issue 1, Pages 1–11*.
- [14] van Lenteren, J.C. and Fransen, J.J., 1994, Survival of the parasitoid Encarsia formosa after treatment of parasitized greenhouse whitefly larvae with fungal spores of Aschersonia aleyrodalis, *Entomologia Experimentalis et Applicata, Volume 71, Issue 3, Pages 235–243*.
- [15] Qiu, J., Song, F., Mao, L., Tu, J., and Guan, X., 2013, Time-dose-mortality data and modeling for the entomopathogenic fungus Aschersonia placenta against the whitefly Bemisia tabaci, *Canadian Journal of Microbiology, Volume 59, Issue 2, Pages 97–101*.
- [16] Allen, L.J.S., Bokil, V.A., Cunniffe, N.J., Hamelin, F.M., Hilker, F.M., and Jeger, M.J., 2019, Modelling vector transmission and epidemiology of co-infecting plant viruses, *Viruses, Volume 11, Issue 12, Pages 1–26*.
- [17] Murwayi, A.L.M., Onyango, T., and Owour, B., 2017, Mathematical analysis of plant disease dispersion model that incorporates wind strength and insect vector at equilibrium, *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, Volume 22, Issue 1, 1–17*.
- [18] Anggriani, N., Mardiyah, M., Istifadah, N., and Supriatna, A.K., 2018, Optimal control issues in plant disease with host demographic factor and botanical fungicides, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 332, Issue 1, Page 12036*.
- [19] Anggriani, N., Putri, L.N., and Supriatna, A.K., 2015, Stability analysis and optimal control of plant fungal epidemic: An explicit model with curative factor, *AIP Conference Proceedings, Volume 1651, Issue 1, 40–47*.
- [20] Anggriani, N., Yusuf, M., and Supriatna, A.K., 2017, The effect of insecticide on the vector of rice Tungro disease: Insight from a mathematical model, *International Information Institute (Tokyo). Information, Volume 20, Issue 9A, Pages 6197–6206*.
- [21] Amelia, R., Mardiyah, M., Nahar, J., Anggriani, N., and Supriatna, A.K., 2019, Optimal control for the use of botanical fungicides in the spread of plant diseases, *Journal of Physics: Conference Series, Volume 1315, Issue 1, Page 012054*.
- [22] Amelia, R., Anggriani, N., Istifadah, N., and Supriatna, A.K., 2021, Stability analysis for yellow virus disease mathematical model of red chili plants, *Journal of Physics: Conference Series, Volume 1722, Issue 1, Page 012043*.
- [23] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P., and Roberts, M.G., 2010, The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models, *Journal of the Royal Society Interface, Volume 7, Issue 47, Pages 873–885*.
- [24] Lenhart, S. and Workman, J.T., 2007, *Optimal Control Applied to Biological Models* (1st ed.), Chapman and Hall/CRC.

