Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 14, Roma (1994), 331-339

# Disuguaglianze variazionali: una presentazione a carattere elementare

**C. BAIOCCHI**

*Ho conosciuto Aldo Ghizzetti in occasione del Corso NATO "Theory and Application of Monotone Operators" (Venezia, 1968; [2]). Ho conservato un ricordo molto vivo dello stile e della signorilità di Aldo Ghizzetti; in particolare quando mi confessava di sentirsi un po' a disagio, ritenendo troppo elementari gli argomenti che esponeva nel suo corso. In realtà ritengo fosse la sua chiarezza nell'esposizione che rendeva facilmente comprensibili argomenti che del tutto elementari non erano.*

RIASSUNTO: *In questo lavoro voglio presentare alcuni risultati collegati agli operatori monotoni, cercando di fornire per tali risultati una dimostrazione che faccia appello soltanto a strumenti di carattere elementare. Mi limiterò qui a sviluppare la trattazione in dimensione finita, rinviando ad un lavoro successivo per estensioni e generalizzazioni.*

ABSTRACT: *The theory of Monotone Operators can be developped in various ways, but almost any presentation requires the use of some "fine" results of Functional Analysis (like the Brower's fixed point Theorem, or the Ky Fan's Lemma). We want to give here a treatment requiring only the Weierstrass Theorem and the characterization of compacts sets through the "finite intersection" property.*

---

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività finanziarie del M.U.R.S.T..
KEY WORDS AND PHRASES: *Variational inequalities – Monotone operators – Minty's lemma*

## 1 – Premesse

Ci farà comodo il seguente risultato: se $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{R}^n$ è un *cono*[1], si ha:

$$\text{se } \mathbf{K} \text{ non è denso,} \quad \exists\, \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \quad \text{tale che} \quad (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{c} \in \mathbf{K}\,. \tag{1.1}$$

Qui e nel seguito $(\cdot, \cdot)$ indica il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$; naturalmente, in dimensione finita, un cono è denso se e solo se coincide con tutto lo spazio; e la (1.1) potrebbe essere dedotta dal teorema di Hahn-Banach. Noi invece dedurremo (1.1) da un risultato di esistenza relativo ad un caso particolare di *Disequazione Variazionale*.

Precisamente, cominciamo ad osservare che, fissati $\mathcal{C}$ sottoinsieme compatto non vuoto di $\mathbf{R}^n$, ed $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, la funzione distanza:

$$\mathcal{C} \ni \mathbf{y} \mapsto d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

è continua; quindi (teorema di Weierstrass) assume minimo. L'ipotesi "$\mathcal{C}$ compatto" può poi essere indebolita assumendo soltanto "$\mathcal{C}$ chiuso" (basterà sostituire $\mathcal{C}$ con l'intersezione tra $\mathcal{C}$ ed una palla di centro $\mathbf{x}$ e raggio $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0)$; $\mathbf{c}_0$ essendo un arbitrario punto di $\mathcal{C}$). Controlliamo ora che, se si aggiunge un'ipotesi di convessità su $\mathcal{C}$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ il punto $\mathbf{x}_0$ di minima distanza da $\mathcal{C}$ è unico; e soddisfa la disuguaglianza:

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}\,; \quad (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) \leq 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathcal{C}\,. \tag{1.2}$$

Si consideri infatti la funzione $\mathcal{C} \ni \mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{y}) := d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$; l'unicità del punto di minimo $\mathbf{x}_0$ è assicurata dalla stretta convessità della $f$; per ogni $y \in \mathcal{C}$ la disequazione (1.2) si ottiene scrivendo che la funzione

$$[0, 1] \ni \lambda \mapsto f\big((1 - \lambda)\mathbf{y} + \lambda \mathbf{x}_0\big)$$

ha minimo in $\lambda = 1$.

Osservazione 1.1. Si controlla facilmente che la (1.2) ha al più una soluzione; in particolare essa è una *caratterizzazione*, e non solo una

A.M.S. Classification: 46N10

[1] Cioè: un insieme convesso che, per ogni suo punto $P$, contiene tutta la semiretta uscente dall'origine e passante per $P$.

conseguenza, del fatto che $\mathbf{x}_0$, è il punto di minima distanza. La (1.2) è in effetti il più semplice possibile problema di tipo *Disequazione Variazionale*. □

Tornando ora alla validità di (1.1), osserviamo che se $\mathcal{C}$ è un cono, nella (1.2) è lecito scegliere sia $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ che $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}_0$, ottenendo così la doppia diseguaglianza:

$$(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq 0\,; \quad (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}, -\mathbf{x}_0) \leq 0$$

che, reinserita in (1.2), dà:

$$(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \qquad \forall\, \mathbf{y} \in \mathcal{C}\,. \tag{1.3}$$

Sia allora $\mathbf{K}$ un cono non denso; detta $\mathcal{C}$ la chiusura di $\mathbf{K}$, si fissi un qualunque punto $\mathbf{x}$ fuori di $\mathcal{C}$, e sia $\mathbf{x}_0$ il punto di minima distanza da $\mathcal{C}$; scegliendo $\mathbf{z} := \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$ è $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ perché $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$, $\mathbf{x} \notin \mathcal{C}$; e da (1.3) segue (1.1).

## 2 – Un lemma algebrico

Fissata una matrice quadrata di ordine $n$:

$$\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

siamo interessati a dare condizioni sufficienti ad assicurare che il problema:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,; \qquad \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{2.1}$$

ammetta soluzioni non nulle. Vale il seguente risultato, che ci sembra interessante di per sé:

Lemma. *Se la matrice* $\mathbf{M}$ *verifica la condizione:*

$$m_{i,j} + m_{j,i} \geq 0 \quad \textit{per} \quad i,j = 1,\dots,n \tag{2.2}$$

*esistono soluzioni non nulle del problema* (2.1).

DIM. Indichiamo con $\mathbf{M}^*$ la matrice trasposta di $\mathbf{M}$, con $\mathcal{P}$ il cono dei positivi:

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

e con $\mathbf{K}$ il cono $\mathbf{M}^*\mathcal{P} + \mathcal{P}$:

$$\mathbf{K} := \{\mathbf{M}^* \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z} \mid \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{P}\}\,.$$

Osservato che la (2.2) implica:

$$\text{per} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P} \quad \text{risulta} \quad (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{P} \tag{2.3}$$

distinguiamo due casi:

CASO (a): $\mathbf{K}$ è denso in $\mathbf{R}^n$.
Allora esistono $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}$ tali che $\mathbf{M}^* \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y}$ ha ogni componente strettamente negativa; quindi $-\mathbf{M}^* \cdot \mathbf{x} > 0$[2], il che implica in particolare $\mathbf{x} > 0$; ed $\mathbf{x}$ risolve (2.1) essendo $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} \geq -\mathbf{M}^* \cdot \mathbf{x}$ grazie a (2.3).

CASO (b): $\mathbf{K}$ non è denso in $\mathbf{R}^n$.
Allora si può trovare $\mathbf{x}$ come in (1.1), cioè:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\,; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{P}\,.$$

Scegliendo $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ si ottiene $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$; scegliendo poi $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ si ottiene $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

In entrambi i casi abbiamo trovato una soluzione non nulla di (2.1). $\square$

## 3 – Risolubilità di un sistema di disequazioni

Nel seguito saremo interessati alle (eventuali) soluzioni di una famiglia di disequazioni; precisamente, dati $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ tali che:

$$\mathcal{C} \quad \text{è un sottoinsieme compatto convesso di} \quad \mathbf{R}^n \tag{3.1}$$

$$F(x, y) \quad \text{è una funzione reale definita e continua su} \quad \mathcal{C} \times \mathcal{C} \tag{3.2}$$

---

[2] Nel senso che sta in $\mathcal{P}$ e non è il vettore nullo.

$$(3.3) \qquad \mathcal{C} \ni v \mapsto F(\cdot, v) \quad \text{è concava}$$

si cerca $u$ con:

$$(3.4) \qquad u \in \mathcal{C}\,; \quad F(v,u) \geq 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{C}\,.$$

Se introduciamo la notazione:

$$(3.5) \qquad \sigma^*(v) := \{u \in \mathcal{C} \mid F(v,u) \geq 0\}$$

l'insieme (eventualmente vuoto!) $\mathcal{S}$ delle soluzioni di (3.4) è ovviamente dato da $\mathcal{S} = \bigcap\limits_{v \in \mathcal{C}} \sigma^*(v)$; si tratta in ogni caso di un insieme compatto convesso (perché intersezione di compatti convessi) che rischia però di essere vuoto. Una ben nota caratterizzazione della compattezza assicura che tale insieme sarà non vuoto se e solo se le corrispondenti intersezioni finite sono non vuote:

$$(3.6) \qquad \forall\, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathcal{C} \quad \text{si ha} \quad \bigcap_{i=1}^{n} \sigma^*(c_i) \neq \emptyset\,.$$

Forniamo ora un teorema di esistenza come conseguenza del Lemma:

Corollario 3.1. *Se risulta:*

$$(3.7) \qquad F(u,v) + F(v,u) \geq 0 \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{C}$$

(*ipotesi che nel seguito sarà detta di* monotonia)*, il problema* (3.4) *ammette soluzioni.*

Dim. Come già osservato, si tratta di controllare la validità di (3.6). Se, invece che genericamente in $\mathcal{C}$, cerchiamo le soluzioni nell'inviluppo convesso dei punti $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, basta poter risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \text{Trovare} \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}\,, \quad \text{non negativi e con somma 1, tali che:} \\ F\left(c_j, \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k c_k\right) \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

o ancora, grazie all'ipotesi di concavità, basterà poter risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \text{Trovare} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}, \quad \text{non negativi e con somma 1, tali che:} \\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F(c_j, c_k) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

A questo punto la condizione sulla somma dei $\lambda_j$ è inessenziale (basta che non siano tutti nulli!) e la risolubilità del sistema di disequazioni è conseguenza immediata del Lemma: la *monotonia* di $F$ dà infatti la validità di (2.2). ∎

## 4 – Un "Lemma di Minty" astratto

In realtà, più che al problema (3.4), saremo interessati ad un altro problema; precisamente, sempre nelle ipotesi (3.1), (3.2), (3.3), (3.7), siamo interessati a risolvere il problema:

$$\text{Trovare} \quad u \in \mathcal{C} \quad \text{tale che} \quad F(u, v) \leq 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{C}. \tag{4.1}$$

Lemma 4.1 (di Minty). *Ogni soluzione di* (4.1) *risolve* (3.4)*; il viceversa vale nell'ipotesi aggiuntiva:*

$$F(w, w) \leq 0 \qquad \forall\, w \in \mathcal{C}. \tag{4.2}$$

Dim. Grazie a (3.7) ogni eventuale soluzione di (4.1) risolve (3.4). Per il viceversa, sia $u$ soluzione di (3.4); per ogni $v \in \mathcal{C}$ si fissi comunque $w$ nel segmento (aperto) di estremi $u, v$; in particolare è $w \in \mathcal{C}$, quindi da un lato vale la (4.2) e d'altro lato è $F(w, u) \geq 0$ (perché $u$ soddisfa (3.4)). La funzione $z \mapsto F(w, z)$ è concava sul segmento di estremi $u, v$, è positiva nell'estremo $z = u$ e negativa nel punto interno $z = w$; deve perciò risultare negativa all'estremo $z = v$. Quindi:

$$F(w, v) \leq 0 \quad \text{per } w \text{ nel segmento aperto di estremi } u, v.$$

Per la continuità di $F$, ne segue $F(u, v) \leq 0$; tale relazione, valendo per ogni $v \in \mathcal{C}$, completa la dimostrazione. ∎

Osservazione 4.1. Come già detto, noi ci limitiamo qui a lavorare in dimensione finita; in vista delle estensioni ad ambiti più generali è opportuno tuttavia osservare che le ipotesi di natura topologica possono essere sensibilmente indebolite. In particolare:

* per quanto riguarda la funzione $\mathcal{C} \ni u \mapsto F(u, \cdot)$, abbiamo fatto uso solo del fatto che la restrizione ai segmenti di tale funzione è semicontinua inferiormente;

* per quanto riguarda la funzione $\mathcal{C} \ni v \mapsto F(\cdot, v)$, è servito il fatto che gli insiemi $\sigma^*(v)$ sono chiusi; basta perciò imporre una semicontinuità superiore di tale funzione;

* per quanto riguarda l'ipotesi di compattezza di $\mathcal{C}$, basterebbe supporre $\mathcal{C}$ convesso chiuso, pur di aggiungere l'ipotesi:

$$\begin{aligned} &\text{esistono } u_0 \in \mathcal{C},\ \mathbf{K} \text{ compatto tali che} \\ &F(v, u_0) > 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{C}, \quad v \notin \mathbf{K}\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Naturalmente, nell'ambito di (3.7), la (4.2) potrebbe essere riscritta nella forma $F(w, w) = 0\ \forall\ w \in \mathcal{C}$. Va d'altronde osservato che, nelle ipotesi (3.1), (3.2), la (3.7) *non è necessaria*, la sola (4.2) essendo sufficiente ad implicare il teorema di esistenza per il problema (4.1). Si tratta tuttavia di un risultato *fine*, sostanzialmente equivalente al teorema di punto fisso di Brouwer; che esula quindi da quell'ambito *elementare* nel quale volevamo sviluppare la trattazione. □

## 5 – Un esempio

Siano dati $\mathcal{C}$, $a(\cdot,\cdot)$, $L(\cdot)$ tali che:

$$\begin{cases} \mathcal{C} & \text{è un convesso chiuso limitato di } \mathbf{R}^n; \\ a : \{u, v\} \to a(u, v) & \text{è bilineare da } \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \text{ in } \mathbf{R}; \\ L : v \to L(v) & \text{è lineare da } \mathbf{R}^n \text{ in } \mathbf{R}. \end{cases}$$

Siamo interessati alla risolubilità della “Disequazione Variazionale”:

(5.1) Trovare $u \in \mathcal{C}$ tale che $a(u, u-v) \leq L(u-v) \quad \forall\, v \in \mathcal{C}\,.$

Si tratta del problema (4.1) relativo alla funzione

$$F(u,v) := a(u, u-v) - L(u,v)\,;$$

le (3.1), (3.2), (3.3), (4.2) sono banalmente verificate; l'ipotesi *esistenziale* (3.7) si scrive:

$$a(v,v) \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{C} - \mathcal{C} \tag{5.2}$$

che è quindi sufficiente ad assicurare l'esistenza di soluzioni della (5.1).

Quando si generalizza il problema, sostituendo $\mathbf{R}^n$ con uno spazio di Hilbert ed aggiungendo su $a(\cdot,\cdot)$, $L(\cdot)$ un'ipotesi di continuità, le considerazioni svolte in Osservazione 4.1 sono di applicazione immediata; la limitatezza di $\mathcal{C}$ può essere eliminata rinforzando la (5.2) con:

(5.3) esiste $\alpha > 0$ tale che $a(v,v) \geq \alpha \cdot \|v\|^2 \quad \forall\, v \in \mathcal{C} - \mathcal{C}$

che implica banalmente (4.3).

Osservazione 5.1. Molti problemi della Fisica Matematica possono essere formulati nel quadro astratto ora presentato. In alcuni di essi, tuttavia, risulta valida solo la (5.2) e non la (5.3). La trattazione matematica è allora molto più delicata; in proposito si vedano [1] e [3]. $\square$

## REFERENCES

[1] G. Fichera: *Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Rend. Acc. Naz. Lincei, S VIII, **34** (1963), 138-142.

[2] A. Ghizzetti (Editor): *Theory and Applications of Monotone Operators*, Proc. NATO Adv. Study Institute, Venezia 1968, Oderisi, Gubbio, (1969).

[3] C. Baiocchi – G. Buttazzo – F. Gastaldi – F. Tomarelli: *General existence theorems for unilateral problems in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **100** (1988), 148-189.

*Lavoro pervenuto alla redazione il 12 gennaio 1994*

Indirizzo dell'Autore:

C. Baiocchi – Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo" - Università "La Sapienza" di Roma – Piazzale A. Moro, 2 – 00185 Roma, Italia