



MODEL SPATIAL AUTOREGRESSIVE POISSON PADA JUMLAH PENDERITA MALARIA DI PROPINSI BENGKULU

Dian Agustina *
Universitas Bengkulu

Etis Sunandi
Universitas Bengkulu

Dyah Setyo Rini
Universitas Bengkulu

ABSTRACT: Propinsi Bengkulu terbagi menjadi 10 kabupaten dan kota, tujuh diantaranya dinyatakan endemik malaria. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan kejadian malaria di Propinsi Bengkulu dengan melihat kaitannya terhadap efek spasial. Karena kejadian malaria menyebar Poisson maka metode yang cocok digunakan adalah *Spatial Autoregressive Poisson*. Proses pendugaan parameter koefisien regresinya menggunakan iterasi dengan metode Newton-Raphson. Hasil yang diperoleh memberikan nilai korelasi spasial sebesar 0.0997 yang artinya jumlah penderita malaria dipengaruhi oleh kedekatan wilayah dan beberapa peubah penjelas, yaitu jumlah peserta BPJS, jumlah penerima kartu JAMKESMAS, jumlah sarana pendidikan, dan tempat BAB. Koefisien determinasi yang diperoleh adalah sebesar 0.33.

KEYWORDS: *Spatial, SAR Poisson, Malaria.*

* Corresponding Author: Program Studi Statistika FMIPA Universitas Bengkulu; Email: dianagustina@unib.ac.id

PENDAHULUAN

Malaria merupakan salah satu penyakit paling mematikan di dunia. Menurut data yang dikeluarkan oleh Organisasi Kesehatan Dunia (WHO), sekitar 3,2 milyar penduduk (setengah dari populasi dunia) tinggal di daerah berisiko tertular malaria. Pada tahun 2016, diperkirakan terdapat 216 juta kasus malaria, dimana 445 ribu kasus di antaranya menjadi penyebab kematian. Dari 10 kabupaten dan kota di Provinsi Bengkulu, 3 diantaranya telah dinyatakan terbebas dari malaria, yaitu Kabupaten Rejang Lebong, Kabupaten Lebong, dan Kabupaten Kepahiang (Kemenkes, 2016). Sedangkan 7 lainnya, termasuk Kota Bengkulu sebagai pusat kegiatan di Provinsi Bengkulu, belum terbebas dari malaria dan ditargetkan eliminasi malaria pada 2017-2019.

Eliminasi malaria merupakan suatu upaya untuk menghentikan penularan malaria setempat dalam satu wilayah geografis tertentu, dan bukan berarti tidak ada kasus malaria impor serta sudah tidak ada vektor malaria di wilayah tersebut. Kendati demikian, masih diperlukan kewaspadaan untuk mencegah penularan kembali. Karena penyebaran penyakit malaria disebabkan oleh penyebaran nyamuk, maka terdapat kemungkinan bahwa kejadian di suatu lokasi mempengaruhi kejadian di lokasi lain.

Segala sesuatu saling berhubungan satu dengan lainnya, tetapi sesuatu yang dekat lebih mempunyai pengaruh daripada sesuatu yang jauh (Tobler dalam Anselin 1988). Adanya efek spasial merupakan hal yang lazim terjadi antara satu wilayah dengan wilayah yang lain. Model yang dapat menjelaskan hubungan antara satu wilayah dengan wilayah sekitarnya adalah model spasial. Di samping itu, bila ditilik dari angka API, penderita malaria menyebar Poisson. Sehingga model *spatial*

autoregressive Poisson (SAR Poisson) merupakan model yang tepat untuk melihat faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kejadian malaria di Propinsi Bengkulu.

Penelitian dengan menggunakan efek spasial telah banyak dilakukan, antara lain Sunandi (2014) menggunakan model spasial bayes dalam pendugaan area kecil dengan peubah respon biner. Hasilnya adalah bahwa pengaruh spasial dapat memperbaiki pendugaan parameter pada area kecil yang diindikasikan dengan menurunnya nilai RMSE (*Root Mean Square Error*). Penelitian lainnya dilakukan oleh Rohimah (2015) yang menggunakan SAR Poisson untuk mendeteksi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah penderita HIV di Provinsi Jawa Timur. Selain itu terdapat pula penelitian Triana *et al.* (2017) mengenai pengetahuan dan sikap terhadap praktek pencegahan malaria di Kelurahan Sukarami Kota Bengkulu, dengan hasil bahwa terdapat hubungan bermakna antara pengetahuan tentang malaria terhadap perilaku penanggulangan malaria, tetapi tidak terdapat hubungan yang signifikan antara sikap tentang malaria terhadap perilaku penanggulangan malaria. Namun penelitian ini tidak memasukkan efek spasial didalamnya. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan pemodelan kejadian malaria di Propinsi Bengkulu dengan menggunakan metode *Spatial Autoregressive Poisson*.

BAHAN DAN METODE

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistika Provinsi Bengkulu (Susenas dan Podes 2016). Pengumpulan data sekunder dilakukan berkaitan dengan variabel kemiskinan yang akan digunakan. Variabel-variabel tersebut adalah Jumlah Penderita Malaria (Y), Jumlah Keluarga Tanpa Listrik (X1), Tempat Buang Air Besar (X2), Saluran Pembuangan Air (X3), Sumber Air Minum (X4), Sumber Air Mandi (X5), Jumlah Sarana Pendidikan (X6), Jumlah Sarana Kesehatan (X7), Jumlah Penderita Gizi Buruk (X8), Jumlah Penerima Kartu Jamkesmas (X9), Jumlah Surat Keterangan Tidak Mampu yang dikeluarkan Kantor Desa (X10), Jumlah Peserta BPJS (X11).

Model SAR Poisson

Penggunaan spasial pada model otoregresif untuk data cacah (Lambert *et al.* 2010) adalah:

$$\mu_i^{\text{SAR}} = \exp[\mathbf{a}_i \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}] \quad (1)$$

dengan \mathbf{a}_i merupakan vektor baris pada daerah ke- i yang berukuran $(1 \times n)$. Pada model SAR Poisson, nilai harapan pada daerah atau lokasi ke- i merupakan fungsi dari daerah tetangganya atau lokasi ke- j . Selain itu model SAR Poisson juga digunakan

untuk data pada peubah respon yang berbentuk cacahan (*count data*). Fungsi massa peluang dari model SAR Poisson adalah:

$$f(y_i|\mathbf{X}, \mathbf{W}^*; \boldsymbol{\beta}, \rho) = \frac{(\mu_i^{\text{SAR}})^{y_i} \exp(-\mu_i^{\text{SAR}})}{y_i!} \quad (2)$$

dengan $\mu_i^{\text{SAR}} = \exp(\mathbf{a}_i \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})$.

Fungsi kemungkinannya adalah:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \rho|\mathbf{X}, \mathbf{W}^*; y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{(\mu_i^{\text{SAR}})^{y_i} \exp(-\mu_i^{\text{SAR}})}{y_i!} \right\}$$

Fungsi log kemungkinannya adalah:

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \rho|\mathbf{X}, \mathbf{W}^*; y_1, y_2, \dots, y_n) &= \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \frac{(\mu_i^{\text{SAR}})^{y_i} \exp(-\mu_i^{\text{SAR}})}{y_i!} \right\} \\ &= \mathbf{y}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \sum_{i=1}^n \exp[\mathbf{a}_i \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}] - \sum_{i=1}^n \ln(y_i!) \end{aligned} \quad (3)$$

Pendugaan parameter ρ dan $\boldsymbol{\beta}$ menggunakan metode kemungkinan maksimum. Fungsi massa peluang dari sebaran Poisson adalah:

$$f(y_i|\mathbf{X}, \mathbf{W}^*; \boldsymbol{\beta}, \rho) = \frac{(\mu_i^{\text{SAR}})^{y_i} \exp(-\mu_i^{\text{SAR}})}{y_i!} \quad (4)$$

dengan $\mu_i^{\text{SAR}} = \exp(\mathbf{a}_i \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})$, fungsi log kemungkinan maksimum adalah:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \rho|\mathbf{X}, \mathbf{W}^*; y_1, y_2, \dots, y_n) = \mathbf{y}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \sum_{i=1}^n \exp([\mathbf{a}_i \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}]) - \sum_{i=1}^n \ln(y_i!) \quad (5)$$

Untuk memperoleh penduga parameter dari $\boldsymbol{\beta}$ dan ρ , maka fungsi log kemungkinan maksimum diturunkan terhadap parameternya. Turunan pertamanya adalah:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}' \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^{\text{SAR}}) = 0 \quad (6)$$

Dan
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^{\text{SAR}}) = 0 \quad (7)$$

dengan $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}^* \mathbf{A}^{-1}$

Turunan keduanya adalah:
$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} = -\mathbf{X}' \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X} \quad (8)$$

dengan $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag} [\mu_i^{\text{SAR}}]$,

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \rho} = \{\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^{\text{SAR}}\}' \mathbf{D} \mathbf{X} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \mathbf{L}}{\partial \rho^2} = 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}^*\mathbf{D}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^{\text{SAR}}) - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad (10)$$

Pendugaan parameter ρ dan $\boldsymbol{\beta}$ pada model SAR Poisson menggunakan iterasi dengan metode Newton-Raphson. Tahapan dari metode Newton-Raphson terdiri dari:

1. Menentukan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}^*$, dengan $\boldsymbol{\beta}_{(0)}^* = [\rho_0 \ \beta_{00}\beta_{10} \dots \beta_{k0}]$, iterasi pada saat $t = 0$.
2. Membentuk vektor gradien $\mathbf{g}'_{t+1} = \left[\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \rho}, \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right]$, dengan t menyatakan nomor iterasi.
3. Membentuk matriks Hessian \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}_{(k+1) \times (k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \rho} & \dots & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial \rho} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0^2} & \dots & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \beta_k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k^2} \end{bmatrix}$$

4. Memasukkan nilai $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}^*$ ke dalam elemen-elemen vektor \mathbf{g} dan matriks \mathbf{H} sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}_{(0)}$ dan $\mathbf{H}_{(0)}$.
5. Melakukan iterasi mulai dari $t=0$ pada persamaan: $\boldsymbol{\beta}_{(t+1)}^* = \boldsymbol{\beta}_t^* - \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{g}'_t$, nilai $\boldsymbol{\beta}_t^*$ merupakan sekumpulan penduga parameter yang konvergen pada iterasi ke- t .
6. Jika belum mencapai penduga parameter yang konvergen, maka pada langkah ke-2 dilakukan kembali sampai mencapai kekonvergenan. Kriteria konvergen diperoleh ketika akar ciri dari matriks informasi Fisher bernilai positif.

Untuk menguji signifikansi dari koefisien korelasi spasial ($\hat{\rho}$) dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ digunakan uji Wald (Lambert *et al.* 2010). Pengujian hipotesis untuk ρ adalah:

$H_0 : \rho = 0$ (tidak ada korelasi spasial)

$H_1 : \rho \neq 0$ (ada korelasi spasial)

$$G_\rho = \left\{ \frac{\hat{\rho}_0}{\widehat{\text{se}}(\hat{\rho}_0)} \right\}^2$$

statistik G_ρ akan mengikuti sebaran χ^2 dengan derajat bebas 1. Kriteria keputusan yang diambil yaitu menolak H_0 , jika $G_\rho > \chi^2_{(\alpha;1)}$.

Hipotesis untuk parameter koefisien β_k (Fleiss *et al.* 2003) adalah :

$H_0 : \beta_k = 0$

$H_1 : \beta_k \neq 0$

Dengan statistik uji Wald :

$$G_\beta = \left\{ \frac{\hat{\beta}_k}{\widehat{\text{se}}(\hat{\beta}_k)} \right\}^2$$

Statistic G_β akan mengikuti sebaran χ^2 dengan derajat bebas 1. Kriteria keputusan yang diambil yaitu menolak H_0 , jika $G_\beta > \chi^2_{(\alpha;1)}$. Galat baku diperoleh menggunakan matriks informasi Fisher $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ (McCulloch dan Searle 2001), dengan rumus sebagai berikut:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_0 \partial \rho} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_k \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_0 \beta_k} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_k^2} & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

ragam dari $\hat{\theta} \approx [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}$, sehingga galat baku = $\sqrt{[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}}$.

Setelah dilakukan penaksiran parameter dan uji signifikansi setiap penduga parameter, diperlukan ukuran koefisien determinasi yang dapat menggambarkan hubungan keeratan antara peubah respon dengan peubah penjelas. Koefisien determinasi atau R^2 merupakan ukuran proporsi keragaman peubah respon yang dapat diterangkan oleh peubah penjelas. Terdapat beberapa R^2 yang telah dikembangkan oleh (Cameron dan Windmeijer 1995) yang didasarkan pada sisaan devians (R_{DEV}^2), koreksi terhadap R_{DEV}^2 menggunakan derajat bebas ($R_{DEV,db}^2$), R^2 terkoreksi (R_{adj}^2), dan berdasarkan jumlah kuadrat (R_{JK}^2).

5

Rumus untuk R_{DEV}^2 :

$$R_{DEV}^2 = 1 - \frac{\ln L(\mathbf{y}) - \ln L(\hat{\mu})}{\ln L(\mathbf{y}) - \ln L(\bar{\mathbf{y}})}$$

Rumus untuk $R_{DEV,db}^2$:

$$R_{DEV,db}^2 = 1 - \frac{(n - k - 1)^{-1} [\ln L(\mathbf{y}) - \ln L(\hat{\mu})]}{(n - 1)^{-1} [\ln L(\mathbf{y}) - \ln L(\bar{\mathbf{y}})]}$$

Rumus untuk R_{adj}^2 :

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\ln L(\mathbf{y}) - \left[\ln L(\hat{\mu}) - \frac{k}{2} \right]}{[\ln L(\mathbf{y}) - \ln L(\bar{\mathbf{y}})]}$$

Rumus untuk R_{JK}^2 :

$$R_{JK}^2 = 1 - \frac{\sum_i^n (y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\sum_i^n ((y_i - \bar{y}))^2}$$

dengan $\ln L(y) = \sum_i^n [y_i \ln(y_i) - y_i - \ln(y_i!)]$ adalah logaritma bilangan asli (ln) dari fungsi kemungkinan maksimum ketika semua parameter β_j ($j = 0, 1, 2, \dots, k$) tidak disertakan dalam model, y_i adalah nilai pengamatan dari peubah respon; $\ln L(\hat{\mu}) = \sum_i^n [y_i \ln(\hat{\mu}) - \hat{\mu}_i - \ln(y_i!)]$ adalah logaritma bilangan asli dari fungsi kemungkinan maksimum ketika semua parameter β_j disertakan dalam model, $\hat{\mu}_i$ adalah nilai dugaan untuk pengamatan ke- i ; $\ln L(\bar{y}) = \sum_i^n [y_i \ln(\bar{y}) - \bar{y} - \ln(y_i!)]$ adalah logaritma bilangan asli dari fungsi kemungkinan maksimum ketika hanya β_0 yang disertakan dalam model, dan (\bar{y}) rata-rata respon y .

Matriks Pembobot Spasial

Matriks ketergantungan spasial adalah matriks yang menggambarkan hubungan antar daerah. Baris ke- i dari matriks pembobot menunjukkan hubungan pengamatan ke- i dengan semua pengamatan lainnya. Matriks pembobot yang digunakan berdasarkan tetangga terdekat (Fotheringham dan Rogerson 2009), yang didefinisikan sebagai berikut:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } j \text{ merupakan tetangga terdekat } i \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

6

Baris pada matriks ketergantungan spasial menunjukkan hubungan spasial suatu daerah dengan daerah lain, sehingga jumlah nilai pada baris ke- i merupakan jumlah tetangga yang dimiliki oleh daerah i yang dinotasikan:

$$c_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}$$

dengan c_i merupakan jumlah pembobot seluruh baris ke- i dan c_{ij} nilai pembobot pada baris ke- i dan kolom ke- j . Untuk melihat pengaruh masing-masing tetangga terhadap suatu daerah dapat dihitung dari rasio antara nilai pada daerah tertentu dengan total nilai daerah tetangganya. Nilai pembobot ini menunjukkan kekuatan interaksi antar daerah tersebut. Nilai pembobotan (w_{ij}^*) sesuai persamaan berikut:

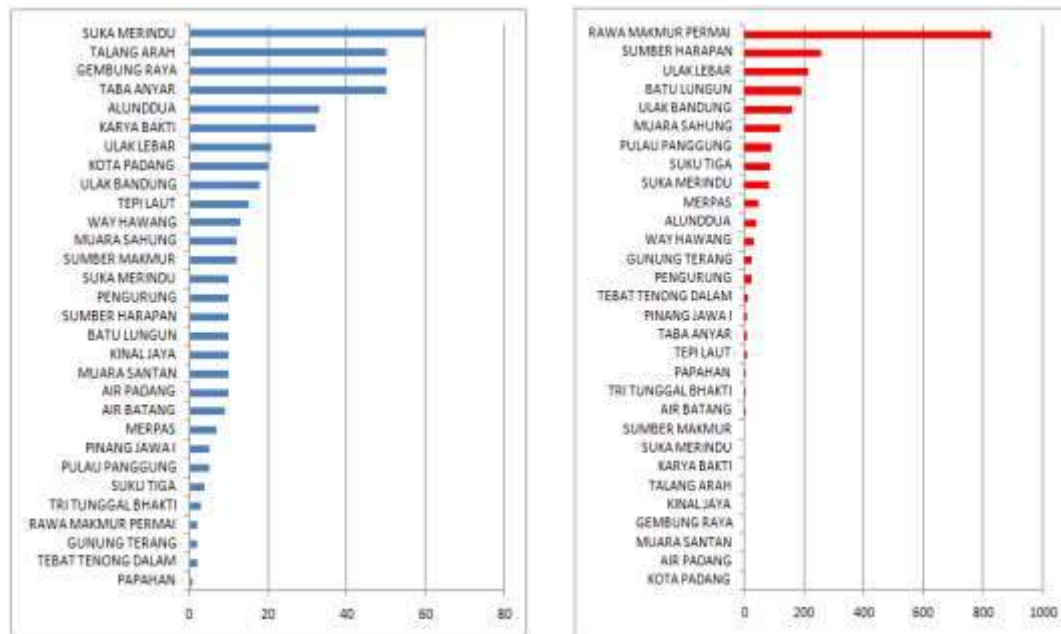
$$(w_{ij}^*) = \frac{c_{ij}}{c_i}$$

Nilai w_{ij}^* ini adalah elemen matriks yang sudah dinormalkan sehingga jumlah setiap baris sama dengan 1.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini jumlah penderita malaria dapat diasumsikan menyebar Poisson dan untuk melihat pengaruh spasial antar lokasi di setiap desa maka analisis yang digunakan adalah spasial autoregresif Poisson. Jumlah penderita malaria yang

tersebar di 30 desa/kelurahan sampel dapat dilihat dalam Gambar 1 (a) . Desa dengan jumlah penderita malaria terbanyak adalah Suka Merindu yang terletak di Kabupaten Bengkulu Utara (60 kejadian). Menurut jumlah peserta BPJS, Kelurahan Rawa Makmur Permai memiliki lebih dari 800 peserta BPJS. Sebaran peserta BPJS dapat dilihat pada Gambar 1 (b).

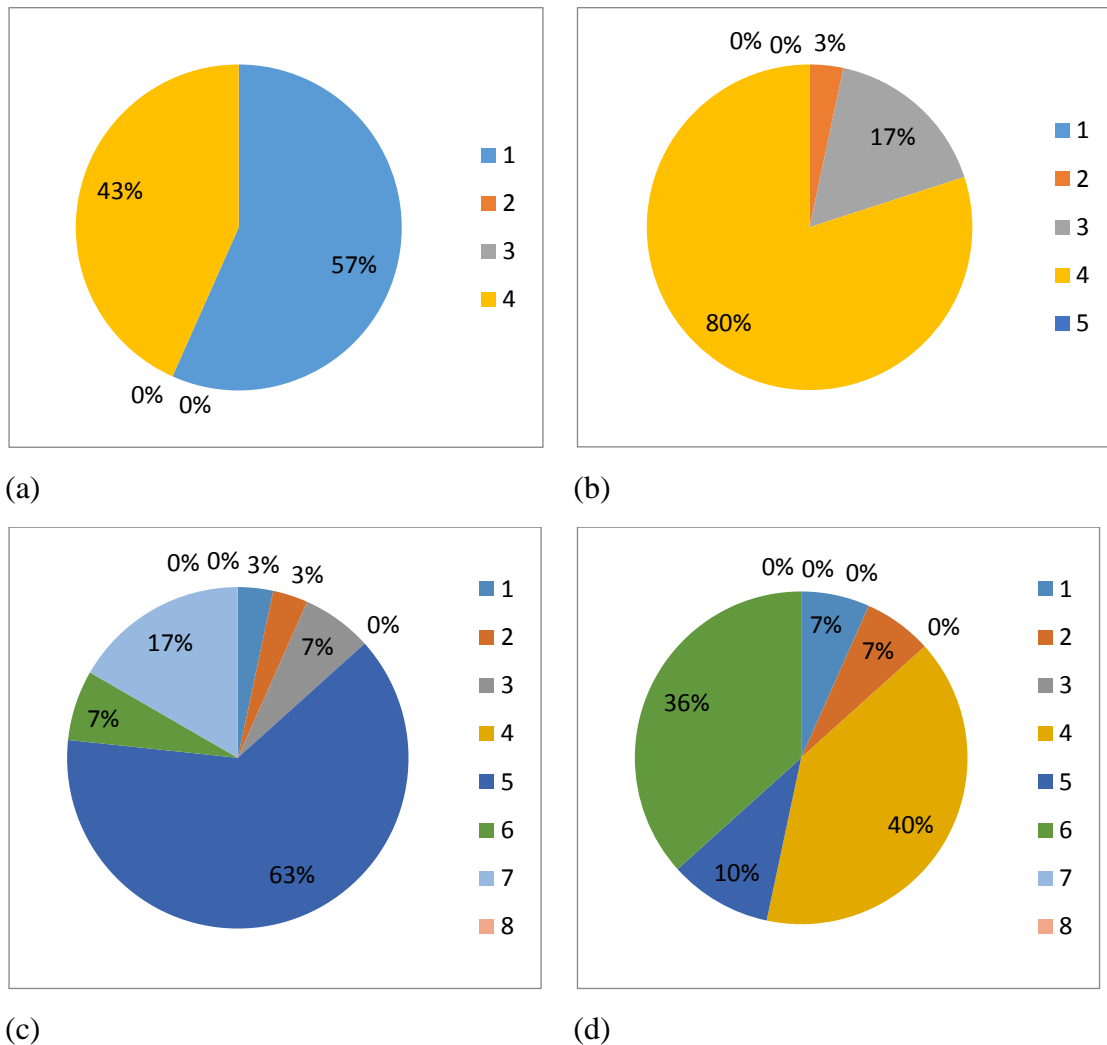


(a)

(b)

Gambar 1. (a) Sebaran Jumlah Penderita Malaria; (b) Sebaran Jumlah Peserta BPJS

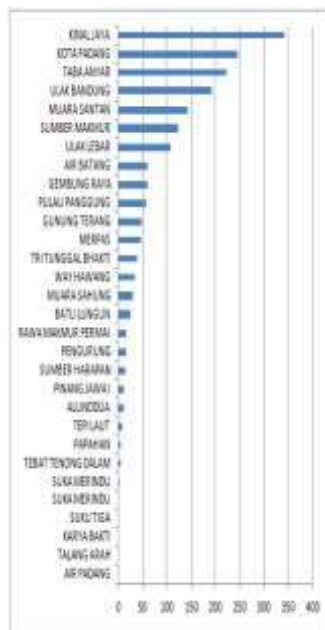
BPS membagi tempat ini menjadi 4 kategori yaitu: 1) jamban sendiri, 2) jamban bersama, 3) jamban umum, dan 4) bukan jamban. Pada Gambar 2 (a) dapat dilihat bahwa dari 30 desa sampel mayoritas penduduknya hanya menggunakan 2 kategori tempat buang air besar, yaitu kategori 1 sebesar 57% dan kategori 4 sebesar 43% . Sedangkan, variabel saluran pembuangan air yang mayoritas digunakan warga, seperti pada Gambar 2 (b), yaitu kategori 1: lubang resapan, kategori 2: drainase (got/selokan), kategori 3: sungai/saluran irigasi/danau/laut, kategori 4: dalam lubang/tanah terbuka, kategori 5: selainnya. Mayoritas warga di desa sampel hanya menggunakan saluran pembuangan air kategori 2 (3%), 3 (17%), dan 4 (80%).



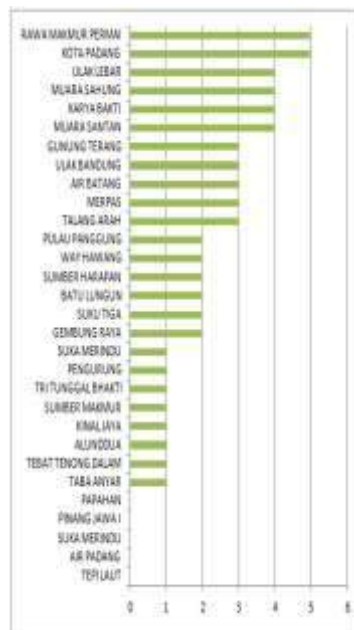
Gambar 2. (a) Sebaran Tempat Buang Air Besar yang Mayoritas digunakan warga; (b) Sebaran Saluran Pembuangan Air yang Mayoritas digunakan warga; (c) Sebaran Sumber Air Minum yang Digunakan Mayoritas Warga; (d) Sebaran Sumber Air Mandi yang digunakan Mayoritas Warga

Selain itu, sumber air minum dibagi menjadi 9 kategori. 1) air kemasan, 2) ledeng dengan meteran (PAM/PDAM), 3) ledeng tanpa meteran, 4) sumur bor atau pompa, 5) sumur, 6) mata air, 7) sungai/danau/kolam, 8) air hujan, dan 9) lainnya. Dari data sampel, mayoritas sebanyak 63% atau 19 desa yang warganya menggunakan sumur sebagai sumber air minum (Gambar 2 (c)). Kemudian, Terdapat 9 kategori sumber air mandi, seperti kateegori sumber air minum di atas. Dari 9 kategori ini mayoritas (36%) penduduk di desa sampel menggunakan mata air dan sebanyak 40% desa yang warganya menggunakan sumur bor atau pompa sebagai sumber air mandi (Gambar 2 (d)).

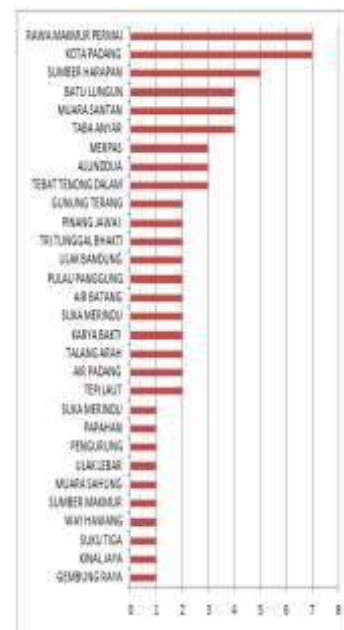
Dari Gambar 3, Kinal Jaya, di Kabupaten Bengkulu Utara, merupakan desa sampel dengan jumlah keluarga tanpa listrik terbanyak, yaitu 342 keluarga dan paling banyak kasus gizi buruk, yaitu ada 18 kasus gizi.. Sedangkan, Kelurahan Rawa Makmur Permai di Kota Bengkulu dan Desa Kota Padang di Kabupaten Rejang Lebong memiliki jumlah sarana pendidikan terbanyak yaitu masing-masing sebanyak 5 unit. Kemudian, Jumlah sarana kesehatan yang tinggi, sebanyak 7 sarana, terdapat di Kelurahan Rawa Makmur dan Desa Kota Padang. Selanjutnya, desa sampel dengan penerima kartu Jamkesmas adalah Desa Batu Lungun (1200 keluarga). Terakhir, SKTM yang paling banyak dikeluarkan oleh kantor desa di Desa Air Batang, Desa Gembung Raya, dan Desa Muara Santan (>140 SKTM).



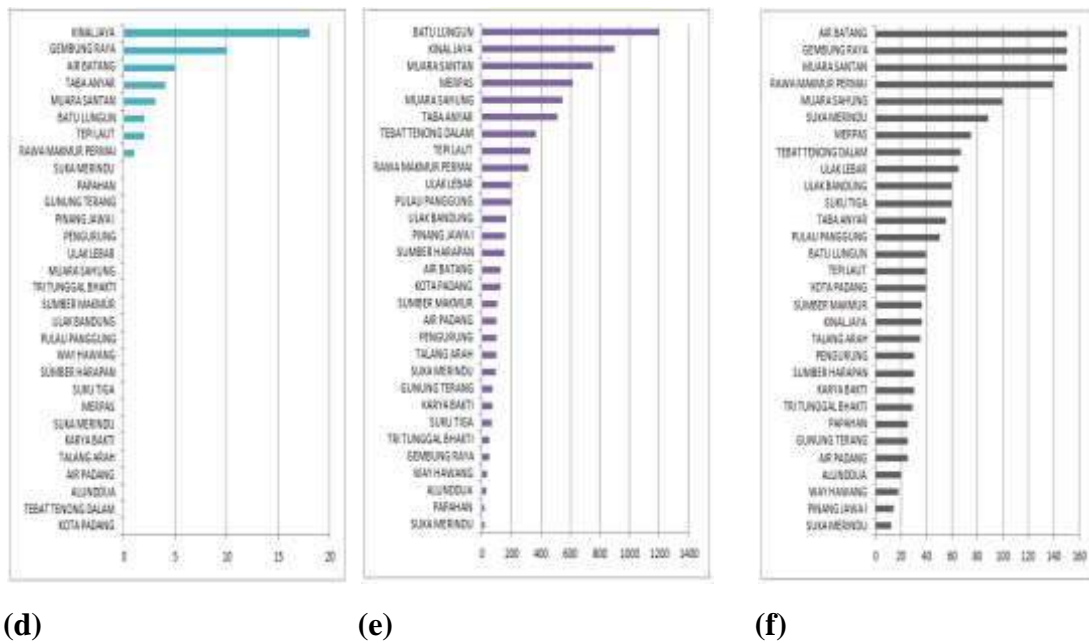
(a)



(b)



(c)



Gambar 3. (a) Sebaran Jumlah Keluarga Tanpa Listrik; (b) Sebaran Jumlah Sarana Pendidikan; (c) Sebaran Jumlah Sarana Kesehatan; (d) Sebaran Jumlah Kasus Gizi Buruk; (e) Sebaran Jumlah Penerima Kartu JAMKESMAS; (f) Sebaran Jumlah SKTM yang dikeluarkan Kantor Desa

Pendugaan parameter koefisien model spasial autoregresif Poisson (SAR Poisson) dilakukan dengan menggunakan metode pendugaan kemungkinan maksimum. Model SAR Poisson termasuk model nonlinier dan bentuknya tidak *closed form*, sehingga proses pendugaan parameter koefisien regresinya menggunakan iterasi dengan metode Newton-Raphson. Pada Lampiran dapat dinilai awal pada iterasi ke-0 dan hasil dari setiap proses iterasi. Nilai konvergen ditentukan ketika selisih dari $|\beta_{(t+1)}^* - \beta_t^*| < 10^{-18}$. Ketika iterasi ke-10 nilai koefisien untuk penduga parameter sudah mencapai konvergen.

Analisis model SAR Poisson di Propinsi Bengkulu dengan melibatkan wilayah administratif memperlihatkan bahwa jumlah penderita malaria dipengaruhi oleh kedekatan wilayah dan beberapa peubah penjelas. Tabel 11 menunjukkan bahwa semakin rendah jumlah peserta BPJS, jumlah penerima kartu JAMKESMAS, jumlah sarana pendidikan, dan tempat BAB akan meningkatkan jumlah penderita malaria. Sedangkan peningkatan jumlah SKTM, jumlah penderita gizi buruk, jumlah sarana kesehatan, sumber air mandi, sumber air minum, saluran pembuangan air, dan jumlah

keluarga tanpa listrik akan meningkatkan jumlah penderita malaria. Nilai R^2 dari model yang diperoleh sebesar 0.33.

Tabel 1 Nilai dugaan parameter model spasial autokorelasi Poisson

| Parameter | Nilai dugaan |
|---|---------------------|
| ρ (spasial) | 0.0997 |
| β_0 (intersep) | - 0.18614 |
| β_1 (keluarga tanpa listrik) | 0.001595 |
| β_2 (tempat BAB) | - 0.35247 |
| β_3 (saluran pembuangan air) | 0.561404 |
| β_4 (sumber air minum) | 0.078037 |
| β_5 (sumber air mandi) | 0.178317 |
| β_6 (jumlah sarana pendidikan) | - 0.07444 |
| β_7 (jumlah sarana kesehatan) | 0.053607 |
| β_8 (jumlah penderita gizi buruk) | 0.02093 |
| β_9 (JAMKESMAS) | - 0.00084 |
| β_{10} (SKTM) | 0.004075 |
| β_{11} (BPJS) | - 0.00057 |

Model SAR Poisson yang diperoleh sebagai berikut:

$$\mu_i^{\text{SAR}} = \exp[a_i \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}] ; \text{ dengan } \rho = 0.0997 = 0.1 \text{ dan } \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} -0.18614 \\ 0.001595 \\ -0.35247 \\ 0.561404 \\ 0.078037 \\ 0.178317 \\ -0.07444 \\ 0.053607 \\ 0.02093 \\ -0.00084 \\ 0.004075 \\ -0.00057 \end{bmatrix} .$$

KESIMPULAN

12

Data kasus kejadian penyakit malaria di Propinsi Bengkulu dapat dimodelkan dengan model SAR Poisson karena terdapat efek dependensi spasial serta variabel terikatnya berdistribusi Poisson. Nilai korelasi spasial sebesar 0.0997 dengan R^2 sebesar 0.33, ini berarti ada keterkaitan yang rendah antara jumlah kejadian malaria pada lokasi ke- i dengan jumlah penderita malaria di lokasi sekitarnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih disampaikan kepada Fakultas MIPA Universitas Bengkulu yang telah mendanai kegiatan ini melalui dana RBA FMIPA Universitas Bengkulu dengan Surat Perjajian Nomor: 1845/UN330.12/HK/2018.

DAFTAR PUSTAKA

Anselin L. 1988. *Spatial Economics: Methods and Models*. Dordrecht: Academic Publishers.

Cameron AC, Windmeijer FAG. 1995. R-squared Measures for Count Data Regression Models with Applications to Health Care Utilization. *Journal of Business and Economics Statistics* (1995).

- Fotheringham AS, Rogerson PA. 2009. *Handbook of Spatial analysis*. London: Sage Publications Ltd.
- Kemenkes. 2016. *Data dan Informasi Profil Kesehatan Indonesia 2016*. Jakarta: Pusdatin Kemenkes.
- Lambert DM, Brown JP, Florax RJGM. 2010. *A Two-Step Estimator for a Spatial Lag Model of Counts: Theory, Small Sample Performance and application*. USA: Dept. of Agricultural Economics Purdue University.
- McCulloh CE, Searle SR. 2001. *Generalized, Linier, and Mixed Models*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Rohimah, SR. 2015. Model Spasial Autotoregresif Poisson Untuk Mendeteksi Faktor-Faktor Yang Berpengaruh Terhadap Jumlah Penderita HIV di Provinsi Jawa Timur. *Jurnal MIPA* 38 (2) (2015): 169-175.
- Sunandi E. 2014. Model logit normal dengan efek spasial Pada pendugaan area kecil. *Prosiding Semirata 2014 Bidang MIPA BKS Barat*, 2014, ISBN: 978-602-70491-0-9, hal 98-103.
- Triana D, Rosana E, Anggraini R. 2017. Pengetahuan dan Sikap terhadap Praktek Pencegahan Malaria di Kelurahan Sukarami Kota Bengkulu. *Journal of Public Health* 6 (2) (2017). pISSN 2252-6781.



APLIKASI MODEL ARIMA DALAM PERAMALAN CURAH HUJAN BULANAN DI KOTA BENGKULU

(THE APPLICATION OF ARIMA MODEL TO FORECAST MONTHLY RAINFALL IN BENGKULU CITY)

Dyah Setyo Rini *
Universitas Bengkulu

Pepi Novianti
Universitas Bengkulu

Idhia Sriliana
Universitas Bengkulu

Anang Anwar
Stasiun Klimatologi
Pulau Baai, BMKG

ABSTRACT: This study aims to model and forecast rainfall at the Pulau Baai Climatology Station. The data is monthly rainfall data in Pulau Baai Climatology Station that come from Bureau of Meteorology and Climatology since January 1980 until December 2017. The analysis used to predict the rainfall is the ARIMA model. The best model is determined based on the AIC and BIC information criteria. The variable used is monthly rainfall. The model that use to forecast rainfall at Pulau Baai Climatology Station in Bengkulu City has a seasonal pattern. The best model based on this study is ARIMA (2,0,0) (1,0,1)¹² with an AIC value of 5860,763 and BIC of 5885,338.

KEYWORDS: *Time Series, ARIMA, Rainfall, AIC, BIC.*

* Corresponding Author: Program Studi Statistika FMIPA Universitas Bengkulu; Email: dyah.setyorini@unib.ac.id

PENDAHULUAN

Data *time series* merupakan data dengan suatu variabel yang dikumpulkan berdasarkan waktu. Data ini dapat digunakan untuk memprediksi atau meramalkan kejadian pada masa yang akan datang dengan menggunakan analisis *time series*. Berbagai metode analisis *time series* telah digunakan untuk keperluan peramalan. Variasi jangka pendek dalam analisis *time series* dapat dipelajari dengan pendekatan *autoregresif* (AR) dan atau *Moving Average* (MA). Metode analisis *time series* yang juga tak kalah penting adalah pendekatan *Box-Jenkins* atau dikenal sebagai *Autoregresif Integrated Moving Average* (ARIMA).

Model ARIMA merupakan model yang tidak menggunakan variabel independen dalam melakukan peramalan. ARIMA hanya mempertimbangkan nilai pada masa lampau dan sekarang dari variabel dependen dalam menghasilkan peramalan jangka pendek yang akurat. Tujuan dalam model ARIMA adalah untuk mencari hubungan statistik terbaik antar variabel dependen yang diramal dengan nilai masa lalu variabel tersebut, sehingga peramalan akan dilakukan menggunakan model terbaik tersebut. Pendekatan model ARIMA merupakan kombinasi antara model AR (*Autoregressive*) dan model MA (*Moving Average*).

Model ARIMA telah terbukti cukup akurat dalam melakukan peramalan jangka pendek bidang klimatologi, salah satunya adalah peramalan curah hujan. Beberapa penelitian analisis *time series* pada peramalan curah hujan telah banyak dilakukan di berbagai daerah. Geetha dan Nasira^[3] menggunakan model *Autoregresif Integrated Moving Average* (ARIMA) untuk meramalkan curah hujan wilayah pesisir di India. Hasil yang diperoleh melalui model ini dapat diterima dengan baik dengan kisaran akurasi prediksi 80%. Ali^[1] menggunakan data curah hujan bulanan stasiun meteorologi Baghdad untuk mempelajari perilaku waktu curah hujan. Beberapa model ARIMA diuji dan diperiksa untuk menentukan model terbaik. Penelitian ini menyatakan bahwa *Seasonal ARIMA*(2,1,3)(0,1,1) adalah model terbaik dan menunjukkan tren yang serupa dengan data asli. Penelitian terbaru Prediksi Curah Hujan bulanan juga dilakukan oleh Graham and Mirsha^[4] yang menggunakan metode Box-Jenkins *time series* musiman ARIMA. Model *Seasonal ARIMA* musiman (0,0,0)(0,1,0) untuk curah hujan diidentifikasi yang terbaik untuk memperkirakan curah hujan untuk 5 tahun ke depan dengan tingkat kepercayaan 95%.

Informasi prediksi curah hujan harian maupun bulanan merupakan informasi yang sangat penting dan dibutuhkan di berbagai sektor. Informasi tersebut terkadang masih sulit untuk diprediksi secara akurat dikarenakan sifat curah hujan yang dinamis dan proses fisis kompleks yang terlibat di dalamnya. Sebagai wilayah dengan curah hujan yang tinggi, Provinsi Bengkulu dapat merasakan dampak positif dan negatifnya. Dampak positif angin muson barat daya yang mengakibatkan curah hujan yang tinggi antara lain adalah tanah subur yang mendukung sektor pertanian dan ketersediaan air yang selalu melimpah. Namun hujan yang terus menerus dapat menyebabkan banjir yang dapat mengakibatkan sebagian petani menjadi gagal panen karena hujan yang turun terlalu sering, lingkungan menjadi becek dan kotor, banyak berkembangnya bibit penyakit. Selain itu curah hujan yang tinggi dapat mempengaruhi sektor penerbangan dan pariwisata yang mulai berkembang di Provinsi Bengkulu.

Besarnya pengaruh curah hujan di berbagai sektor di Provinsi Bengkulu merupakan suatu penelitian yang menarik. Dengan menggunakan pendekatan analisis *time series*, maka peneliti akan mengaplikasikan model ARIMA untuk memprediksi model peramalan curah hujan dengan mengambil studi kasus pada data curah hujan bulanan Stasiun Klimatologi Pulau Baai Kota Bengkulu. Untuk menentukan model prediksi peramalan curah hujan terbaik akan digunakan kriteria informasi AIC dan BIC.

TINJAUAN PUSTAKA

Model ARIMA

Data *time series* (runtun waktu) adalah jenis data yang terdiri atas variabel-variabel yang dikumpulkan menurut urutan waktu dalam suatu rentang waktu tertentu. Jika waktu dipandang bersifat diskrit (waktu dapat dimodelkan bersifat kontinu),

frekuensi pengumpulan selalu sama (*equidistant*). Misalnya, detik, menit, jam, hari, minggu, bulan, tahun, dan lain-lain [6]. Karakteristik data *time series* menunjukkan bahwa data tersebut tidak terbentuk secara independen, dispersi datanya berdasarkan waktu, memiliki *trend*, serta komponen siklik [3].

Ada beberapa asumsi peting yang harus dipenuhi agar data deret waktu dapat digunakan dalam keperluan peramalan. Beberapa diantaranya adalah ketergantungan antara kejadian maa mendatang terhadap masa sebelumnya atau dikenal dengan istilah adanya autokorelasi antara z_t dan z_{t-k} dan kestasioneran data.

Secara umum proses stasioner yang dihasilkan melalui hasil proses diferensi bukanlah merupakan proses white noise, yakni hasil dari operasi diferensi dari model $AR(k+1)$:

$$(1-B)^{k+1} \mu_t = \varepsilon_t$$

akan dapat dituliskan sebagai model stasioner yang berbentuk lebih umum yakni proses $ARMA(p,q)$ yang diasumsikan kausal dan invertible. Gabungan antara model $ARMA$ dan model hasil diferensi ini disebut model *Autoregressive Integrated Moving Average* atau disingkat $ARIMA(p,d,q)$, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$D_p(B)(1-B)^d X_t = C_q(B)\varepsilon_t$$

16 dengan

$$D_p(B) = 1 - a_1B - a_2B^2 - a_3B^3 - \dots - a_pB^p$$

$$C_q(B) = 1 - b_1B - b_2B^2 - b_3B^3 - \dots - b_pB^p$$

Dengan kata lain, jika X_t adalah proses $ARIMA(p,d,q)$, maka hasil diferensi orde d dari X_t , yakni $y_t = (1-B)^d X_t$ akan dapat dimodelkan sebagai proses $ARMA(p,q)$.

Variasi model $ARIMA$ tidak terbatas jumlahnya. Model umum, yang mencakup seluruhnya dikenal dengan $ARIMA(p,d,q)$

AR : p = orde dari proses *autoregresif*

I : d = tingkat pembedaan (*degree of differencing*)

MA : q = orde dari proses *moving average*.

Proses Autoregresif

Secara umum untuk proses AR orde ke- p atau $ARIMA(p, 0, 0)$:

$$X_t = \mu' + \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \dots + \Phi_p X_{t-p} + e_t$$

dimana:

μ' = nilai konstan

Φ_j = parameter autoregresif ke j

e_t = nilai galat pada saat t

Proses *Moving Average*

Secara umum untuk proses MA orde ke-q atau ARIMA (0, 0, q)

$$X_t = \mu + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

dimana:

θ_q = parameter MA (yang menjadi sasaran pembatas-pembatas lain)

e_{t-k} = nilai galat pada saat t-k dan μ adalah suatu konstanta.

Kriteria Pemilihan Model Peramalan Terbaik

Dalam menentukan suatu model peramalan yang ingin digunakan maka dilakukan evaluasi terhadap model tersebut. Ada dua cara evaluasi model peramalan yang dapat dilakukan, yaitu menggunakan kriteria standar dan kriteria informasi. Kriteria standar merupakan kriteria dalam menentukan suatu model peramalan melalui nilai kesalahan dalam peramalan. Termasuk dalam kriteria standar adalah *Mean Square Error* (MSE), *Mean Absolute Deviation* (MAD), *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) dan *Mean Percentage Error* (MPE). Sedangkan kriteria informasi merupakan kriteria untuk menilai kualitas model menggunakan model statistik dari suatu parameter. Kriteria Informasi *Akaike* (AIC) dan Kriteria Informasi *bayesian* (BIC) termasuk dalam kriteria informasi.

Asumsikan bahwa model statistik parameter M digunakan pada data. Kriteria informasi *Akaike* (AIC) didefinisikan sebagai:

$$AIC = -2 \log L(\theta) + 2M$$

Dimana M adalah jumlah parameter dalam model. Untuk model ARMA dan efektif jumlah observasi, fungsi log-likelihood adalah

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_\alpha^2 - \frac{1}{2\sigma_\alpha^2} s(\varphi, \mu, \theta)$$

Kelemahan dari AIC adalah cenderung melebih-lebihkan urutan autoregresif. Akaike (1973) dalam [1] telah mengembangkan perpanjangan prosedur AIC bayesian minimum, yang disebut kriteria informasi bayes (BIC), yang mengambil dari

$$BIC = -2 \log L(\theta) + \log L(n)$$

METODE PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah jumlah curah hujan bulanan. Data time series yang terekam dari Januari 1980 hingga Desember 2017 bersumber dari Stasiun Klimatologi Pulau Baai, Kota Bengkulu.

Langkah-langkah penelitian yang dilakukan dalam menerapkan model ARIMA dalam peramalan curah hujan bulanan ini adalah:

1. Mengumpulkan data.
2. Menyajikan statistik deskriptif data.
3. Menentukan data in-sample dan out-sample.
4. Membuat grafik time series untuk data in-sample.
5. Menguji kestasioneran data.
6. Membuat plot ACF dan PACF.
7. Mengidentifikasi dan membentuk model ARIMA berdasarkan plot ACF dan PACF.
8. Mengestimasi parameter dan menghitung nilai AIC dan BIC model.
9. Membandingkan nilai AIC dan BIC model
10. Memilih model dengan AIC dan BIC terkecil sebagai model peramalan terbaik
11. Model yang terbaik akan digunakan untuk prediksi kedepan.
12. Meramalkan jumlah curah hujan 6 bulan kedepan

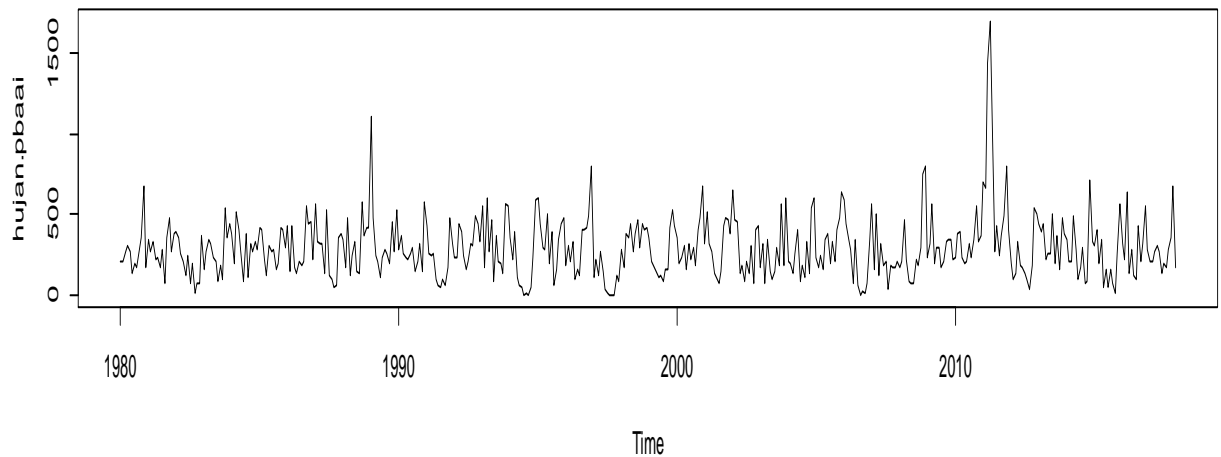
HASIL DAN PEMBAHASAN

Deskripsi jumlah curah hujan bulanan di Stasiun Klimatologi Pulau Baai sejak tahun 1980 sampai dengan 2017 ditabelkan sebagai berikut:

Tabel 1. Deskripsi Data Curah Hujan Bulanan Stasiun Klimatologi Pulau Baai

| Statistik | Nilai |
|------------------|--------------|
| Mean | 291.7 |
| Minimum | 0 |
| Maximum | 1703 |

Berdasarkan data di Stasiun Klimatologi Pulau Baai, jumlah curah hujan bulanan minimum dan maksimum tahun 1980-2017 berturut-turut adalah 0 mm dan 1703 mm dengan rata-rata jumlah curah hujan bulanan sebesar 291.770 mm. Jumlah curah hujan bulanan yang terjadi sepanjang tahun 1980 – 2017 di Stasiun Klimatologi Pulau Baai disajikan pada grafik berikut:

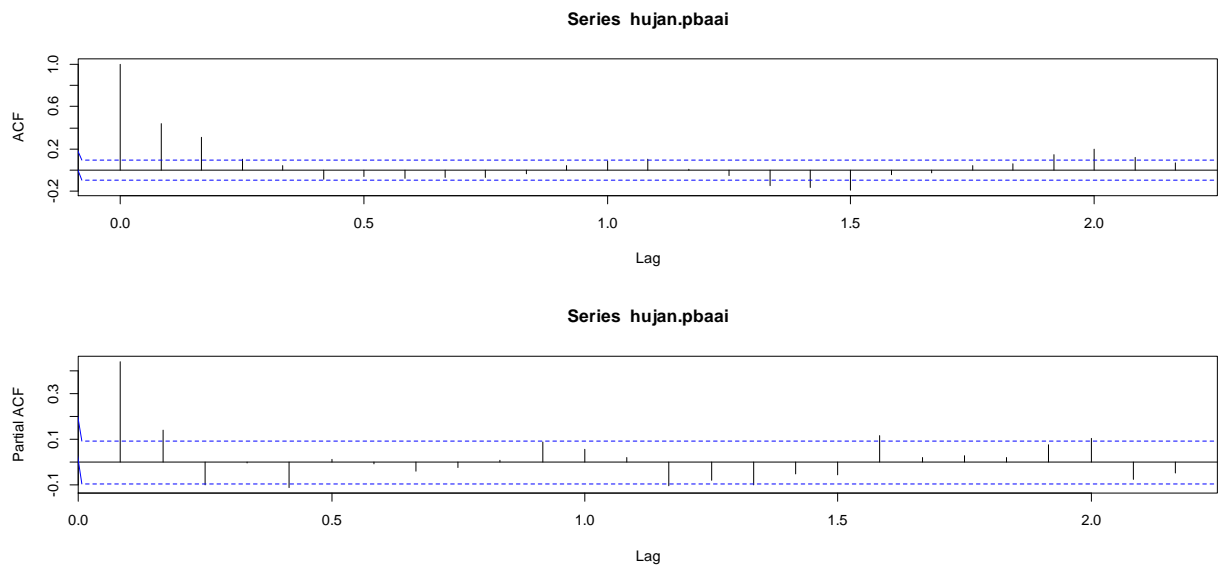


Gambar 1. Jumlah Curah Hujan Bulanan di Stasiun Klimatologi Pulau Baai Bengkulu

Gambar 1 menunjukkan bahwa curah hujan di Stasiun Klimatologi Pulau Baai dari tahun 1980 sampai dengan tahun 2017 mengalami fluktuasi. Gambar 1 juga menampilkan titik tertinggi yang mengindikasikan curah hujan bulanan maksimum yang terjadi di bulan April 2011, selain itu angka curah hujan bulanan di sekitar titik maksimum menunjukkan angka yang relative tinggi dan menginformasikan curah hujan yang cukup tinggi di sepanjang tahun 2011. Curah hujan tertinggi cenderung terjadi pada akhir tahun dan awal tahun, yaitu dimulai sekitar bulan November dan berakhir sekitar bulan maret. Sedangkan curah hujan terendah cenderung terjadi setelah pertengahan tahun, yaitu bulan juli sampai dengan oktober.

Gambar 1 menginformasikan bahwa setiap tahunnya pada bulan Desember selalu memiliki curah hujan yang tinggi dan terbentuk pola dari deretan data. Pola tersebut mengidentifikasi bahwa terdapat pola musiman curah hujan di stasiun Klimatologi Pulau Baai.

Berdasarkan metode penelitian, langkah berikutnya adalah pengujian asumsi kestasioneran. Dengan menggunakan uji ADF Dickey Fuller dengan program R diperoleh p -value 0.01, dapat disimpulkan bahwa data curah hujan bulanan di Stasiun Klimatologi Pulau Baai sudah stasioner. Dengan demikian, untuk proses selanjutnya tidak perlu dilakukan proses differncing. Hal ini juga dapat dilihat pada plot ACF dan PACF berikut:



Gambar 2. Plot ACF dan PACF Data Curah Hujan Bulanan Stasiun Klimatologi Pulau Baai

20

Gambar 2 menunjukkan *cuts off* pada lag 1, 2 dan 3, dimana lag tersebut garis autokorelasi berada di luar batas signifikan, sehingga orde p yang mungkin adalah 3. Oleh karena data curah hujan sudah stasioner tanpa mengalami proses differencing, maka kemungkinan orde d adalah 0. Kemudian, plot PACF menunjukkan adanya *cuts off* pada lag 2 yang berada di luar batas signifikan, sehingga kemungkinan orde q bernilai 2. Model dugaan yang terbentuk dari plot ACF dan PACF pada **Error! Reference source not found.** adalah ARIMA(1,0,1]), ARIMA(1,0,2), ARIMA(1,0,3), ARIMA (2,0,1), (2,0,2) dan ARIMA (2,0,3).

Walaupun data telah stasioner dalam *mean* dan varians pada data aktual, namun pada proses identifikasi *time series plot* diduga model memiliki pola musiman. Dapat dilihat pada Gambar plot ACF dan PACF data curah hujan bulanan, lag 12, 24 berada di luar garis signifikan. Hal ini menunjukkan bahwa adanya pengaruh musiman pada data aktual curah hujan. Oleh karena itu perlu dilakukan *differencing* pada lag 12. Berdasarkan identifikasi plot ACF dan PACF ini, maka akan dibentuk juga beberapa model ARIMA musiman. Adapun model ARIMA yang kan dibentuk adalah ARIMA(2,0,0)(1,0,0)¹², ARIMA(2,0,0)(1,0,1)¹², ARIMA(2,0,0)(1,0,2)¹², ARIMA(2,0,0)(1,0,3)¹², ARIMA(2,0,0)(2,0,0)¹², ARIMA(2,0,0)(2,0,1)¹², ARIMA(2,0,0)(2,0,2)¹², dan ARIMA(2,0,0)(2,0,3)¹².

Dari model ARIMA yang telah ditentukan, kemudian dilakukan estimasi parameter untk mendapatkan nilai AIC dan BIC. Model Ramalan yang baik adalah model dengan nilai AIC dan BIC terkecil. Berikut adalah nilai AIC dan BIC dari masing-masing model:

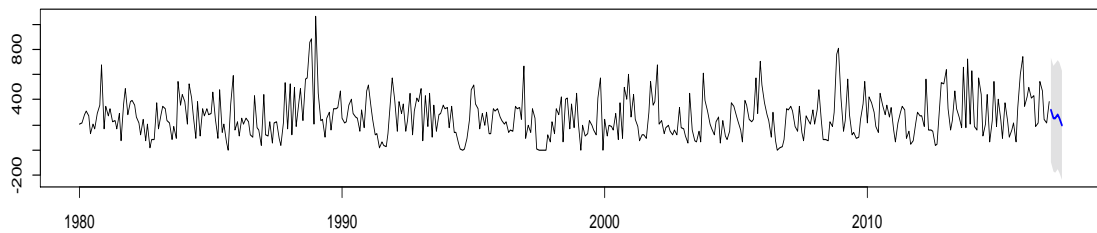
Tabel 2. Nilai AIC dan BIC Model Dugaan Curah Hujan Stasiun Klimatologi Pulau Baai

| Model Dugaan | AIC | BIC |
|-----------------------------------|------------|------------|
| ARIMA(1,0,1) | 5897.121 | 5913.558 |
| ARIMA(1,0,2) | 5893.526 | 5914.072 |
| ARIMA(1,0,3) | 5895.506 | 5920.162 |
| ARIMA(2,0,1) | 5890.783 | 5911.329 |
| ARIMA(2,0,2) | 5892.758 | 5917.413 |
| ARIMA(2,0,3) | 5894.676 | 5923.44 |
| ARIMA(2,0,0)(1,0,0) ¹² | 5893.534 | 5914.013 |
| ARIMA(2,0,0)(1,0,1) ¹² | 5860.763** | 5885.338** |
| ARIMA(2,0,0)(1,0,2) ¹² | 5860.864 | 5889.535 |
| ARIMA(2,0,0)(1,0,3) ¹² | 5862.494 | 5895.26 |
| ARIMA(2,0,0)(2,0,0) ¹² | 5884.571 | 5909.146 |
| ARIMA(2,0,0)(2,0,1) ¹² | 5860.763 | 5889.434 |
| ARIMA(2,0,0)(2,0,2) ¹² | 5862.567 | 5895.333 |
| ARIMA(2,0,0)(2,0,3) ¹² | 5864.579 | 5901.441 |

Catatan: ** adalah nilai AIC dan BIC terkecil

Dari Tabel 2 terlihat bahwa nilai AIC dan BIC terkecil dihasilkan oleh model ARIMA(2,0,0)(1,0,1)¹². Tahap selanjutnya, untuk mengetahui apakah model tersebut merupakan model yang baik untuk melakukan peramalan harus dilakukan pemeriksaan diagnosa, dengan menguji distribusi estimasi residualnya menggunakan uji statistik *Ljung-Box*. Jika estimasi residual terdistribusi secara random, maka model ARIMA tersebut baik digunakan untuk peramalan.

Hasil diagnostic check dapat disimpulkan bahwa residual model ARIMA(2,0,0)(1,0,1)¹² dari data hujan bulanan telah terdistribusi secara random, maka model tersebut sudah baik digunakan untuk peramalan. Proses peramalan dilakukan selama 6 bulan ke depan. Visualisasi hasil prediksi curah hujan di Stasiun Klimatologi Pulau Baai 6 bulan ke depan disajikan pada gambar berikut:



Gambar 2. Gambar Prediksi Curah Hujan Dengan Model ARIMA(2,0,0)(1,0,1)¹²

Gambar 2 menunjukkan hasil prediksi curah hujan bulanan di Stasiun Klimatologi Pulau Baai. Garis biru menunjukkan hasil prediksi dari Januari sampai dengan Juni 2017 dan daerah berwarna abu-abu merupakan selang batas bawah dan batas atas prediksi dengan model ARIMA(2,0,0)(1,0,1)¹². Besaran hasil prediksi curah hujan 6 bulan pertama tahun 2017 disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 3. Data Aktual dan Hasil Prediksi Curah Hujan Bulanan di Stasiun Klimatologi Bengkulu

| Bulan | Actual | Forecast | Lower | Upper |
|---------------|--------|----------|----------|----------|
| Januari 2017 | 376 | 342,8335 | -106,444 | 792,1112 |
| Februari 2017 | 477 | 272,5047 | -198,51 | 743,5192 |
| Maret 2017 | 322 | 356,1229 | -132,003 | 844,2489 |
| April 2017 | 330 | 305,7643 | -186,891 | 798,4192 |
| Mei 2017 | 238 | 259,3934 | -235,296 | 754,0826 |
| Juni 2017 | 211 | 206,6149 | -288,784 | 702,0138 |

Tabel 3 menampilkan data curah hujan yang terekam dari Stasiun Klimatologi Pulau Baai (aktual) dan data prediksi berdasarkan model terbaik. Terlihat perbedaan yang relative kecil antara data actual dan prediksi model ARIMA(2,0,0)(1,0,1)¹² dan semua data actual masih dalam selang batas atas dan batas bawah model. Kecuali pada bulan februari, hasil prediksi dan data actual menghasilkan perbedaan yang cukup besar dan data actual masih berada di atas selang batas atas model.

SIMPULAN

Rata-rata jumlah curah hujan bulanan di stasiun Klimatologi Pulau Baai dari Januari 1980 sampai desember 2017 adalah 291.7 mm. Curah hujan bulanan di Stasiun Klimatologi tertinggi terjadi pada bulan April 2011 dengan jumlah curah hujan 1703 mm dan curah hujan bulanan pada tahun tersebut menunjukkan angka yang relative tinggi. Model yang diperoleh untuk meramalkan curah hujan di stasiun tersebut menggunakan pola musiman dengan model terbaik adalah ARIMA(2,0,0)(1,0,1)¹².

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih ditujukan kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat Universitas Bengkulu yang telah mendanai penelitian ini melalui dana Penelitian Pembinaan Universitas Bengkulu dan juga kepada Stasiun Klimatologi Pulau Baai BMKG Kota Bengkulu atas data yang diberikan.

REFERENSI

- [1] Agustini, R., Hajarisman, N. dan Sunendiari,S., 2018. Kriteria Pemilihan Model Peramalan Terbaik Berdasarkan Kriteria Informasi. *Prosiding Statistika*, Vol. 4 No. 1: 57-65.
- [2] Ali, S.M., 2013. Time Series Analysis of Baghdad Rainfall Using ARIMA Method, *Iraqi Journal of Science*, Vol 54, No.4:1136-1142
- [3] Falk, M., 2005. *A First Course on Time Series Analysis*. SAS and all other SAS Institute Inc., USA.
- [4] [Geetha](#), A and [Nasira](#), G.M, 2016. Time-Series Modeling and Forecasting: Modeling of Rainfall Prediction Using ARIMA Model, *International Journal of Society Systems Science*, Vol. 8, No. 4 :361-372.
- [5] Graham, A. and Mishra, E.P., 2017. Time series analysis model to forecast rainfall for Allahabad region, *Journal of Pharmacognosy and Phytochemistry*, Vol. 6 No. 5: 1418-1421.
- [6] Rosadi, D., 2011, *Pengantar Analisa Runtun Waktu*. UGM, Yogyakarta.



PENYELESAIAN SENSITIVITAS PADA PEMROGRAMAN LINEAR PECAHAN

(SENSITIVITY SOLUTION OF FRACTIONAL LINEAR PROGRAMMING)

Endang Lily*
Universitas Riau

Lely Deswita
Universitas Riau

ABSTRACT: Determined the optimum solution variable for fractional linear programming, so that linear programming can be formed. Next, the simplex table method can determine the optimum variable value. Furthermore, with the simplex table method the optimum solution can be determined for the lower limit and for the coefficient of objective function in fractional linear programming

KEYWORDS: Objective Function Coefficient, Fraction Linear Programming, Linear Programming, Simplex Tables and Optimum Solutions

* Corresponding Author: Program Studi S1 Matematika FMIPA Universitas Riau; Email: Endang.lily60@gmail.com

PENDAHULUAN

Dalam Taha (1982) diuraikan tentang analisis sensitivitas pada pemrograman linear. Dalam hal ini diuraikan tentang langkah menentukan interval koefisien fungsi tujuan dengan menggunakan metoda simpleks dan disajikan dalam bentuk tabel. Pada uraian tersebut diperlihatkan solusi optimum tidak berubah sepanjang koefisien masih dalam interval tersebut. Sementara itu Simi, *et al* (2017) membahas langkah menentukan solusi optimum pemrograman linear pecahan dan perbedaannya dengan pemrograman linear terletak pada fungsi tujuannya berbentuk fungsi rasional. Adapun langkah penyelesaiannya ditransportasikan pemrograman linear pecahan kedalam pemrograman linear dengan cara menetapkan variabel solusi optimalnya, sehingga terbentuklah model pemrograman linear. Dengan demikian dari Taha (1982) dan Simi, *et al* (2017) dapatlah ditelusuri tentang interval koefisien fungsi tujuan pada pemrograman linear pecahan yang menggambarkan solusi optimum tidak berubah sepanjang koefisien masih dalam interval tersebut. Adapun sumber untuk penelusuran interval koefisien fungsi tujuan pada pemrograman linear pecahan dalam hal ini bersumberkan dari Tantawy (2018).

BAHAN DAN METODE

Pemrograman linier pecahan dirumuskan di bawah ini.

Definisi 1.[3]dan [4] pemrograman linear pecahan,

$$\text{Maksimum } Z = \frac{cX^T + \alpha}{dX^T + \beta} \quad (\text{P1})$$

$$\text{Kendala, } \mathbf{AX} \leq \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0},$$

dengan $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\mathbf{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$,

$\mathbf{A} = (a_{ij}) \ i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, $\mathbf{0} = (0,0, \dots, 0)$ dan α, β adalah konstanta.

$$(\mathbf{C}^T - \mathbf{Z}^0 \mathbf{D}^T) \mathbf{X} = \beta$$

Jika X^0 adalah solusi fisibel untuk (P1) dengan nilai Z^0 maka dapat dibentuk fungsi tujuannya seperti di bawah ini.

$$(\mathbf{C}^T - \mathbf{Z}^0 \mathbf{D}^T) \mathbf{X} = \beta Z^0 - \alpha.$$

Selanjutnya dapat dibentuk pemrograman linear sebagai berikut,

$$\text{Maksimum } Z^* = (\mathbf{C}^T - \mathbf{Z}^0 \mathbf{D}^T) \mathbf{X} \quad (\text{P2})$$

$$\text{Kendala, } \mathbf{AX} \leq \mathbf{b}^T$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0},$$

dengan Z^0 adalah konstanta.

Preposisi 1 Jika X^0 adalah solusi optimum untuk masalah (P1) dengan nilai optimal Z^0 maka X^0 juga adalah solusi optimum untuk masalah (P2) dengan nilai optimum

$$Z^* = \beta Z^0 - \alpha.$$

Berikutnya dirumuskan sensitivitas pada masalah (P1) sebagai berikut,

$$\text{Maksimum } Z(\mu) = \frac{(c^T + \mu \bar{c}^T)X + \alpha}{(d^T + \mu \bar{d}^T)\beta} \quad (\text{P3})$$

$$\text{Kendala, } \mathbf{AX} \leq \mathbf{b}^T$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0},$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari masalah (P1) berdasarkan Preposisi 1 dapat dibentuk

$$Z^* - (C^T - Z^0 D^T) X = 0 \quad (P4)$$

$$B X_B + N X_N = b^T$$

dengan $X_B \geq 0$ dan $X_N \geq 0$ masing-masing adalah variabel basis dan variabel nonbasis. Dari masalah (P4) diproses langkah reduksi dengan metoda Simpleks dan disajikan dengan tabel seperti di bawah ini.

Iterasi awal

| Basic | X_N | X_B | X |
|-------|--------------------|-------|---------|
| Z | $-(C^T - Z^0 D^T)$ | | $I N$ |
| X_B | N | $I=B$ | $I X_B$ |

Tabel optimal

| Basic | X_N | X_B | X |
|-------|-------|-----------|-----------|
| Z | 0 | r | Z_B |
| X_B | I | $B^{-1}N$ | $B^{-1}b$ |

Dengan $X = (B^{-1}b, 0)^T$, $Z_B = \frac{C_B^T X_B + \alpha}{D_B^T X_B + \beta}$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_{n-m})$ dan $r = (C_B^T B^{-1}N - C_N^T) - Z_B (D_B^T B^{-1}N - D_N^T)$.

Selanjutnya diselesaikan sensitivitas masalah (P1) dengan membentuk masalah (P3) dan hasilnya optimal bila dipenuhi,

$$r = (C_B^T(\mu) B^{-1}N - C_N^T(\mu)) - Z_B (D_B^T(\mu) B^{-1}N - D_N^T(\mu)) \geq 0.$$

Di bawah ini diberikan pemrograman linear pecahan dan akan ditentukan interval koefusiennya, sehingga solusi dalam interval tersebut tetap fisibel.

$$\text{Maksimum } Z = \frac{4x_1 + 2x_2 + 10}{x_1 + 2x_2 + 5}$$

$$\text{Kendala } \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Selanjutnya dapat disusun bentuk standar,

$$\begin{aligned} Z^* - 2x_1 - 2x_2 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + S_1 + 0S_2 &= 30 \\ -x_1 + 2x_2 + 0S_1 + S_2 &= 5 \end{aligned}$$

| BASIC | x_1 | x_2 | S_1 | S_2 | Ruas Kanan |
|-------|-----------------|----------------|-------|-------|----------------|
| Z | $\frac{-2}{35}$ | $\frac{2}{35}$ | 0 | 0 | $\frac{10}{5}$ |
| S_1 | 1 | 3 | 1 | 0 | 30 |
| S_2 | -1 | 2 | 0 | 1 | 5 |

| BASIC | x_1 | x_2 | S_1 | S_2 | Ruas Kanan |
|-------|-------|----------------|----------------|-------|------------------|
| Z | 0 | $\frac{8}{35}$ | $\frac{2}{35}$ | 0 | $\frac{130}{35}$ |
| x_1 | 1 | 3 | 1 | 0 | 30 |
| S_2 | 0 | 5 | 1 | 1 | 5 |

Dalam hal ini diperoleh $x_1 = 30$ dan $x_2 = 0$ serta nilai optimum $Z = \frac{130}{35}$.

27

Selanjutnya sensitivitas dapat ditentukan dengan merumuskan pemrograman linear pecahan sebagai berikut,

$$\text{Maksimum } Z(\mu) = \frac{(4+\mu)x_1 + (2-\mu)x_2 + 10}{(1+2\mu)x_1 + (2-\mu)x_2 + 5}$$

$$\begin{aligned} \text{Kendala } \quad x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Di bentuk pemrograman linear di bawah ini,

$$\begin{aligned} Z(\mu) - (2 - 3\mu)x_1 - (-2 + \mu)x_2 \\ x_1 + 3x_2 + S_1 + 0S_2 &= 30 \\ -x_1 + 2x_2 + 0S_1 + S_2 &= 5 \end{aligned}$$

| BASIC | x_1 | x_2 | S_1 | S_2 | Ruas Kanan |
|-------|-------|-------|-------|-------|------------|
| Z | | | 0 | 0 | |

| | | | | | |
|-------|---------------------|--------------------|---|---|----------------|
| | $\frac{-2+\mu}{35}$ | $\frac{2-\mu}{35}$ | | | $\frac{10}{5}$ |
| S_1 | 1 | 3 | 1 | 0 | 30 |
| S_2 | -1 | 2 | 0 | 1 | 35 |

| BASIC | x_1 | x_2 | S_1 | S_2 | Ruas Kanan |
|-------|-------|----------------------------|---------------------------|-------|------------------------------|
| Z | 0 | $\frac{8-10\mu}{35+60\mu}$ | $\frac{2-3\mu}{35+60\mu}$ | 0 | $\frac{130+30\mu}{35+60\mu}$ |
| x_1 | 1 | 3 | 1 | 0 | 30 |
| S_2 | 0 | 5 | 1 | 1 | 35 |

Dari tabel optimum diperoleh pertidaksamaan sebagai berikut,

$$8 - 10\mu \geq 0, 2 - 3\mu \geq 0 \text{ dan } 35 + 60\mu > 0. \text{ Sehingga diperoleh, } \frac{-7}{12} \leq \mu \leq \frac{2}{3}$$

SIMPULAN

Dari uraian masalah tersebut di atas dapatlah ditarik kesimpulan bahwa koefusien fungsi tujuan dapat ditingkatkan dan diturunkan, tetapi solusi tidak berubah. Hal ini sangat berguna untuk petunjuk mentargetkan keuntungan maksimal atau pengeluaran minimal.

REFERENSI

H.A.Taha, 1982, Operations Research: An Introduction, Eight Edition, MacMillan Publishing, New York.

S.Tantawy, An iterative method for solving linear fraction programming (LFP) problem with sensitivity Analysis, Mathematical and Computational Applications, 13 (2018), 147-151.

S.F.Tantawy, A new procedure for solving linear fractional programming problems, Mathematical and Computer Modelling, 48 (2007), 969-973.

F.A. Simi dan M.S Talukder, A new approach for solving linear fractional programming problems with Duality concept, Open Journal of Optimization, 6 (2017), 1-10



MODEL SEMIVARIOGRAM TEORITIS PADA DATA KEKUATAN GEMPABUMI DI PROVINSI BENGKULU TAHUN 2000-2016

(THEORETICAL SEMIVARIOGRAM MODEL ON EARTHQUAKE STRENGTH DATA IN BENGKULU PROVINCE 2000-2016)

Fachri Faisal*
Universitas Bengkulu

ABSTRACT: The purpose of this study was to estimate the theoretical semivariogram parameters with the least squares method. The computer program used was GS*10.0 to find an experimental semivariogram and to determine the parameter values of the Spherical, Exponential, Gaussian and Linear models. The data used are data on earthquake strength in Bengkulu Province from 2000-2016 consisting of 1656 sample points. From the results of the case study, there were obtained 6 Spherical theoretical semivariogram models, 4 times Exponential, 3 times Gaussian and Linear 4 times. The selected criteria from each theoretical semivariogram are based on the Residual Sum Squares (RSS).

KEYWORDS: parameter, semivariogram, spherical, earthquake

* Corresponding Author: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu, Gedung FMIPA, Jln. W.R. Supratman, Bengkulu 38371; Email: fachrif@unib.ac.id

PENDAHULUAN

Semivariogram merupakan salah satu alat dasar dalam geostatistik yang dapat menjelaskan variabilitas data pada jarak dan arah tertentu. Suatu fungsi matematika dapat dimodelkan kepada semivariogram dengan data diperoleh dari lapangan. Pemodelan semivariogram adalah salah satu dasar dari geostatistik. Sampai saat ini tidak ada metode yang sempurna dalam menyelesaikan masalah ini.

Sebelumnya telah dilakukan penelitian oleh Faisal (2015), yaitu mengenai Pemilihan Model Semivariogram Terbaik pada Data Spasial dengan Aplikasi Metode Program Linier (Studi Kasus Data Kejadian Gempa di Wilayah Pesisir Bengkulu). Pada penelitian tersebut diperoleh model semivariogram Spherical merupakan model semivariogram terbaiknya yang akan digunakan dalam metode ordinary kriging.

Selanjutnya Faisal (2016) telah melakukan penelitian tentang Fiting Semivariogram dengan *Linear Programming* (LP), *Ordinary Least Squares* (OLS) dan *Weighted Least Squares* (WLS) pada data kadar emas di 138 titik sampel/*quartz vein samples* di daerah Ciurug. Pada penelitian ini, model semivariogram spherical dengan metode LP, baik *sill* dan *range* yang diperoleh berada diantara metode OLS dan WLS.

Setelah itu Faisal *et al.* 2018, telah pula melakukan penelitian mengenai Aplikasi Metode Ordinary Kriging dengan Menggunakan Model Semivariogram Isotropik dalam Pendugaan Kekuatan Gempabumi di Provinsi Bengkulu. Adapun hasil penelitiannya diperoleh model semivariogram terbaiknya Spherical dan Exponential.

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka peneliti tertarik melakukan penelitian lanjutan yang bertujuan untuk mengestimasi parameter semivariogram teoritis dengan metode kuadrat terkecil (OLS) pada data kekuatan gempabumi di Provinsi Bengkulu dan sekitarnya dari tahun 2000-2016. Adapun jenis semivariogram yang akan digunakan adalah model semivariogram eksperimental isotropik dengan data yang dianalisis adalah data kejadian kekuatan gempabumi tiap tahunnya dari tahun 2000-2016.

Data spasial adalah data pengukuran yang memuat informasi lokasi. Misal $Z(s_i), i = 1, 2, \dots, n$ menyatakan data pengukuran Z di lokasi (koordinat s_i), atau dengan kata lain data spasial merupakan salah satu model data dependen, karena data spasial dikumpulkan dari lokasi spasial berbeda yang mengindikasikan ketergantungan antara pengukuran data dengan lokasi. Data spasial dapat dijumpai dalam berbagai disiplin ilmu antara lain: geologi, ilmu tanah, epidemiologi, ilmu tanaman, ekologi, kehutanan, astronomi dan lain-lain.

Terdapat dua tahap dalam menganalisis data spasial, yaitu : tahap analisis struktural dan tahap estimasi parameter. Analisis struktural merupakan proses fitting model korelasi spasial (semivariogram) pada semivariogram eksperimental. Tahap estimasi merupakan proses prediksi parameter proses spasial berdasarkan informasi semivariogram data spasial guna mendapatkan deskripsi pada titik-titik pengamatan lain.

Data spasial dapat dinyatakan sebagai hasil observasi dari proses stokastik atau fungsi random yaitu $\{Z(s): s \in D\}$, dimana D adalah himpunan random di R^d . Nilai data di lokasi s yaitu $z(s)$ disebut realisasi dari variabel random $Z(s)$. Koleksi dari variabel-variabel random disebut fungsi random. Biasanya fungsi random ini diasumsikan mempunyai distribusi tertentu (Cressie, 1993).

Semivariogram tersebut digunakan dalam prosedur *kriging* untuk menginterpolasi lokasi yang belum terobservasi (Merchant, *et al.*, 2004).

Semivariogram merupakan alat statistik untuk menggambarkan, memodelkan, dan menjelaskan korelasi spasial antar observasi. Semivariogram didefinisikan sebagai berikut :

$$2\gamma(h) = \text{Var}[Z(s+h) - Z(s)] = E[Z(s+h) - Z(s)]^2 \quad (1)$$

dengan $\gamma(h)$ adalah semivariogram. Semivariogram di atas disebut juga semivariogram teoritik. Ada dua jenis semivariogram yaitu: semivariogram isotropik ($\gamma(h)$ hanya

bergantung pada jarak h dan semivariogram anisotropik ($\gamma(h)$ tergantung pada jarak h dan arah) (Wackernagel, 2003).

Semivariogram eksperimental merupakan semivariogram yang diperoleh dari data yang diketahui:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(s_i + h) - z(s_i)]^2 \tag{2}$$

dengan :

- s_i : lokasi (koordinat) sampel
- $Z(s_i)$: nilai data pada lokasi s_i
- $|N(h)|$: # pasangan $(s_i, s_i + h)$ yang mempunyai jarak h .

Dalam penaksiran semivariogram, model semivariogram teoritis difiting pada semivariogram eksperimental $\hat{\gamma}(h)$ tersebut. Adapun model semivariogram teoritis yang sering digunakan:

- Model Spherical :
$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 + C \left[\frac{3h}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] & , 0 < h \leq a \\ C_0 + C & , h > a \end{cases} \tag{3}$$

- Model Exponential :
$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 + C \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \right] & , h > 0 \\ C_0 & , h = 0 \end{cases} \tag{4}$$

- Model Gaussian :
$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 + C \left[1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \right] & , h > 0 \\ C_0 & , h = 0 \end{cases} \tag{5}$$

dimana C_0 adalah efek *nugget*, $C_0 + C$ merupakan *sill*, dan a adalah *range*

- Model Linier : $\gamma(h) = \alpha h$, $\alpha =$ kemiringan garis (Amstrong, 1998). (6)

Metode Kuadrat Terkecil (*Ordinary Least Squares Method*)

Metode ini bukan merupakan metode secara statistika dan murni menggunakan kriteria numerik untuk memperoleh nilai dari parameter yang paling sesuai.

Misalkan $\{2\gamma(h; \lambda)\}$ adalah semivariogram yang bergantung λ . Selanjutnya pada metode ini, nilai λ dipilih yang bertujuan untuk meminimalkan

$$\sum_{j=1}^k [2\hat{\gamma}(h_j) - 2\gamma(h_j; \lambda)]^2 \tag{7}$$

dan namakan $\hat{\lambda}_T$. Untuk metode WLS ini juga memilih nilai λ yang meminimalkan

$$\sum_{j=1}^k \{var[2\hat{\gamma}(h_j)]\}^{-1} [2\hat{\gamma}(h_j) - 2\gamma(h_j; \lambda)]^2 \quad (8)$$

dan namakan $\hat{\lambda}_V$, dimana $V = diag\{var[2\hat{\gamma}(h_1)], \dots, var[2\hat{\gamma}(h_k)]\}$ adalah matriks diagonal dengan nol dimana-mana kecuali untuk varians dari $2\hat{\gamma}(h_j)$ pada diagonalnya (Cressie, 1985).

METODE

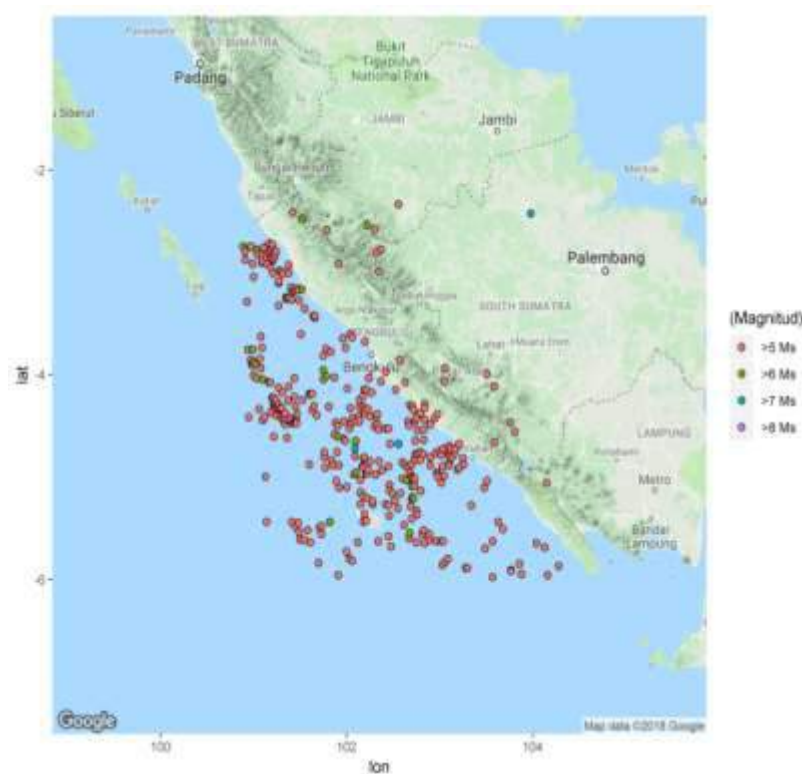
Data yang digunakan pada penelitian ini merupakan data kejadian gempabumi di Provinsi Bengkulu dan sekitarnya dari tahun 2000-2016 dengan magnitudo $\geq 3,5$ Mw. Adapun total data yang digunakan sebanyak 1656 yang diperoleh dari *website* www.usgs.com. Variabel dari data adalah pusat koordinat gempabumi, latitude, longitude dan magnitudo. Area pengamatan berkisar antara 100.00° - 105.00° BT (longitude) dan 6.00° - 2.00° LS (latitude).

Adapun tahapan dan langkah dalam analisis data pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

- (1) Pengumpulan data kejadian gempabumi di Provinsi Bengkulu dan sekitarnya.
- (2) Melakukan penghitungan Semivariogram Eksperimental.
- (3) Fitting Semivariogram teoritis dengan menggunakan software GS+ 10.0.
- (4) Melakukan uji validasi model untuk menentukan apakah model semivariogram teoritis yang akan digunakan pada metode kriging merupakan model terbaik dengan nilai *Residual Sum Squares* (RSS) yang paling kecil dari model lain.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini disajikan gambar/plot sebagian dari data kejadian gempabumi di Provinsi Bengkulu dan sekitarnya dari tahun 2000-2016 :



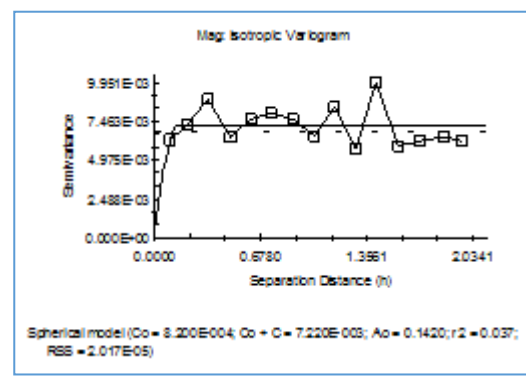
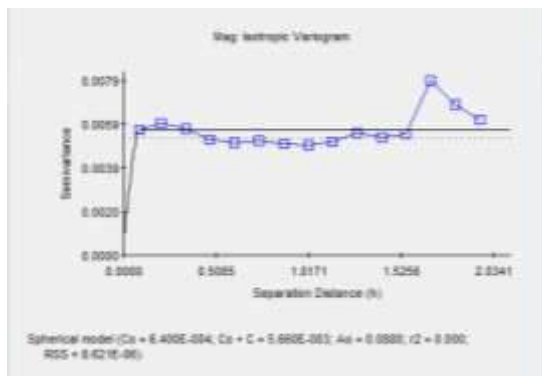
Gambar 1. *Sebaran kejadian gempabumi*

Pada Gambar 1 di atas menggambarkan titik pusat kejadian gempabumi di Provinsi Bengkulu dan sekitarnya, dimana kejadian gempabumi banyak terjadi di laut. Adapun hasil perhitungan dan gambar dengan menggunakan software GS+ 10.0 diperoleh semivariogram eksperimental serta hasil fitting terhadap model semivariogram teoritisnya untuk tahun 2000 dan 2016 dapat dilihat pada Tabel 1 dan Gambar 2 di bawah ini:

Tabel 1. Semivariogram eksperimental : (a) tahun 2000, (b) tahun 2016

| Lag Class | Average Distance | Average Semivariance | Pairs |
|-----------|------------------|----------------------|-------|
| 1 | 0.0886 | 0.0056683 | 2322 |
| 2 | 0.2079 | 0.005965 | 5274 |
| 3 | 0.3398 | 0.0057063 | 6396 |
| 4 | 0.4745 | 0.0052268 | 6701 |
| 5 | 0.6101 | 0.0050532 | 6860 |
| 6 | 0.7455 | 0.0051895 | 6529 |
| 7 | 0.8809 | 0.0050275 | 6014 |
| 8 | 1.0165 | 0.004966 | 5715 |
| 9 | 1.1506 | 0.0051048 | 5002 |
| 10 | 1.286 | 0.0054984 | 4180 |
| 11 | 1.4207 | 0.0053432 | 3288 |
| 12 | 1.5509 | 0.0054605 | 2016 |
| 13 | 1.687 | 0.0078845 | 869 |
| 14 | 1.825 | 0.0067778 | 577 |
| 15 | 1.9637 | 0.006101 | 475 |

| Lag Class | Average Distance | Average Semivariance | Pairs |
|-----------|------------------|----------------------|-------|
| 1 | 0.0958 | 0.0063023 | 11 |
| 2 | 0.2062 | 0.0072984 | 41 |
| 3 | 0.3399 | 0.0088844 | 41 |
| 4 | 0.479 | 0.0064276 | 46 |
| 5 | 0.6066 | 0.0075691 | 51 |
| 6 | 0.7419 | 0.0079859 | 55 |
| 7 | 0.8798 | 0.0075847 | 68 |
| 8 | 1.0216 | 0.0065462 | 78 |
| 9 | 1.1515 | 0.0083733 | 84 |
| 10 | 1.2876 | 0.005738 | 77 |
| 11 | 1.4155 | 0.0099506 | 61 |
| 12 | 1.5572 | 0.0059139 | 67 |
| 13 | 1.6956 | 0.0061695 | 60 |
| 14 | 1.845 | 0.0064444 | 66 |
| 15 | 1.9706 | 0.0061838 | 38 |



34

(a)

(b)

Gambar 2. Semivariogram eksperimental : (a) tahun 2000, (b) tahun 2016

Pada Gambar 2 di atas merupakan hasil estimasi parameter untuk model semivariogram teoritis Spherical menggunakan metode kuadrat terkecil pada data tahun 2000 dan 2016. Sedangkan ringkasan estimasi parameter beserta fitting model semivariogram teoritisnya untuk data tahun 2001-2015 dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Fiting model semivariogram teoritis terbaik berdasarkan nilai RSS

| Tahun | Jenis Semivariogram | Semivariogram Parameter | | | | RSS |
|-------|---------------------|-------------------------|----------|-----------|--------|----------------------|
| | | c_0 | c | $c_0 + c$ | a | |
| 2000 | Spherical | 0.000640 | 0.005020 | 0.005660 | 0.0880 | 0.000008621 |
| 2001 | Exponential | 0.001070 | 0.006770 | 0.007840 | 0.0740 | 0.000013940 |
| 2002 | Exponential | 0.000440 | 0.005740 | 0.006180 | 0.0230 | 0.000003423* |
| 2003 | Exponential | 0.000340 | 0.005400 | 0.005740 | 0.0020 | 0.000010170 |
| 2004 | Spherical | 0.000010 | 0.006610 | 0.006620 | 0.1480 | 0.000031190 |
| 2005 | Gaussian | 0.002838 | 0.003068 | 0.005906 | 0.5420 | 0.000016690 |
| 2006 | Linear | 0.007051 | 0.000000 | 0.007051 | 1.9681 | 0.000022100 |
| 2007 | Spherical | 0.000920 | 0.011220 | 0.012140 | 0.0860 | 0.000010440 |
| 2008 | Gaussian | 0.003290 | 0.011090 | 0.014380 | 0.0610 | 0.000016970 |
| 2009 | Linear | 0.008671 | 0.000000 | 0.008671 | 1.9600 | 0.000066940 |
| 2010 | Linear | 0.012480 | 0.000000 | 0.012480 | 1.9667 | 0.000241900** |
| 2011 | Spherical | 0.000480 | 0.007480 | 0.007960 | 0.1060 | 0.000009949 |
| 2012 | Exponential | 0.000790 | 0.005480 | 0.006270 | 0.0790 | 0.000015680 |
| 2013 | Linear | 0.006191 | 0.000000 | 0.006191 | 1.9571 | 0.000017710 |
| 2014 | Spherical | 0.000420 | 0.004570 | 0.004990 | 0.1240 | 0.000003553 |
| 2015 | Gaussian | 0.001170 | 0.006600 | 0.007770 | 0.0560 | 0.000014790 |
| 2016 | Spherical | 0.000820 | 0.006400 | 0.007220 | 0.1420 | 0.000020170 |

35

*) RSS terkecil ; **) RSS terbesar

Berdasarkan Tabel 2 di atas diperoleh model semivariogram teoritis Spherical sebanyak 6 kali, Exponential 4 kali, Gaussian 3 kali dan Linear sebanyak 4 kali dengan parameternya seperti *nugget* (c_0), *sill* (c_0+c) dan *range* (a). Adapun semivariogram teoritis dengan nilai *Residual Sum Squares* (RSS) terkecil adalah untuk data tahun 2002 dengan model Spherical dan semivariogram teoritis dengan nilai *Residual Sum Squares* (RSS) terbesar pada data tahun 2010 dengan model Linear.

SIMPULAN

Dari hasil studi kasus diperoleh nilai parameter masing-masing model semivariogram teoritis. Terpilih model Spherical sebanyak 6 kali, Exponential 4 kali, Gaussian 3 kali dan Linear sebanyak 4 kali. Kriteria terpilihnya dari masing-masing semivariogram teoritis tersebut berdasarkan *Residual Sum Squares* (RSS) dengan model Spherical (tahun 2000) memiliki RSS terkecil dan model Linear (tahun 2010) memiliki RSS terbesar.

REFERENSI

- Armstrong, M., 1998. *Basic Linear Geostatistics*. Berlin: Springer-Verlag.
- Cressie, N., 1985. Fitting Variogram Models by Weighted Least Squares. *Mathematical Geology*, **17**(5), 563-583.
- Cressie, N., A., C., 1993. *Statistics for Spatial Data*. Revised Edition, John Wiley & Sons. New York.
- Faisal, F., 2015. Pemilihan Model Semivariogram Terbaik pada Data Spasial dengan Aplikasi Metode Program Linier (Studi Kasus Data Kejadian Gempa di Wilayah Pesisir Bengkulu) Prosiding Seminar Nasional MATEMATIKA UNPAR Bandung: hlm. ST 27 - ST 37.
- Faisal, F., 2016. Fiting Semivariogram dengan Linear Programming (LP), Ordinary Least Squares (OLS) dan Weighted Least Squares (WLS), Prosiding SEMIRATA Bidang MIPA 2016; BKS-PTN Barat, Palembang 22-24 Mei 2016: hlm. 177-181.
- Faisal, F., Novianti, P., Yosmar, S., 2018. Application of Ordinary Kriging Method Using Isotropic Semivariogram Model in Estimating of The Earthquake Strength in Bengkulu Province Proc. of The 1st International Conference on Mathematics and Islam (ICMIs 2018), Lombok.
- Marchant, B. P., Lark, R. M., 2004. Estimating Variogram Uncertainty. *Mathematical Geology*, **36**(8), 867-898.
- Wackernagel, H., 2003. *Multivariate Geostatistics*. 3rd ed Springer, Berlin Heidelberg.



MODEL PEMOGRAMAN LINIER UNTUK LAHAN PARKIR BERBENTUK BELAH KETUPAT

(LINIER PROGRAMMING MODEL FOR PARKING LOT FORM DIAMONDS)

Febby Ariad*
Universitas Riau

Ihda Hasbiyati
Universitas Riau

M.D.H Gamal
Universitas Riau

ABSTRACT: Parking lots are one of the problems in the transportation sector. Parking lots have various forms, in this study we will discuss about rhombic parking spaces formed by two equilateral triangles. The method used to obtain the optimal design is linear programming, by taking the parking angle of a vehicle with degrees 30, 45, 60, 75, and 90. The results of the study show that the parking lot is Rhombus-shaped with a parking corner 90 degree more optimal. So by designing a rhombus-shaped parking lot with an angle of 30, 45, 60, 75, and 90 solutions, optimize what is expected to be obtained.

KEYWORDS: Linear Programming, Parking Design, Parking Angle.

* Corresponding Author: FMIPA Universitas of Riau, Campus Bina Widya, Street H.R. Soebrantas Km. 12.5 Panam Pekanbaru, Riau, Indonesia; Email: febbyriad@gmail.com

PENDAHULUAN

Lahan parkir merupakan komponen penting dalam sistem transportasi. Lahan parkir merupakan lokasi yang ditentukan sebagai tempat pemberhentian kendaraan yang tidak bersifat sementara untuk melakukan kegiatan pada kurun waktu tertentu (Departemen Perhubungan, 1996). Desain lahan parkir yang paling efisien akan menghasilkan hasil yang maksimal dalam jumlah unit parkir. Saat ini sangat diperlukan desain lahan parkir yang efisien seiring dengan meningkatnya jumlah kendaraan. Desain lahan parkir yang lebih efisien akan menghasilkan kapasitas unit parkir yang lebih banyak. Banyak hal yang mempengaruhi desain lahan parkir seperti jumlah unit kendaraan yang ditampung, sudut parkir, sistem sirkulasi yang baik, dan ukuran kendaraan yang diparkir.

Dalam mengembangkan desain lahan parkir bertujuan untuk menyediakan kapasitas maksimum unit kendaraan dengan sistem sirkulasi yang nyaman dan aman. Banyak permasalahan yang terjadi dalam desain parkir seperti terbatasnya lahan parkir dan penggunaan lahan parkir yang tidak efisien. Desain lahan parkir dapat di buat dengan sudut yang berbeda, yaitu dengan sudut 45 derajat, 60 derajat, dan 90 derajat. Sudut 60 derajat merupakan sudut yang paling umum kita jumpai karena mudah untuk masuk dan keluar. Sudut 90 merupakan sudut yang wajar kita jumpai untuk lahan parkir tertentu. Akan tetapi dalam sudut 90 derajat ini biasanya terkendala pada saat masuk dan keluar. Setiap sudut memiliki berbagai ukuran lebar dan panjang yang

berbeda. Dalam hal ini untuk memaksimalkan lahan parkir didapatkan desain yang efisien dalam sudut 90 derajat dengan sirkulasi pintu masuk dan keluar yang berbeda.

Dalam hal ini terdapat beberapa desain lahan parkir pada penelitian sebelumnya. Pada tahun 2014 Abdel Fatah dan Taha, mendesain bentuk parkir dengan bentuk persegi panjang dan dengan tiga kemungkinan tempat parkir baris serta sudut yang mungkin. Rolan Ardeka dan teman-teman membahas tentang studi optimisasi fasilitas parkir yang diterapkan di Fakultas Kedokteran dan FMIPA di lingkungan Universitas Lampung, pada tahun 2015. Persoalan mereka adalah untuk menemukan solusi penanganan terhadap masalah parkir. Kemudian Intan syahrini dan teman-teman pada tahun 2018 membahas model matematika pada lahan parkir yang bentuk segitiga.

Dengan meningkatnya jumlah kendaraan, sangat diperlukan desain lahan parkir yang mampu menampung jumlah kendaraan yang optimal. Dalam hal ini penulis tertarik untuk mendesain bentuk lahan parkir dengan bentuk belah ketupat dengan metode program linier. Dengan bentuk belah ketupat akan dilihat bagaimana yang mampu memiliki daya tampung yang lebih baik.

BAHAN DAN METODE

1. Lahan parkir

Lahan parkir adalah lahan yang di khususkan untuk parkir kendaraan. Lahan parkir secara umum biasanya menggunakan tanah kosong, jalanan, dan lapangan. Tetapi, ada juga lahan parkir yang berada pada gedung dan juga tanah-tanah yang tidak dikuasai oleh pemerintah. Oleh karena itu, lahan parkir haruslah mengikuti bentuk tanah yang sudah tersedia. Bentuk-bentuk lahan parkir bisa berbentuk persegi panjang, persegi, segitiga, belah ketupat, jajar genjang, lingkaran sampai dengan bentuk yang tidak beraturan.

Dengan bentuk yang bermacam-macam tentunya jumlah daya tampung kendaraan juga berbeda-beda. Jika lahan yang tersedia luas, maka jumlah kendaraan yang akan parkir lebih banyak. Lahan parkir yang baik adalah lahan parkir yang mengoptimalkan lahannya tanpa tersisa untuk menampung kendaraan lebih banyak serta sirkulasi yang ada dalam lahan parkir berjalan dengan aman, nyaman dan efisien. Untuk mendapatkan lahan parkir yang efisien tentunya banyak faktor yang mempengaruhinya. Diantaranya adalah sudut parkir dan desain parkir.

2. Sudut Parkir

Ada beberapa macam sudut yang akan digunakan dalam memarkirkan kendaraan, diantaranya yaitu sudut 30, 45, 60, 75, dan 90 derajat. Sudut-sudut ini akan disesuaikan dengan bentuk dari lahan parkir. Sudut 90 derajat merupakan sudut parkir dengan cara tegak lurus, kendaraan yang satu berdampingan dengan kendaraan yang lainnya. Biasanya kendaraan menghadap tegak lurus ke lorong, jalan, trotoal, atau dinding serta parkir ini biasanya digunakan pada gedung parkir.

Selanjutnya, parkir dengan cara serong, atau dengan sudut 30, 45, 60 dan 75. Parkir dengan cara serong ini merupakan cara yang paling mudah, karena akan lebih memudahkan kendaraan untuk masuk dan keluar.

3. **Desain Parkir**

Desain parkir yang bagus akan menghasilkan hasil yang optimal. Ketersediaan lahan merupakan hal yang paling berpengaruh dalam desain lahan parkir karena harus mengikuti bentuk dari lahan yang tersedia. Untuk itu perlu adanya desain parkir yang dibuat agar bisa menghasilkan daya tampung yang optimal dan efisien. Disini desain yang akan digunakan adalah desain berbentuk belah ketupat.

4. **Pemrograman Linier**

Pemrograman linier adalah salah satu metode yang digunakan untuk model matematika. Tujuannya adalah untuk mencari hasil yang optimal. Menurut Mulyono (2004) Program linear (Linear Programming yang disingkat LP) merupakan salah satu teknik Operating Research yang digunakan paling luas dan diketahui dengan baik. Program Linear merupakan metode matematika dalam mengalokasikan sumber daya yang langka untuk mencapai tujuan. Program Linear (Linear Programming) merupakan sebuah teknik matematika yang didesain untuk membantu para manajer operasi dalam merencanakan dan membuat keputusan yang diperlukan untuk mengalokasikan sumber daya berdasarkan pendapat Heizer dan Render (2006).

Program Linear menyatakan penggunaan teknik matematika tertentu untuk mendapatkan kemungkinan terbaik atas persoalan yang melibatkan sumber yang serba terbatas. Program Linear adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas di antara aktivitas yang bersaing dengan cara terbaik yang mungkin dilakukan. Linear programming merupakan suatu teknik yang membantu pengambilan keputusan dalam mengalokasikan sumber daya (mesin, tenaga kerja, uang, waktu, kapasitas gudang, dan bahan baku). Linear programming merupakan penggunaan secara luas dari teknik model matematika yang dirancang untuk membantu manajer dalam merencanakan dan mengambil keputusan dalam mengalokasikan sumber daya.

Sebelum melihat pemecahan program linear, syarat-syarat utama persoalan program linear dalam perusahaan tertentu harus dipelajari. Berikut ini adalah syarat pembentukan model program linear: variabel keputusan merupakan unsur-unsur dalam persoalan yang dapat dikendalikan oleh pengambil keputusan; persoalan Linear Programming bertujuan untuk memaksimalkan atau meminimalkan kuantitas (pada umumnya berupa laba atau biaya); fungsi tujuan (objective function) dari suatu persoalan Linear Programming; tujuan utama suatu perusahaan pada umumnya untuk memaksimalkan keuntungan pada jangka panjang (dalam kasus sistem distribusi suatu perusahaan angkutan atau penerbangan, tujuan pada umumnya berupa meminimalkan biaya); batasan (constraints) atau kendala, yang membatasi tingkat sampai di mana sasaran dapat dicapai.

Sebagai contoh, keputusan untuk memproduksi banyaknya jumlah unit dari tiap produk dalam suatu lini produk perusahaan, dibatasi oleh tenaga kerja dan mesin yang tersedia. Oleh karena itu, untuk memaksimalkan atau meminimalkan suatu kuantitas (fungsi tujuan) bergantung kepada sumber daya yang jumlahnya terbatas (batasan);

beberapa alternatif tindakan yang dapat diambil. Sebagai contoh, jika suatu perusahaan menghasilkan tiga produk berbeda, manajemen dapat menggunakan Linear Programming untuk memutuskan cara mengalokasikan sumber daya yang terbatas (tenaga kerja, permesinan, dan seterusnya).

Jika tidak ada alternatif yang dapat diambil, Linear Programming tidak diperlukan; uji linearitas dipergunakan untuk melihat apakah model yang dibangun mempunyai hubungan linear atau tidak. Uji ini jarang digunakan pada berbagai penelitian karena biasanya model dibentuk berdasarkan telaah teoretis bahwa hubungan antara variabel bebas dengan variabel terikatnya adalah linear. Hubungan antarvariabel yang secara teori bukan merupakan hubungan linear sebenarnya sudah tidak dapat dianalisis dengan regresi linear, misalnya masalah elastisitas. Asumsi linearitas adalah asumsi yang menetapkan atau memastikan jika data yang kita miliki sesuai dengan garis linear atau tidak.

Dalam Linear Programming terdapat kesamaan dan ketidaksamaan. Meskipun kesamaan lebih populer dibandingkan dengan ketidaksamaan, ketidaksamaan merupakan suatu hubungan yang penting dalam program linear. Perbedaan antara ketidaksamaan dan kesamaan yaitu kesamaan digambarkan dengan tanda "=" dan merupakan pernyataan khusus dalam matematika. Namun banyak persoalan perusahaan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk kesamaan yang jelas dan rapi. Hitungan yang dicari tidak selalu satuan bulat tetapi bisa juga berupa angka kira-kira. Untuk itu dibutuhkan ketidaksamaan, yakni hubungan lain yang dinyatakan dalam bentuk matematika. Sebagian besar batasan dalam persoalan program linear dinyatakan sebagai ketidaksamaan.

Untuk memecahkan masalah program linear bisa dilakukan secara grafik sepanjang jumlah variabel (produk, misalnya) tidak lebih dari 2. Metode grafik merupakan cara yang baik untuk mulai mengembangkan suatu pengertian teknik kuantitatif. Tahap-tahap dalam menyelesaikan program linear dengan metode grafik, yaitu: menentukan variabel keputusan atau barang apa saja yang akan diproduksi oleh suatu perusahaan atau pabrik dengan memberikan pemisalan pada variabel keputusan; menentukan fungsi tujuan yaitu memaksimalkan profit atau meminimalkan biaya; menentukan fungsi kendala yang ada (batasan yang berkaitan dengan kasus); menyelesaikan permasalahannya atau persamaan fungsi yang ada dengan persamaan atau pertidaksamaan matematika, menentukan titik-titik yang memenuhi daerah yang memenuhi syarat. Daerah bagian atas yang dibatasi titik-titik merupakan daerah minimum dan daerah bawah yang dibatasi titik-titik merupakan daerah maksimum.

5. LINDO

LINDO (Linier Ineraktive Discreate Optimizer) adalah software yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman linier. Prinsip kerja LINDO adalah memasukkan data, menyelesaikan serta menaksir kebenaran dan kelayakan data berdasarkan penyelesaiannya. Menurut Linus Scharge (1991), perhitungan yang digunakan pada lindo pada dasarnya adalah menggunakan metode simpleks. Sedangkan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier integer nol-

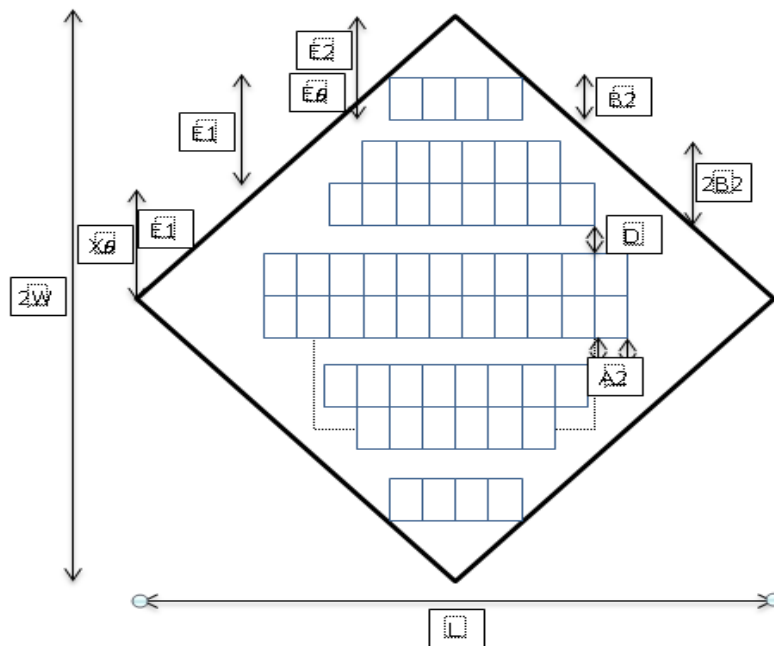
satu software lindo menggunakan metode Branch and Bound. Menurut Mark Wiley (2010), untuk menentukan nilai optimal dengan menggunakan lindo diperlukan beberapa tahapan yaitu:

- Menentukan model matematika berdasarkan data real
- Menentukan formulasi program untuk lindo
- Membaca hasil report yang dihasilkan lindo

Kegunaan utama dari program lindo adalah untuk mencari penyelesaian dari masalah linier dengan cepat serta memasukkan data yang berupa rumusan dalam bentuk linier. Lindo memberi banyak manfaat dan kemudahan dalam memecahkan masalah optimasi dan minimasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut merupakan desain lahan parkir berbentuk belah ketupat :



- $A2$ = Lebar kendaraan
 B = Panjang kendaraan
 $C1$ = Panjang kendaraan dari tepi jalan ke ujung kendaraan
 D = Panjang jalan dalam parkir (jalan masuk dan keluar kendaraan)
 L = Lebar lahan
 $2W$ = Panjang lahan
 $E1$ = Panjang lahan bagian luar yang penuh
 $E2$ = Panjang lahan bagian luar
 $X\theta$ = Jumlah baris bagian dalam
 $N\theta$ = Jumlah kendaraan bagian dalam

- $E\theta$ = Jumlah kendaraan bagian luar
 L'_1 = Panjang parkir bagian dalam pertama
 L'_2 = Panjang parkir bagian dalam kedua
 L'_3 = Panjang parkir bagian dalam ketiga

Berikut adalah ukuran-ukurannya dari masing-masing sudut.

Sebelumnya :

$$E1 = 2C1 + D$$

$$E2 = 2W - 2E1$$

$$L1' = L - 2D$$

$$L2' = L1' - 2D$$

$$L3' = L2' - 2D$$

| | 30° | 45° | 60° | 75° | 90° |
|-----|---------|--------|--------|--------|--------|
| A1 | 2.50 | 2.50 | 2.50 | 2.50 | 2.50 |
| A2 | 5.00 | 3.54 | 2.89 | 2.59 | 2.50 |
| B1 | 5.00 | 5.00 | 5.00 | 5.00 | 5.00 |
| B2 | 9.33 | 7.50 | 6.44 | 5.67 | 5.00 |
| C1 | 4.67 | 5.30 | 5.58 | 5.48 | 5.00 |
| C2 | 3.58 | 4.42 | 4.96 | 5.15 | 5.00 |
| D | 3.50 | 3.75 | 4.50 | 6.00 | 7.00 |
| E1 | 12.84 | 14.35 | 15.66 | 16.96 | 17 |
| E2 | 182.166 | 179.46 | 176.52 | 173.92 | 173.84 |
| L1' | 113 | 112.5 | 111 | 108 | 106 |
| L2' | 106 | 105 | 102 | 96 | 92 |
| L3' | 99 | 97.5 | 93 | 84 | 78 |

Dari desain diatas, model matematikanya adalah sebagai berikut:

Fungsi tujuan

$$\text{Max } Z = \sum_{\theta=30,45,60,75,90} NE\theta + N\theta$$

Kendala

$$2E1 X\theta + 2E2 E\theta \leq 2W$$

$$A2 N\theta - (L1' + L2') X\theta \leq 0$$

$$A2 N\theta - L3'E\theta \leq 0$$

$$E\theta \leq 2$$

Untuk mendapatkan hasil yang optimal maka kita substitusikan data yang diatas kedalam model dan diperoleh:

Fungsi tujuan

$$\text{Max } Z = N30 + N45 + N60 + N75 + N90 + NEE30 + NEE45 + NEE60 + NEE75 + NEE90$$

Kendala :

$$25.68 X30 + 28.7 X45 + 31.32 X60 + 33.92 X75 + 34 X90 + 354.32 E30 + 358.92 E45 + 353.04 E60 + 347.84 E75 + 347.68 E90 \leq 207.84$$

$$\begin{aligned}
5.00 N30 - 219 X30 &\leq 0 \\
3.54 N45 - 217.5 X45 &\leq 0 \\
2.89 N60 - 213 X60 &\leq 0 \\
2.59 N75 - 204 X75 &\leq 0 \\
2.50 N90 - 198 X90 &\leq 0 \\
5.00 NEE30 - 99 E30 &\leq 0 \\
3.54 NEE45 - 97.5 E45 &\leq 0 \\
2.89 NEE60 - 93 E60 &\leq 0 \\
2.59 NEE75 - 84 E75 &\leq 0 \\
2.50 NEE90 - 78 E90 &\leq 0 \\
5.00 N30 - 113 X30 &\leq 0 \\
3.54 N45 - 112.5 X45 &\leq 0 \\
2.89 N60 - 111 X60 &\leq 0 \\
2.59 N75 - 108 X75 &\leq 0 \\
2.50 N90 - 106 X90 &\leq 0 \\
E30 + E45 + E60 + E75 + E90 &\leq 2 \\
X30, X45, X60, X75, X90, E30, E45, E60, E75, E90, N30, N45, N60, N75, N90 \\
NEE30, NEE45, NEE60, NEE75, NEE90 &\geq 0
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah perhitungan dengan menggunakan software LINDO. Dan hasil yang diperoleh adalah:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 11
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 259.1887

| VARIABLE | VALUE | REDUCED COST |
|----------|------------|--------------|
| N30 | 0.000000 | 0.000000 |
| N45 | 0.000000 | 0.000000 |
| N60 | 0.000000 | 0.000000 |
| N75 | 0.000000 | 0.000000 |
| N90 | 259.188721 | 0.000000 |
| NEE30 | 0.000000 | 0.000000 |
| NEE45 | 0.000000 | 0.000000 |
| NEE60 | 0.000000 | 0.000000 |
| NEE75 | 0.000000 | 0.000000 |
| NEE90 | 0.000000 | 0.000000 |
| X30 | 0.000000 | 9.424471 |
| X45 | 0.000000 | 4.010928 |
| X60 | 0.000000 | 0.649577 |
| X75 | 0.000000 | 0.601391 |
| X90 | 6.112941 | 0.000000 |
| E30 | 0.000000 | 434.528473 |
| E45 | 0.000000 | 420.052002 |
| E60 | 0.000000 | 408.081726 |

| | | |
|-----|----------|------------|
| E75 | 0.000000 | 401.344513 |
| E90 | 0.000000 | 402.377411 |

Dari software lindo didapat fungsi objektif menunjukkan 259.1887 atau hasil optimalnya yaitu 259 kendaraan. Dengan $N90 = 259.1887$ yang artinya jumlah kendaraan bagian dalam sebanyak 259 kendaraan. Kemudian, $X90 = 6.112941$ berarti bahwa ada 6 baris kendaraan bagian dalamnya.

SIMPULAN

Dari penelitian diatas dapat disimpulkan bahwa lahan parkir berbentuk belah ketupat dengan perhitungan menggunakan LINDO dan metode pemograman linier menghasilkan sudut parkir 90 derajat yang lebih optimal.

UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terimakasih penulis tujukan kepada ibu Ihda Hasbiyati dan bapak M. D. H. Gamal yang telah memberikan tenaga, fikiran dan waktunya untuk membimbing demi kelancaran penulisan artikel ini. Serta, kepada pihak LPPM Universitas Riau yang telah membiayai proses keberhasilan penulisan artikel ini.

REFERENSI

- Abdelfatah, A. S and Taha, M. A, 2014. Parking Capacity Optimization Using Linier Programming, *Journal of Traffic and Logistics Engineering*, vol. 2, no. 3, 176-181.
- Direktur Jendral Perhubungan Darat Indonesia, 1996, Penyelenggaraan Fasilitas Parkir (Jakarta : Dapaten Perhubungan).
- Mulyono, S., (2004). Riset Operasi. Jakarta : Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.
- Putra, R. A., Sulistyorini, R., and Sebayang, S., 2015, Studi Optimalisasi Fasilitas Parkir di Fakultas Kedokteran (FK) serta Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung, *JRSDD*, vol. 3, no. 3, 411-426.
- Scharge, L. E., (1991), LINDO: An Optimization Modeling System, San Fransisco, CA : Scientific Press, @1991.
- Syahrini, I., Sundari, T., Iskandar, T., Halfiani, V., Munzir, S., and Ramli, M., 2018, Mathematical model of Parking Space unit for triangular parking area, Indonesia, *InteriOR*.



ANALISIS PERILAKU KONSUMEN BERBELANJA ONLINE DENGAN METODE REGRESI LOGISTIK BINER

(ANALYSIS OF CONSUMER BEHAVIOR IN ONLINE SHOPPING WITH BINARY LOGISTIC REGRESSION METHOD)

Gusmi Kholijah*
Universitas Jambi

ABSTRACT: Today shopping is not only by meeting directly between buyers and sellers again, but shopping is now done in cyber space by using some features that are used as a communication tool between sellers and buyers. This shopping activity is called online shopping. In online shopping, consumers do not need energy and time that much in shopping, because this activity can be done while do the other work. Therefore, this will make consumers consumptive to the goods being promoted. Consumer behavior is influenced by gender, age, social media, the amount of spending expenditure, display image and the amount of shopping in one month. Consumer attitudes in online shopping consist of consumptive and non-consumptive categories. In statistics, if there are two categories of response variables and there are several predictor variables that influence then used is binary logistic regression analysis. In this study resulted that the variables that affect consumer attitudes toward online shopping are gender, age and image display. Sex variables found that women are more consumptive in online shopping than men. Then from the age variable, the higher the age of a person increasingly has a consumptive attitude. While in the image display, more consumers who do not pay attention to attractive images in online shopping.

KEYWORDS: Online Shopping, Logistic Regression, Binary.

* Corresponding Author: Fakultas Sains dan Teknologi Univeritas Jambi Jl. Raya Jambi-Ma.Bulian Km 15 Mendalo Indah Jambi, 36361; Email: gusmikholijah@unja.ac.id

PENDAHULUAN

1. Latar Belakang

Belanja merupakan salah satu jenis kebutuhan manusia yang harus dipenuhi. Belanja adalah kegiatan yang mempertemukan antara pemilik barang dan pembeli barang dalam satu tempat. Seiring waktu, kegiatan belanja tidak hanya dilakukan dalam satu tempat lagi, melainkan dapat dilakukan dalam tempat yang berbeda tetapi masih dalam satu transaksi pembelian. Hal ini terjadi karena adanya perkembangan dalam teknologi komunikasi. Perkembangan ini terlihat dengan banyaknya muncul media sosial (medsos). Medsos ini digunakan oleh para penjual sebagai tempat mempromosikan barang dagangan dan sekaligus tempat berjualan juga.

Kegiatan belanja online sekarang ini sudah menjadi kebiasaan bagi masyarakat, kebiasaan yang muncul itu akan memberikan perilaku kepada para pelaku belanja online. Perilaku tersebut bisa muncul baik pada pembeli dan konsumen yang membeli

barang. Pada perilaku konsumen akan muncul sikap ingin belanja terus karena adanya kesenangan menunggu barang sampai di alamat tanpa mengeluarkan tenaga besar untuk pergi ke tempat-tempat barang tersebut dijual. Sikap yang muncul pada konsumen saat membeli online berupa sikap konsumtif.

Sikap konsumen belanja online ini dipengaruhi oleh berbagai faktor diantaranya dipengaruhi oleh jenis kelamin pembeli, usia, pekerjaan, jenis media sosial, jenis barang yang dibeli, tampilan gambar dan karakteristik dari barang yang dijual. Faktor-faktor yang muncul pada saat membeli online pada masyarakat ini akan mempengaruhi sikap belanja konsumen, dimana ada yang berperilaku konsumtif dan ada juga yang tidak konsumtif. Faktor-faktor yang mempengaruhi sikap konsumtif konsumen berperan sebagai variabel prediktor yang mempengaruhi dua kategori variabel respon yaitu konsumen konsumtif dan tidak konsumtif. Variabel respon pada perilaku konsumen merupakan skala nominal dengan dua kategori, kemudian variabel respon ini dipengaruhi oleh beberapa variabel prediktor sehingga penelitian ini akan membahas tentang regresi logistik biner dengan menerapkannya pada sikap konsumen pada saat berbelanja online.

2. Studi Pustaka

1) Regresi Logistik

Regresi logistik merupakan metode yang menghubungkan antara variabel respon yang bersifat kategorik dengan variabel prediktor. Variabel respon memiliki banyak kategori sehingga dibagi atas regresi logistik biner jika terdiri dari dua kategori, regresi logistik multinomial jika kategori lebih dari dua.

Regresi Logistik Biner merupakan suatu metode analisis statistika yang mendeskripsikan hubungan antara peubah respon yang memiliki dua kategori dengan satu atau lebih peubah prediktor yang berskala kategorik atau kontinu (Hosmer & Lemeshow 2000). Suatu kejadian peubah respon Y mengikuti sebaran Bernoulli dengan fungsi sebaran peluang :

$$P(Y = y) = \pi^y (1 - \pi)^{1-y} \quad (1)$$

dengan $y = \{0,1\}$ dan π adalah peluang kejadian bernilai $Y = 1$.

Hosmer & Lemeshow (2000) menjelaskan bahwa bentuk model regresi logistik dengan $P(Y = 1|x) = \pi(x)$ adalah:

$$\pi(x) = \frac{\exp(g(x))}{1 + \exp(g(x))} \quad (2)$$

dengan $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$

dimana :

β_0 = konstanta

β_i = koefisien regresi logistik ($i = 1, 2, \dots, p$)

p = banyaknya peubah prediktor

Fungsi di atas berbentuk non linier, sehingga untuk membentuk fungsi linier dilakukan transformasi logit sebagai berikut (Agresti 1990) :

$$\text{logit} [\pi(x)] = \ln \left[\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)} \right] = g(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p \quad (3)$$

$g(x)$ merupakan penduga logit sebagai fungsi linier dari peubah prediktor, dengan kemungkinan nilai peluang terbesar adalah 1.

Suatu model regresi logistik dengan peubah penjelas yang bersifat kategorik memerlukan peubah boneka (*dummy variable*). Secara umum jika sebuah peubah dengan skala nominal atau ordinal mempunyai k kemungkinan nilai, maka diperlukan $k-1$ peubah boneka.

2) Estimasi Parameter

Pendugaan koefisien model regresi logistik dapat dilakukan dengan metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*), yaitu diperoleh dengan menurunkan fungsi kepekatan peluang bersama (Hosmer & Lemeshow 2000). Pada model regresi logistik asumsi kehomogenan ragam galat tidak terpenuhi dan antara amatan yang satu dengan yang lain diasumsikan saling bebas, maka fungsi kemungkinan maksimumnya adalah:

$$l(\beta) = \prod_{i=1}^n [\pi(x_i)^{y_i} [1 - (\pi(x_i))]^{1-y_i}] \quad (4)$$

dengan:

$$i = 1, 2, \dots, n$$

y_i = respon pada pengamatan ke- i

$\pi(x_i)$ = peluang kejadian ke- i bernilai $Y=1$

Prinsip dari metode kemungkinan maksimum adalah mencari nilai maksimum logaritma fungsi kemungkinan maksimumnya:

$$\ln [l(\beta)] = \sum_{i=1}^n \{y_i \ln[\pi(x_i)] + (1 - y_i) \ln[1 - \pi(x_i)]\} \quad (5)$$

untuk mendapatkan nilai dugaan koefisien regresi logistik ($\hat{\beta}$) dilakukan dengan penurunan $\ln[l(\beta)]$ terhadap β dan disamakan dengan nol.

3) Pengujian Parameter

Pengujian parameter model dilakukan untuk mengetahui peranan peubah prediktor yang terdapat di dalam model. Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji G , yaitu uji rasio kemungkinan maksimum (*likelihood ratio test*) untuk menguji peranan peubah prediktor secara serentak atau keseluruhan. Rumus umum statistik uji G adalah:

$$G = -2 \ln \left[\frac{L_0}{L_1} \right] \quad (6)$$

dengan :

L_0 = nilai kemungkinan tanpa peubah prediktor

L_1 = nilai kemungkinan dengan peubah prediktor

Hipotesis yang digunakan, yaitu :

$$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \text{minimum terdapat satu } \beta_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, p)$$

Statistik uji G mengikuti sebaran χ^2 dengan derajat bebas p . Aturan pengambilan keputusan yang diambil adalah jika nilai $G > \chi_{\alpha; p}^2$ atau nilai p value $< \alpha$ maka hipotesis nol ditolak.

Selain itu dilakukan pengujian secara parsial untuk masing-masing koefisien peubah menggunakan statistik uji *Wald*. Hipotesis yang digunakan, yaitu:

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$H_1 : \beta_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, p)$$

Statistik uji *Wald* didefinisikan sebagai berikut (Widarjono 2010) :

$$W = \frac{\hat{\beta}_i}{SE(\hat{\beta}_i)} \quad (7)$$

Nilai $\hat{\beta}_i$ merupakan estimasi koefisien dari peubah prediktor, sedangkan $SE(\hat{\beta}_i)$ adalah simpangan baku dari estimasi parameternya. Nilai uji *Wald* mengikuti sebaran *Khi Kuadrat*, dengan daerah penolakan H_0 adalah jika $W > \chi_{\alpha; p}^2$ dengan derajat bebas p .

4) Ketepatan Klasifikasi Model

Menurut Hosmer & Lemeshow (2000) salah satu ukuran kebaikan model adalah jika memiliki peluang salah klasifikasi yang minimal. Ketepatan prediksi dari model

dapat diketahui dengan menggunakan tabel ketepatan klasifikasi (*correct classification table*). Nilai *cutpoint* (c) ditentukan untuk memperoleh kesesuaian estimasi terhadap amatan dan dibandingkan dengan peluang estimasi $\pi(x)$. Jika $\pi(x)$ lebih besar dari c maka nilai estimasi termasuk pada respon $Y = 1$ dan selain itu $Y = 0$. Ketepatan model dalam memprediksi kejadian gagal ($Y = 0$) dinyatakan sebagai $\frac{N_{00}}{N_{0.}}$, proporsi nilai estimasi yang sama dengan nilai amatan pada kategori nilai amatan $Y = 0$. Indikator dan pengertian yang sama juga berlaku untuk mengevaluasi kemampuan model memprediksi kejadian berhasil ($Y = 1$), yaitu $\frac{N_{11}}{N_{1.}}$. Kemampuan model dalam memprediksi keseluruhan kejadian $\frac{(N_{00}+N_{11})}{N_{..}}$ yang mencerminkan proporsi nilai amatan yang secara tepat dapat diestimasi oleh model (Tabel 1).

Tabel 1: Tabel ketepatan klasifikasi

| Amatan | Estimasi | | Total | % tepat |
|--------|----------|----------|----------|----------------------------|
| | 0 | 1 | | |
| 0 | N_{00} | N_{01} | $N_{0.}$ | $N_{00}/N_{0.}$ |
| 1 | N_{10} | N_{11} | $N_{1.}$ | $N_{11}/N_{1.}$ |
| | $N_{.0}$ | $N_{.1}$ | $N_{..}$ | $(N_{00} + N_{11})/N_{..}$ |

dengan :

N_{00} : suatu amatan bernilai 0 dengan estimasi 0

$N_{0.}$: jumlah total estimasi bernilai 0

$N_{.0}$: jumlah total amatan bernilai 0

$N_{..}$: jumlah keseluruhan nilai yang dihasilkan

5) Interpretasi Koefisien

Interpretasi koefisien dalam regresi logistik dilakukan menggunakan nilai *odds ratio*. *Odds ratio* adalah rasio peluang kejadian sukses dengan kejadian tidak sukses dari suatu peubah prediktor terhadap peubah respon. Koefisien model logit (β_i) mencerminkan perubahan nilai fungsi logit $g(x)$ untuk setiap perubahan satu unit peubah prediktor x . Dalam analisis model logit, odds ratio didefinisikan sebagai berikut:

$$\Psi = \exp(\beta) \quad (8)$$

dimana β adalah koefisien dari model regresi logistik. Interpretasi dari *odds ratio* untuk peubah prediktor x berskala biner adalah kecenderungan untuk $Y = 1$ pada $x = 1$ sebesar ψ kali dibandingkan pada nilai $x = 0$. Sedangkan untuk peubah prediktor kontinu, jika $\psi \geq 1$ maka kenaikan nilai peubah prediktor x diikuti dengan semakin naiknya kecenderungan untuk $Y = 1$. *Odds ratio* memiliki selang kepercayaan sebagai berikut :

$$\exp [\hat{\beta}_i \pm Z_{1-\alpha/2} \cdot \widehat{SE}(\hat{\beta}_i)] \quad (9)$$

3. Tujuan

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk melihat karakteristik perilaku dari konsumen yang berbelanja online dengan metode regresi logistik biner.

BAHAN DAN METODE

1. Bahan

Pada penelitian ini memakai responden yang selalu berbelanja online. Sampel yang digunakan pada penelitian ini sebanyak 45 sampel. Sampel dalam penelitian ini diambil menyebarkan kuisisioner di Fakultas Saintek Unja. Adapun variabel dalam penelitian ini dapat dilihat pada tabel berikut ini:

Tabel 2: Definisi Variabel Penelitian

| Kode | Variabel | Definisi | Skala |
|----------------|-------------------------------------|---------------------------|---------|
| Y | Konsumerisme | 1 = Ya | Nominal |
| | | 2 = Tidak | |
| X ₁ | Jenis Kelamin | 1= Laki-laki | Nominal |
| | | 2= Perempuan | |
| X ₂ | Usia | Umur responden | Rasio |
| X ₃ | Media sosial yang dipakai | 1= Facebook | Nominal |
| | | 2= Whatsapp | |
| | | 3= Twitter | |
| | | 4= Website | |
| | | 5= Instagram | |
| X ₄ | Besarnya pengeluaran belanja | 1= < 100.000 rupiah | Ordinal |
| | | 2= < 300.000 rupiah | |
| | | 3= 300.000-500.000 rupiah | |
| | | 4= > 500.000 rupiah | |
| X ₅ | Tampilan gambar barang yang menarik | 1 = Ya | Nominal |
| | | 2 = Tidak | |
| X ₆ | Banyaknya belanja dalam sebulan | 1= 1x sebulan | Ordinal |
| | | 2= 2x sebulan | |
| | | 3= ≥ 3 x sebulan | |

2. Metode Penelitian

Adapun metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan model regresi logistik antara variabel respon dengan variabel-variabel prediktor yang signifikan secara serentak.
2. Menginterpretasikan model regresi logistik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari pemodelan regresi logistik yang telah dilakukan didapatkan bahwa variabel prediktor secara bersama-sama yang berpengaruh terhadap sikap konsumen dalam berbelanja online hanya variabel jenis kelamin, usia dan tampilan gambar. Hal ini terlihat dalam tabel uji hipotesis dibawah ini:

Tabel 3: Uji Variabel Secara Bersama-sama

| Step | -2 Log likelihood | Cox & Snell R Square | Nagelkerke R Square |
|------|---------------------|----------------------|---------------------|
| 1 | 47.007 ^a | .281 | .376 |

Hipotesis:

$$H_0: \beta = 0$$

$$H_1: \beta \neq 0$$

$$\alpha = 0,05$$

$$\text{Statistik Uji: } G^2 = -2 \ln \left[\frac{L_0}{L_1} \right] = 47,007$$

$$\text{Daerah penolakan } H_0: G^2 > \chi^2_{(0,05;3)} = 7.81$$

Keputusan yang diambil adalah tolak H_0 . Artinya minimal ada satu variabel prediktor yang pengaruhnya signifikan terhadap variabel sikap konsumen dalam berbelanja online. Dalam mengetahui variabel prediktor mana yang berpengaruh, maka dilakukan pengujian signifikansi parameter secara parsial sebagai berikut.

Hipotesis:

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$H_1 : \beta_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$\alpha = 5 \%$$

$$W = \frac{\hat{\beta}_i}{SE(\hat{\beta}_i)}$$

$$\text{Daerah penolakan } H_0: |W_{\text{hit}}| > Z_{\alpha/2} = 1,96.$$

Tabel 4: Variabel dalam Persamaan Model

| | B | S.E. | Wald | df | Sig. | Exp(B) | 95% C.I. for EXP(B) | |
|---------------------|--------|-------|-------|----|------|--------|---------------------|-------|
| | | | | | | | Lower | Upper |
| Step 1 ^a | | | | | | | | |
| Jenis_Kelamin(1) | -2.498 | 1.044 | 5.724 | 1 | .017 | .082 | .011 | .637 |
| Usia | .224 | .093 | 5.801 | 1 | .016 | 1.251 | 1.043 | 1.501 |
| Tampilan_gambar(1) | -2.068 | .864 | 5.724 | 1 | .017 | .126 | .023 | .688 |
| Constant | -3.626 | 2.209 | 2.695 | 1 | .101 | .027 | | |

a. Variable(s) entered on step 1: Jenis_Kelamin, Usia, Tampilan_gambar.

52

Terlihat dari tabel diatas bahwa nilai dari $W_{hit} > 1,96$, yang mengartikan bahwa seluruh variabel prediktor signifikan secara bersama-sama.

1) Uji Kesesuaian Model

Langkah selanjutnya yang dilakukan adalah menguji kesesuaian model untuk mengetahui apakah model regresi logistik yang didapatkan telah sesuai atau tidak.

H_0 : Model tidak sesuai

H_1 : Model sesuai

$\alpha = 0,05$

Uji ini dapat dilihat dari nilai Hosmer and Lemeshow. Jika *Hosmer – Lemeshow* $> \chi^2_{0,05;2} = 4,605$ maka keputusan tolak H_0 .

Tabel 5: Hosmer and Lemeshow Test

| Step | Chi-square | Df | Sig. |
|------|------------|----|------|
| 1 | 3.300 | 6 | .770 |

Dari tabel diatas diperoleh nilai *Hosmer – Lemoshow* $< \chi_{0,05;2}^2 = 4,605$ sehingga keputusan terima H_0 . Dengan demikian model regresi logistik multivariate adalah:

$$\hat{\pi}(x) = \frac{\exp(-3.626 - 2.498x_1(1) + 0.224x_2 - 2.068x_5(1))}{1 + \exp(-3.626 - 2.498x_1(1) + 0.224x_2 - 2.068x_5(1))}$$

2) Interpretasi model regresi Logistik

Langkah selanjutnya adalah menginterpretasikan model tersebut. Jika model regresi logistik yang terbaik ditulis dalam bentuk logit, maka menjadi:

$$\hat{g}(x) = -3.626 - 2.498x_1(1) + 0.224x_2 - 2.068x_5(1)$$

Tabel 6: Odds Rasio Parameter Model

| Variabel | Exp ($\hat{\beta}$) |
|----------|-----------------------|
| $X_1(1)$ | 0.082 |
| X_2 | 1.251 |
| $X_5(1)$ | 0.126 |

Dari nilai tabel diatas menyampaikan bahwa nilai odds rasio dari variabel jenis kelamin laki-laki sebesar 0,082 kali dibanding jenis kelamin perempuan terhadap sikap konsumerisme belanja online, dengan kata lain jenis kelamin perempuan 12 kali lebih tinggi menunjukkan sikap konsumerisme dalam berbelanja online. Sedangkan variabel usia, nilai odds rasionya sebesar 1.251 menunjukkan bahwa dengan meningkatnya umur satu satuan, maka terdapat perubahan odds rasio sebesar 1.251 terhadap sikap konsumerisme dalam berbelanja online. Dari variabel tampilan gambar terlihat bahwa 0.126 kali lebih tinggi tampilan gambar yang menarik mempengaruhi terhadap sikap konsumerisme dalam berbelanja online.

3) Ketepatan Pengklasifikasian model

Dalam melihat peluang ketepatan klasifikasi dari kategori konsumtif dan tidak konsumtif dapat dilihat dari tabel dibawah ini :

Tabel 7: Classification Table^a

| | Observed | Predicted | | |
|-----------|--------------------------------------|----------------|--------------------|--------------------|
| | | Sikap_Konsumen | | Percentage Correct |
| | | konsumti f | tidak konsumtif | |
| Step 1 | konsumtif | 13 | 7 | 65.0 |
| | Sikap_Konsumen tidak konsumtif | 6 | 19 | 76.0 |

| | | | |
|--------------------|--|--|------|
| Overall Percentage | | | 71.1 |
|--------------------|--|--|------|

a. The cut value is .500

Dari tabel diatas dapat diketahui bahwa besarnya ketepatan pengklasifikasian konsumtif sebesar 65% dan tidak konsumtif adalah 76 %. Secara keseluruhan, model regresi logistik yang telah diperoleh dapat mengklasifikasikan responden dengan benar sebanyak 71,1%. Sehingga besarnya misklasifikasi adalah

$$\frac{7+6}{13+7+6+19} = 28,9 \%$$

Kesalahan klasifikasi dari model regresi logistik ini masih cukup besar. Hal tersebut dimungkinkan karena sedikitnya variabel prediktor yang masuk kedalam model.

SIMPULAN

Bentuk model tentang perilaku konsumen terhadap berbelanja online yaitu $\hat{\pi}(x) = \frac{\exp(-3.626-2.498x_1(1)+0.224x_2-2.068x_5(1))}{1+\exp(-3.626-2.498x_1(1)+0.224x_2-2.068x_5(1))}$. Model ini menyampaikan bahwa variabel yang mempengaruhi terhadap sikap konsumen terhadap belanja online adalah jenis kelamin, usia dan tampilan gambar. Variabel jenis kelamin menyampaikan bahwa perempuan lebih bersikap konsumtif dalam belanja online dibanding laki-laki. Kemudian semakin tinggi usia seseorang semakin memiliki sikap konsumtif, sedangkan dalam tampilan gambar, konsumen lebih banyak yang tidak memperhatikan gambar menarik dalam berbelanja online.

54

REFERENSI

- Agresti A. 1990. *Categorical Data Analysis*. New Jersey : John Wiley and Sons. 558p
- Garson DG. 2012. *Log - Linear, Logit, and Probit Models : Statnotes*. North Carolina State University.<http://faculty.chass.ncsu.edu/garson/PA765/logit.htm>.
- Hosmer DW, Lemeshow S. 2000. *Applied Logistic Regression*, 2nd edition. New York : John Wiley and Sons. 373 p
- Indra P, Rcki. 2008. *Faktor-faktor yang Mempengaruhi Resiko Penyebab Penderita Kanker Payudara dengan Menggunakan Pendekatan Regresi Logistik*. Surabaya: digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-13440. Diakses tanggal 9 Februari 2018.
- Lestari, S. A., dkk. 2017. *Analisis Faktor-faktor yang Mempengaruhi Keputusan Belanja Online: PVT Model*. Yogyakarta: CITEE 2017, ISSN: 2085-6350.
- Puspitaningrum, A. 2012. *Regresi Logistik Biner dan Model Loglinier Produksi Bibit Klonal Kelapa Sawit (Elaeis guineensis Jacq.)*. Bogor:

repository.ipb.ac.id/bitstream/handle/123456789/58610/G12apu1. Diakses tanggal 8 Februari 2018.

Thohiroh, A. Q. 2015. *Perilaku Konsumtif melalui Online Shopping Fashion pada Mahasiswi Fakultas Psikologi Universitas Muhammadiyah Surakarta: Surakarta. Skripsi.*

Widarjono A. 2010. *Analisis Statistika Multivariat Terapan*. Yogyakarta : UPP STIM YKPN. 145 hal.

Widiyanto, I & Prasilowati, S. R. 2015. *Perilaku Pembelian Melalui Internet*. IMK, Vol. 17. No.2. September 2015. Hal 109-112. ISSN 1411-1438 print/ ISSN 2338-8234 online.



PENDUGAAN RATA-RATA POPULASI DENGAN MENGGUNAKAN VARIABEL TAMBAHAN PADA SAMPLING ACAK BERSTRATA

(ESTIMATION OF POPULATION MEAN USING TWO AUXILIARY VARIABLES IN STRATIFIED RANDOM SAMPLING)

Haposan Sirait*

Universitas Riau

Noor Eli Goldameir

Universitas Riau

Rustam Efendi

Universitas Riau

Leli Deswita

Universitas Riau

Revi Pertiwi

Universitas Riau

ABSTRACT: This paper discusses four estimators of population averages in stratified random sampling using information from two additional variables. Then, the Mean Square Error (MSE) of each estimator will be determined to compare in order to get a relatively more efficient estimator. The case study is given to discuss the four estimators.

KEYWORDS: auxiliary variables, stratified random sampling, mean square error.

* Corresponding Author: Program Studi Statistika FMIPA Universitas Riau Pekanbaru; Email: haposansirait96@gmail.com

PENDAHULUAN

Metode pengambilan sampel terdiri dari dua cara, yaitu dengan cara acak dan cara tidak acak. Ada beberapa metode yang digunakan untuk sampling secara acak, diantaranya yaitu sampling acak berstrata, dimana sampel diambil dari setiap strata secara acak dengan terlebih dahulu populasi yang akan diteliti memiliki nilai-nilai karakter yang relative heterogen dibagi atas beberapa strata dengan prinsip sedemikian sehingga dalam strata homogen dan antar strata relative heterogen. [3, h.89].

Cochran [3, h.72] mengungkapkan bahwa dalam survey sampel membuat keputusan yang benar tentang ukuran sampel adalah tahap yang penting, jika sampel terlalu banyak dapat membuang-buang sumber tenaga dan sampel yang terlalu sedikit juga dapat mengurangi kegunaan dari hasilnya. Oleh sebab itu, harus dilakukan pemilihan dan pengambilan sampel secara benar dari suatu populasi, sehingga dapat digunakan sebagai wakil yang baik bagi populasi tersebut. Untuk meningkatkan

ketelitian penduga, tanpa harus menambah ukuran sampel, metode yang digunakan diantaranya metode rasio, product, regresi dan rasio regresi.

Peneliti menggunakan metode penaksir rasio dengan memanfaatkan variabel tambahan. Menurut Perri [8], variabel tambahan biasanya digunakan dalam praktik survei sampel untuk mendapatkan desain yang lebih baik dan untuk mencapai ketelitian yang lebih tinggi dalam penaksiran parameter populasi seperti rata-rata atau varians dari variabel. Swain [11] mengajukan gagasan untuk menggunakan lebih dari satu variabel tambahan dalam memilih sampel dari populasi sebagai pertimbangannya. Dimana metode rasio memanfaatkan variabel ataupun karakter tambahan (X) dan (Z), dengan asumsi mendukung informasi ataupun mempunyai hubungan dengan karakter yang sedang diteliti (Y).

Penaksir rasio yang diperoleh pada umumnya merupakan penaksir yang bias, sehingga untuk menentukan ketelitiannya dicari melalui Mean Square Error (MSE). akan tetapi merupakan penaksir yang relative lebih efisien dibandingkan dengan penaksir sederhana.

LANDASAN TEORI.

Sampling acak berstrata adalah sebuah metode yang digunakan untuk mengambil n_h unit sampel dari strata ke-h, dengan sampling acak. Dalam hal ini pengambilan sampel dilakukan tanpa pengembalian agar karakteristik unit-unit lebih representative Sukhatme [9].

Definisi 1 : [1,h.105] Rata-rata sampel yang diperoleh dengan sampling acak berstrata didefinisikan dengan $\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} \bar{y}_h$ merupakan penaksir tak bias rata-rata populasi.

Dimana $\bar{y}_h = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$ disebut sebagai rata-rata sampel pada stratum ke-h.

Ketelitian rata-rata sampel \bar{y}_{st} dapat ditentukan dengan teorema berikut :

Teorema 2. [3,h.105] Untuk pengambilan sampel acak berstrata, variansi rata-rata sampel \bar{y}_{st} adalah

$$V(\bar{y}_{st}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h} \quad (1)$$

Dimana $W_h = \frac{N_h}{N}$ dan $S_h^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{i=1}^{N_h} (y_{hi} - \bar{Y}_h)^2$

Bukti: Dapat dilihat pada [3, h. 105]

Selanjutnya bentuk umum penaksir rasio pada sampling acak berstrata dengan memanfaatkan variabel tambahan X yaitu :

$$\hat{Y}_{Rst} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \cdot \bar{X} \quad (2)$$

Dengan asumsi bahwa \bar{X} telah diketahui, selanjutnya dinotasikan sebagai t_0 . Penaksir Rasio pada ampling Acak berstrata pada persamaan (2) merupakan suatu penaksir bias untuk rata-rata populasi. Ketelitian penduga bias dapat ditentukan berdasarkan *Mean Square Error* (MSE) dari penduga tersebut.

Definisi 3 [4,h.901]: Misalkan $\hat{\theta}^*$ merupakan penaksir bias untuk θ . Rata-rata kesalahan kuadrat dinotasikan dengan $MSE(\hat{\theta}^*)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$MSE(\hat{\theta}^*) = E(\hat{\theta}^* - \theta)^2.$$

Jika terdapat beberapa penaksir rata-rata yang bersifat bias dan untuk mengetahui penaksir tersebut lebih efisien, dapat di tentukan dengan efisiensi relatifnya yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4 [5, h. 272] Misalkan $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ merupakan penaksir bias untuk θ , selanjutnya misalkan $MSE(\hat{\theta}_1)$ dan $MSE(\hat{\theta}_2)$ adalah MSE dari $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$, efisiensi relatif $\hat{\theta}_1$ terhadap $\hat{\theta}_2$ dinotasikan dengan $RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ dan didefinisikan dengan

$$RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{MSE(\hat{\theta}_2)}{MSE(\hat{\theta}_1)}.$$

Ketika $RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) > 1$ diperoleh nilai $MSE(\hat{\theta}_2)$ lebih kecil dari $MSE(\hat{\theta}_1)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa penaksir $\hat{\theta}_2$ relatif lebih efisien dari penaksir $\hat{\theta}_1$.

Berdasarkan Definisi 4, jika $\frac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)} > 1$, maka ekuivalen dengan

$$MSE(\hat{\theta}_1) > MSE(\hat{\theta}_2),$$

Atau dapat ditulis

$$MSE(\hat{\theta}_1) - MSE(\hat{\theta}_2) > 0. \quad (3)$$

Dengan demikian penaksir yang efisien antara penaksir $\hat{\theta}_1$ dan penaksir $\hat{\theta}_2$ dapat ditentukan berdasarkan selisih $MSE(\hat{\theta}_1)$ dengan $MSE(\hat{\theta}_2)$.

Penaksir Rasio bias berstrata merupakan suatu bentuk Rasional, sehingga untuk menentukan bias atau tak bias serta ketelitiannya , penaksir tersebut di aproksimasi kedalam bentuk deret sehingga berbentuk polynomial.

Teorema 5 [2, h. 184] **Deret Taylor**

Misalkan $k \in A$ dan $I = [a, b]$, misalkan $f: I \rightarrow R$ dan $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ adalah kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b) . Jika $x_0 \in I$ maka untuk sembarang $x \in I$ terdapat suatu titik $c \in (x, x_0)$ sehingga,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(k + 1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Bukti : dapat dilihat pada Bartle[2, h. 184].

Jika disekitar titik asal $x_0 = 0$, maka deret Taylor disebut deret MacLaurinyaitu

$$f(x) = f(x_0) + xf'(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \dots + \frac{x^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{n!}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bias dan MSE Penaksir Rasio

Beberapa Bentuk dari penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling acak berstrata dengan memanfaatkan variable tambaha X dan Z yang pertama yaitu :

$$t_1 = \bar{y}_{st} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}} \right) \left(\frac{\bar{z}_{st}}{\bar{Z}} \right) \tag{4}$$

Bias dan MSE dari penaksir dapat ditentukan dengan memanfaatkan deret Taylor sekitar rata-rata yaitu

$$\begin{aligned} B(t_1) &= \bar{Y}(-V_{011} + V_{020} + V_{101} - V_{110}), \\ MSE(t_1) &= \bar{Y}^2(V_{002} - 2V_{011} + 2V_{101} + V_{020} - 2V_{110} + V_{200}). \end{aligned} \tag{5}$$

Dimana

$$V_{020} = \frac{\sum_{h=1}^l W_h^2 l_h S_{xh}^2}{\bar{X}^2}, \quad V_{002} = \frac{\sum_{h=1}^l W_h^2 l_h S_{zh}^2}{\bar{Z}^2}, \quad V_{110} = \frac{\sum_{h=1}^l W_h^2 l_h S_{xyh}}{\bar{X}\bar{Y}}, \quad V_{011} = \frac{\sum_{h=1}^l W_h^2 l_h S_{xzh}}{\bar{X}\bar{Z}},$$

dan

$$V_{101} = \frac{\sum_{h=1}^l W_h^2 l_h S_{yzh}}{\bar{Y}\bar{Z}}$$

Bentuk yang kedua yaitu :

$$t_2 = \bar{y}_{st} \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}_{st}}{\bar{X} + \bar{x}_{st}}\right) \exp\left(\frac{\bar{z}_{st} - \bar{Z}}{\bar{z}_{st} + \bar{Z}}\right),$$

Dengan

$$B(t_2) = \hat{Y} \left(\frac{V_{002}}{8} - \frac{V_{011}}{4} + \frac{V_{020}}{8} - \frac{V_{101}}{2} - \frac{V_{110}}{2} \right),$$

$$MSE(t_2) = \bar{Y}^2 \left(V_{200} - (V_{101} - V_{110}) + \frac{V_{020}}{4} + \frac{V_{002}}{4} - \dots \right). \tag{6}$$

Bentuk yang ketiga dari penaksir rasio pada sampling acak berstrata merupakan kombinasi linier dari beberapa penaksir yaitu ,

$$t = w_0 t_0 + w_1 t_1 + w_2 t_2 \tag{7}$$

Dengan $t_0 = \bar{y}_{st}$, yang mempunyai Bias dan MSE yaitu

$$B(t) = \bar{Y} \left[(V_{101} - V_{110}) \left(w_1 + \frac{w_2}{2} \right) + V_{020} \left(w_1 + \frac{3}{8} w_2 \right) - \frac{1}{8} w_2 V_{002} - \left(w_1 + \frac{w_2}{4} \right) V_{011} \right],$$

$$MSE(t) = \bar{Y}^2 [V_{200} + Q^2(V_{002} + V_{020} - 2V_{011}) + 2Q(V_{101} - V_{110})]. \quad (8)$$

Penaksir yang Efisien

Untuk menentukan penaksir bias yang relative lebih efisien, dapat ditentukan dengan cara membandingkan MSE dari setiap penaksir tersebut dengan pertimbangan faktor –faktor yang terkandung pada estimator tersebut.

1. Berdasarkan persamaan 8 dan persamaan 1, penaksir t dapat dikatakan lebih efisien dari penaksir t_0 , jika

$$Q < Q^{**} \text{ atau } Q > Q^*,$$

2. Berdasarkan persamaan 8 dan persamaan 5 penaksir t dapat dikatakan lebih efisien dari penaksir t_1 , jika

$$Q^* < Q < Q^{**},$$

3. Berdasarkan persamaan 8 dan persamaan 6, penaksir t dapat dikatakan lebih efisien dari penaksir t_2 , jika

$$Q < Q^{**} \text{ atau } Q > Q^*.$$

Sebagai contoh dari pembahasan, diberikan data pada mengenai Data Sekolah Dasar Negeri dan Swasta yang terdapat di Daerah Rumbai Kotamadya Pekanbaru tahun 2019. Dari 25 Sekolah Dasar Negeri dan Swasta, dibagi menjadi 4 strata, berdasarkan status dari sekolah tersebut. Stratum pertama terdiri dari 4 sekolah dengan kriteria sekolah swasta yang berkebutuhan khusus, Stratum kedua terdiri dari 8 sekolah dengan kriteria Sekolah Negeri, Stratum ketiga terdiri dari 9 sekolah dengan kriteria Sekolah Negeri dan Stratum keempat terdiri dari 4 Sekolah Swasta unggulan., selanjutnya akan ditaksir rata-rata banyak kelas pada setiap se3kolah Dasar

Tabel 1 : Daftar SD Rumbai Kotamadya Pekanbaru tahun 2019

| No. | Nama Sekolah | Jumlah Kelas | Jumlah Murid | Jumlah Guru |
|-----|---------------|--------------|--------------|-------------|
| 1. | SD Negeri 59 | 16 | 569 | 28 |
| 2. | SD Negeri 150 | 14 | 475 | 24 |
| 3. | SD Negeri 92 | 11 | 381 | 21 |
| 4. | SD Negeri 166 | 12 | 395 | 20 |
| 5. | SD Negeri 91 | 17 | 480 | 27 |
| 6. | SD Negeri 08 | 14 | 448 | 24 |
| 7. | SD Negeri 55 | 17 | 525 | 26 |

| | | | | |
|-----|---------------------|----|-----|----|
| 8. | SD Negeri 149 | 17 | 594 | 26 |
| 9. | SD Negeri 120 | 16 | 155 | 12 |
| 10. | SD Negeri 40 | 12 | 328 | 18 |
| 11. | SD Negeri 162 | 16 | 444 | 17 |
| 12. | SD Negeri 174 | 16 | 494 | 20 |
| 13. | SD Negeri 106 | 17 | 569 | 23 |
| 14. | SD Negeri 85 | 12 | 393 | 17 |
| 15. | SD Negeri 11 | 12 | 310 | 17 |
| 16. | SD Negeri 97 | 12 | 375 | 26 |
| 17. | SD Negeri 49 | 18 | 594 | 26 |
| 18. | SDIT Al-Ittihadiyah | 25 | 642 | 52 |
| 19. | Daniel HKBP | 10 | 238 | 15 |
| 20. | MI Muhammadiyah | 22 | 305 | 18 |
| 21. | Smart Indonesia | 23 | 74 | 16 |
| 22. | Cendana | 21 | 285 | 23 |
| 23. | Sekolah Alam | 6 | 135 | 15 |
| 24. | Narwastu | 8 | 196 | 12 |
| 25. | Al-Qudwah | 6 | 170 | 14 |

Sumber 1:

www.dapo.dikdasmen.kemdikbud.go.id

Sumber 2 :

Tata Usaha Sekolah

Y : Jumlah kelas setiap Sekolah Dasar yang ada di seluruh wilayah Rumbai.

X : Jumlah seluruh murid yang terdapat pada setiap sekolah.

Z : Jumlah guru yang terdapat pada setiap sekolah.

Selanjutnya akan ditaksir rata-rata banyak kelas pada setiap se3kolah Dasar, untuk penaksiran tersebut , Kemudian diambil sampel tiap strata dengan sampling acak sederhana, Strata pertama diambil 2 sampel, yaitu Daniel HKBP dan Sekolah Alam. Strata kedua diambil 4 sampel, yaitu SD Negeri 150 Pekanbaru, SD Negeri 92 Pekanbaru, SD Negeri 40 Pekanbaru dan SD Negeri 97 Pekanbaru.Strata ketiga diambil 3 sampel, yaitu SD Negeri 59 Pekanbaru, SD Negeri 55 Pekanbaru dan juga SD Negeri 49 Pekanbaru. Strata keempat diambil 4 sampel, yaitu SDIT Al-Ittihadiyah dan SD Cendana Pekanbaru.

Tabel 2 Nilai-nilai yang diperlukan untuk membandingkan *MSE* penaksir

| | | | | |
|-------------|--------|---------|---------|-------|
| H | 1 | 2 | 3 | 4 |
| N_h | 4 | 8 | 9 | 4 |
| n_h | 2 | 4 | 3 | 2 |
| \bar{Y}_h | 7.5 | 12.375 | 16.66 | 22.75 |
| \bar{X}_h | 184.75 | 388.125 | 491.555 | 376.5 |

| | | | | |
|-------------|---------|-----------|----------|----------|
| \bar{z}_h | 14 | 20.88 | 22.77 | 27.25 |
| \bar{y}_h | 8 | 12.15 | 17 | 23 |
| \bar{x}_h | 186.5 | 389.75 | 562.66 | 463.5 |
| \bar{z}_h | 15 | 22.25 | 26.66 | 37.5 |
| S^2_{yh} | 3.666 | 1.12497 | 0.50005 | 2.9166 |
| S^2_{xh} | 1884.92 | 3020.7524 | 18721.78 | 31493.66 |
| S^2_{zh} | 2 | 12.125 | 29.1946 | 280.917 |
| S_{yxh} | 78.5 | 42.94 | 66.567 | 261.83 |
| S_{xzh} | -6.3 | 120.160 | 627.661 | 2924.84 |
| S_{zyh} | 0 | 1.768 | 2.167 | 22.4141 |

Berdasarkan Tabel 2 dengan memanfaatkan persamaan 1, 5, 6, 8 dan Definisi 4 diperoleh nilai *MSE* dan Percent Relative Efficient (*PRE*).

Tabel 3 *MSE* dan *PRE* dari Penaksir

| Penaksir | Varian/MSE | PRE |
|----------|------------|----------|
| t_0 | 0.06897 | 100 |
| t_1 | 25.1660 | 364.8832 |
| t_2 | 6.2806 | 91.06291 |
| t | 31.51557 | 456.9461 |

Dengan memanfaatkan informasi dari Tabel 3, maka dapat diperoleh penaksir yang efisien diantara ketiga kombinasi penaksir, sebagai berikut

Berdasarkan Tabel 3, penaksir t dapat dikatakan lebih efisien dari penaksir t_0 , jika

$$Q < Q^{**} \text{ atau } Q > Q^*,$$

$$0.00087208 < 0.00174417 \text{ atau } 0.00087208 > 0.$$

Berdasarkan fakta dapat ditinjau dari *PRE* dari Penaksir t lebih kecil dari penaksir t_0 .

Syarat lebih efisien dipenuhi, sehingga penaksir t lebih efisien dari penaksir t_0 .

Berdasarkan Tabel 3, penaksir t dapat dikatakan lebih efisien dari penaksir t_1 , jika

$$Q^* < Q < Q^{**},$$

$$-0.9982558 < 0.00087208 < 1.$$

Berdasarkan fakta dapat ditinjau dari *PRE* yaitu Penaksir $t < t_1$.

Syarat lebih efisien dipenuhi, sehingga penaksir t lebih efisien dari penaksir t_1 . Berdasarkan Tabel 3, penaksir t dapat dikatakan lebih efisien dari penaksir t_2 , jika

$$Q < Q^{**} \text{ atau } Q > Q^*.$$

$$0.00087208 < 0.467656 \text{ atau } 0.00087208 > -0.469234.$$

Berdasarkan fakta dapat ditinjau dari *PRE* yaitu Penaksir $t < t_2$. Syarat lebih efisien dipenuhi, sehingga penaksir t lebih efisien dari penaksir t_2 .

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan sebelumnya, bahwa penaksir rata-rata populasi pada sampling acak berstrata dengan adanya informasi tambahan tersebut sangat mempengaruhi tingkat ketelitian penaksir. Dapat disimpulkan kombinasi dari beberapa penaksir merupakan penaksir yang paling efisien dari penaksir penyusunnya, namun jika syarat terpenuhi.

REFERENSI

- [1] L. J. Bain dan M. Engelhard, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Second Edition, Duxbury Press, Belmont, 1991.
- [2] R. G. Bartle dan D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis, Third edition*, Hamilton Printing Company, United States of America, 1999.
- [3] W. G. Cochran, *Sampling Techniques, Third edition*, John Wiley, New York, 1977.
- [4] D. C. Montgomery dan G. C. Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineer, Third edition*, John Wiley and Sons, Inc, New York, 1999.
- [5] C. Kadilar dan H. Cingi, *Ratio in estimators in stratified random sampling*, Biometrical Journal, 45s (2003), 218–225.
- [6] M. Mishra, B. P. Singh dan R. Singh. *Estimation of population mean using two auxiliary variable in stratified random sampling*, Journal of Reliability and Statistical Studies, 10 (2017), 59–68.
- [7] G. D. P. F. Perri, *Estimation of finite population mean using multi-auxiliary information*, Metron, International Journal of Statistics, 65(2007), 99–112.
- [8] R. Singh dan M. Kumar, *Improved estimators of population mean using two auxiliary variables in stratified random sampling*, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 8 (2012), 65–72.
- [9] P.V. Sukhatme, *Sampling theory of surveys with application*, The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi, 1957.
- [10] A.K. Swain, *An oteon the use of multiple auxiliary variables In simple surveys*, Trabajas de Estadisticay de Investigacion Operativa, 21(1970), 135–141.



PEMODELAN REGRESI SPLINE *TRUNCATED* PADA ANGKA KEMATIAN BAYI DI INDONESIA

Idhia Sriliana *

Universitas Bengkulu

Dyah Setyo Rini

Universitas Bengkulu

Silvia Yuliana

Universitas Bengkulu

ABSTRACT: Angka Kematian Bayi menurut WHO (*World Health Organization*) di Indonesia lebih tinggi dari negara-negara ASEAN lainnya, jika dibandingkan dengan target MDGs (*Millennium Development Goals*) pada tahun 2015 yaitu 23 per 1000 kelahiran hidup. Tingginya angka kematian bayi dikhawatirkan akan mempengaruhi populasi di Indonesia. Pada penelitian ini dilakukan pemodelan angka kematian bayi dengan 7 variabel prediktor yang dianggap berpengaruh. Pemodelan dilakukan menggunakan metode regresi nonparametrik Spline *Truncated*. Spline adalah metode nonparametrik yang fleksibel, model ini cenderung mencari sendiri estimasi data mengikuti pola data. Dalam pemodelan ini terdapat titik knot, yaitu titik yang menunjukkan perubahan data. Pemilihan titik knot yang optimal dilakukan dengan memilih nilai *Generalized Cross Validation* (GCV) minimum. Berdasarkan hasil penelitian, terdapat 2 variabel yang berpengaruh secara signifikan terhadap angka kematian bayi di Indonesia, yaitu persentase ibu hamil yang melaksanakan Program K1 dan persentase penolong kelahiran yang dilakukan oleh Tenaga Kesehatan. Model regresi Spline *Truncated* yang terbentuk adalah Spline linier dengan 3 titik knot yang memiliki koefisien determinasi 48,4% dan nilai MSE sebesar 14,49.

KEYWORDS: *Angka Kematian Bayi, Regresi Spline Truncated, GCV*

* Corresponding Author: Program Studi Statistika FMIPA Universitas Bengkulu; Email: idhiasriliana@unib.ac.id

PENDAHULUAN

Terdapat berbagai permasalahan terkait dengan peningkatan derajat kesehatan. Mulai dari infrastruktur yang belum merata dan kurang memadai, masih banyaknya masyarakat yang tidak dapat mengakses fasilitas dan pelayanan kesehatan, hingga distribusi tenaga kesehatan yang belum merata. Menghadapi permasalahan di bidang kesehatan tersebut, pemerintah terutama stakeholders (pemangku kepentingan) terkait bersama seluruh lapisan masyarakat terus berupaya untuk meningkatkan akses masyarakat terhadap pelayanan kesehatan yang berkualitas.

Salah satu alat untuk menilai keberhasilan program pembangunan kesehatan yang telah dilaksanakan adalah dengan melihat perkembangan angka kematian dari tahun ke tahun. WHO mengestimasi bahwa 5 juta anak berusia dibawah 1 bulan meninggal setiap tahunnya. Hal ini sering terjadi dinegara berkembang. Penyebab neonatal ini sangat sulit dijelaskan, karena di negara berkembang para ibu enggan untuk memeriksakan kesehatan anaknya ke balai kesehatan masyarakat. Sebagian besar bayi yang lahir meninggal pada bulan pertama kehidupannya terjadi di negara berkembang. Kematian bayi baru lahir disebabkan oleh faktor medis, sosial, dan kegagalan berbagai sistem yang banyak dipengaruhi oleh budaya.

Angka Kematian Bayi (AKB) adalah jumlah kematian bayi dalam usia 28 hari pertama kehidupan per 1000 kelahiran hidup. Angka Kematian Bayi menurut WHO (*World Health Organization*) (2015) di Indonesia masih tinggi dari negara ASEAN lainnya, jika dibandingkan dengan target dari MDGs (*Millenium Development Goals*) tahun 2015 yaitu 23 per 1000 kelahiran hidup. Angka kematian bayi baru lahir (neonatal) penurunannya lambat, yaitu 28,2 per 1.000 menjadi 20 per 1.000 kelahiran hidup. Penyebab langsung berkaitan dengan kematian ibu adalah komplikasi pada kehamilan, persalinan, dan nifas yang tidak tertangani dengan baik dan tepat waktu.

Pada penelitian ini dilakukan pemodelan angka kematian bayi di Indonesia dengan menggunakan regresi Spline *truncated*. Regresi Spline *truncated* sangat baik jika digunakan untuk data yang tidak berpola. Dalam penelitian ini akan digunakan regresi Spline *truncated* untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi angka kematian bayi di Indonesia yang sangat diperlukan untuk perumusan dan pengambilan kebijakan dibidang kesehatan.

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi angka kematian bayi di Indonesia, memodelkan pengaruh angka kematian bayi di Indonesia dengan pendekatan regresi nonparametrik Spline *Truncated* (multivariabel), serta mengkaji pengaruh derajat kesehatan terhadap risiko kematian neonatal di Indonesia dengan mempertimbangkan faktor persentase penolong kelahiran yang dilakukan oleh tenaga medis, persentase imunisasi lengkap, dan persentase pemberian ASI secara Eksklusif.

TINJAUAN PUSTAKA

1.1 Pengertian Kematian Bayi

Kematian bayi adalah kematian yang terjadi pada saat bayi lahir sampai hari sebelum hari ulang tahun pertama. Dari sisi penyebabnya, kematian bayi dibedakan oleh faktor endogen dan eksogen. Kematian bayi endogen (kematian neonatal) adalah kejadian kematian yang terjadi pada bulan pertama sejak bayi dilahirkan, umumnya disebabkan oleh factor yang dibawa sejak lahir, diwarisi oleh orang tuanya pada saat konsepsi atau didapat dari ibunya selama khamila. Sedangkan kematian eksogen (kematian past neonatal) adalah kematian bayi yang terjadi antara usia satu bulan atau sampai satu tahun disebabkan oleh faktor yang berkaitan dengan pengaruh lingkungan (Sudariyanto, 2011 dalam Kusuma, 2012).

Menurut peneliti kematian bayi diakibatkan karena kondisi ibu saat hamil kurang baik, ibu jarang memeriksakan kehamilannya kepada tenaga kesehatan, jarak kelahiran yang terlalu sempit, makanan yang dikonsumsi ibu tidak bersih, menyebabkan bayi lahir dengan berat badan rendah dan rentan akan penyakit yang dapat mengakibatkan bayi meninggal.

1.2 Regresi Nonparametrik Spline Truncated

Regresi nonparametrik merupakan suatu metode Statistika yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor yang tidak diketahui bentuk fungsinya. Regresi nonparametrik merupakan regresi yang sangat fleksibel dalam memodelkan pola data. Model regresi nonparametrik secara umum:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i; i = 1, 2, \dots, n$$

dimana y_i adalah variabel respon, x_i adalah variabel prediktor, $f(x_i)$ merupakan fungsi regresi serta ε_i merupakan error yang berdistribusi normal, independen dengan mean nol dan varians σ^2 (Ismi, 2011).

Dalam analisis regresi nonparametrik spline, jika terdapat satu variabel respon dan satu variabel prediktor maka regresi tersebut dinamakan regresi nonparametrik spline univariabel. Sebaliknya, apabila terdapat satu variabel respon dengan lebih dari satu variabel prediktor maka regresi tersebut disebut regresi nonparametrik spline multivariabel (Stefanus, 2011).

Analisis regresi nonparametrik *spline truncated* multivariabel adalah analisis regresi nonparametrik *spline truncated* jika terdapat satu variabel respon dan terdapat lebih dari satu variabel prediktor. Jika data berpasangan $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_{pi}, y_i)$ dan hubungan antara $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_{pi})$ dan y_i merupakan model regresi nonparametrik multivariabel yang dapat dituliskan sebagai berikut (Ratno, 1992):

$$y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}) + \varepsilon_i; i = 1, 2, \dots, n$$

dengan $f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})$ adalah kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya. Jika kurva regresi $f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})$ diasumsikan bersifat aditif dan dihipotesiskan dengan fungsi *spline truncated* linier maka diperoleh model regresi nonparametrik *spline truncated* multivariabel sebagai berikut :

$$\begin{aligned} y_i &= f(x_{1i}) + f(x_{2i}) + \dots + f(x_{pi}) + \varepsilon_i \\ &= \sum_{j=1}^p f(x_{ji}) + \varepsilon_i; i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

dimana,

$$f(x_{ji}) = \delta_0 + \delta_{j1}x_{ji} + \sum_{l=1}^r \delta_{(1+l)}(x_{ji} - K_{jl})$$

dengan,

$$(x_{ji} - K_{jl}) = \begin{cases} (x_{ji} - K_{jl}), & x_{ji} \geq K_{jl} \\ 0, & x_{ji} < K_{jl} \end{cases}$$

dengan $K_{j1}, K_{j2}, K_{j3}, \dots, K_{jr}$ adalah titik-titik knot yang memperlihatkan pola perubahan perilaku dari fungsi pada sub-sub interval yang berbeda.

1.3 Pemilihan Titik Knot Optimal

Untuk mendapatkan model regresi spline terbaik maka titik optimal dicari yang paling sesuai dengan data. Salah satu metode yang banyak dipakai dalam memilih titik knot optimal adalah *Generalized Cross Validation* (GCV). Untuk memperoleh titik knot optimal dapat dilihat dari nilai GCV yang paling minimum. Metode GCV secara umum didefinisikan sebagai berikut.

$$GCV(K_1, K_2, \dots, K_r) = \frac{MSE(K_1, K_2, \dots, K_r)}{(n^{-1} \text{trace}[I - A(K_1, K_2, \dots, K_r)])^2}$$

dengan

$$MSE(K_1, K_2, \dots, K_r) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2$$

dimana K_1, K_2, \dots, K_r adalah titik knot pertama hingga knot ke- r (Herawati, 2011).

1.4 Kriteria Pemilihan Model Terbaik

Salah satu tujuan analisis regresi adalah mendapatkan model terbaik yang dapat menjelaskan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor berdasarkan kriteria tertentu. Kriteria terbaik yang sering digunakan adalah pemilihan nilai RKS minimum dan nilai koefisien determinasi maksimum. Nilai RKS merupakan nilai taksiran dari varian sisaan sehingga model terbaik yang memiliki nilai RKS minimum dengan nilai taksiran mendekati nilai sebenarnya. Sedangkan koefisien determinasi untuk mengukur proporsi keragaman atau variansi total di sekitar nilai tengah yang dapat dijelaskan oleh model regresi (Budiantara, 2002)

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini data yang digunakan adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistika tahun 2012 dalam buku Data dan Informasi Angka Kematian Bayi di Indonesia Tahun 2012 dan dalam buku Profil Kesehatan Masyarakat 2012 oleh Kementerian Kesehatan RI 2012. Data yang digunakan sebanyak 33 data

dengan variabel responnya adalah persentase angka kematian bayi di Indonesia (y), dan variabel prediktornya adalah persentase ibu hamil melaksanakan Program K1 sebagai x_1 , persentase ibu hamil melaksanakan Program K4 sebagai x_2 , persentase penolong kelahiran yang dilakukan oleh Tenaga Kesehatan sebagai x_3 , persentase cakupan kesehatan bayi sebagai x_4 , persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe sebagai x_5 , persentase pemberian ASI Eksklusif sebagai x_6 , persentase imunisasi lengkap sebagai x_7 .

Sesuai dengan pendekatan, analisis data yang digunakan yaitu analisis deskriptif kualitatif yang berupa Analisis Regresi Nonparametrik Spline Truncated Multivariabel pada faktor-faktor yang mempengaruhi angka kematian bayi di Indonesia. Adapun tahapan penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan uji linieritas antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor.
2. Memodelkan persentase angka kematian bayi di Indonesia dengan menggunakan spline linier dengan 1 titik knot.
3. Memodelkan persentase angka kematian bayi di Indonesia dengan menggunakan spline linier dengan 2 titik knot.
4. Memodelkan persentase angka kematian bayi di Indonesia dengan menggunakan spline linier dengan 3 titik knot.
5. Memilih titik knots optimal berdasarkan GCV minimum pada langkah (2), (3), dan (4).
6. Memodelkan persentase angka kematian bayi dengan variabel-variabel prediktornya menggunakan spline dengan knots optimal.
7. Melakukan pengujian signifikansi parameter dan pengujian asumsi residual spline terbaik.
8. Membuat kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Uji Linieritas

Uji linieritas digunakan untuk mengetahui apakah dua variabel mempunyai hubungan yang linier atau tidak linier. Berdasarkan uji linieritas dengan menggunakan software SPSS diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 1 Tabel Korelasi

| Korelasi | Sig. (2-tailed) | Kesimpulan |
|-----------------|------------------------|-------------------|
| Y vs X_1 | 0.148 | Linier |
| Y vs X_2 | 0.008 | Non Linier |
| Y vs X_3 | 0.004 | Non Linier |
| Y vs X_4 | 0.069 | Linier |
| Y vs X_5 | 0.006 | Non Linier |
| Y vs X_6 | 0.000 | Non Linier |
| Y vs X_7 | 0.110 | Linier |

Berdasarkan uji linearitas maka dapat disimpulkan bahwa pendekatan regresi *spline truncated* dapat digunakan pada kasus penelitian ini.

Pemodelan Angka Kematian Bayi dengan Beberapa Titik Knot

Pemodelan regresi *spline truncated* dilakukan dengan memilih beberapa kemungkinan titik knot untuk setiap prediktor. Pemilihan titik knot dan lokasi titik knot dilakukan dengan cara knot eksploratif. Kombinasi titik-titik knot tersebut diperoleh dari percobaan yang dilakukan dengan *software* R dan menghasilkan *output* dari beberapa kemungkinan kombinasi knot. Titik-titik knot dan lokasi titik knot tersebut menghasilkan nilai GCV. Titik-titik knot dan lokasi titik knot yang menghasilkan GCV minimum dari setiap knot dapat disajikan dalam tabel berikut ini:

Tabel 2 Titik Knot dan Lokasi Titik Knot

| Prediktor | Knot | Lokasi Titik Knot | | |
|------------------|-------------|--------------------------|----------|----------|
| | | 1 | 2 | 3 |
| x_1 | 1 | 86.83163 | | |
| | 2 | 77.65122 | 100.6022 | |
| | 3 | 78.79878 | 99.45469 | 105.1924 |
| x_2 | 1 | 74.89796 | | |
| | 2 | 64.79347 | 90.05469 | |
| | 3 | 66.05653 | 88.79163 | 95.10694 |
| x_3 | 1 | 79.51061 | | |
| | 2 | 70.51796 | 92.99959 | |
| | 3 | 71.64204 | 91.87551 | 97.49592 |

| | | | | |
|-------|---|----------|----------|----------|
| x_4 | 1 | 72.80061 | | |
| | 2 | 61.96796 | 89.04959 | |
| | 3 | 63.32204 | 87.69551 | 94.46592 |
| x_5 | 1 | 86.4 | | |
| | 2 | 72.8 | 106.8 | |
| | 3 | 74.5 | 105.1 | 113.6 |
| x_6 | 1 | 45.6098 | | |
| | 2 | 34.20735 | 62.71347 | |
| | 3 | 35.63265 | 61.28816 | 68.41469 |
| x_7 | 1 | 82.80204 | | |
| | 2 | 71.22653 | 100.1653 | |
| | 3 | 72.67347 | 98.71837 | 105.9531 |

Berdasarkan titik knot dan lokasi titik knot pada Tabel 2 diperoleh nilai GCV dengan menggunakan *software R* dan *Output*. Ringkasan dari keseluruhan pemilihan titik knot optimal untuk setiap titik knot dapat disajikan seperti tabel berikut:

Tabel 3 Nilai GCV Minimum untuk Beberapa Titik Knot

| Jumlah Titik Knot | Nilai GCV | Nilai R^2 |
|-------------------|-----------|-------------|
| 1 | 137.2678 | 79.13589 |
| 2 | 86.67367 | 95.08007 |
| 3 | 58.85403 | 99.34143 |

70

Pemodelan dengan Regresi Spline *Truncated*

Pemilihan model regresi *spline truncated* terbaik dilakukan berdasarkan pada titik knot optimal, yang dilihat dari jumlah titik knot dan lokasi titik knot yang menghasilkan nilai GCV minimum.

Lokasi titik knot yang menghasilkan nilai GCV minimum yaitu saat $x_1 = 78.79878$, 99.45469 , 105.1924 saat $x_2 = 66.05653$, 88.79163 , 95.10694 saat $x_3 = 71.64204$, 91.87551 , 97.49592 saat $x_4 = 63.32204$, 87.69551 , 94.46592 saat $x_5 = 74.5$, 105.1 , 113.6 saat $x_6 = 35.63265$, 61.28816 , 68.41469 dan saat $x_7 = 72.67347$, 98.71837 , 105.9531 data mengalami perubahan dan nilai estimasi untuk seluruh parameter model regresi *spline truncated* linier yang dapat dilihat seperti pada tabel berikut:

Tabel 4 Hasil Estimasi Parameter Model

| Parameter | Nilai Estimasi | Parameter | Nilai Estimasi |
|-----------|----------------|--------------|----------------|
| β_0 | -6580.89 | β_{15} | -22.3359 |
| β_1 | 344.58 | β_{16} | -1.78656 |
| β_2 | -348.806 | β_{17} | 27.38653 |

| | | | |
|--------------|----------|--------------|----------|
| β_3 | 21.98467 | β_{18} | -3.25689 |
| β_4 | 1.467517 | β_{19} | 4.142819 |
| β_5 | 10.96192 | β_{20} | -5.32495 |
| β_6 | 3.02886 | β_{21} | -12.5401 |
| β_7 | 0.646345 | β_{22} | 6.450142 |
| β_8 | -345.072 | β_{23} | 1.041391 |
| β_9 | -4.1597 | β_{24} | -3.42737 |
| β_{10} | 116.18 | β_{25} | 2.075641 |
| β_{11} | 345.55 | β_{26} | 2.224146 |
| β_{12} | 7.278109 | β_{27} | -0.97847 |
| β_{13} | 5.294909 | β_{28} | 1.687081 |
| β_{14} | -22.3359 | | |

Berdasarkan lokasi titik knot dan hasil estimasi parameter model regresi *spline truncated* linier pada Tabel 4, maka diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & -6580.8927 + 344.58x_{1i} - 348.8061x_{2i} + 21.9847x_{3i} + 1.4675x_{4i} + 10.9619x_{5i} \\ & + 3.0289x_{6i} + 0.6463x_{7i} - 345.0724(x_{1i} - 78.7988)_+ - 4.1597(x_{1i} - 99.4547)_+ \\ & + 116.18(x_{1i} - 105.1924)_+ + 345.55(x_{2i} - 66.0565)_+ + 7.2781(x_{2i} - 88.7916)_+ \\ & + 5.2949(x_{2i} - 95.1069)_+ - 22.3359(x_{3i} - 71.6420)_+ - 1.7866(x_{3i} - 91.8755)_+ \\ & + 27.3865(x_{3i} - 97.4959)_+ - 3.2569(x_{4i} - 63.3220)_+ + 4.1428(x_{4i} - 87.6955)_+ \\ & - 5.3249(x_{4i} - 94.4659)_+ - 12.5401(x_{5i} - 74.5)_+ + 6.4501(x_{5i} - 105.1)_+ \\ & + 1.0414(x_{5i} - 113.6)_+ - 3.4274(x_{6i} - 35.6326)_+ + 2.0756(x_{6i} - 61.2882)_+ \\ & + 2.2241(x_{6i} - 68.4147)_+ - 0.9785(x_{7i} - 72.6735)_+ + 1.6871(x_{7i} - 98.7184)_+ \\ & + 2.2733(x_{7i} - 105.9531)_+ \end{aligned}$$

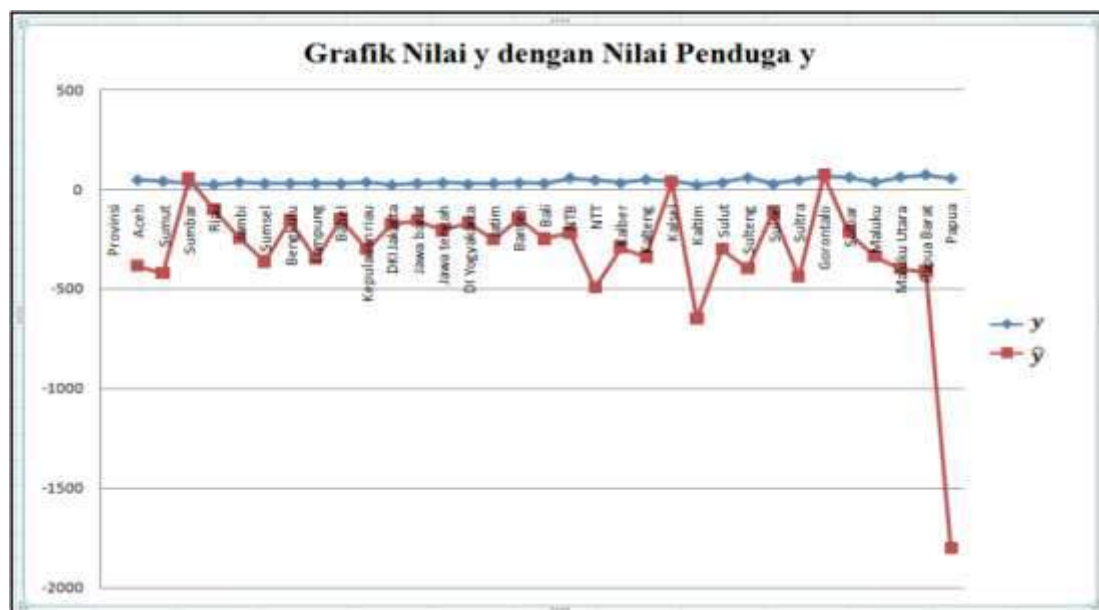
Model regresi *spline truncated* yang terbentuk selanjutnya akan dilakukan pengujian signifikan parameter dengan uji serentak dan uji parsial. Berdasarkan perhitungan yang dilakukan terhadap uji serentak diperoleh nilai F_{hitung} sebesar 10.3043 yang mana nilai tersebut lebih besar dari pada F_{tabel} sebesar -7.6196, maka H_0 ditolak. Artinya minimal ada satu parameter model yang berpengaruh signifikan terhadap model. Berdasarkan perhitungan yang dilakukan terhadap uji parsial diperoleh nilai output dan dapat disimpulkan bahwa terdapat parameter yang berpengaruh signifikan terhadap model regresi *spline truncated* yaitu pada β_{10} dan β_{16} .

Model regresi *spline truncated* yang terbentuk telah diuji parameternya secara serentak dan parsial, diketahui bahwa faktor yang mempengaruhi angka kematian bayi di Indonesia tahun 2012 adalah persentase ibu hamil melaksanakan Program K1 dan

persentase penolong kelahiran yang dilakukan oleh Tenaga Kesehatan dengan nilai koefisien determinasi R^2 sebesar 48,4%. dengan nilai MSE sebesar 14,49, serta model baru yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$\hat{y} = 48.7257 + 3.0709x_{1i} - 3.4131x_{3i} - 2.8962(x_{1i} - 78.7988)_+ - 2.1411(x_{1i} - 99.4547)_+ + 37.8927(x_{1i} - 105.1924)_+ + 2.6792(x_{3i} - 71.6420)_+ - 0.1212(x_{3i} - 91.8755)_+ - 2.0847(x_{3i} - 97.4959)_+$$

Berdasarkan model regresi spline truncated yang terbentuk diperoleh nilai penduga \hat{y} sebagai berikut:



Gambar 1 Grafik Perbandingan Nilai Angka Kematian Bayi dengan Nilai Penduga Angka Kematian Bayi Tahun 2012

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh model regresi *spline truncated* yang terbentuk yang diuji parameternya secara serentak dan parsial, diketahui bahwa faktor yang mempengaruhi angka kematian bayi di Indonesia tahun 2012 adalah persentase ibu hamil melaksanakan Program K1 dan persentase penolong kelahiran yang dilakukan oleh Tenaga Kesehatan. Oleh karena itu, perlu dilakukan pemodelan ulang dengan variabel yang mempengaruhi angka kematian bayi secara signifikan yaitu variabel prediktor persentase ibu hamil melaksanakan Program K1 (x_1) dan persentase

penolong kelahiran yang dilakukan oleh Tenaga Kesehatan (x_2), dan diperoleh nilai koefisien determinasi R^2 sebesar 48,4%. dengan nilai MSE sebesar 14,49 dengan model baru yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$\hat{y} = 48.7257 + 3.0709x_{1i} - 3.4131x_{3i} - 2.8962(x_{1i} - 78.7988)_+ - 2.1411(x_{1i} - 99.4547)_+ \\ + 37.8927(x_{1i} - 105.1924)_+ + 2.6792(x_{3i} - 71.6420)_+ - 0.1212(x_{3i} - 91.8755)_+ \\ - 2.0847(x_{3i} - 97.4959)_+$$

DAFTAR PUSTAKA

- Bickley, Lynn S dan Payer G. 2009. *Pemeriksaan Fisik dan Riwayat Kesehatan*. Jakarta : EGC.
- Manuaba, I.B.G, dkk. 2007. *Pengantar Kuliah Obstetri*. Jakarta : EGC.
- Siregar. 2005. *Psikologi Keperawatan dan Kesehatan*. Jakarta: Salemba Medika.
- Sugiyono. 2010. *Metode Penelitian Pendidikan (Pendekatan Kuantitatif, Kualitatif, dan R & D)*. Bandung : Alfabeta.
- Siregar. 2005. *Psikologi Keperawatan dan Kesehatan*, Jakarta: Salemba Medika.
- Budiantara, I.N. 2002. *Aplikasi Spline Terbobot*. Jurnal Teknik Industri, PETRA. Surabaya
- Ratno, D.S. dan Mustadjab, H.K. 1992. *Analisis Regresi*. Yogyakarta: Andi Offset
- Herawati, Netty. 2011. *Regresi Spline untuk Pemodelan Bidang Kesehatan: Studi Tentang Knot dan Selang Kepercayaan*. Jurnal Jurusan Matematika, FMIPA. Universitas Lampung.
- Ismi, NS. 2011. *Penerapan Spline Terboboti untuk Mengatasi Heteroskedastisitas pada Regresi Nonparametrik*. Jurnal Jurusan Matematika, FMIPA. Universitas Brawijaya Malang.
- Stefanus, N.T. dan Budiantara. 2011. *Uji Hipotesis dalam Regresi Nonparametric Spline*. Jurnal Jurusan Statistika, ITS.



DESKRIPSI HUBUNGAN LUAS AREAL DAN PRODUKSI PERKEBUNAN KOPI DI PROVINSI SUMATRA SELATAN

Irmeilyana*
Universitas Sriwijaya

Ngudiantoro
Universitas Sriwijaya

Anita Desiani
Universitas Sriwijaya

Desty Rodiah
Universitas Sriwijaya

ABSTRACT: South Sumatra Province (Sum-Sel) is the highest producer of robusta coffee in Indonesia. This paper discusses the description of the relation of coffee plantation area in Sum-Sel with the production based on data Ditjenbun in 2015. The variables examined include area, area based on plant type, production (ton), average production (kg/ha), and number of farmers. There are 12 regencies/cities in Sum-Sel which are coffee producers. Based on Biplot analysis, the area is very strongly correlated with the area of mature plants (TM) and the area of damaged plants (TR). High production is characterized by the area of immature plant (TBM) and high TM as well. Area, in particular the area of TM and high production correlate very strongly with the number of farmers. Based on the results of cluster analysis, OKU Selatan, Lahat, Empat Lawang each form a separate cluster with a dominating variable characteristics. Cluster consisting of OKU and Muara Enim and cluster of 7 other regencies/cities have a low value of all variables, so no variables tend to characterize the clusters.

KEYWORDS: *coffee area, coffee production, clustering, district/city in South Sumatra*

* Corresponding Author: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Sriwijaya Jln. Raya Palembang-Prabumulih km. 32 Indralaya, Kabupaten Ogan Ilir, Sum-Sel; Email: irmeilyana@unsri.ac.id

PENDAHULUAN

Sejak jaman penjajahan Belanda, Indonesia terkenal sebagai penghasil kopi. Areal perkebunan kopi dari jaman Belanda yang telah berusia ratusan tahun diantaranya berada di Aceh, Sumatra Utara, Sumatra Selatan, Jawa Timur, dan Toraja. Jenis kopi yang ditanam mayoritas robusta. Sedangkan jenis kopi arabika ditanam pada perkebunan yang mempunyai kondisi alam yang lebih spesifik dengan keadaan tanah dan ketinggian tertentu.

Perkebunan kopi di Indonesia memegang peranan yang penting sebagai salah satu komoditas perkebunan yang mempunyai kontribusi besar dalam perekonomian Indonesia, baik bagi petani maupun bagi pelaku ekonomi lainnya. Perkebunan kopi di Indonesia mayoritas merupakan perkebunan rakyat, yaitu sekitar 96%. Sedangkan perkebunan negara dan perkebunan swasta masing-masing sekitar 2%.

Menurut Fatma (2011), faktor produksi yang berpengaruh signifikan terhadap produksi kopi di Kabupaten Aceh Tengah adalah jumlah tenaga kerja, luas lahan, dan umur pohon kopi. Semakin luas lahan produktif, semakin banyak tenaga kerja yang digunakan. Semakin tua umur pohon maka semakin besar hasil produksi kopi.

Saragih (2010) mengkaji kinerja produksi kopi arabika di Kabupaten Simalungun periode 1999 – 2008 dengan menggunakan analisis regresi berganda. Faktor-faktor yang diteliti adalah luas lahan, jumlah usaha tani, perkembangan harga kopi domestik dan internasional. Peningkatan produksi kopi membutuhkan usaha perluasan areal tanam dan usaha intensifikasi untuk peningkatan produktivitas dan kualitas kopi.

Beberapa penelitian lain yang menyatakan bahwa luas lahan sebagai faktor yang mempengaruhi produksi adalah (Ginting, Nainggolan, and Siahaan 2018). Penelitian ini menggunakan analisis regresi berganda. Faktor-faktor yang berpengaruh signifikan (positif) terhadap produksi usaha tani kopi di Kabupaten Humbang Hasundutan adalah luas lahan dan modal usaha. Wollni (2007) menganalisis penentuan tingkat efisiensi teknis lahan pertanian pada produksi kopi di Costa Rica. Efisiensi menurun sejalan dengan ukuran luas lahan.

Sumatra Selatan (Sum-Sel) merupakan provinsi penghasil kopi robusta terbesar di Indonesia ((Ditjenbun) 2018). Status perusahaan perkebunan ini semuanya merupakan perkebunan rakyat. Luas areal (ha), produksi (ton), dan jumlah petani (KK) dari tahun 2015-2017 terus meningkat. Pada tahun 2017, peningkatan luas lahan, produksi, dan jumlah petani secara berturut-turut menjadi sebesar 19%, 9%, dan 19%. Berdasarkan luas lahan, kabupaten yang lahannya terbesar di Sum-Sel secara berturut-turut adalah Kabupaten OKU Selatan (33.491 ha), Muara Enim (25.147 ha), dan Lahat (21.175 ha). Tetapi rata-rata produksi (kg/ha) dan jumlah petani (KK) tidak berbanding lurus dengan luas lahan. Kabupaten Lahat mempunyai jumlah petani kopi (KK) yang tertinggi ke-2 setelah OKU Selatan, tetapi rata-rata produksi (kg/ha) berada pada urutan ke-7.

(Asmani, Antoni, and Indriasari 2008) meneliti produktivitas dan ekspor kopi di Sumatera Selatan, yaitu di Kabupaten OKU Selatan, Lahat, dan Pagar Alam. Persamaan regresi dari produktivitas (dalam ton/ha) didasarkan pada variabel luas areal, tingkat suku bunga, upah minimum regional, harga pupuk, curah hujan, dan harga kopi. Metode penelitian histories ini menggunakan data *time series* dari tahun 1991-2006. Produktivitas kopi di ketiga wilayah sentra dipengaruhi secara nyata oleh luas areal kopi, curah hujan, upah tenaga kerja, harga kopi, dan produktivitas 1 tahun sebelumnya.

Pada tulisan ini dibahas penggunaan analisis multivariat untuk mendeskripsikan data hubungan luas areal, produksi kopi, dan jumlah petani kopi setiap kabupaten/kotamadya yang ada di Provinsi Sum-Sel melalui eksplorasi data baik secara analitis maupun grafis. Adapun data yang digunakan berdasarkan data sekunder dari Ditjenbun (2018). Teknik analisis multivariat yang digunakan adalah analisis biplot untuk representasi grafis dan analisis kluster untuk analisis pengelompokan dan

menganalisis karakteristik kluster dari daerah penghasil kopi di Sum-Sel. Analisis kluster yang digunakan ada 3, yaitu metode *single linkage*, *complete linkage*, dan *centroid linkage*.

Data luas lahan (areal) merupakan penjumlahan dari 3 tipe areal berdasarkan keadaan tanaman, yaitu *immature* (TBM; Tanaman Belum Menghasilkan), *mature* (TM; Tanaman Menghasilkan), dan *damaged* (TR; Tanaman Rusak). Dalam tulisan ini juga dianalisis bagaimana hubungan luas areal TM terhadap produksi kopi di Sum-Sel.

BAHAN DAN METODE

Penelitian ini menggunakan data sekunder dari Ditjenbun (2018) pada Kementerian Pertanian RI. Data yang digunakan adalah data tahun 2015.

Objek penelitian adalah perkebunan kopi robusta di Sum-Sel. Ada 12 dari 16 kabupaten/kota yang menghasilkan kopi. Kota Palembang, Prabumulih, Kabupaten Ogan Ilir (OI), dan Kabupaten Musi Banyuasin (MUBA) tidak mempunyai lahan perkebunan kopi.

Sedangkan untuk variabel data yang digunakan meliputi luas areal (ha), produksi (ton), rata-rata produksi (kg/ha), jumlah petani (KK), luas areal TBM, luas areal TM, dan luas areal TR.

Pengolahan data dilakukan dengan menggunakan *software* Minitab versi 18.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam pengolahan data untuk masing-masing tahun tersebut adalah:

1. Menyusun matriks data, dengan objeknya adalah 12 kabupaten/kota dan 7 variabel.
2. Melakukan PCA (*Principle Component Analysis*) untuk mereduksi data.
3. Melakukan analisis biplot untuk merepresentasikan matriks data secara grafis.
4. Interpretasi hubungan antar variabel, hubungan antar objek, dan hubungan relatif antara objek dengan variabel.
5. Melakukan analisis *cluster* dengan *single linkage*, *complete linkage*, dan *centroid linkage*.
6. Interpretasi hasil dari ketiga metode pada analisis cluster untuk menganalisis karakteristik dari pengelompokan objek.
7. Menarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Statistik Deskriptif dari Data

Provinsi Sum-Sel terdiri dari 16 kabupaten/kotamadya, tetapi hanya 12 kabupaten/kota yang mempunyai areal tanaman kopi. Semua areal perkebunan merupakan Perkebunan Rakyat (PR) dan jenis kopi yang ditanam adalah robusta.

Matriks data dari penghasil kopi di provinsi Sum-Sel berukuran 12×7 , dengan 12 objek (kabupaten/kota) dan 7 variabel. Variabel yang diteliti (beserta notasinya) adalah luas areal TBM (L-TBM), luas areal TM (L-TM), luas areal TR (L-TR), luas areal, produksi, rata-rata produksi (RataProd), dan jumlah petani (JmlPetani). Matriks data disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Matriks Data Kabupaten/Kota Penghasil Kopi di Sum-Sel

| No. | Kabupaten | LTBM | L-TM | LTR | LuasAreal | Produksi | RataProd | JmlPetani |
|-----|--------------|-------|--------|-------|-----------|----------|----------|-----------|
| 1 | Lahat | 7.021 | 41.196 | 3.620 | 51.837 | 21.175 | 514 | 43.810 |
| 2 | EmpatLawang | 1.925 | 51.499 | 8.554 | 61.978 | 5.251 | 102 | 37.523 |
| 3 | PagarAlam | 734 | 7.512 | 138 | 8.384 | 3.770 | 502 | 8.745 |
| 4 | Banyuasin | - | 1.426 | 1.206 | 2.632 | 388 | 272 | 2.215 |
| 5 | MusiRawas | 569 | 2.099 | 809 | 3.477 | 1.889 | 900 | 3.191 |
| 6 | LubukLinggau | 317 | 961 | 186 | 1.463 | 277 | 288 | 1.406 |
| 7 | OKU | 2.292 | 17.109 | 2.563 | 21.964 | 15.992 | 935 | 19.967 |
| 8 | OKUTimur | 123 | 2.195 | - | 2.318 | 2.151 | 980 | 1.523 |
| 9 | OKUSel | 3.872 | 63.190 | 3.737 | 70.799 | 33.491 | 530 | 65.205 |
| 10 | OKI | 196 | 638 | 162 | 996 | 636 | 997 | 2.965 |
| 11 | MuaraEnim | 3.401 | 19.344 | 705 | 23.450 | 25.147 | 1.300 | 15.282 |
| 12 | Muratara | 19 | 129 | 59 | 207 | 182 | 1.409 | 222 |

Sumber data: Ditjenbun (2018)

Berdasarkan tipe areal perkebunan, maka persentase luas areal TBM, TM, dan TR untuk setiap kabupaten/kota dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Persentase Luas Tipe Areal pada Setiap Kabupaten/Kota

| No. | Kabupaten | LTBM | L-TM | LTR | L-TM Total | LuasAreal Total |
|-----|--------------|------|------|-----|---------------|--------------------|
| 1 | Lahat | 14 | 79 | 7 | 19,9 | 20,8 |
| 2 | EmpatLawang | 3 | 83 | 14 | 24,8 | 24,8 |
| 3 | PagarAlam | 9 | 90 | 2 | 3,6 | 3,4 |
| 4 | Banyuasin | - | 54 | 46 | 0,7 | 1,1 |
| 5 | MusiRawas | 16 | 60 | 23 | 1,0 | 1,4 |
| 6 | LubukLinggau | 22 | 66 | 13 | 0,5 | 0,6 |

| | | | | | | |
|----|-------------|----|----|----|------|------|
| 7 | OKU | 10 | 78 | 12 | 8,3 | 8,8 |
| 8 | OKU Timur | 5 | 95 | - | 1,1 | 0,9 |
| 9 | OKU Selatan | 5 | 89 | 5 | 30,5 | 28,4 |
| 10 | OKI | 20 | 64 | 16 | 0,3 | 0,4 |
| 11 | Muara Enim | 15 | 82 | 3 | 9,3 | 9,4 |
| 12 | Muratar | 9 | 62 | 29 | 0,1 | 0,1 |

Keterangan: Penjumlahan persentase dari LTBM, L-TM, dan LTR adalah 100%

L-TM Total menyatakan persentase L-TM dari kabupaten/kota dibanding luas keseluruhan L-TM di Sum-Sel.

Luas Areal Total menyatakan persentase luas areal kabupaten/kota dibanding luas keseluruhan perkebunan di Sum-Sel.

Berdasarkan Tabel 2, luas areal OKU Selatan merupakan 28,4% dari seluruh areal perkebunan kopi di Sum-Sel, dengan 89% dari arealnya merupakan areal tanaman menghasilkan (TM). Sedangkan Empat Lawang (24,8% dari luas perkebunan kopi di Su-Sel) mempunyai areal tanaman rusak yang tinggi, yaitu 14%. Semua kabupaten/kota mempunyai luas areal tanaman menghasilkan lebih dari 60%, kecuali Banyuasin. Kabupaten Banyuasin tidak mempunyai areal tanaman TBM. Sedangkan OKU Timur tidak mempunyai areal TR.

Kabupaten/kota yang mempunyai %ase luas TM total lebih besar dari %ase luas areal total adalah Pagar Alam, OKU Timur, dan OKU Selatan. Sedangkan kabupaten/kota selainnya mempunyai %ase luas TM total yang lebih kecil dari %ase luas areal total dikarenakan adanya luas TBM dan TR yang lebih tinggi, yaitu yang jumlah areal tersebut lebih dari 18% dari luas areal masing-masing kabupaten/kota.

Statistik deskriptif dari variabel dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Statistik Deskriptif dari Variabel

| Variabel | Mean | Minimum | Q1 | Median | Q3 | Maximum |
|----------|-------|---------|------|--------|-------|---------|
| L-TBM | 1706 | 0 | 141 | 652 | 3124 | 7021 |
| L-TM | 17275 | 129 | 1077 | 4854 | 35733 | 63190 |
| L-TR | 1812 | 0 | 144 | 757 | 3356 | 8554 |

| | | | | | | |
|-----------|-------|-----|------|------|-------|-------|
| LuasAreal | 20792 | 207 | 1677 | 5931 | 44740 | 70799 |
| Produksi | 9196 | 182 | 450 | 2961 | 19879 | 33491 |
| RataProd | 727 | 102 | 342 | 715 | 993 | 1409 |
| JmlPetani | 16838 | 222 | 1696 | 5968 | 33134 | 65205 |

Berdasarkan Tabel 1 dan Tabel 3, kabupaten/kota yang mempunyai nilai variabel di atas rata-rata, yang dijelaskan dari nilai yang paling besar sebagai berikut:

- (i) Menurut luas TBM: OKU Selatan, OKU, Muara Enim, Lahat, dan Empat Lawang
- (ii) Menurut luas TM: OKU Selatan, Empat Lawang, Lahat, dan Muara Enim.
- (iii) Menurut luas TR: Empat Lawang, OKU Selatan, Lahat, dan OKU.
- (iv) Menurut luas areal: OKU Selatan, Empat Lawang, Lahat, Muara Enim, dan OKU
- (v) Menurut produksi: OKU Selatan, Muara Enim, Lahat, dan OKU.
- (vi) Menurut rata-rata produksi: Muratara, Muara Enim, OKI, OKU Timur, OKU, dan Musi Rawas.
- (vii) Menurut jumlah petani: OKU Selatan, Lahat, Empat Lawang, dan OKU.

79

OKU Selatan mempunyai luas areal perkebunan yang paling tinggi, dengan luas areal tanaman yang menghasilkan dan tanaman belum menghasilkan paling tinggi juga, serta produksi (dalam ton) yang paling tinggi dan jumlah petani yang paling banyak. Sedangkan Empat Lawang mempunyai luas areal tertinggi setelah OKU Selatan, tetapi mempunyai luas tanaman rusak yang tertinggi (13,8%).

Mean dan median pada setiap variabel mempunyai selisih yang sangat besar. Hal ini menunjukkan variansi yang besar pula.

Korelasi antar variabel dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Koefisien Korelasi antar Variabel

| | L-TBM | L-TM | LTR | LuasAreal | Produksi | RataProd |
|-----------|-------|--------------|--------------|-----------|----------|----------|
| L-TM | 0.741 | | | | | |
| L-TR | 0.472 | 0.825 | | | | |
| LuasAreal | 0.763 | 0.998 | 0.843 | | | |

| | | | | | | |
|-----------|--------------|--------------|--------|--------------|--------------|--------|
| Produksi | 0.822 | 0.751 | 0.334 | 0.743 | | |
| RataProd | -0.116 | -0.393 | -0.547 | -0.399 | 0.062 | |
| JmlPetani | 0.789 | 0.979 | 0.726 | 0.974 | 0.812 | -0.354 |

Keterangan: Angka yang dicetak tebal menyatakan korelasi yang sangat kuat

Berdasarkan Tabel 4, luas areal berkorelasi sangat kuat dengan L-TM dan L-TR. Dalam hal ini dapat diinterpretasikan bahwa luas areal yang tinggi ditandai juga dengan luas areal TM dan TR yang tinggi juga. Produksi yang tinggi ditandai dengan luas areal TBM dan TM yang tinggi juga. Luas areal, khususnya luas areal TM dan produksi yang tinggi berkorelasi sangat kuat dengan jumlah petani. Makin luas areal dan produksi yang tinggi berhubungan dengan jumlah petani yang tinggi pula. Pada variabel rata-rata produksi, korelasinya terhadap variabel yang lain cenderung lemah dan sangat lemah, kecuali terhadap luas TR korelasinya negatif dan sedang.

B. Hasil Analisis Biplot

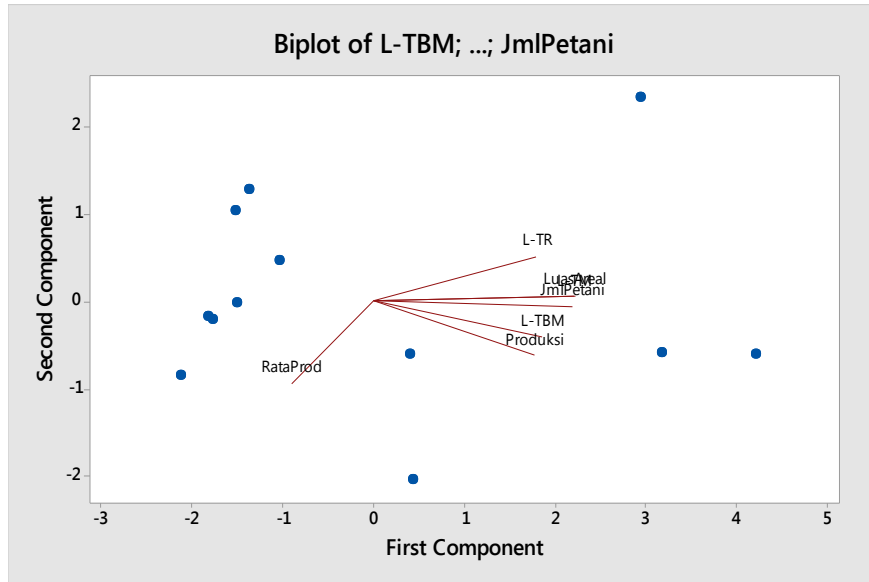
Berdasarkan matriks data pada Tabel 1, dilakukan PCA sebagai analisis awal. Dua PC (*Principal Component*) pertama dari hasil PCA pada matriks korelasi merepresentasikan 90,6% dari keragaman data. Koefisien dari 2 PC tersebut dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Koefisien PC (*Principal Component*)

| Variabel | PC1 | PC2 |
|-----------|--------------|---------------|
| L-TBM | 0.369 | -0.315 |
| L-TM | 0.440 | 0.039 |
| L-TR | 0.358 | 0.390 |
| LuasAreal | 0.442 | 0.045 |
| Produksi | 0.353 | -0.477 |
| RataProd | -0.179 | -0.718 |
| JmlPetani | 0.437 | -0.047 |

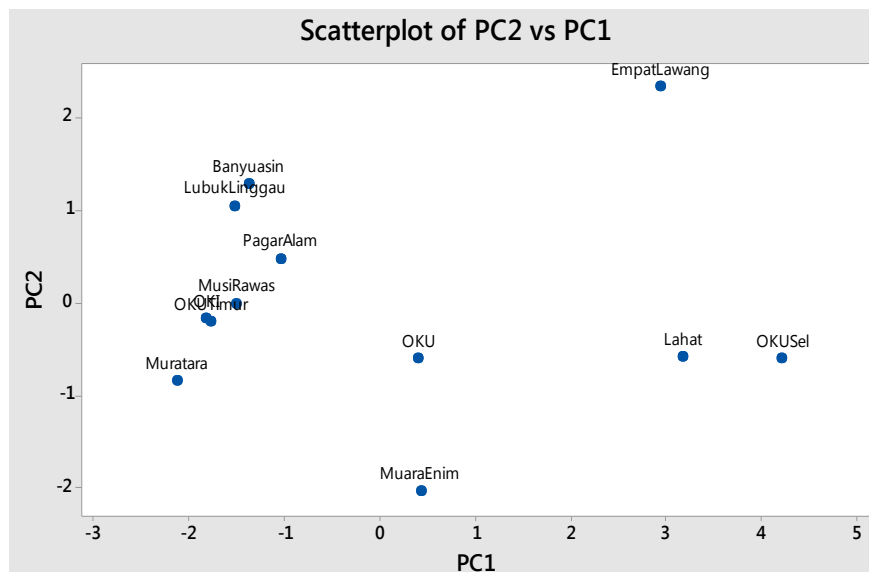
Berdasarkan Tabel 5, PC1 dominan dicirikan oleh L-TM, luas areal, dan jumlah petani. Sedangkan PC2 dominan dicirikan produksi dan rata-rata produksi.

Biplot dari subruang hasil PCA dapat dilihat pada Gambar 1. Korelasi antar variabel dapat diinterpretasikan dari sudut yang terbentuk antar segmen garis dari variabel. Luas areal, luas areal TM, dan jumlah petani berkorelasi sangat kuat. Luas TBM berkorelasi kuat dengan produksi. Rata-rata produksi cenderung tidak berkorelasi dengan variabel-variabel yang lain.



Gambar 1. Biplot dari penghasil kopi di Sum-Sel

Plot skor komponen dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Skor komponen kabupaten/kota di Sum-Sel

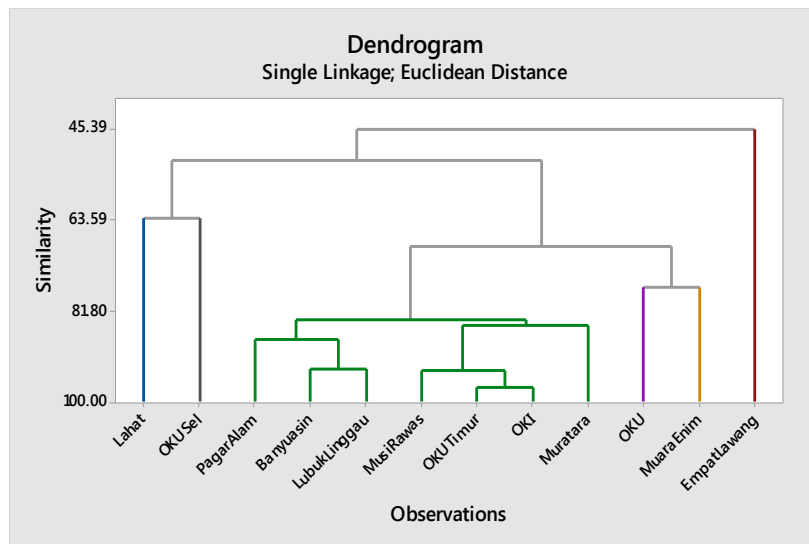
Jika dilihat dari biplot, maka Lahat dan OKU Selatan mempunyai produksi kopi yang tinggi serta luas areal TBM, luas areal TM, dan jumlah petani yang tinggi. Sebaliknya, untuk kabupaten/kota yang berada di kuadran 2 dan 3 mempunyai luas areal, luas setiap tipe areal, dan produksi yang lebih rendah. Empat Lawang mempunyai luas areal TR yang lebih tinggi dibanding kabupaten lain.

C. Hasil Analisis Cluster

Pengelompokan kabupaten/kota dapat dilihat pada dendrogram pada Gambar 3 sampai Gambar 5. Sedangkan variabel yang mencirikan kluster dapat dilihat pada Tabel 6 sampai Tabel 8.

Berdasarkan hasil metode *single linkage* pada Gambar 3 dan Tabel 6, kluster 3 terdiri dari 7 kabupaten dan tidak ada variabel yang dominan mencirikan kluster ini. Kluster 1 (Lahat) dicirikan luas TBM, luas TM, luas areal, dan produksi yang tinggi, serta jumlah petani yang banyak. Kluster 2 (Empat Lawang) dicirikan luas TR yang paling tinggi, dengan luas areal yang tinggi, tetapi rata-rata produksi yang rendah. Kluster 4 (OKU) cenderung tidak ada dicirikan suatu variabel. Kluster 5 (OKUSel) dominan dicirikan luas TM, luas areal produksi, produksi, dan jumlah petani yang paling tinggi nilainya dibanding kluster yang lain. Sedangkan kluster 6 (Muara Enim) cenderung dicirikan rata-rata produksi yang paling tinggi dibanding kluster yang lain.

82

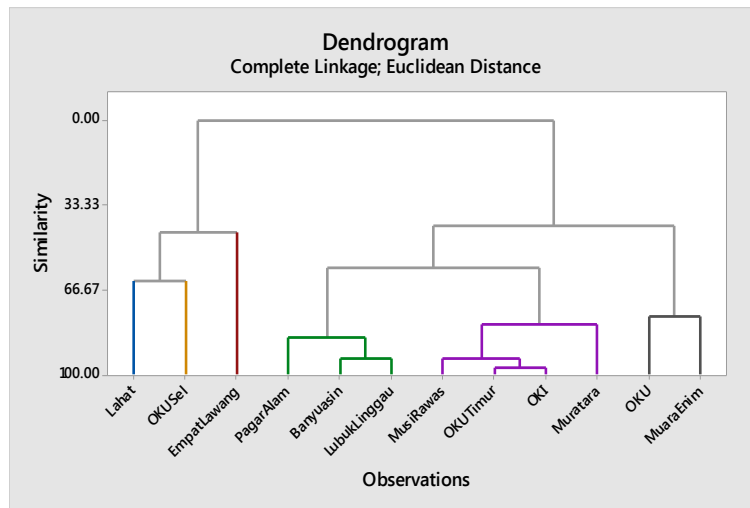


Gambar 3. Dendrogram hasil metode *single linkage*

Tabel 6. Nilai Variabel Setiap Kluster Hasil Metode *Single Linkage*

| Variabel | Clus1 | Clus2 | Clus3 | Clus4 | Clus5 | Clus6 |
|-----------|-------------|--------------|-------|-------|-------------|-------------|
| L-TBM | 2.47 | 0.10 | -0.66 | 0.27 | 1.01 | 0.79 |
| L-TM | 1.07 | 1.53 | -0.68 | -0.01 | 2.05 | 0.09 |
| L-TR | 0.72 | 2.67 | -0.57 | 0.30 | 0.76 | -0.44 |
| LuasAreal | 1.19 | 1.58 | -0.69 | 0.04 | 1.92 | 0.10 |
| Prod | 1.03 | -0.34 | -0.68 | 0.58 | 2.08 | 1.37 |
| RataProd | -0.51 | -1.49 | 0.09 | 0.50 | -0.47 | 1.37 |
| JmlPetani | 1.28 | 0.98 | -0.66 | 0.15 | 2.29 | -0.07 |

Dendrogram hasil metode *complete linkage* dapat dilihat pada Gambar 4 dan Tabel 7.



Gambar 4. Dendrogram hasil metode *complete linkage*

Nilai variabel yang mencirikan kluster dapat dilihat pada Tabel 7.

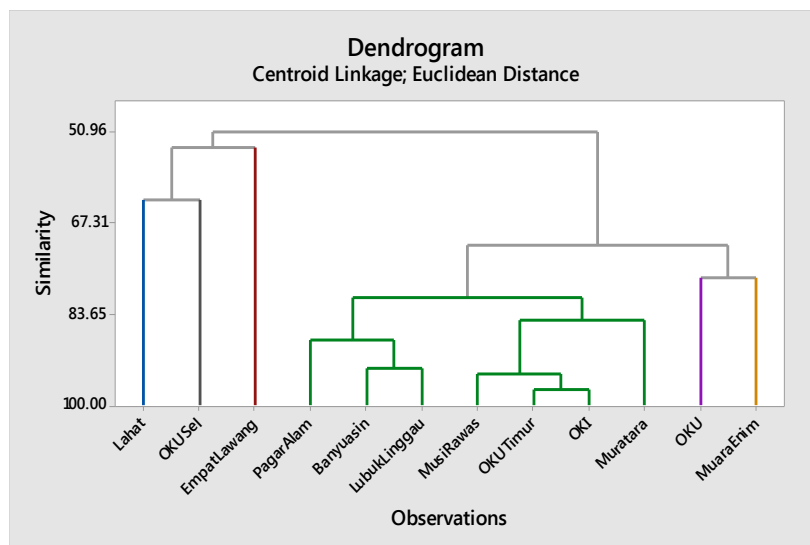
Tabel 7. Nilai Variabel Setiap Kluster Hasil Metode *Complete Linkage*

| Variabel | Clus1 | Clus2 | Clus3 | Clus4 | Clus5 | Clus6 |
|-----------|-------------|--------------|-------|-------|-------|-------------|
| L-TBM | 2.47 | 0.10 | -0.63 | -0.69 | 0.53 | 1.01 |
| L-TM | 1.07 | 1.53 | -0.63 | -0.72 | 0.04 | 2.05 |
| L-TR | 0.72 | 2.67 | -0.52 | -0.62 | -0.07 | 0.76 |
| LuasAreal | 1.19 | 1.58 | -0.64 | -0.73 | 0.07 | 1.92 |
| Prod | 1.03 | -0.34 | -0.66 | -0.68 | 0.98 | 2.08 |
| RataProd | -0.51 | -1.49 | -0.89 | 0.82 | 0.93 | -0.47 |
| JmlPetani | 1.28 | 0.98 | -0.60 | -0.70 | 0.04 | 2.29 |

Pengelompokan dengan metode *complete linkage* menghasilkan kluster 1 anggotanya Lahat, kluster 2 anggotanya Empat Lawang, dan kluster 6 anggotanya OKU Selatan. Ciri ketiga kluster ini sama seperti hasil pengelompokan pada metode *single linkage*.

Kluster 3, anggotanya Pagar Alam, Banyuasin, dan Lubuk Linggau. Kluster 4 anggotanya Musi Rawas, OKU Timur, OKI, dan Muratara. Sedangkan kluster 5 anggotanya OKU dan Muara Enim. Ketiga kluster ini tidak mempunyai ciri yang dominan, semua nilai variabelnya rendah.

Dendrogram hasil metode *centroid linkage* dapat dilihat pada Gambar 5 dan Tabel 8.



Gambar 5. Dendrogram hasil metode *centroid linkage*

Nilai variabel yang mencirikan klaster dapat dilihat pada Tabel 8.

Tabel 8. Nilai Variabel Setiap Klaster Hasil Metode *Centroid Linkage*

| Variabel | Clus1 | Clus2 | Clus3 | Clus4 | Clus5 | Clus6 |
|-----------|-------------|--------------|-------|-------|-------------|-------------|
| L-TBM | 2.47 | 0.10 | -0.66 | 0.27 | 1.01 | 0.79 |
| L-TM | 1.07 | 1.53 | -0.68 | -0.01 | 2.05 | 0.09 |
| L-TR | 0.72 | 2.67 | -0.57 | 0.30 | 0.76 | -0.44 |
| LuasAreal | 1.19 | 1.58 | -0.69 | 0.04 | 1.92 | 0.10 |
| Prod | 1.03 | -0.34 | -0.68 | 0.58 | 2.08 | 1.37 |
| RataProd | -0.51 | -1.49 | 0.09 | 0.50 | -0.47 | 1.37 |
| JmlPetani | 1.28 | 0.98 | -0.66 | 0.15 | 2.29 | -0.07 |

Pengelompokan dengan metode *centroid linkage* menghasilkan klaster 1 anggotanya Lahat, klaster 2 anggotanya Empat Lawang, dan klaster 5 anggotanya OKU Selatan. Ciri ketiga klaster ini sama seperti hasil pengelompokan pada metode *single linkage* dan *complete linkage*.

Klaster 3, anggotanya ada 7 kabupaten/kota. Klaster 4 anggotanya OKU. Kedua klaster ini tidak mempunyai ciri yang dominan. Semua nilai variabelnya rendah. Klaster 6 anggotanya Muara Enim, yang dicirikan rata-rata produksi yang paling tinggi.

Hasil pengelompokan dengan metode *single linkage* dan *centroid linkage* cenderung hampir sama.

Berdasarkan hasil ketiga metode pada analisis klaster, pengelompokan kabupaten/kota penghasil kopi di Sum-Sel cenderung menghasilkan klaster-klaster dengan ciri yang sama. OKU Selatan, Lahat, Empat Lawang membentuk klaster yang terpisah dengan ciri yang dominan. OKU dan Muara Enim cenderung mirip. Sedangkan 7 kabupaten/kota lain membentuk satu klaster dengan nilai semua variabel rendah.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka didapat bahwa OKU Selatan, Empat Lawang, dan Lahat mempunyai luas areal perkebunan yang paling tinggi di Sum-Sel. Luas areal yang tinggi ditandai juga dengan luas areal TM dan TR yang tinggi juga. Produksi yang tinggi ditandai dengan luas areal TBM dan TM yang tinggi juga. Luas areal, khususnya luas areal TM dan produksi yang tinggi berkorelasi sangat kuat dengan jumlah petani.

Berdasarkan hasil ketiga metode pada analisis cluster, pengelompokan kabupaten/kota penghasil kopi di Sum-Sel cenderung menghasilkan klaster-klaster dengan ciri yang sama. OKU Selatan, Lahat, Empat Lawang masing-masing membentuk klaster yang terpisah dengan ciri variabel yang mendominasi. OKU dan Muara Enim cenderung membentuk 1 klaster. Tujuh kabupaten/kota lain juga membentuk satu klaster. Kedua klaster ini mempunyai nilai semua variabel yang rendah, sehingga tidak ada variabel yang cenderung mencirikan klaster.

UCAPAN TERIMA KASIH

Paper ini berupa analisis data sekunder sebelum tim peneliti melaksanakan survei ke lapangan. Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Sriwijaya yang akan memfasilitasi penelitian ini melalui Hibah Penelitian Unggulan Kompetitif 2019.

DAFTAR PUSTAKA

- (Ditjenbun), Direktorat Jenderal Perkebunan. 2018. *Statistik Perkebunan Indonesia Komoditas Kopi 2015-2017*. Jakarta: Kementerian Pertanian. <http://ditjenbun.pertanian.go.id>.
- Asmani, N., M. Antoni, and R. Indriasari. 2008. Analisis Respon Produktivitas dan Ekspor Kopi Di Provinsi Sumatera Selatan, *Jurnal Agribisnis dan Industri Pertanian*, 7(2), 136–51.
- Fatma, Z. 2011. Analisis Fungsi Produksi dan Efisiensi Usahatani Kopi Rakyat di Aceh Tengah. IPB.
- Ginting, A. Br., L. N. Hotden, and G. P. Siahaan. 2018. Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Sentra Produksi Komoditi Kopi di Kabupaten Humbang Hasundutan. *Agrisep*.
- Saragih, J. R.. 2010. Kinerja Produksi Kopi Arabika dan Prakiraan Sumbangannya dalam Pendapatan Wilayah Kabupaten Simalungun, *Jurnal VISI*, 18(1), 98–112.
- Wollni, M. 2007. Productive Efficiency of Specialty and Conventional Coffee Farmers in Costa Rica: Accounting for the Use of Different Technologies and Self-Selection. In *The American Agricultural Economics Association Annual Meeting*, Portland, OR.



PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI DAN METODE ECONOMIC ORDER QUANTITY UNTUK PERENCANAAN DAN PENGENDALIAN PERSEDIAAN PARFUM

Irmeilyana*
Universitas Sriwijaya

Kurniawati
Universitas Sriwijaya

Bambang Suprihatin
Universitas Sriwijaya

ABSTRACT: Inventory is one of important things for a company that manufactures or sells products. A good inventory management system can facilitate the production process. This paper discusses the planning and control of perfume supplies at the Jasmine Perfume Shop during 2019. The sales data is calculated per week from the first week of January 2017 until the fourth week of December 2018. Perfume is grouped into four groups: Group I (best selling perfume with the price of Rp 1,500,- per ml), group II (best selling perfume with the price of Rp 2,000,- per ml), group III (other perfumes with the price of Rp 1,500,- per ml) and group IV (perfume with the price of Rp 2,000,- per ml). The number of sales is estimated by using decomposition method. Furthermore, the method of Economic Order Quantity (EOQ) is used to determine the size and time of ordering of products in the first week of January until the fourth week of December (period 97 to 144) in 2019. Based on the results of data analysis obtained sales volume (ml) for year 2019 is group I of 5,668 ml, group II of 2,576 ml, group III of 4,839 ml, and group IV of 8,809 ml. Based on EOQ method, it is obtained the optimal size of ordering in an ordering period, i. e. group I of 506 ml within 33 days, group II of 341 ml within 55 days, group III of 128 ml within 10 days, and group IV of 282 ml within 12 days.

KEYWORDS: *Perfume supply, decomposition method, Economic Order Quantity (EOQ) method, order size*

* Corresponding Author: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Sriwijaya Jln. Raya Palembang-Prabumulih km. 32 Indralaya, Kabupaten Ogan Ilir, Sum-Sel; Email: irmeilyana@unsri.ac.id

PENDAHULUAN

Pengendalian persediaan merupakan suatu kegiatan untuk mengontrol jumlah persediaan barang jadi (produk), sehingga suatu usaha dapat mengantisipasi adanya gangguan pada proses produksi dan mengetahui penjualan atau pembelian yang optimal. Pengendalian persediaan berfungsi untuk mencegah keadaan yang merugikan bagi suatu usaha, yaitu terjadinya *overstock* (kelebihan persediaan) dan *outstock* (kekurangan persediaan). Terjadinya *overstock* dapat merugikan, sehingga dapat menimbulkan biaya yang dikeluarkan oleh suatu usaha cukup tinggi (Tannady & Filbert, 2018).

Pengendalian persediaan juga diperlukan pada suatu usaha penjualan parfum di Toko Jasmine Perfume yang berada di Jalan Lintas Timur Palembang – Indralaya km. 40. Salah satu usaha di toko ini adalah menyediakan bermacam-macam jenis parfum *refill* dan perlengkapannya termasuk botol dengan berbagai macam ukuran dan bentuk. Kebutuhan parfum merupakan kebutuhan tambahan dan belum tentu setiap orang menggunakannya. Penjualan parfum ini berfluktuasi setiap harinya, tetapi akan ada

kemungkinana dalam suatu waktu penjualan kadang lebih tinggi atau lebih rendah dari penjualan biasanya.

Metode dekomposisi adalah salah satu metode pemulusan yang biasanya memisahkan tiga komponen pola data (tren, musiman, dan siklus) menjadi sub pola yang menunjukkan tiap-tiap komponen secara terpisah (Makridakis *et al.*, 1999). Metode ini menguraikan rangkaian waktu menjadi komponen tren, musiman, dan siklus. Komponen-komponen ini digunakan untuk menggambarkan dan memperkirakan deret waktu (Bowerman *et al.*, 2005).

Metode EOQ adalah suatu metode yang digunakan untuk menentukan jumlah kuantitas barang, sehingga dapat diperoleh biaya yang minimum atau sering dikatakan sebagai jumlah pembelian yang optimal (Indroprasto & Suryani, 2012).

Tujuan penelitian ini adalah untuk menganalisis tren penjualan parfume pada tahun 2017 sampai dengan 2018 dan memprediksi permintaan parfum pada minggu pertama bulan Januari 2019 sampai minggu keempat Desember 2019 dengan menggunakan metode dekomposisi. Tujuan selanjutnya adalah untuk mendapatkan waktu pemesanan ulang (*restock*) yang optimum, sehingga tidak akan terjadi kekurangan dan kelebihan *stock* barang.

BAHAN DAN METODE

88

Penelitian ini menggunakan data sekunder berupa data penjualan parfum dari Toko Jasmine Parfume yang beralamat di Jalan Lintas Timur Palembang Kayuagung, Indralaya.

Adapun Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan data sekunder berupa jumlah penjualan produk parfum per minggu selama 2 tahun dari Januari 2017 sampai Desember 2018.
 - 1.1. Menentukan jumlah item parfum yang harganya kurang dari sama dengan (\leq) Rp 2.000,- per ml.
 - 1.2. Menentukan 10 item parfum yang paling laris.
 - 1.3. Mengelompokkan parfum menjadi 2, yaitu: kelompok 10 item parfum yang terlaris dan kelompok item selainnya.
 - 1.4. Membagi 2 kelompok parfum Langkah (1.3) menjadi 2 jenis berdasarkan harga, yaitu: kelompok Rp 1.500,- dan harga Rp 2.000,-.
2. Menentukan nilai tren dengan menggunakan metode regresi linier

$$\hat{Y} = a + bt \quad (1)$$

dan metode dekomposisi, dengan persamaan:

$$X_t = f(I_t, T_t, C_t) + E_t \tag{2}$$

dengan: \hat{Y} : nilai peramalan (dugaan)

X_t : nilai deret berkala yang aktual di periode waktu t

I_t : indeks musiman pada periode t

T_t :komponen tren di periode t

C_t : komponen siklus di periode t

E_t : komponen kesalahan di periode t

- Menentukan tingkat nilai keakuratan peramalan penjualan pada metode regresi linier dan metode dekomposisi dengan menggunakan: *The Mean Absolute Percentage Error (MAPE)*.

$$MAPE = \frac{1}{n} (\sum_{t=1}^n |\frac{e_t}{Y_t}|) \times 100\% \tag{3}$$

Mean Absolute Deviation (MAD)

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^n |e_t|}{n} \tag{4}$$

Mean Squared Deviation (MSD)

$$MSD = \frac{\sum_{t=1}^n (e_t)^2}{n} \tag{5}$$

dengan: e_t : kesalahan deviasi untuk periode waktu t

n : jumlah periode

Y_t : nilai data awal

Perhitungan nilai tren dan peramalan dengan menggunakan *software* Minitab 16.

- Membandingkan tingkat keakuratan data antara metode regresi linier dan metode dekomposisi, dengan cara mengambil metode yang tingkat kesalahan peramalannya yang lebih rendah.
- Menentukan nilai peramalan penjualan selama tahun 2019.
- Melakukan peramalan jumlah lot yang harus dipesan dan waktu pemesanan dengan menggunakan metode LFL (**Lot For Lot**). Pendekatan ini menghilangkan biaya penyimpanan, karena persediaan sama dengan (=) nol dalam setiap periode (Yamit, 2005).
- Menghitung ukuran dan waktu pemesanan dengan metode EOQ (*Economic Order Quantity*):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Dk}{h}} \tag{6}$$

$$t^* = \frac{Q^*}{D} \tag{7}$$

dengan: Q^* : jumlah pesanan yang optimal pada periode waktu (t)

D : jumlah penjualan dalam periode waktu (t)

k : biaya setiap kali pemesanan

h : holding cost

Langkah 2 sampai dengan Langkah 7 dilakukan untuk setiap kelompok parfum.

8. Menganalisis hasil data yang diperoleh.
9. Menarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Pengumpulan Data

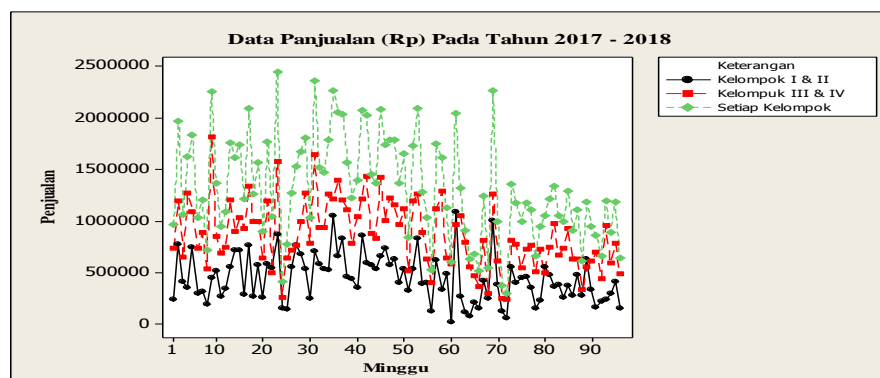
Toko Jasmine Parfume milik Bapak Bas ini menjual berbagai jenis parfum, baik *refill* maupun parfum kemasan botol, *sprayer*, dan parfum *laundry*. Penelitian ini menggunakan 102 item dari sekitar 190 item parfum *refill* yang tersedia, dengan cara menghitung nilai penjualannya. Data untuk setiap jenis parfum dibagi menjadi empat kelompok, yaitu:

1. Kelompok I, adalah kelompok jenis parfum yang masuk 10 item terlaris dengan harga Rp 1.500,- per ml.
2. Kelompok II, adalah kelompok jenis parfum yang masuk 10 item terlaris dengan harga Rp 2.000,- per ml.
3. Kelompok III, adalah kelompok jenis parfum yang tidak masuk 10 terlaris dengan harga Rp 1.500,- per ml.
4. Kelompok IV, adalah kelompok jenis parfum yang tidak masuk 10 terlaris dengan harga Rp 2.000,- per ml.

Kelompok I dan kelompok II masing-masing terdiri dari 5 item parfum, kelompok III terdiri dari 67 item parfum, dan untuk kelompok IV terdiri dari 25 item parfum.

B. Grafik Penjualan Parfum Tahun 2017 – 2018

Perhitungan penjualan dilakukan per minggu, dimana dalam satu bulan diasumsikan ada empat minggu. Minggu pertama, kedua, ketiga, dan minggu keempat secara berturut-turut diasumsikan merupakan data penjualan dari tanggal 1 - 8, tanggal 9 - 15, tanggal 16 - 23, dan tanggal 24 - 30, sehingga data yang digunakan dalam penelitian ini ada 96 minggu. Plot nilai penjualan (dalam Rp) kelompok parfum dapat dilihat pada Gambar 1.

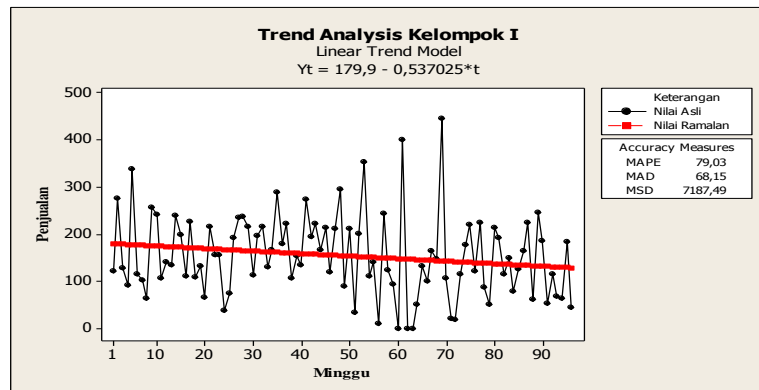


Gambar 1 Plot Nilai Penjualan (dalam Rp)

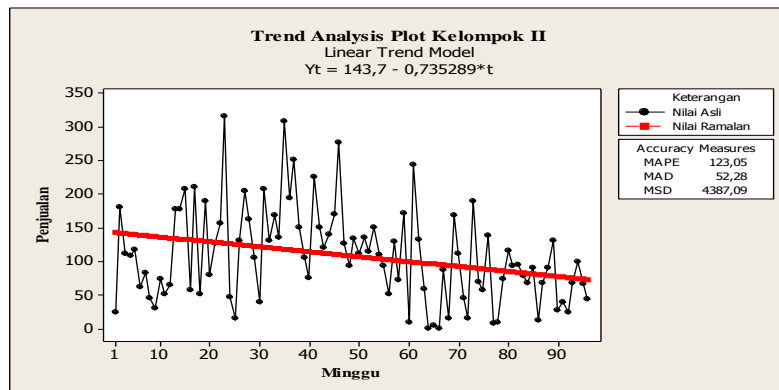
Berdasarkan Gambar 1, total nilai penjualan untuk kelompok III dan IV rata-rata lebih tinggi dari nilai penjualan kelompok I dan II.

C. Uji Tren Volume Penjualan dengan Metode Regresi Linier Sederhana

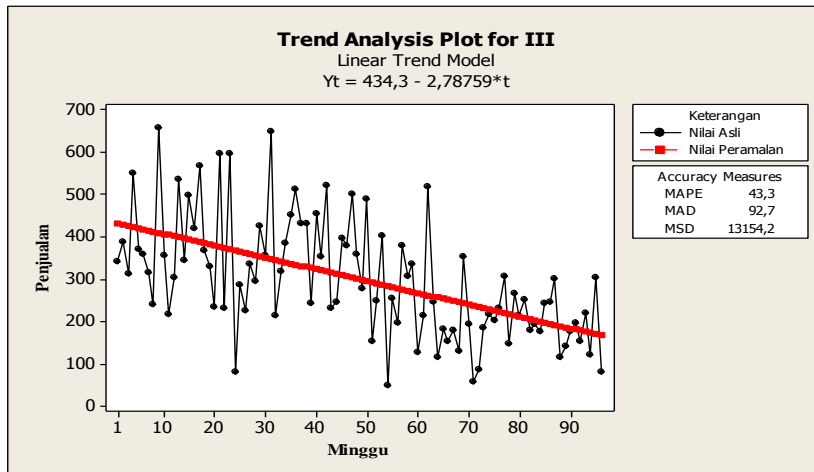
Tren linier volume penjualan (dalam ml) setiap kelompok parfum dapat dilihat pada Gambar 2 sampai Gambar 4.



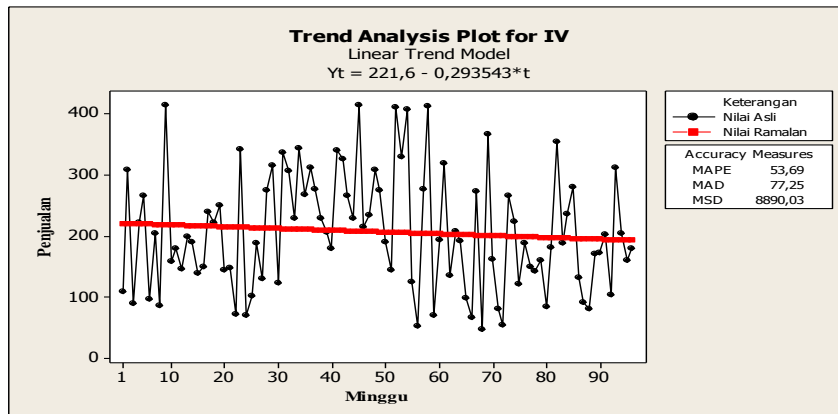
Gambar 2. Plot Garis Tren Linier untuk Kelompok I



Gambar 3. Plot Garis Tren Linier untuk Kelompok II



Gambar 4. Plot Garis Tren Linier untuk Kelompok III



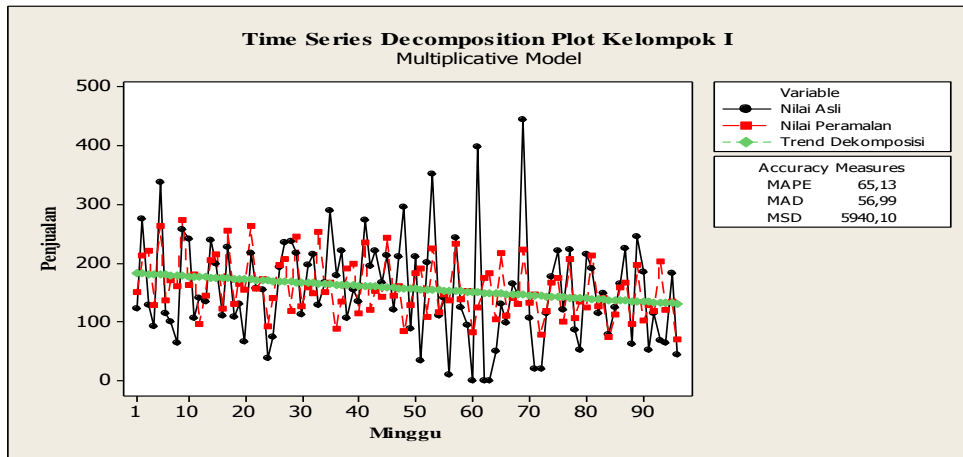
Gambar 5. Plot Garis Tren Linier untuk Kelompok IV

92

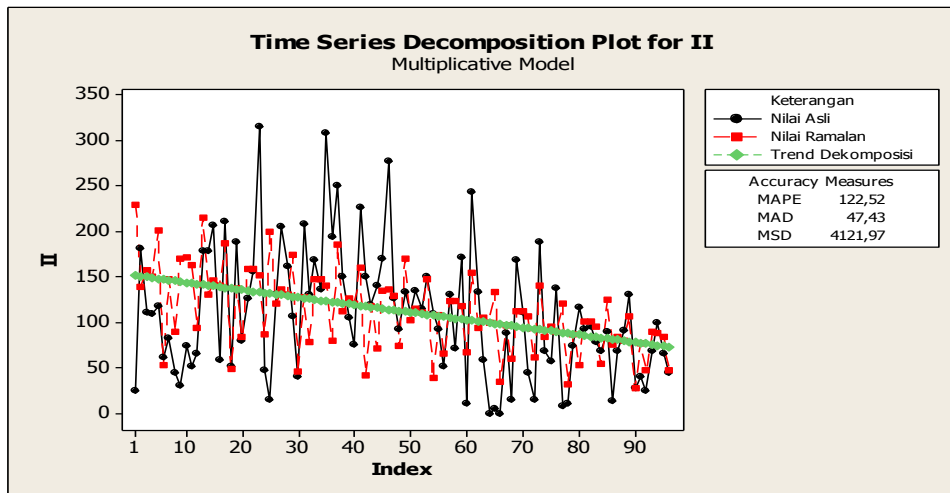
Berdasarkan Gambar 2 sampai Gambar 5, tren volume penjualan untuk setiap kelompok parfum dengan menggunakan metode regresi linier sederhana cenderung menurun. Berdasarkan nilai b (koefisien t) pada model, maka penurunan penjualan parfum kelompok III paling tinggi.

D. Uji Tren Volume Penjualan dengan Metode Dekomposisi

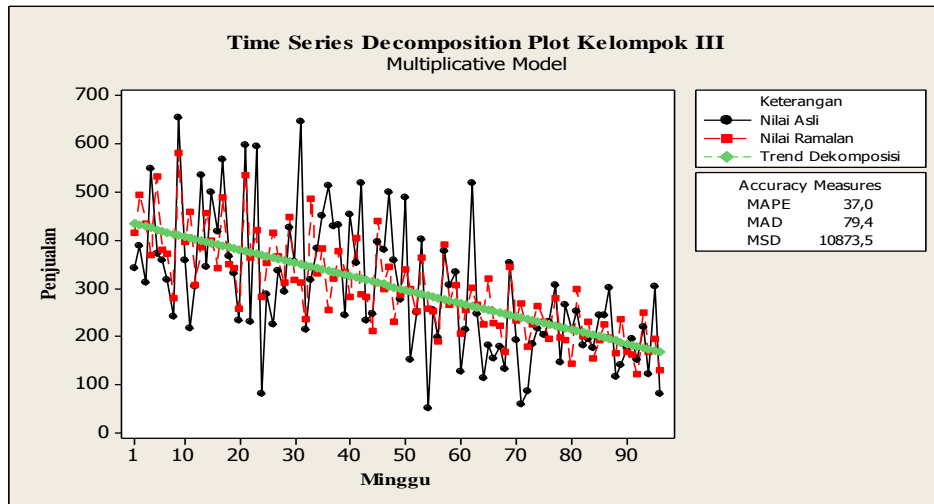
Plot volume penjualan dengan metode dekomposisi dapat dilihat pada Gambar 6 sampai Gambar 9.



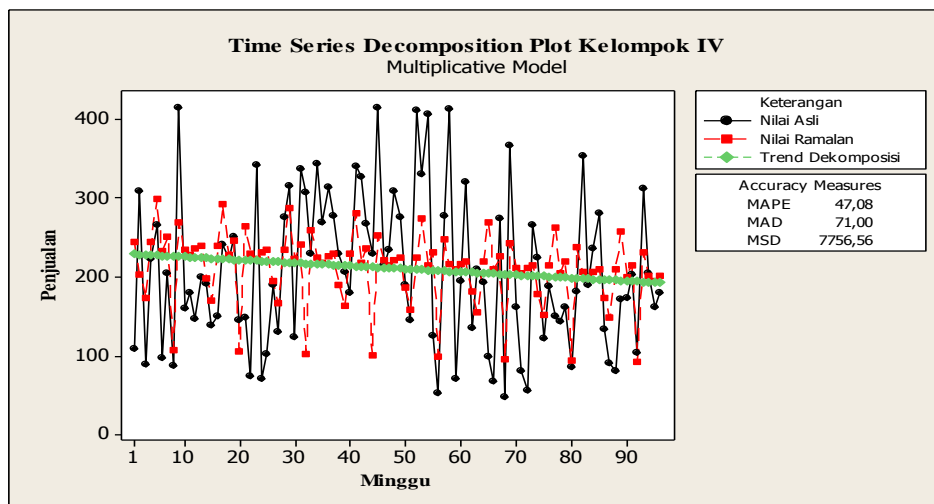
Gambar 6. Plot Garis Tren Dekomposisi untuk Kelompok I



Gambar 7. Plot Garis Tren Dekomposisi untuk Kelompok II



Gambar 8. Plot Garis Tren Dekomposisi untuk Kelompok III



Gambar 9. Plot Garis Tren Dekomposisi untuk Kelompok IV

Berdasarkan Gambar 6 sampai Gambar 9, tren volume penjualan untuk setiap kelompok parfum dengan menggunakan metode dekomposisi juga cenderung menurun

Jika dihubungkan dengan keadaan data, maka kecenderungan penurunan ini dapat disebabkan fluktuasi permintaan terhadap item-item parfum setiap kelompok, adanya item parfum awal dan item-item parfum baru yang tidak dimasukkan dalam objek penelitian.

E. Nilai Kesalahan Peramalan (Forreecast Error)

Berdasarkan perhitungan nilai kesalahan dengan MAPE, MAD, dan MSD pada Gambar 2 sampai Gambar 9, maka dapat direkapitulasi seperti pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1. Nilai Kesalahan Peramalan untuk Kelompok I dan II

| | Kelompok I | | Kelompok I | |
|------|----------------|-------------|----------------|-------------|
| | Regresi Linier | Dekomposisi | Regresi Linier | Dekomposisi |
| MAPE | 79,0347 | 65,1267 | 123,0455 | 122,522 |
| MAD | 68,1453292 | 56,98802 | 52,28038 | 47,42988 |
| MSD | 7187,493722 | 5940,102 | 4387,085 | 4121,975 |

Tabel 2. Nilai Kesalahan Peramalan untuk Kelompok III dan IV

| | Kelompok III | | Kelompok IV | |
|------|----------------|-------------|----------------|-------------|
| | Regresi Linier | Dekomposisi | Regresi Linier | Dekomposisi |
| MAPE | 43,34687 | 37,01644 | 53,6927 | 47,0778 |
| MAD | 92,65906 | 79,41165 | 77,25436 | 70,99749 |
| MSD | 13154,2 | 10873,5 | 8890,033 | 7756,555 |

Berdasarkan Tabel 1 dan Tabel 2, hasil kesalahan dengan MSD paling besar, baik dari hasil model regresi linier maupun metode dekomposisi. Pada kelompok I dan II, hasil kesalahan dengan MAD pada kedua model tren nilainya paling kecil. Sedangkan pada kelompok III dan IV, hasil kesalahan MAPE yang paling kecil.

Jika hasil kesalahan peramalan baik dengan MAPE, MAD, dan MSD pada hasil kedua metode dibandingkan, maka hasil dari metode dekomposisi lebih kecil daripada dengan menggunakan metode regresi linier sederhana. Selanjutnya hasil peramalan yang dibuktikan adalah model tren hasil metode dekomposisi.

F. Perencanaan Penjualan Tahun 2019

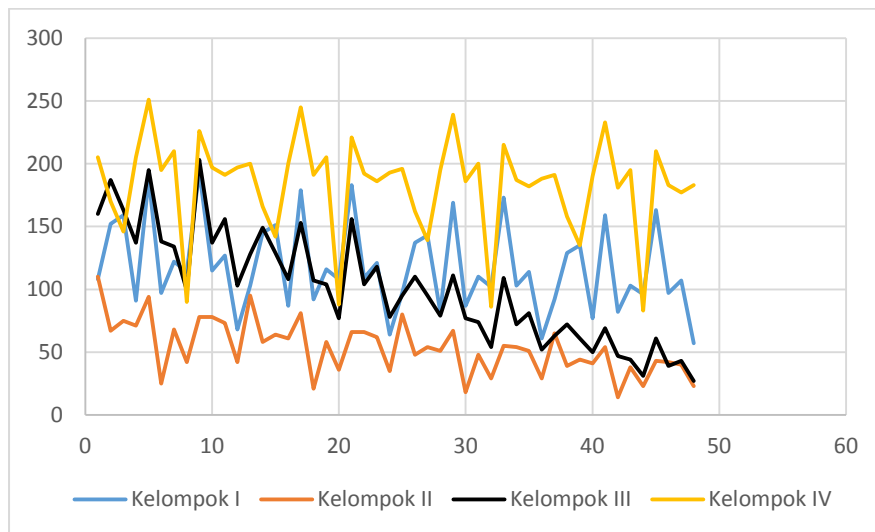
Berdasarkan model tren yang diperoleh dari metode dekomposisi, maka dapat ditentukan nilai peramalan untuk penjualan minggu ke-1 sampai minggu ke-48 dari tahun 2019. Contoh hasil peramalan untuk kelompok I dan II dapat dilihat pada Tabel 3. Plot hasil peramalan jumlah penjualan setiap kelompok parfum dapat dilihat pada Gambar 10.

Tabel 3. Hasil Peramalan Jumlah Permintaan Parfum untuk Kelompok I dan II

| Minggu -t | Kelompok I | | | Kelompok II | | | |
|-----------|------------|-----------|-----------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| | Peramalan | Minggu -t | Peramalan | Minggu -t | Peramalan | Minggu -t | Peramalan |
| 1 | 108 | 25 | 97 | 1 | 110 | 25 | 80 |
| 2 | 152 | 26 | 137 | 2 | 67 | 26 | 48 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3 | 159 | 27 | 143 | 3 | 75 | 27 | 54 |
| 4 | 91 | 28 | 82 | 4 | 71 | 28 | 51 |
| 5 | 188 | 29 | 169 | 5 | 94 | 29 | 67 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 24 | 64 | 48 | 57 | 24 | 35 | 48 | 23 |

Berdasarkan Gambar 10, penjualan setiap kelompok berfluktuasi. Fluktuasi penjualan kelompok I lebih besar dari kelompok parfum yang lain. Penjualan parfum kelompok I, II, dan IV cenderung lebih konstan. Sedangkan rata-rata nilai penjualan kelompok IV paling tinggi dibanding kelompok lain. Penjualan parfum kelompok III cenderung turun.



Gambar 10. Hasil nilai peramalan selama tahun 2019

G. Menghitung Volume dan Waktu Pemesanan yang Optimum

Metode LFL digunakan untuk menentukan ukuran dan waktu pesenan, dimana pemesanan dilakukan berdasarkan volume pemesanan dan jumlah penjualan setiap periode. Biaya pemesanan pertama sebesar Rp 60.000,- dan biaya simpan seluruh produk (188 item) selama satu bulan adalah Rp 100.000, sehingga biaya simpan per produk adalah Rp 532,-, karena pemesanan per periode jadi tidak ada biaya simpan atau biaya simpannya Rp 0,-.

Perhitungan metode LFL menghasilkan total biaya persediaan untuk setiap minggunya, yaitu:

$$\begin{aligned} \text{Total biaya} &= \text{Rp } 60.000,- \times 48 \text{ minggu} \\ &= \text{Rp } 2.880.000,- \end{aligned}$$

Jadi, total biaya persediaan untuk kelompok I selama tahun 2019 adalah Rp 2.880.000,-. Perhitungan biaya persediaan untuk kelompok II, III, IV juga menghasilkan total biaya yang sama dengan kelompok I.

Selanjutnya, penentuan ukuran pesanan dan waktu pemesanan pada metode EOQ, dengan menggunakan Persamaan (6) dan Persamaan (7), sehingga didapat Tabel 4.

Tabel 4. Hasil Perhitungan Volume dan Waktu Pemesanan Ulang dengan Menggunakan Metode EOQ

| Kelompok | Volume Pemesanan (ml) | Waktu Pemesanan (hari) |
|----------|-----------------------|------------------------|
| I | 506 | 33 |
| II | 341 | 55 |
| III | 128 | 10 |
| IV | 282 | 12 |

Berdasarkan Tabel 4, pemesanan parfum kelompok I dan II dalam ukuran volume yang lebih besar tetapi dalam jangka waktu yang lebih lama.

H. Penentuan Total Biaya Pesediaan

Penentuan total biaya persediaan dihitung dengan cara membandingkan kedua metode, yaitu: metode LFL dan metode EOQ. Hasil perhitungan kedua metode dapat direpresentasikan dalam Tabel 5.

Tabel 5. Perbandingan Total Biaya antara Metode LFL dan Metode EOQ

| Kelompok | Total Biaya (Rp) | |
|----------|------------------|-----------------|
| | Metode LFL | Metode EOQ |
| I | Rp 2.880.000,- | Rp 686.600,- |
| II | Rp 2.880.000,- | Rp 313.360,- |
| III | Rp 2.880.000,- | Rp 2.253.100,- |
| IV | Rp 2.880.000,- | Rp 1.877.140,- |
| Total | Rp 11.520.000,- | Rp. 5.130.200,- |

Berdasarkan Tabel 5, total biaya yang dikeluarkan dengan menggunakan metode EOQ lebih kecil dibandingkan dengan menggunakan metode LFL, dengan total biaya sebesar Rp 5.130.200,-.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, tren penjualan parfum untuk setiap kelompok menghasilkan *slope* yang negatif, sehingga penjualan parfum cenderung menurun. Nilai kesalahan peramalan berdasarkan tren linier metode dekomposisi menghasilkan nilai yang kecil, sehingga nilai tren untuk masing-masing kelompok adalah: kelompok I yaitu $\hat{Y}_t = 183,1 - 0,544509t$, kelompok II yaitu $\hat{Y}_t = 152,2 - 0,823479t$, kelompok III yaitu $\hat{Y}_t = 436,1 - 2,78821t$, dan kelompok IV yaitu $\hat{Y}_t = 229 - 0,381085t$.

Setelah dilakukam perhitungan dengan menggunakan metode dekomposisi didapat nilai peramalan selama tahun 2019 untuk jumlah penjualan parfum kelompok I sebesar 5668 ml, kelompok II sebesar 2576 ml, kelompok III sebesar 4839 ml, kelompok IV sebesar 8809 ml. Ukuran pemesanan yang optimal pada satu periode pemesanan secara berturut-turut adalah kelompok I sebesar 506 ml dalam waktu 33 hari, kelompok II sebesar 341 ml dalam waktu 55 hari, kelompok III sebesar 128 ml dalam waktu 10 hari, dan kelompok IV sebesar 282 ml dalam waktu 12 hari.

DAFTAR PUSTAKA

- Bowerman B. L., O'Connell R. T., Koehler A. B. 2005. *Forecasting, Time Series and Regresion*. Thomson Brooks/ Cole, South-Western.
- Indroprasto & Suryani, E. 2012. Analisis Pengendalian Persediaan Produk Dengan Menggunakan Metode EOQ Menggunakan Algoritma Genetika untuk mengefisiensikan Biaya Persediaan. *Jurnal Teknik ITS, Vol. 01, No. 05*, Hal. 305-309.
- Makridakis, S., S. C. Wheelright, & V. E. McGee. 1999. *Forecasting: Methods and Application, 2nd Edition*. Wiley, New York. (Terjemahan Sumianto. (1999). *Metode dan Aplikasi Peramalan*). Erlangga, Jakarta.
- Tannady, H. & Andrew, F. 2013. Analisis Perbandingan Metode Regresi Linier dan Exponential Smoothing dalam Parameter Tingkat Error. *Jurnal Teknik dan Ilmu Komputer, Vol. 02, No. 07*, Hal. 242-250.
- Tannady, H. & Filbert, K. 2018. Pengendali Persediaan dengan Menggunakan Metode Economic Order Quantity (EOQ) dan Silver Meal Algorithm (Studi Kasus PT Sai). *Jurnal Teknik dan Ilmu Komputer, Vol. 07, No. 25*, Hal. 37-43.
- Wahyuni A., & Syaichu A. 2015. Perencanaan Persediaan Bahan Baku dengan Menggunakan Metode Material Requirement Planning (MRP) Produk Kacang Shanghai pada Perusahaan Gangsar Ngunut-Tulunganung. *Jurnal Spektrum Industri, Vol. 13, No. 2*, Hal. 141 - 156.
- Yamit, Z. 2005. *Manajemen Persediaan*. Ekonisia, Yogyakarta.



PEMETAAN ANALISIS SISTEM INFORMASI MUSEUM BERBASIS WEBSITE DI SUMATERA UTARA

(DEVELOPMENT OF HISTORY LEARNING THROUGH MAPPING ANALYSIS OF WEBSITE-BASED MUSEUM INFORMATION SYSTEMS IN NORTH SUMATERA)

Halimahtun Sakdiah*
Univ. Negeri Medan

**Jeksen Kristian
Sinaga**
Univ. Negeri Medan

**Petra Exaudio
Ambarita**
Univ. Negeri Medan

Rita Juliani
Univ. Negeri Medan

ABSTRACT: Indonesia has a diverse culture and history from pre-historic times to the independence of the Indonesian nation. One of the places to store evidence of the history and culture of the Indonesian people, especially in North Sumatra is the Museum. The museum is currently used as a place to collect cultural heritage, preservation, research and historical evidence and become a place of education, study, and become a place of recreation for the community. In this globalization era, the process of disseminating information can be through various media, one of which is internet media, because the internet is a technology that provides information that is often or at all times used by the public for now. In order to expand the dissemination of information about the Museum. In the research method uses data processing such as interpretation and analysis using two stages, namely the stages of retrieval and collection of research data at the research location, and the stages of making software. which starts from identifying current problems, collecting data and designing stages, making social media Data Collection and Designing Connecting Social Media with Map Engine Testing and Repairing until Publication. There is a display design of a museum website where the design of the design is the design of the content contained in the website. The appearance of the website aims to facilitate the creation of a web-based interactive multimedia structure that has been developed, using the display design of a flowchart that is carried out to find out the contents. Flowchart serves to describe the flow from one scene to another and explain each step of making a mapping analysis of a website-based museum information system in North Sumatra logically. Then the development stage, where the development stage aims to produce and validate learning resources in the form of museum websites. the last is testing, where the test aims to test the function of the buttons on the website has been running correctly, in accordance with the concept planned, and if you find an error then made repairs by historical material experts and media experts to assess the website that has been made which is then validated for find out about web worthiness.

KEYWORDS: Museum, North Sumatra, Website, Display, Expert Test.

* Corresponding Author: Universitas Negeri Medan, Jl. Williem Iskandar Psr V Pos Medan 20221, Indonesia;
Email: syakdiahalimahtun16@gmail.com

PENDAHULUAN

Indonesia memiliki kebudayaan dan sejarah yang beranekaragam dari jaman pra sejarah hingga kemerdekaan bangsa Indonesia. Salah satu tempat penyimpanan bukti sejarah dan kebudayaan bangsa Indonesia terutama di Sumatera Utara adalah Museum. Museum saat ini dijadikan tempat pengumpulan cagar budaya, pelestarian, penelitian

serta bukti-bukti sejarah dan menjadi tempat pendidikan, pengkajian, dan menjadi tempat rekreasi bagi masyarakat. Museum pada mulanya muncul di Eropa, yaitu merupakan suatu ruang / tempat khusus untuk menyimpan barang-barang eksotik milik raja. Namun dalam perkembangan dunia selanjutnya, museum merupakan tempat bukan yang sekedar memamerkan tetapi berfungsi sebagai tempat mengumpulkan, melestarikan, merawat, dokumentasi, menyajikan dan mengkomunikasikan benda-benda alam dan budaya untuk kepentingan pengkajian, pembelajaran dan rekreasi. Peninggalan-peninggalan kebudayaan primitif yang dipamerkan di museum pada masa modern sekarang merupakan suatu media yang menginformasikan masa lampau kepada kita, terutama generasi muda sekarang yang tidak bersamaan hidup dengan generasi tua pada masa lampau.

Permasalahan yang dialami oleh museum adalah permasalahan klasik yang sebenarnya dialami pula oleh sebagian besar museum di Indonesia. Museum milik negara pada umumnya, cenderung bersikap „pasif“ dengan mengandalkan anggaran pemerintah yang tentu saja terbatas pada kewajiban terhadap perawatan dan penyimpanan koleksi berupa tinggalan materi yang memiliki nilai budaya atau identitas bangsa sesuai dengan UU no. 11 tahun 2010 tentang Cagar Budaya. Sehingga memunculkan kesan membosankan bagi pengunjung, dan museum selalu tampak sepi pengunjung. (Aris Munandar, 2011).

100

Di dalam era globalisasi ini proses penyebaran informasi dapat melalui berbagai media salah satunya dengan media internet, karena internet merupakan teknologi sarana penyedia informasi yang sering atau setiap saat digunakan oleh masyarakat untuk saat ini. Dalam rangka memperluas penyebaran informasi tentang Museum. Pada dasarnya museum merupakan tempat pelestarian, bukan hanya secara fisik, tetapi dalam sistem nilai dan norma. Tujuan pelestarian adalah agar masyarakat tidak melupakan kekayaan budaya atau tidak mengenal lagi akan kebudayaan mereka. Salah satu upaya yang harus dilakukan adalah memberikan pembelajaran tentang museum kepada generasi muda. Upaya yang dapat ditempuh adalah membangun system informasi museum yang dapat memberikan gambaran dan isi dari museum. Dengan adanya informasi ini, tentunya akan didapat gambaran apa isi dari museum sehingga diharapkan akan mendorong untuk melakukan kunjungan ke museum.

Teknologi informasi memiliki pengertian yang beraneka ragam walaupun masing-masing definisi memiliki tujuan yang sama. Menurut Goodhue (1995) dalam Eka dan Sabaruddinsah (2011) mendefinisikan teknologi sebagai alat yang digunakan oleh individu untuk membantu menyelesaikan tugas. Teknologi informasi merupakan istilah dalam sistem informasi akuntansi yang menyajikan sebuah informasi bagi para pemakai. Martin (1999) menjelaskan teknologi informasi tidak hanya terbatas pada teknologi komputer (perangkat keras dan perangkat lunak) yang digunakan untuk memproses dan menyimpan informasi, melainkan juga mencakup teknologi komunikasi untuk mengirimkan informasi. Namun terjadi perbedaan pendapat bahwa teknologi informasi adalah teknologi yang menggabungkan komputasi (komputer)

dengan jalur komunikasi kecepatan tinggi yang membawa data, suara, dan video (Williams dan Sawyer, 2003).

Teknologi informasi menurut Oxford (1995) didefinisikan sebagai studi atau penggunaan peralatan elektronika, terutama komputer untuk menyimpan, menganalisis, dan mendistribusikan informasi dalam bentuk apapun termasuk kata-kata, bilangan dan gambar. Secara lebih umum, Lucas (2000) menyatakan bahwa teknologi informasi adalah segala bentuk teknologi yang diterapkan untuk memproses dan mengirimkan informasi dalam bentuk elektronik. Teknologi informasi menurut Oxford (1995) didefinisikan sebagai studi atau penggunaan peralatan elektronika, terutama komputer untuk menyimpan, menganalisis, dan mendistribusikan informasi dalam bentuk apapun termasuk kata-kata, bilangan dan gambar. Secara lebih umum, Lucas (2000) menyatakan bahwa teknologi informasi adalah segala bentuk teknologi yang diterapkan untuk memproses dan mengirimkan informasi dalam bentuk elektronik.

BAHAN DAN METODE

Tempat penelitian berada di dua tempat, yakni di Laboratorium Komputer Fisika FMIPA Universitas Negeri Medan dan Museum Sumatera Utara. Penelitian yang diusulkan terdiri atas dua bagian, yakni: a) Tahapan pengambilan dan pengumpulan data penelitian di lokasi penelitian. b) Tahapan pembuatan software.



Gambar 1. Tahapan Pembuatan Software



Gambar 2. Diagram Alir Penelitian

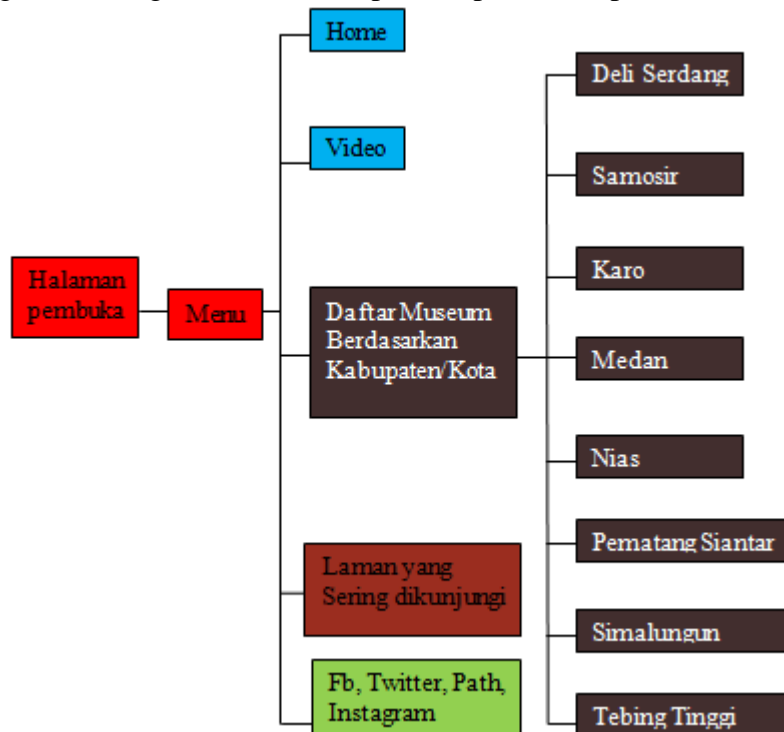
Identifikasi Masalah. Pada tahapan ini, mengidentifikasi semua permasalahan nyata yang ada, penyebab dari permasalahan itu dan apa saja kemungkinan solusi yang kami pilih untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Pengumpulan Data dan Perancangan Tahapan ini dibagi jadi dua tahap. Tahap pertama adalah pengumpulan data yang data yang nantinya kami gunakan sebagai bahan untuk memilih satu solusi yang kami anggap paling efektif dan efisien untuk menyelesaikan permasalahan yang kami angkat. Tahap kedua, pengumpulan data yang kami gunakan untuk menjadi bahan kami dalam membuat *website* ini. Perancangan Sebuah langkah pertama dalam fase pengembangan rekayasa produk atau sistem.

Perancangan adalah proses penerapan berbagai teknik dan prinsip yang bertujuan untuk mendefinisikan sebuah peralatan, suatu proses atau satu sistem secara detail yang membolehkan dilakukan realisasi fisik. (Pressman, 2010). Pembuatan Sosial Media Pada tahapan ini mulai merancang media informasi. Tetapi bukan hanya perancangan saja tetapi juga *website* media informasi harus dapat berjalan. Dalam arti media informasi harus sudah siap untuk memberikan informasi yang lengkap. Pengumpulan Data dan Perancangan Meghubungkan Sosial Media dengan Map Engine Pengujian Dan Perbaikan Publikasi Pembuatan Sosial Media Identifikasi Masalah. Menghubungkan Sosial Media Dengan Map Engine Setelah Media informasi selesai, langkah selanjutnya adalah menghubungkan Map Engine. Map Engine ini sangat penting karena informasi nantinya akan kita sematkan pada peta ini. Tujuannya adalah agar memudahkan user melihat posisi geografi Sumatera Utara. Pengujian Perbaikan Tahapan ini sangat diperlukan untuk bisa memenuhi ekspektasi awal yang kami tentukan, pengujian dilakukan setiap minggu untuk memastikan perbaikan dapat dilakukan setiap minggu untuk memastikan perbaikan dapat dilakukan secepat mungkin. Hal ini di gunakan untuk mengurangi harga perbaikan semakin besar ketika perbaikan kita lakukan setelah program sudah selesai. Pengujian ini di

lakukan oleh tim peneliti sebagai tim pengembang, dosen pembimbing sebagai *expert person* dalam program ini dan juga oleh *user* yang nantinya akan di pilih oleh mahasiswa di kampus. Publikasi Tahapan ini dilakukan paling akhir. ketika program sudah layak untuk digunakan oleh orang lain dan sudah memenuhi ekspektasi awal kami, juga telah dapat menjalankan semua fungsi yang menjadi syarat utama website ini bisa berjalan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

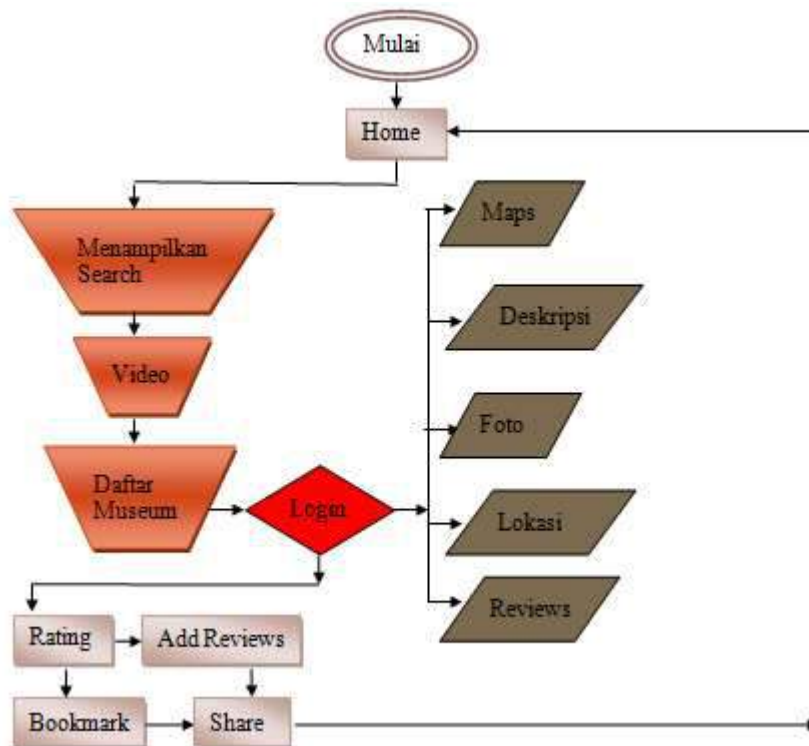
Berdasarkan hasil penelitian pengembangan pembelajaran sejarah melalui pemetaan analisis sistem informasi museum berbasis website di Sumatera Utara peneliti membuat website dimulai dari identifikasi masalah, pengumpulan data dan perancangan, pembuatan sosial media, menghubungkan sosial media dengan map engine, pengujian dan perbaikan sampai akhir publikasi. Terdapat desain tampilan website museum dimana desain tampilan merupakan rancangan konsep konten yang dituangkan dalam multimedia interaktif berbasis website. Tampilan pada website bertujuan untuk mempermudah pembuatan struktur multimedia interaktif berbasis website yang dikembangkan. Desain tampilan dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Desain Tampilan Museum Sumatera Utara

Selain menggunakan desain tampilan terdapat *flowchart* yang dilakukan untuk mengetahui isi pemetaan analisis sistem informasi museum berbasis website di

Sumatera Utara. *Flowchart* berfungsi untuk menggambarkan aliran dari satu *scene* ke *scene* yang lain dan menjelaskan setiap langkah pembuatan pemetaan analisis sistem informasi museum berbasis website di Sumatera Utara secara logika. *Flowchart* pemetaan analisis sistem informasi museum berbasis website di Sumatera Utara disajikan pada Gambar 4.

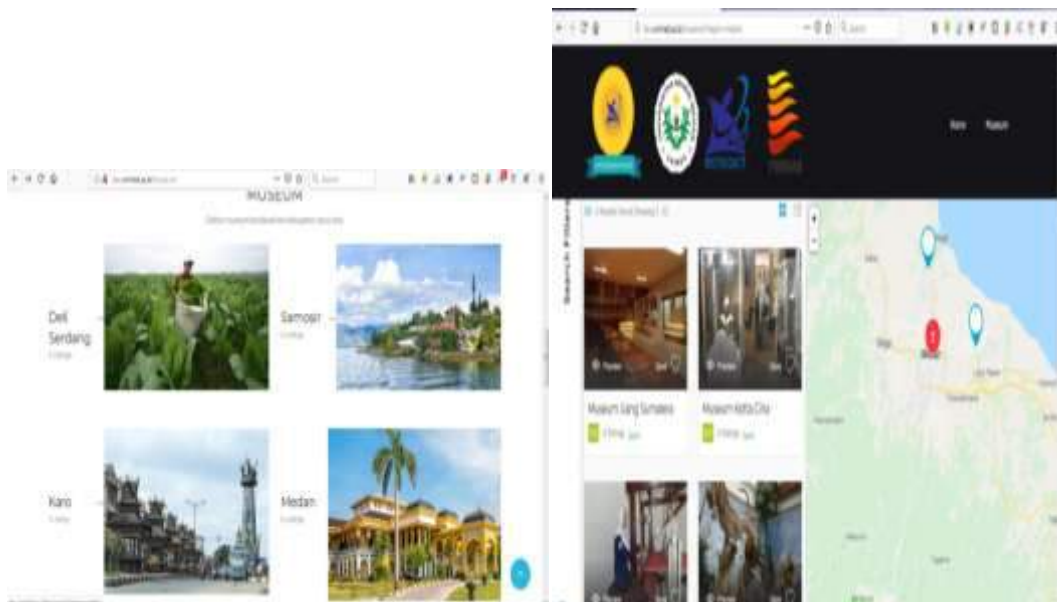


Gambar 4. *Flowchart*

Kemudian tahap pengembangan, dimana tahap pengembangan bertujuan menghasilkan dan memvalidasi sumber belajar berupa website museum. pengembangan pembelajaran sejarah melalui pemetaan analisis sistem informasi museum berbasis website yang dilakukan adalah dengan memperbaharui produk yang telah di uji sehingga menjadi praktis, efektif dan efisien. Pembuatan website dikembangkan dengan komponen yang sudah disiapkan pada tahap desain untuk dirangkai menjadi kesatuan pemetaan analisis informasi museum berbasis website. Seluruh komponen dirangkai sesuai dengan *Flowchart* yang sudah dirancang. Berbagai tampilan mulai dijelaskan dimulai dari tampilan home, isi, dan di akhiri komentar pengunjung yang telah menggunakan website.



Gambar 5. Halaman Home



Gambar 6. Tampilan Museum Sumatera Utara

Dan terakhir adalah pengujian, dimana pengujian bertujuan untuk menguji apakah semua fungsi tombol yang ada pada website sudah berjalan dengan benar, sesuai dengan konsep yang direncanakan, dan jika menemukan kesalahan maka dilakukan perbaikan. Pemetaan analisis sistem informasi museum di Sumatera Utara yang telah diuji oleh peneliti kemudian di validkan. Validasi bertujuan untuk

mengetahui tingkat kevalidan website dari segi tampilan, pemrograman, kualitas materi, isi/konten, kemanfaatan dan bahasa yang digunakan.

Validasi yang diterapkan untuk mencapai tujuan penelitian pengembangan pembelajaran adalah validasi konstruk melalui ahli materi sejarah dan ahli media. Penilaian yang dilakukan dengan menggunakan instrument validasi yang diberikan kepada dua dosen dengan masing-masing ahli. Penilaian dilakukan oleh dua ahli menjadi dasar untuk melakukan penilaian dan saran dari ahli. Kemudian peneliti melakukan uji angket menggunakan dua kelas yaitu kelas kecil yang berjumlah sepuluh orang dan kelas besar berjumlah tigapuluh orang. Hasil dari uji angket tersebut banyak yang merasa termanfaatkan dengan adanya website museum dan dapat membantu para mahasiswa ketika ingin berkunjung kemuseum dalam proses pembelajaran serta pengembangan media untuk mereka ajarkan kepada siswa, serta bermanfaat terhadap pelajar, guru juga masyarakat.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, pengolahan data, interpretasi dan analisis dengan menggunakan dua tahapan yaitu tahapan pengambilan dan pengumpulan data penelitian di lokasi penelitian, dan tahapan pembuatan software. yang dimulai dari identifikasi masalah yang ada saat ini, pengumpulan data dan perancangan tahapan, pembuatan sosial media pengumpulan data dan perancangan menghubungkan sosial media dengan map engine pengujian dan perbaikan sampai publikasi.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis sangat mengucapkan terimakasih kepada orang-orang dekat penulis yang selalu setia memotivasi penulis hingga penulisan ini selesai. Terimakasih kepada orang tua yang telah membesarkan dan menyekolahkan penulis hingga sampai perguruan tinggi, Terimakasih kepada kampus tercinta Universitas Negeri Medan dan para dosen yang telah mendidik, membimbing serta memotivasi penulis terutama kepada dosen pembimbing yang telah membimbing dengan penuh semangat sehingga penulisan ini dapat berjalan dengan lancar, terimakasih kepada Kemenristekdikti yang telah membiayai PKM-P sehingga penulis dapat menulis jurnal yang di muat oleh Semirata, dan juga terimakasih kepada ahli materi dan ahli media yang telah merevisi website yang penulis buat dan yang terakhir terimakasih kepada tim PKM-P yang terus mengingatkan, menyemangati penulis semoga terus semangat sampai menuju Pekan Ilmiah Nasional ke 32.

REFERENSI

- Nugroho Adi, 2004. *Analisis dan Perancangan Sistem Informasi dengan Metodologi Berorientasi Objek*. Bandung: Informatika Bandung.
- Bunafit Nograho, 2004, *PHP & mySQL dengan Editor Dreamweaver MX*, Yogyakarta : Penerbit Andi
- Hardjowirogo, 1982, *Sejarah Wayang Purwo*, Jakarta : PN BALAI PUSTAKA Sampurna, 2003, *Menguasai Aplikasi Web Tanpa Pemrograman*, Jakarta : PT Elex Media Komputindo.
- Albahra bin Ladjamudin, 2004, *Konsep Sistem Basis Data dan Implementasinya*, Graha Ilmu, Yogyakarta. Suhendar & Hariman Gunadi, 2004 *Visual Modeling Menggunakan UML dan Relational Rose*, Informatika Bandung



EKSPLORASI UKURAN ASOSIASI DARI FUNGSI DISTRIBUSI DATA GEMPA MAKSIMUM $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}}$ (Studi Kasus: Sub-wilayah Zona Subduksi Sumatra Megathrust)

(EXPLORATION OF ASSOCIATION MEASURES FROM THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE MAXIMUM EARTHQUAKE MAGNITUDE $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}}$ (Case Study: Sumatra Megathrust Subduction Zone))

Jose Rizal*
Institut Teknologi
Bandung

Agus Yodi Gunawan
Institut Teknologi
Bandung

**Sapto Wahyu
Indratno**
Institut Teknologi
Bandung

Irwan Meilano
Institut Teknologi
Bandung

ABSTRACT: The main study of this article is to explore the measure of bivariate associations from the distribution function of the maximum earthquake magnitude, M , for all possible data pairs in the Sumatra megathrust subduction zone sub-region. As a first step, we fitting the empirical data distribution function with several theoretical distribution function models where the best model selection criteria use the smallest AIC and BIC values. The theoretical probability models that we use are a continuous probability function, namely: Normal, Logistics, Cauchy, Exponential, Lognormal, Gamma, Weibull, and Gumbel. Furthermore, we explored the measure of the bivariate association from the distribution function using Kendall's Tau. The results of the empirical data analysis show that from ten data pairs that have been analyzed, there is only one pair of data that has a significant association measure.

KEYWORDS: Maximum earthquake magnitude, The Sumatra megathrust, Association, Kendall's Tau

* Corresponding Author: Institut Teknologi Bandung, 40132 Bandung, Indonesia; Email: jose_rizal201@s.itb.ac.id

PENDAHULUAN

Ukuran asosiasi dari dua peubah acak atau lebih dikenakan pada saat hubungan kausalitas antar variabel tersebut belum diketahui. Salah satu kegunaan dari ukuran asosiasi adalah untuk mendapatkan deskripsi ukuran kekuatan dan arah hubungan antar dua variabel. Disamping itu, ukuran asosiasi dapat juga digunakan sebagai parameter input dalam membangun model Copula dari dua peubah acak atau lebih. Terdapat beberapa model matematis yang dapat digunakan dalam mengukur asosiasi dari dua peubah acak atau lebih, yakni koefisien korelasi *Pearson* (asosiasi linear), *Spearman's Rho*, dan *Kendall's Tau*. Untuk dua model terakhir dapat digunakan untuk asosiasi linear ataupun asosiasi non-linear. Ukuran asosiasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Kendall's Tau*. Keunggulan dari ukuran asosiasi *Kendall's Tau*

adalah memiliki sifat *invariant non-linear strictly increasing transformation*. Dengan bahasa lebih sederhana, asosiasi antara data empiris dua variabel akan sama dengan asosiasi antara fungsi distribusi kumulatif dari dua variabel tersebut.

Dalam penelitian ini peubah acak yang akan dikaji adalah $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}}$. Berikut akan dijelaskan terlebih dahulu peubah acak \mathcal{M}_{\max} dimana peubah acak ini lebih umum digunakan oleh peneliti-peneliti kegempaan. Definisi dari gempa maksimum, \mathcal{M}_{\max} dinyatakan sebagai batas atas dari kekuatan gempa untuk suatu wilayah yang diberikan (EERI Committee on Seismic Risk dan Shah, 1984). Model prediksi dari \mathcal{M}_{\max} dapat digunakan sebagai model alternatif dalam model prediksi bahaya gempa selain menggunakan data frekuensi gempa yang umumnya digunakan oleh peneliti-peneliti kegempaan (Firuzan, 2008; Can, 2014; Orfanogiannaki *et al.*, 2014; Dinske, 2017; Mousavi, 2017).

Kijko, 2004 dan Hoan *et al.*, 2016, dalam tulisannya mendeskripsikan hubungan antara \mathcal{M}_{\max} dan $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}}$, seperti yang ditampilkan pada Persamaan (1) berikut:

$$\mathcal{M}_{\max} = \mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}} + \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} (F_M(m))^n dm. \quad (1)$$

Variabel $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}} = m_n$, merupakan nilai magnitude maksimum dari n kejadian gempa yang telah diurutkan yakni $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$, sedangkan $F_M(m)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari data observasi (m_1, m_2, \dots, m_n) . Pada penelitian ini, kami menggunakan variabel $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}}$ seperti yang dimaksud pada Persamaan (1) sebagai variabel penelitian. Secara formal, khusus untuk penelitian ini $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}}$ didefinisikan sebagai peubah acak yang menyatakan besaran gempa maksimum yang terobservasi (dalam M_w) dengan interval waktu 6 bulan.

DATA GEMPA MAKSIMUM DAN AREA PENELITIAN.

Data historis dari $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}}$ untuk waktu pengamatan tahun 1973-2018, dapat diperoleh dari data katalog gempa yang dipublikasikan secara online oleh *United States Geological Survey* (USGS). Hasil investigasi awal terhadap data katalog tersebut, ditemukan beberapa tipe kekuatan gempa berbeda yang digunakan dalam mencatat kekuatan gempa, antara lain: *body magnitude* (m_b), *surface-wave magnitude* (M_s), dan *magnitude momen* (M_w). Oleh karena itu sebelum dilakukan analisis data lebih lanjut, kita melakukan konversi terlebih dahulu tipe magnitude ke dalam satuan M_w . Konversi mengacu pada kajian dari Tim kegempaan Indonesia yang tergabung dalam wadah Pusat Gempa Nasional (PuSGeN, 2017). Metode konversi yang

digunakan analog dengan metode yang digunakan oleh (Scordilis, 2006; Kadirioğlu dan Kartal, 2016). Berikut formula konversi yang dimaksud:

$$M_w = \begin{cases} 1.01 m_b + 0.08, & 3.7 \leq m_b \leq 8.2 \\ 0.60 M_s + 2.48, & 2.8 \leq M_s \leq 6.1 \\ 0.93 M_s + 0.57, & 6.1 < M_s \leq 8.7 \end{cases} \quad (2)$$

Area penelitian yang kami pilih adalah zona subduksi Sumatra megathrust, dimana pada zona tersebut terdapat segmen-segmen sumber gempa besar. Identitas dan koordinat dari sumber-sumber gempa besar tersebut dapat dilihat pada Tabel 1. Salah satu motivasi kami memilih wilayah ini dilatarbelakangi akan adanya potensi gempa besar ($8.8 M_w$) di wilayah kepulauan Mentawai (McCloskey *et al.*, 2008 dan Newman *et al.*, 2011).

METODE PENELITIAN

Pada bagian Metode Penelitian, akan diuraikan secara ringkas prosedur tahapan dalam pencocokan fungsi distribusi dan prosedur mengitung ukuran asosiasi dua peubah acak menggunakan pendekatan *Kendall's Tau*. Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk menentukan tepat atau tidaknya pendekatan suatu model distribusi digunakan uji kecocokan distribusi. Terdapat beberapa jenis *Goodness-of-Fit test* diantaranya adalah uji Kolmogorov-Smirnov, *Akaike Information Criteria (AIC)*, dan *Bayesian Information Criteria (BIC)*. Pada penelitian ini kami menggunakan *AIC*, dengan formulasi sebagai berikut:

$$AIC = -2 \log L + 2p \quad (3)$$

dimana $\log L$ merupakan nilai log-likelihood dari model dan p merupakan banyaknya parameter dari model.

Ukuran asosiasi *Kendall's Tau* didefinisikan sebagai peluang concordant dikurangi peluang discordant. Misalkan $\mathcal{M}_{\max_1}^{\text{obs}}$ dan $\mathcal{M}_{\max_2}^{\text{obs}}$ merupakan dua peubah acak yang menyatakan gempa maksimum pada segmen ke-1 dan segmen ke-2, dengan $(m_{\max_1 i}^{\text{obs}}, m_{\max_2 i}^{\text{obs}})$ dan $(m_{\max_1 j}^{\text{obs}}, m_{\max_2 j}^{\text{obs}})$ merupakan dua observasi yang berbeda. Dua pasangan data $(m_{\max_1 i}^{\text{obs}}, m_{\max_2 i}^{\text{obs}})$ dan $(m_{\max_1 j}^{\text{obs}}, m_{\max_2 j}^{\text{obs}})$ dikatakan concordant jika memenuhi kondisi persamaan berikut:

$$(m_{\max 1i}^{\text{obs}} - m_{\max 2i}^{\text{obs}}) (m_{\max 1j}^{\text{obs}} - m_{\max 2j}^{\text{obs}}) > 0. \quad (4)$$

Sedangkan dua pasangan data tersebut dikatakan discordant jika:

$$(m_{\max 1i}^{\text{obs}} - m_{\max 2i}^{\text{obs}}) (m_{\max 1j}^{\text{obs}} - m_{\max 2j}^{\text{obs}}) < 0. \quad (5)$$

Dari Persamaan (4) dan (5), ukuran asosiasi *Kendall's Tau* untuk populasi adalah

$$\tau_{\mathcal{M}_{\max 1}^{\text{obs}}, \mathcal{M}_{\max 2}^{\text{obs}}} = P \left[(\mathcal{M}_{\max 1i}^{\text{obs}} - \mathcal{M}_{\max 1j}^{\text{obs}}) (\mathcal{M}_{\max 2i}^{\text{obs}} - \mathcal{M}_{\max 2j}^{\text{obs}}) > 0 \right] - P \left[(\mathcal{M}_{\max 1i}^{\text{obs}} - \mathcal{M}_{\max 1j}^{\text{obs}}) (\mathcal{M}_{\max 2i}^{\text{obs}} - \mathcal{M}_{\max 2j}^{\text{obs}}) < 0 \right]. \quad (6)$$

Untuk dapat mencapai tujuan dari penelitian ini, berikut kami jelaskan secara singkat langkah kerja penelitian kami:

1. Mengunduh data kejadian gempa bumi pada data katalog gempa bumi yang dipublikasi oleh USGS di <https://www.usgs.gov>.
2. Melakukan penyeragaman tipe data melalui konversi tipe kekuatan gempa ke besaran Mw menggunakan Persamaan (2).
3. Menginventarisir data empirik penelitian berdasarkan nilai realisasi $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}}$ untuk selang waktu 6 bulan dengan periode waktu pengamatan 1973-2018.
4. Melakukan pemilihan fungsi distribusi teoritik yang sesuai dengan dinamika nilai fungsi distribusi data empirik.
5. Menerapkan Persamaan (6) untuk mendapatkan nilai asosiasi dari data gempa maksimum untuk setiap kombinasi dua daerah sumber gempa besar di zona subduksi Sumatra megathrust.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Rekapitulasi deskripsi ukuran statistika dari data empiris data gempa maksimum observasi untuk periode pengamatan 1973-2018 dapat dilihat pada Tabel 1. Nilai rata-rata dan variansi dari data empiris pada Tabel 1, dapat kita gunakan sebagai salah satu variabel kontrol dalam pencocok fungsi distribusi.

Tabel 1. Koordinat lokasi dari segmentasi sumber-sumber gempa besar pada zona subduksi Sumatra megathrust dan nilai gempa maksimum, rata-rata, dan variansi untuk periode pengamatan tahun 1973-2018.

| Segmentasi | Koordinat | | Gempa Maks | Rata-rata dan Variansi dari $\mathcal{M}_{\max}^{\text{obs}}$ | |
|------------------|----------------|------------------|------------|---|----------|
| | Latitude | Longitude | | Rerata | Variansi |
| Aceh- Andaman | [3.12, 7.23] | [92.24, 97.21] | 9.1 | 6.117 | 0.383 |
| Nias-Simelue | [0.07, 3.12] | [94.85, 98.41] | 8.6 | 5.897 | 0.664 |
| Mentawai-Siberut | [-1.98, 0.07] | [96.50, 100.26] | 7.6 | 5.649 | 0.407 |
| Mentawai-Pagai | [-3.75, -1.98] | [98.05, 101.20] | 7.9 | 5.624 | 0.508 |
| Enggano | [-6.10, -3.75] | [100.20, 104.41] | 8.4 | 6.071 | 0.371 |

Secara khusus, untuk Kepulauan Mentawai terdapat dua segmentasi yang memiliki sumber gempa besar yakni Mentawai-Siberut dan Mentawai-Pagai. Bila dikaitkan gempa maksimum observasi dengan potensi gempa maksimum ($8.8 M_w$) yang diprediksi akan terjadi (McCloskey *et al.*, 2008 dan Newman *et al.*, 2011) maka diperlukan suatu kajian keterkaitan antar kedua segmen tersebut. Selain ukuran asosiasi kedua segmen tersebut, asosiasi dari segmen yang lain juga diperlukan untuk menjawab kebutuhan dalam membangun model prediksi gempa di suatu zona subduksi yang berbasis pada analisis spatial sumber gempa besar. Dalam tahapan analisis data, khususnya pada tahapan penelitian langkah keempat dan kelima, kami menggunakan *package fitdistrplus* pada program R (Delignette-Muller *et al.*, 2015).

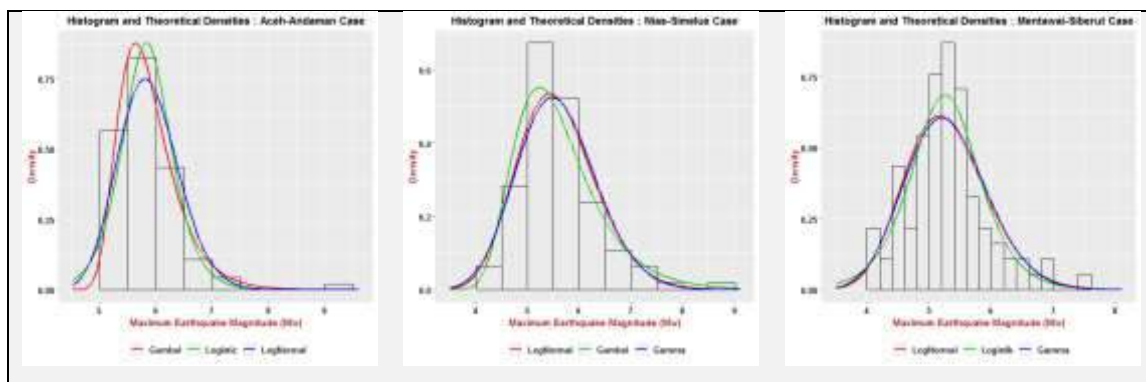
Fungsi-fungsi peluang yang digunakan dalam penelitian ini cukup representatif dalam menangkap dinamika dari fungsi distribusi data empiris. Untuk fungsi peluang dengan karakteristik simetrik diwakili oleh fungsi peluang Normal, Logistik, dan Chauchy sedangkan untuk karakteristik asimetrik diwakili oleh fungsi peluang Eksponensial, LogNormal, Gamma, Weibull, dan Gumbel/GEV. Rekapitulasi dari perbandingan nilai AIC dari masing-masing model peluang yang digunakan untuk setiap data empiris di segmen-segmen sumber gempa besar kami sajikan seperti yang tampak pada Tabel 2.

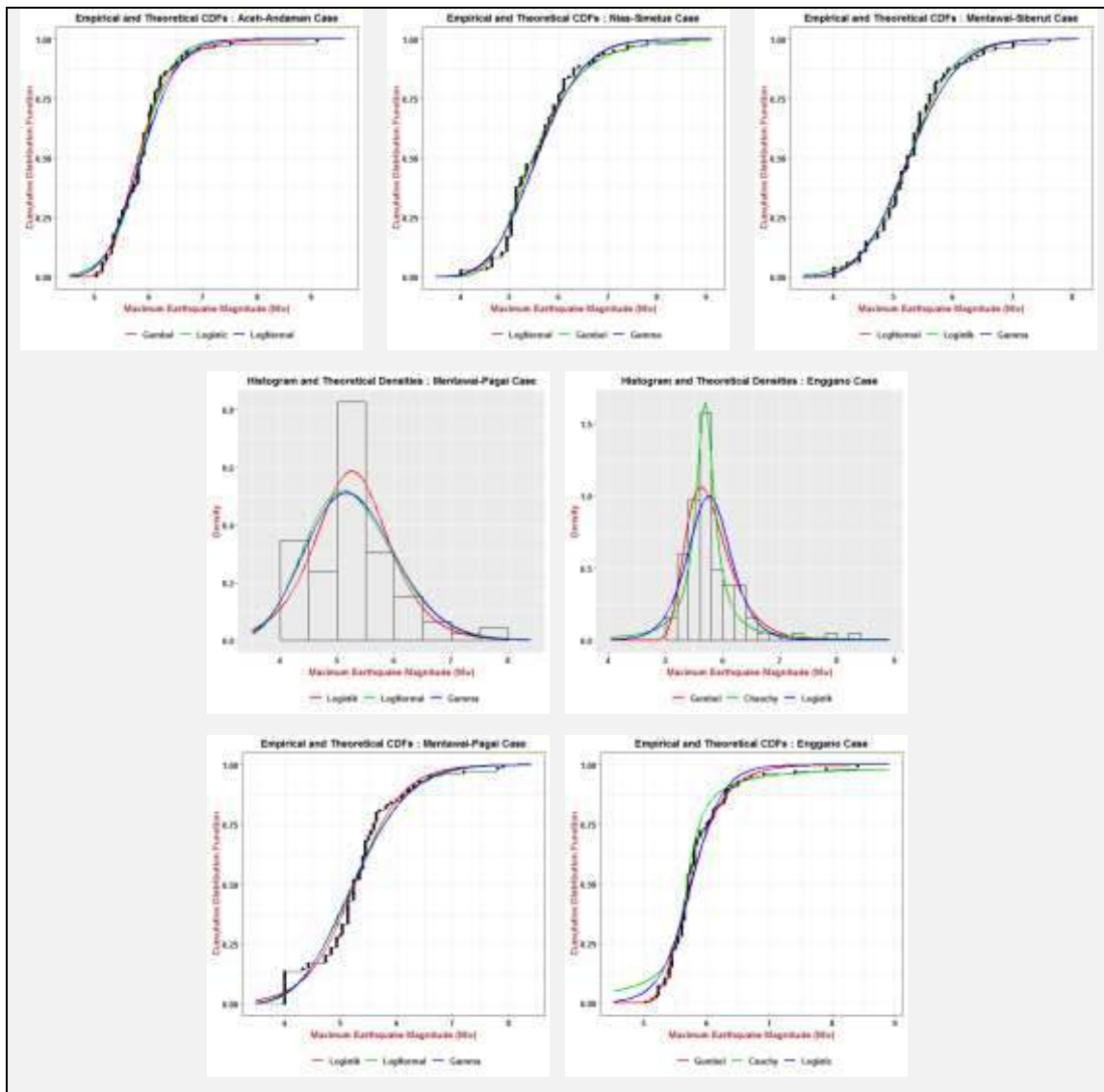
Tabel 2. Komparasi nilai *Akaike Information Criteria* (AIC) dari masing-masing model peluang untuk setiap data empiris di segmentasi sumber-sumber gempa besar.

| Distribusi | Sumber-sumber Gempa Besar | | | | |
|--------------|---------------------------|---------------|------------------|----------------|---------------|
| | Aceh-Andaman | Nias-Simelue | Mentawai-Siberut | Mentawai-Pagai | Enggano |
| Normal | 164.19 | 220.92 | 191.87 | 222.87 | 148.01 |
| Logistik | 144.76 | 214.79 | 187.61 | 217.71 | 124.95 |
| Chauchy | 159.10 | 237.47 | 205.52 | 227.43 | 120.61 |
| Eksponensial | 511.88 | 502.38 | 492.26 | 491.82 | 510.26 |
| LogNormal | 149.74 | 212.54 | 187.27 | 218.88 | 132.63 |
| Gamma | 154.02 | 214.62 | 188.24 | 219.41 | 137.41 |
| Weibull | 211.42 | 241.86 | 209.80 | 238.05 | 194.85 |
| Gumbel/GEV | 134.81 | 212.70 | 191.04 | 223.64 | 105.38 |

Secara ringkas hasil dari pencocokan fungsi distribusi data empiris terhadap fungsi distribusi teoritik untuk semua sub-wilayah zona subduksi Sumatra megathrust secara umum memiliki karakteristik penyebaran asimetrik. Visualisasi dari tiga fungsi peluang dengan nilai AIC terkecil dari masing-masing segmentasi sumber gempa kami tampilkan pada Gambar 1.

Setelah kita dapatkan fungsi distribusi yang cocok, selanjutnya kita terapkan Persamaan (6) untuk mendapatkan ukuran asosiasi dari dua pasangan data fungsi distribusi berdasarkan sumber-sumber gempa besar.



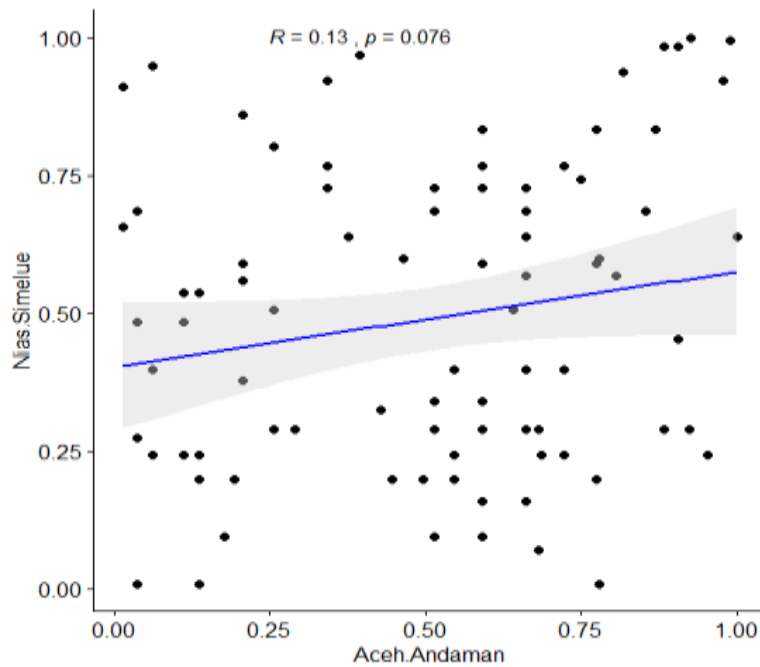


Gambar 1. Visualisasi perbandingan fungsi peluang serta fungsi distribusi dari data empirik dengan model teoritik. Jumlah model fungsi peluang yang ditampilkan sebanyak tiga buah yang merupakan fungsi peluang dengan nilai AIC tiga terkecil. Secara berurutan nilai AIC terkecil pertama, kedua, dan ketiga dibedakan dengan warna merah, warna hijau, dan warna biru.

Rekapitulasi hasil analisis ukuran asosiasi untuk sepuluh pasang data disajikan pada Tabel 3. Berdasarkan kriteria *p-value*, hanya segmentasi Aceh-Andaman dan Nias-Semelue yang memiliki ukuran asosiasi signifikan, itupun dengan $\alpha = 0.08$. Khusus untuk segmentasi Aceh-Andaman dan Nias-Semelue, visualisasi dari bentuk asosiasi dan besaran asosiasi dapat dilihat pada Gambar 2.

Tabel 3. Ukuran asosiasi untuk dua pasang data gempa maksimum untuk dua sumber gempa besar di zona subduksi Sumatra megathrust.

| Segmentasi | Nias-Simelue | | Mentawai-Siberut | | Mentawai-Pagai | | Enggano | |
|-------------------------|--------------|---------|------------------|---------|----------------|---------|---------|---------|
| | r | p-value | r | p-value | r | p-value | r | p-value |
| Aceh-Andaman | 0.129 | 0.076 | -0.065 | 0.370 | 0.085 | 0.242 | 0.045 | 0.531 |
| Nias-Simelue | | | 0.045 | 0.531 | 0.090 | 0.218 | -0.066 | 0.368 |
| Mentawai-Siberut | | | | | 0.080 | 0.239 | -0.054 | 0.452 |
| Mentawai-Pagai | | | | | | | -0.033 | 0.649 |



Gambar 2. Visualisasi bentuk dan besaran asosiasi nilai fungsi distribusi dari segmentasi Aceh-Andaman dengan segmentasi Nias.

SIMPULAN

Dari serangkaian kegiatan analisis data yang telah kami lakukan diperoleh kesimpulan bahwa karakteristik fungsi peluang dari data empiris di sub-wilayah zona subduksi adalah asimetrik. Untuk segmentasi Aceh-Andaman dan Enggano fungsi distribusi yang cocok adalah distribusi Gumbel/GEV, untuk segmentasi Nias-Simelue dan Mentawai-Siberut distribusi yang cocok adalah distribusi LogNormal, sedangkan untuk segmentasi Mentawai-Pagai distribusi yang cocok adalah distribusi Logistik. Dari sepuluh kemungkinan pasangan data, hanya pasangan data fungsi distribusi dari Aceh-Andaman dengan Nias-Simelue yang memiliki ukuran asosiasi signifikan dengan $\alpha = 0.08$.

REFERENSI

- Can, C., Ergun, G., Gokceoglu, C. 2014. Prediction of earthquake hazard by hidden Markov model (around Bilecik, NW Turkey). *Open Geosciences*. 6(3). 403-414.
- Delignette-Muller, M. L., Laure, M., and Dutang, C. 2015. fitdistrplus: An R package for fitting distributions. *Journal of Statistical Software*, 64(4), 1-34.
- Dinske, C., Shapiro, S. 2017. Forecasting Magnitude Frequencies and Magnitude Occurrence Probabilities Using the Seismogenic Index Model. In *79th EAGE Conference and Exhibition 2017-Workshops*.
- EERI Committee on Seismic Risk., and Shah, H.C. 1984. Glossary of terms for probabilistic seismic-risk and hazard analysis. *Earthquake spectra*. 1(1). 33-40.
- Firuzan, E. 2008. Statistical earthquake frequency analysis for Western Anatolia. *Turkish Journal of Earth Sciences*. 17(4). 741-762.
- Hoan, V. T., Lu, N. T., Rodkin, M., Tuyen, N. H., Hang, P. T. T., & Phuong, T. V. 2016. Prediction of maximum earthquake magnitude for northern Vietnam region based on the gev distribution. *Vietnam Journal of Earth Sciences*, 38(4), 339-344.
- Kadirioğlu, F.T., Kartal, R.F. 2016. The new empirical magnitude conversion relations using an improved earthquake catalogue for Turkey and its near vicinity (1900-2012). *Turkish Journal of Earth Sciences*. 25(4). 300-310.
- Kijko, A. 2004. Estimation of the maximum earthquake magnitude, m_{max} . *Pure and Applied Geophysics*, 161(8), 1655-1681.
- McCloskey, J., Antoniolo, A., Piatanesi, A., Sieh, K., Steachy, S., Nalbant, S., Cocco, M., Giunchi, C., Huang, J., and Dunlop, P. 2008. *Earth and Planetary Science Letters*, 265(1-2) 61-81.

- Mousavi, S.M. 2017. Spatial variation in the frequency-magnitude distribution of earthquakes under the tectonic framework in the Middle East. *Journal of Asian Earth Sciences*. 147. 193-209.
- Newman, A.V., Hayes, G., Wei, Y., and Convers, J. 2011. *Geophysical Research Letters*, 38(5).
- Orfanogiannaki, K., Karlis, D., Papadopoulos, G.A. 2014. Identification of temporal patterns in the seismicity of Sumatra using Poisson Hidden Markov models. *Research in Geophysics*. 4(1).
- PusGeN. 2017. Peta Sumber dan Bahaya Gempa Indonesia Tahun 2017. Pusat Penelitian dan Pengembangan Perumahan dan Pemukiman. Badan Peneliti dan Pengembangan Kementerian Pekerjaan Umum dan Perumahan Rakyat.
- Scordilis, E.M. 2006. Empirical global relations converting Ms and Mb to moment magnitude. *Journal of seismology*. 10(2). 225-236.



MODEL MATEMATIKA ALIRAN FLUIDA PADA PELAT HORIZONTAL BAJI (WEDGE) (MATHEMATICAL MODEL OF FLUID FLOW IN WEDGE HORIZONTAL PLATE)

Leli Deswita*
Universitas Riau

Endang Lili
Universitas Riau

Haposan Sirait
Universitas Riau

ABSTRACT: This paper examines the mathematical model of fluid flow on wedge horizontal plates. This mathematical model uses the Navier Stokes equation in the form of a dimensionless system of nonlinear partial differential equations. Then this equation is derived first into the form of dimensionless equations, then transformed into a nonlinear system of ordinary differential equations, using the equation of similarity. This nonlinear ordinary differential equation system is solved using the finite-difference scheme method, and also with the Mathematics program by using the softl matlab. A numerical solution to the problem of Newton fluid flow of lamina in fluid incompressible viscous fluid flow to the wedge horizontal plate produced from this mathematical program, to determine, velocity profile and temperature profile.

KEYWORDS: Finite Difference Scheme, Wedge Horizontal Plate and Navier Stokes.

* Corresponding Author: Jurusan Matematika, Fakultas Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA)
Universitas Riau, Pekanbaru; Email: deswital@yahoo.com

PENDAHULUAN

Benda dikenal dalam keadaan padat, cair atau gas (uap). Apabila benda berada dalam bentuk cair atau gas, benda disebut sebagai fluida. Sifat-sifat umum dari semua fluida adalah harus dibatasi dengan dinding kedap supaya tetap dalam bentuknya semula. Apabila dinding pengekan dipindahkan, fluida mengalir (mengembang) sampai pembatas baru yang kedap ditemukan. Menurut ilmu mekanika fluida, aliran fluida khususnya air di klasifikasikan berdasarkan perbandingan antara gaya-gaya inersia (*inertial forces*) dengan gaya-gaya akibat kekentalannya (*viscous forces*). Fluida-fluida yang tegangan gesernya berhubungan secara linear terhadap laju regangan geser (*gradient kecepatan*) disebut juga fluida Newtonian.

Perpindahan panas artinya adalah aliran panas dari tempat bersuhu tinggi ke tempat bersuhu rendah, yang disebabkan oleh perbedaan suhu dan dapat terjadi pada sebarang bentuk benda Ghebart *et al* [3]. Panas tidak dapat disimpan, tetapi panas akan terus mengalir berdasarkan perbedaan suhu. Panas bisa mengalir melalui tiga cara yaitu dengan konduksi, radiasi dan konveksi. Perpindahan panas secara konduksi dan radiasi terjadi di dalam aliran fluida, jika perpindahan panas dari permukaan padat ke cair dinamakan sebagai proses perpindahan panas secara konveksi Stewartson [7].

Masalah kajian Aliran fluida terhadap plat horizontal telah banyak dibahas oleh peneliti-peneliti terdahulu. Seperti kajian aliran syarat batas konveksi campuran di atas plat horizontal dengan suction dan variabel perpindahan panas variabel (*mixed convection boundary layer flow over a horizontal flat plate with suction and variable heat flux*) yang telah di kaji oleh Deswita *et al.* [4], kajian yang dilakukan oleh Deswita *et al.* [5] tentang solusi kesamaan untuk aliran lapisan konveksi campuran di atas pelat datar horizontal permeabel (*similarity solution for mixed convection layer flow over a permeable horizontal flat plate*). Kemudian Azizah *et al.* [9] dalam artikel tentang Falkner Skan masalah untuk irisan statis dan bergerak dengan perpindahan panas permukaan yang ditentukan dalam cairan nano. (*Falkner Skan problem for a static and moving wedge with prescribed surface heat flux in nano fluid*). Banyak lagi peneliti yang lain Sarifah *et al.* [8], Deswita *et al.*[6] dan Ishak *et al.* [1] membahas masalah konveksi campuran pada plat horizontal. Dilihat dari kajian-kajian sebelumnya, maka tujuan dari kajian ini adalah untuk memperluas kajian sebelumnya, dengan pengembangan model matematika perpindahan panas aliran fluida konveksi campuran pada plat horizontal baji (wadge). Fluida Newtonian yang tak mampat ini menggunakan persamaa Navier Stokes.

FORMULASI MATEMATIKA

Telah dipertimbangkan bahwa kajian ini pengembangan model matematika dan analisa aliran fluida konveksi campuran pada plat horizontal baji (wedge), adapun bentuk model dari masalah ini adalah seperti berikut Ridha [2],

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2)$$

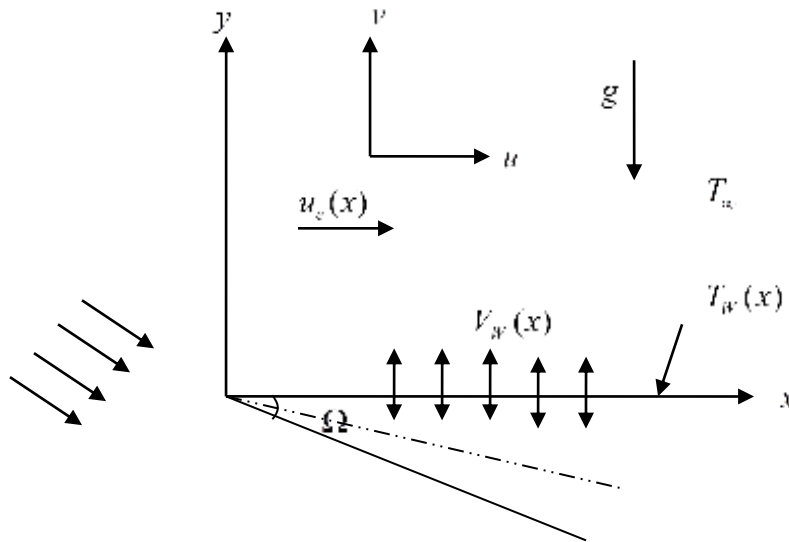
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_\infty g \beta (T - T_\infty), \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (4)$$

untuk syarat batas

$$\begin{aligned} v = V_w(x), \quad u = 0, \quad T = T_w(x) \quad \text{at} \quad y = 0 \\ u \rightarrow u_e(x), \quad T \rightarrow T_\infty, \quad p \rightarrow p_\infty \quad \text{at} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan $V_w(x) > 0$ adalah merupakan sedutan (suction), dan $V_w(x) < 0$ merupakan semburan (injection), untuk $V_w(x) = 0$ merupakan plat tak telap.



Gambar.1. Model Fisik Aliran Fluida Plat Horizontal Baji (wedge)

Selanjutnya ρ_∞ adalah ketumpatan bendalir, β adalah pekali kembangan termal, ν adalah kelikatan kinematik, g adalah pecutan graviti dan Pr adalah nombor Prandtl. Ditetapkan bahawa kecepatan aliran bebas $u_e(x)$ dan suhu permukaan plat $T_w(x)$ adalah dalam bentuk Ridha [2]

$$u_e(x) = U_\infty \left(\frac{x}{l} \right)^m, \quad T_w(x) = T_\infty + \Delta T \left(\frac{x}{l} \right)^{(5m-1)/2} \quad (6)$$

Dimana U_∞ adalah kecepatan aliran bebas, m adalah konstanta, dengan $m = \beta^* / (2 - \beta^*)$, dan $\beta^* = \Omega / \pi$ dengan Ω adalah sudut yang beririsan, dan ΔT menunjukkan skala perbedaan suhu dengan $\Delta T > 0$ untuk aliran membantu (suction), dan $\Delta T < 0$ untuk aliran menentang (injection)

Untuk menyelesaikan persamaan (1)-(4) di asumsikan persamaan keserupaan dalam bentuk Ridha [11],

$$\begin{aligned} \psi &= (U_\infty \nu l)^{1/2} \left(\frac{x}{l}\right)^{(m+1)/2} f(\eta), \quad T - T_\infty = \Delta T \left(\frac{x}{l}\right)^{(5m-1)/2} \theta(\eta) \\ p - p_\infty &= \rho_\infty \frac{U_\infty^2}{l} \left(\frac{x}{l}\right)^{2m} h(\eta), \quad \eta = \left(\frac{U_\infty}{\nu l}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{l}\right)^{(m-1)/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Dengan ψ fungsi aliran yang di definisikan sebagai berikut:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (8)$$

Dengan menggunakan (7) dan (8) diperoleh :

$$\begin{aligned} u &= U_\infty \left(\frac{x}{l}\right)^m f'(\eta), \\ v &= -\frac{1}{2} \left(\frac{U_\infty \nu}{l}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{l}\right)^{(m-1)/2} [(m+1)f(\eta) + (m-1)\eta f'(\eta)], \end{aligned} \quad (9)$$

dengan tanda (') artinya turunan terhadap η . Pada permukaan plat $\eta = 0$ dan $v = V_w(x)$, dari persamaan (8), diperoleh:

$$V_w(x) = -\frac{m+1}{2} \left(\frac{U_\infty \nu}{l}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{l}\right)^{(m-1)/2} f_0. \quad (10)$$

Selanjutnya $f_0 = f(0)$ adalah konstanta yang menentukan kadar transpirasi, dan $f_0 > 0$ adalah suction (sedutan) $f_0 < 0$ injection (semburan). Selanjutnya $f_0 = 0$, merupakan plat tak telap yang telah diperhatikan oleh Ridha [2]

Substitusikan persamaan (9) dan (10) ke persamaan (1)-(4), sehingga menghasilkan:

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1-f'^2) - 2mh - \frac{m-1}{2} \eta h' = 0, \quad (11)$$

$$h' = \lambda \theta, \quad (12)$$

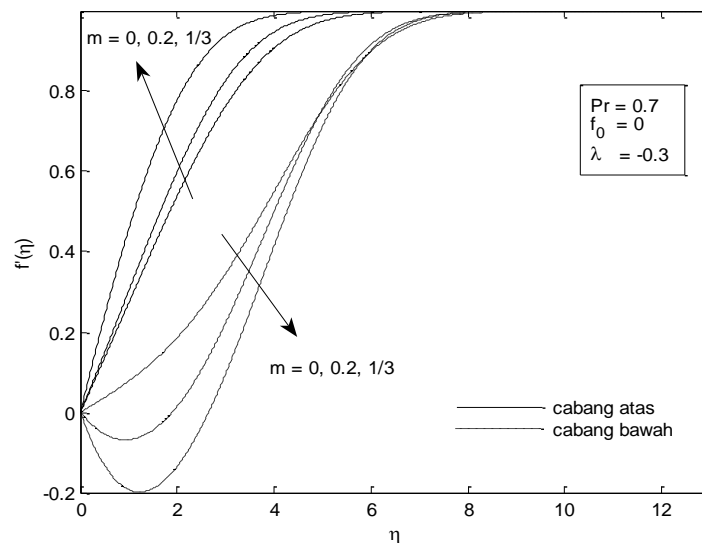
$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{m+1}{2} f \theta' + \frac{1-5m}{2} f' \theta = 0, \quad (13)$$

Dengan syarat batas,

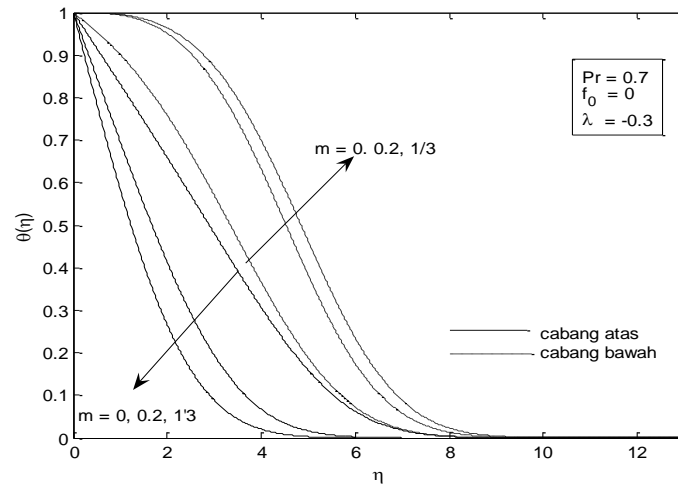
$$\begin{aligned} f(0) = f_0, \quad f'(0) = 0, \quad \theta(0) = 1 \\ f'(\eta) \rightarrow 1, \quad \theta(\eta) \rightarrow 0, \quad h(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (14)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sistem persamaan diferensial biasa non linear (11) - (13) dengan syarat batas (14) telah diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode *finite difference schem* dan program *Mappel*, untuk nilai $P_r = 0.7$ (air), $m = 0, 0.2, 1/3$ serta nilai parameter $f_0 = 0$ dan $\lambda = -0.3$. Nilai-nilai λ yang negatif penyelesaiannya dual didapati, dengan interval $\lambda_c < \lambda < 0$, penyelesaian unik pada $\lambda = \lambda_c$ dan tiada penyelesaian apabila $\lambda < \lambda_c$. Gambar (3.1) menunjukkan profil kecepatan (velocity profile) $f'(\eta)$ dengan nilai $m = 0, 0.2, 1/3$, nilai $P_r = 0.7$ (air), serta nilai parameter $f_0 = 0$ dan $\lambda = -0.3$. Garis putus-putus cabang bawah bernilai negatif dan garis cabang atas bernilai positif. Gambar (3.2) menunjukkan Profil suhu (*temperature profile*) $\theta(\eta)$ dengan nilai $m = 0, 0.2, 1/3$, nilai prandtal $P_r = 0.7$ (air), parameter $f_0 = 0$ dan $\lambda = -0.3$ dan garis putus-putus cabang bawah bernilai negatif dan cabang atas bernilai positif.



Gambar 2. Profil kecepatan $f'(\eta)$ untuk berbagai nilai m dengan $P_r = 0.7$, $f_0 = 0$ dan $\lambda = -0.3$.



Gambar 3. Profil suhu $\theta(\eta)$ untuk berbagai nilai m dengan $Pr = 0.7$, $f_0 = 0$ dan $\lambda = -0.3$.

KESIMPULAN

Makalah ini mengkaji model matematika aliran fluida pada pelat horizontal baji (wedge). Model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial parsial nonlinear berorde dua. Kemudian persamaan ini diturunkan terlebih dahulu ke bentuk sistem persamaan diferensial biasa yang nonlinear. Selanjutnya sistem persamaan diferensial biasa yang nonlinear ini, diselesaikan dengan menggunakan metode *finite-difference scheme*.

Solusi secara numerik masalah pada pelat horizontal baji (wedge) yang dihasilkan dari program matematika *matlab*, untuk menentukan *skin friction coefficient*, profil kecepatan (*velocity profile*) dan profil suhu (*temperature profile*).

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih atas dana yang diberikan untuk penelitian, yang diterima dalam bentuk hibah penelitian DIPA Universitas Riau. Nomor Kontrak : 864/UN.19.5.1.3/PT.01.03/2019

REFERENSI

- [1]. Anuar Ishak, Roslinda Nazar, Ioan Pop. 2011. Moving wedge and flat plate in a power-law fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 46, 1017-1027.
- [2]. A.Rhida. 1996 Aiding flows non-unique similarity solutions of mixed convection boundary layer equations. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 47: 341-352
- [3] B. Ghebart, Y.Jaluria, R.L. Mahajan, B. Sammakia, *Buoyancy Induced Flows and Transport*, Hemisphere, New York, 1988.
- [4]. **Deswita, L.**, Nazar. R., Ishak. A., Ahmad. R. & Pop. I. 2018. mixed convection boundary layer flow over a horizontal flat plate with suction and variable heat flux. *Journal of Heat and mass transfer* 15(2):195-211.
- [5]. **Deswita, L.**, Nazar. R., Ishak. A., Ahmad. R. & Pop. I. 2010. Similarity solution for mixed convection boundary layer flow over a permeable horizontal flat plate. *Applied Mathematics and Computation* 217: 2619-2630.
- [6]. **Deswita, L.**, Nazar. R., Ahmad. R. Ishak. A. & Pop. I. 2009. Similarity solution of free convection boundary layer flow on a horizontal plate with variable wall temperature. *European Journal of Scientific Research* ISSN 1450-216 X Vol. 2: 188-198.
- [7] K. Stewartson, *On free convection from a horizontal plate*, *Z. Angew. Math. Phys.* (ZAMP), 9 (1958) 276-282.
- [8]. NM Sarifa, MZ Salleha, R Nazarb. 2016. [Mixed convection flow over a horizontal circular cylinder in a viscous fluid at the lower stagnation point with convective boundary conditions](#). *Science Asia* 42, 5-10.
- [9]. Nor Azizah Yacob, Anuar Ishak, Roslinda Nazar, Ioan Pop. 2011. Falkner- skan problem for a static and moving wedge with prescribed surface heat flux in a nanofluid. *International Communications in Heat and mass Transfer*. 38, 149-153



APLIKASI METODE ARIMA UNTUK PERAMALAN HARGA MEI 2019 DI PROVINSI ACEH

(APPLICATION OF ARIMA METHOD FOR PRICE FORECAST FOR MAY 2019 IN ACEH PROVINCE)

Miftahudin *
Univ. Syiah Kuala

**Ananda Pratama
Sitanggung**
Univ. Syiah Kuala

Mira Suci Yana
Univ. Syiah Kuala

Berliana Rembune
Univ. Syiah Kuala

ABSTRACT: Food problems that hit the world especially Aceh Province were problems originating from the agricultural sector. Rice is a very important food requirement for the people of Indonesia, the consumption of rice for the Indonesian people reaches 125 kilograms per capita per year. Thus this study aims to predict the price of daily rice in Aceh Province, so that the government knows and guarantees that the price of rice can be reached by the community. The best forecasting method used is the ARIMA Model (2,1,1). The results obtained show constant rice prices in January until May 2019. The conclusion of this study is the price of rice in Aceh Province in May in accordance with the price range of Rp. 10,775. The price is now above the actual price, where the actual data in May continues to rise and fall.

KEYWORDS: ARIMA model, Forecasting, Rice prices.

* Corresponding Author: Jurusan Statistika, FMIPA, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh; Email: miftah@unsyiah.ac.id

PENDAHULUAN

Permasalahan pangan yang melanda dunia terkhusus Provinsi Aceh adalah permasalahan yang bersumber dari sektor pertanian. Sektor pangan di Indonesia khususnya Provinsi Aceh menjadi suatu pokok permasalahan dalam penelitian ini, sebab pangan merupakan kebutuhan primer terhadap umat manusia. Saat ini populasi penduduk semakin bertambah, dengan demikian kebutuhan pangan juga akan semakin meningkat. Setiap Provinsi saat ini harus mampu menjaga ketersediaan pangan yang dimilikinya, agar dapat mengurangi ancaman kelaparan yang menimpa masyarakatnya. Kebutuhan bahan-bahan pokok dalam kehidupan merupakan suatu hal yang harus terpenuhi. Namun, ketidakstabilan suatu harga menjadi penghambat kebutuhan pokok untuk terpenuhi. [1].

Beras merupakan makanan pokok dari masyarakat Indonesia. Oleh karena itu permintaan persediaan beras akan banyak, sehingga akan berdampak pada harga beras. Bukan hanya itu harga beras juga akan dipengaruhi oleh berbagai sumber lainnya sehingga mengakibatkan harga beras akan meningkat. Beras merupakan kebutuhan pokok yang dibutuhkan sekitar 78% oleh penduduk Indonesia untuk memenuhi kebutuhan hidup dan asupan energi setiap harinya. Beras menjadi kebutuhan pangan

yang sangat penting bagi masyarakat Indonesia karena menurut artikel yang dirilis *International Rice Research Institute (IRRI)* tahun 2014 menyatakan bahwa konsumsi beras Masyarakat Indonesia mencapai 125 Kilogram (Kg) Per Kapita Per Tahun. Dengan demikian maka jumlah penduduk yang semakin bertambah pada setiap tahunnya, mengakibatkan meningkat pula kebutuhan akan persediaan beras untuk asupan pangan masyarakat Indonesia [2].

Ketidakstabilan harga membuat penulis ingin meneliti mengenai prediksi harga beras harian yang akan datang di Provinsi Aceh menggunakan analisis deret waktu dengan model ARIMA (p, d,q). Model ARIMA digunakan agar dapat memberikan peramalan harga harian beras. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah memprediksi harga beras harian di Provinsi Aceh agar dapat menjadi acuan bagi pemerintah agar dapat menjamin bahwa masyarakat dapat menjangkau harga beras tersebut.

BAHAN DAN METODE

Data Time Series (Data Deret Waktu)

Data time series atau data deret waktu ialah sebuah data yang berhubungan dengan waktu (time). Pengamatan yang akan digunakan bergantung oleh waktu, Sehingga setiap pengamatan saling berhubungan, yaitu data kejadian saat ini dengan data kejadian sebelumnya. Adapun kegunaan dari analisis *time series* yaitu untuk menduga atau meramalkan keadaan masa akan datang berdasarkan keadaan yang sebelumnya [3].

Stasioner dan Nonstasioner

Pada data time series pengecekan data stasioner dan Nonstasioner sangat penting untuk dilakukan, sebab untuk peramalan selanjutnya data yang akan digunakan ialah data yang sudah memenuhi stasioner baik terhadap mean dan juga varians. Umumnya, data stasioner merupakan kondisi dari data yang tidak memiliki variasi data yang berbeda jauh[4].

Adapun langkah atau metode yang dapat dilakukan untuk menghilangkan apabila data tidak stasioner secara rata-rata dan varians adalah menggunakan differencing dan transformasi.

- Differencing

Differencing digunakan jika data yang diuji tidak stasioner terhadap mean, kegunaan dari differencing ini agar membuat data menjadi stasioner terhadap mean, dimana dilakukan dengan mendiferensikan data waktu. Untuk persamaannya seperti pada persamaan 1 berikut:

$$z_t = Y_t - Y_{t-1} \quad t = 2, 3, 4 \quad (1)$$

Kemudian setelah dilakukan proses differencing pada data waktu tersebut, dan masih menunjukkan bahwa data tidak stasioner sehingga akan dilakukan differencing kedua kali sampai akhirnya data tersebut stasioner terhadap mean.

- Transformasi

Transformasi digunakan apabila data waktu tidak stasioner terhadap varians, kegunaan dari transformasi membuat data menjadi stasioner terhadap varians, transformasi dilakukan dengan menggunakan transformasi ln/log, kuadrat/ pangkat, akar, dan lain-lain sampai akhirnya data tersebut stasioner terhadap varians.

Kemudian setelah kedua proses tersebut selesai dilakukan dan data telah stasioner terhadap mean dan varians sehingga asumsi untuk data stasioner terpenuhi sehingga sudah dapat membuat Plot ACF dan PACF dari data waktu agar dapat menentukan model.

127

Plot ACF dan PACF

Plot ACF dan PACF merupakan plot yang digunakan pada penentuan model ARIMA yang dipakai pada peramalan. Umumnya Plot ACF maupun PACF sama-sama digunakan untuk melihat model atau hubungan dari data deret waktu. Berikut persamaan pada Plot ACF dan juga PACF

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2} \quad (2)$$

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_j} \quad (3)$$

Setelah menghitung dan menentukan Plot ACF dan PACF dari data maka langkah selanjutnya kita dapat menentukan model yang digunakan pada peramalan nantinya, baik itu model AR, MA atau ARMA [5].

Model ARIMA

Pada data *time series* salah satu metode yang sering dipakai pada peramalan adalah metode ARIMA. Metode ini untuk peramalan kedepan dari sebuah data deret waktu menggunakan model ARIMA. Model ARIMA terdiri dari tiga model, yaitu model AR, model MA, dan Model ARMA [6].

Model AR merupakan bagian dari model ARIMA yang memiliki model AR(p). Berikut persamaan untuk model AR (p)

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t = a_t \text{ atau } \phi_p(B) \tilde{z}_t = a_t \quad (4)$$

Model MA merupakan merupakan bagian dari model ARIMA yang memiliki model MA (q). Berikut persamaan untuk model MA (q)

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t \text{ atau } \tilde{z}_t = \theta_q(B) a_t \quad (5)$$

Model ARMA merupakan perpaduan dari model AR dan MA memiliki model ARMA (p, q). Berikut persamaan untuk model ARMA (p,q) [8].

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t \quad (6)$$

Penaksiran Parameter

Setelah didapatkan model yang sesuai pada data time series, maka selanjutnya kita dapat mengestimasi parameter dari model tersebut baik itu model AR, MA maupun ARMA bahkan ARIMA. Pada umumnya untuk mengestimasi parameter dapat digunakan berbagai metode, namun yang sering digunakan oleh kebanyakan orang menggunakan metode kuadrat terkecil dan juga metode kemungkinan maksimum untuk mengestimasi parameter [10].

Pengujian Diagnostik

Pengujian diagnostik dilakukan untuk melihat kesignifikansian dari model yang digunakan, dimana model tersebut telah signifikan dan sesuai dengan data atau tidak. Untuk melihat model telah signifikan atau tidak dengan model menggunakan uji t dan untuk melihat keacakan dari residual menggunakan pengujian *White Noise* dengan Uji *Ljung Box*, [11].

Kriteria Pemilihan Model

Kriteria model yang baik pada data time series dapat dilihat dengan beberapa kriteria. Kriteria untuk menentukan model itu terbaik atau tidak dengan menggunakan nilai AIC, MSE, MAPE, RMSE dan MAE, dimana dari nilai tersebut yang memiliki nilai paling kecil baik itu terhadap AIC, MSE, MAPE, RMSE dan MAE, model tersebut merupakan model terbaik untuk digunakan pada peramalan [10].

Setelah didapatkan model terbaik dari beberapa proses dan kriteria pemilihan model, Maka untuk selanjutnya dapat dilakukan proses peramalan [7].

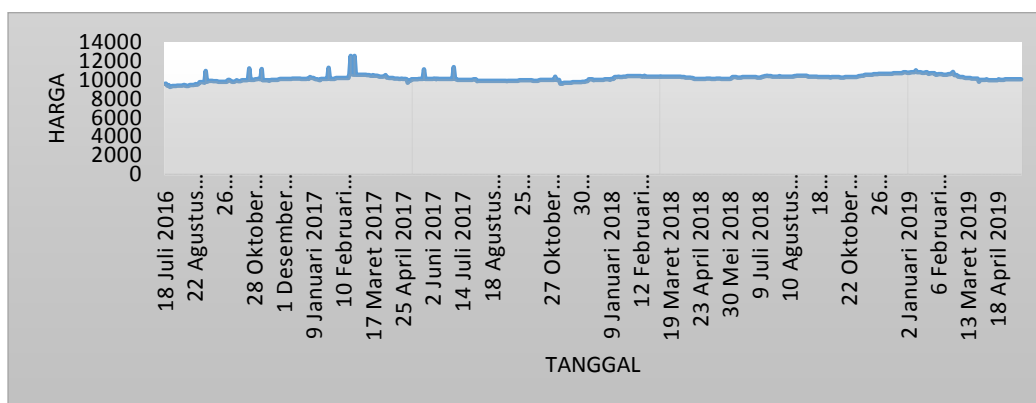
METODE PENELITIAN

Metode Peramalan yang digunakan pada penelitian ini adalah Metode ARIMA. Data yang akan diramalkan adalah data harga beras di Provinsi Aceh dari tanggal 18 Juli 2016 - 17 Mei 2019 yang bersumber dari Pusat Informasi Harga Pangan Strategis Nasional (PIHPS Nasional). Data yang diambil adalah data harian yang berjumlah 692 data. Tujuan penggunaan Metode ARIMA adalah untuk memprediksi harga beras di Provinsi Aceh pada Bulan Mei sampai dengan Juni 2019. Pengolahan data dilakukan dengan menggunakan *software R versi 3.5.3*. Beberapa tahapan dari analisis data yang dilakukan sebagai berikut: (1) Membuat gambaran deskriptif dari data; (2) Mengidentifikasi kestasioneran data yang dilakukan dengan dua tahapan, yaitu uji stasioneritas dan plot ACF & PACF; (3) Melakukan transformasi jika data tidak stasioner terhadap varians; (4) Melakukan *differencing* jika data tidak stasioner terhadap rata-rata; (5) Membangun model serta memilih model terbaik dengan menggunakan indikator AIC, MAPE, MAE, RMSE, dan jumlah parameter yang signifikan dalam model; dan (6) Melakukan peramalan dengan menggunakan model yang dipilih.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Gambaran Deskriptif Data

Data yang digunakan adalah data harga beras harian di Provinsi Aceh mulai dari tanggal 18 Juli 2016 - 17 Mei 2019. Grafik perubahan harga beras disajikan dalam Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Harga beras di Provinsi Aceh periode Januari 2018 sampai dengan Mei 2019

Gambar 1 menampilkan harga beras di Provinsi Aceh yang terlihat bahwa terdapat kenaikan dan penurunan terhadap harga besar dalam rentang waktu 18 Juli 2016 - 17 Mei 2019. Akan tetapi selama periode Juli 2017 - Mei 2019 pergerakan harga beras cenderung stabil. Meskipun sering mengalami peningkatan serta penurunan, harga beras tetap berada disekitaran Rp 10.000. Memasuki bulan Februari 2017 harga beras beberapa kali mengalami kenaikan secara tajam. Harga tertinggi berada pada akhir Februari 2017 yaitu pada tanggal 21 dan 24 Februari 2017, dengan harga beras saat itu mencapai Rp 12.550. Harga terendah berada pada pertengahan Juli 2016 yaitu pada tanggal 22 Juli 2016 dengan harga Rp 9.250.

130

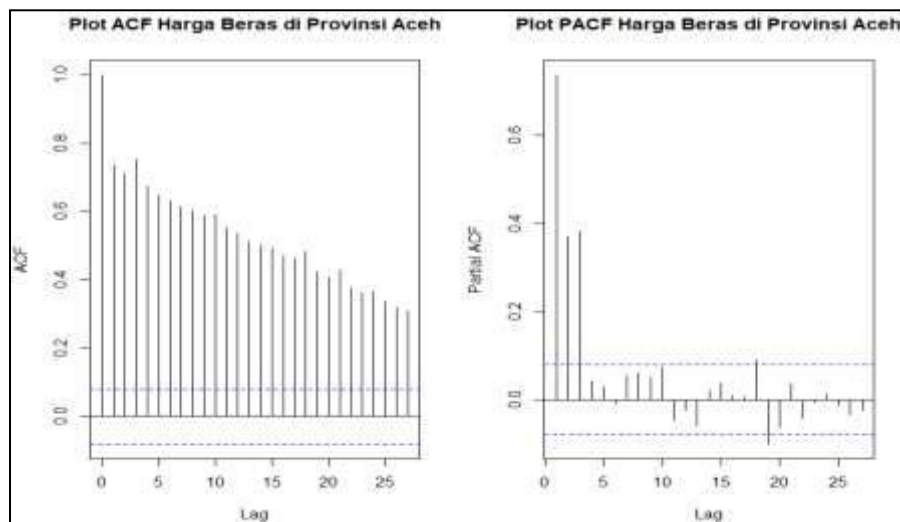
Uji Stasioneritas

Sebelum melakukan peramalan dengan menggunakan metode ARIMA, terlebih dahulu harus dilakukan Uji Stasioneritas. Data yang digunakan harus memenuhi asumsi stasioneritas terhadap varians maupun mean. Uji Stasioneritas terhadap varians dilakukan dengan transformasi Uji *Box-Cox Lambda*. Kriteria yang digunakan adalah besaran nilai lambda, dengan asumsi jika nilai lambda mendekati atau sama dengan 1 maka data stasioner terhadap varians. Sedangkan Uji Stasioneritas terhadap rata-rata dilakukan dengan menggunakan pengujian *Augmented Dickey-Fuller*. Hipotesis nol dalam uji *Augmented Dickey-Fuller* adalah data tidak stasioner. Kriteria pengujian dilakukan dengan melihat nilai *p-value* dan α (0,05). Tabel 1 menampilkan hasil dari 2 pengujian yang dilakukan.

Tabel 1. Perbandingan hasil pengujian

| Uji | P-value Lambda | Kriteria | Kesimpulan |
|--------------------------------|-------------------|--|---|
| <i>Box-Cox Lambda</i> | -0,9999 | Jika nilai lambda = 1, data stasioner terhadap varians | Data tidak stasioner terhadap varians |
| <i>Augmented Dickey-Fuller</i> | 0,0838 | $P\text{-value} < \alpha$ tolak H_0 | Data tidak stasioner terhadap rata-rata |

Selain menggunakan 2 pengujian seperti pada Tabel 1, kestasioneran data juga dapat dilihat secara deskriptif melalui Plot *Correlogram* ACF & PACF. Gambar 2 menampilkan Plot ACF & PACF.



Gambar 2. Output R Plot ACF & PACF

Gambar 2 dapat dilihat bahwa Plot ACF berpola eksponen namun bergerak turun secara perlahan. Hal ini mengidentifikasi data yang tidak stasioner. Berdasarkan pengujian inferensia yang dipaparkan pada Tabel 1 juga diperoleh kesimpulan data tidak stasioner terhadap varians dan mean. Sebab data tidak stasioner terhadap varians

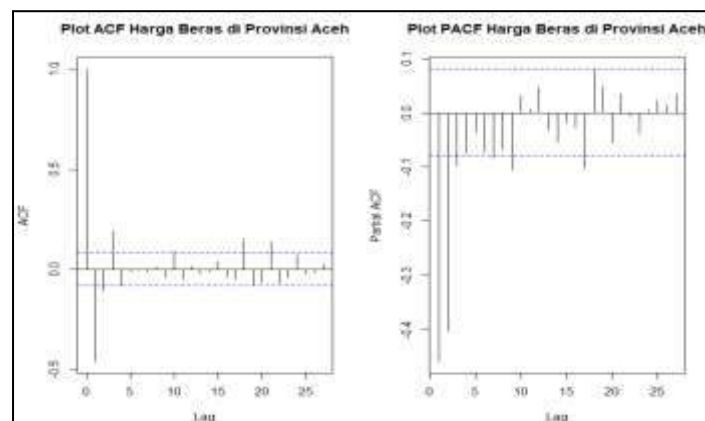
maka perlu dilakukan transformasi, kemudian diuji kembali kestasionerannya. Jika data tidak stasioner terhadap mean maka dilakukan proses *differencing*.

Transformasi Data

Transformasi data yang pada penelitian ini transformasi invers, dimana hasil transformasi merupakan $1/\text{data}$ asli. Selanjutnya kembali dilakukan pengujian terhadap data hasil transformasi dan didapatkan nilai λ yang telah mendekati 1, yaitu sebesar 1,0196. Sehingga dapat disimpulkan bahwa asumsi stasioneritas terhadap varians telah terpenuhi. Langkah berikutnya adalah melakukan pengujian menggunakan *Augmented Dickey-Fuller*. Pada pengujian ini didapatkan $p\text{-value}$ yaitu $0,08813 < \alpha$ (0,05) maka keputusannya tidak dapat menolak H_0 , sehingga dapat disimpulkan data tidak stasioner terhadap mean. Oleh karena itu *differencing* data perlu dilakukan.

Differencing Data

Differencing merupakan pembeda antara waktu, sehingga *differencing* dapat dihitung dari hasil selisih antara waktu satu dengan waktu yang lainnya. Setelah dilakukan *differencing* perlu dilakukan kembali Uji Stasioneritas. Model peramalan hanya dapat dibentuk jika data telah stasioner. Setelah dilakukan 1 kali *differencing*, statistik uji dari *Augmented Dickey-Fuller Test* bernilai $0,01 < \alpha$ (0,05) maka keputusannya adalah tolak H_0 , sehingga dapat disimpulkan data stasioner terhadap mean. Gambar 3 menampilkan Plot ACF & PACF dari data yang telah mengalami *differencing*.



Gambar 3. Output R untuk Plot ACF & PACF data *differencing*

Berdasarkan Gambar 3, terlihat pola data pada Plot ACF menurun secara drastis setelah lag tertentu, yaitu *cut off* setelah lag-1 sehingga ordo MA(1). Sedangkan pola data pada plot PACF menurun secara drastis setelah lag-2 sehingga ordo AR(2). Oleh karena itu model yang sesuai untuk digunakan sebagai model ramalan adalah model ARIMA (2,1,1).

Fitting Model

Dengan menggunakan data hasil *differencing* 1 kali, maka dapat dibentuk beberapa model yang akan di uji *fitting* model untuk mengetahui model peramalan terbaik yang akan digunakan. Model-model itu adalah :

Model 1 : ARIMA (1, 1, 1)

Model 2 : ARIMA (2, 1, 1)

Model 3 : ARIMA (3, 1, 1)

Dikatakan menghasilkan model ARIMA (1,1,1) karena proses *differencing* satu kali dan grafik ACF maupun PACF sama-sama turun secara eksponensial dan terpotong setelah lag pertama. Untuk model ARIMA (2,1,1) karena terjadinya proses *differencing* satu kali, grafik ACF terpotong setelah lag pertama, dan grafik PACF terpotong setelah lag kedua. Sedangkan pada model ARIMA (3,1,1) karena terjadinya *differencing* satu kali, grafik ACF terpotong setelah lag pertama, dan grafik PACF terpotong setelah lag ketiga.

Model terbaik untuk peramalan adalah yang memiliki kriteria nilai AIC, MAPE, MAE, serta RMSE yang terkecil. Tabel 2 menunjukkan perbandingan dari masing-masing order.

Tabel 2. *Fitting Model ARIMA*

| Order | AIC | MAPE | MAE | RMSE |
|---------|------------------|---------------|--|--|
| (1,1,1) | -14270,31 | 0,6528 | $6,2285 \cdot 10^{-7}$ | $1,6135 \cdot 10^{-6}$ |
| (2,1,1) | -14276,30 | 0,6342 | $6,0618 \cdot 10^{-7}$ | $1,6028 \cdot 10^{-6}$ |
| (3,1,1) | -14284,65 | 0,6456 | $6,1672 \cdot 10^{-7}$ | $1,5888 \cdot 10^{-6}$ |

Berdasarkan Tabel 2 nilai AIC serta RMSE terkecil terdapat pada model ARIMA dengan order (3,1,1). Sedangkan Nilai MAPE serta MAE terkecil berada pada

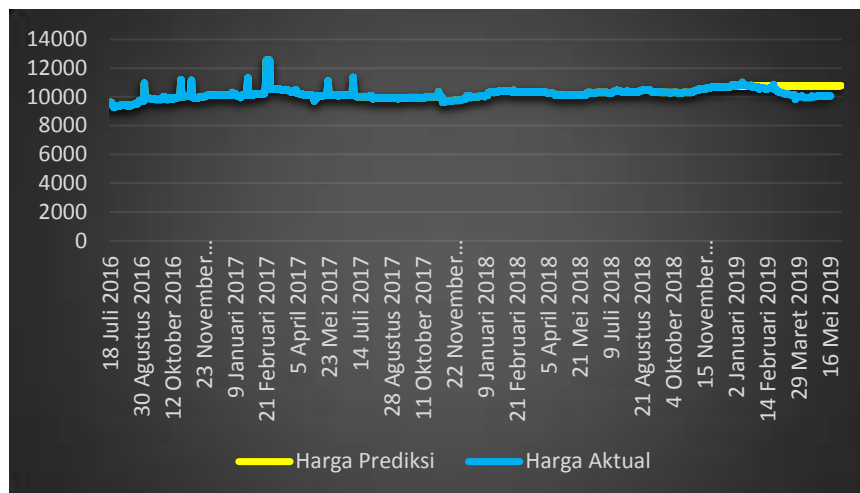
model ARIMA dengan order (2,1,1). Sehingga kemungkinan model terbaik adalah ARIMA(2,1,1) atau ARIMA(3,1,1). Namun dalam mendeteksi model terbaik tidaklah hanya mengandalkan nilai AIC ataupun nilai MAPE, MAE, serta RMSE saja. Perlu diperhatikan dan diuji pendugaan parameter untuk semua model, dimana setiap parameter di dalam model tersebut haruslah signifikan sehingga dapat dikatakan sebagai model terbaik. Setelah dilakukan uji signifikansi, didapatkan model dimana setiap parameter di dalam model tersebut signifikan, yaitu model ARIMA(2,1,1). Hasil ini sama dengan pertimbangan model berdasarkan pola yang terbentuk dari plot pada Gambar 3. Sehingga model yang dipilih sebagai model terbaik untuk mengestimasi harga beras di Provinsi Aceh pada Bulan Januari sampai dengan Mei 2019 adalah model ARIMA order (2,1,1).

Kemudian dilakukan pengujian diagnostik model menggunakan Uji *Box-Ljung*, dengan hipotesis nol residual memenuhi syarat *white noise* atau bersifat acak. Berdasarkan hasil pengujian didapatkan $p\text{-value}$ (0,8612) $>$ α (0,05), dengan demikian model yang digunakan telah memenuhi asumsi *white noise*. Sehubungan dengan terpenuhinya semua asumsi, maka peramalan data dapat dilakukan.

Forecasting (Peramalan) ARIMA

134

Pada tahap ini dilakukan peramalan terhadap data harga beras di Provinsi Aceh. Peramalan yang dilakukan adalah untuk harga harian selama 5 bulan ke depan, yaitu mulai dari tanggal 2 Januari - 31 Mei 2019. Gambar 4 menunjukkan hasil peramalan yang didapatkan.



Gambar 4. Perbandingan hasil peramalan dengan data aktual harga beras Januari sampai dengan Mei 2019 di Provinsi Aceh

Berdasarkan Gambar 4, dapat dilihat bahwa data hasil ramalan cenderung konstan dan sedikit menyimpang dari data aslinya. Hal ini mungkin disebabkan oleh pemilihan metode ataupun model peramalan yang kurang tepat. Harga ramalan beras untuk bulai Mei 2019 cenderung konstan, yaitu sekitar Rp 10.775.

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan model ARIMA (2,1,1), harga beras di Provinsi Aceh pada bulan Januari sampai dengan Mei 2019 cenderung konstan dan berada pada kisaran harga Rp 10.775. Harga tersebut berada di atas harga aktual, dimana pada data aktual harga beras di bulan April terus mengalami kenaikan dan penurunan. Harga tertinggi berada pada tanggal 4, 22, 29, dan 30 April yaitu senilai Rp 10.050. Sedangkan harga terendah terdapat pada pertengahan April, yaitu mulai dari tanggal 8 sampai dengan 18 April 2019, dengan harga Rp 9.950.

UCAPAN TERIMAKASIH

Kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam kegiatan SEMIRATA 2019 BKS PTN Barat bidang MIPA, Ketua Jurusan Statistika FMIPA Unsyiah, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Unsyiah dan seluruh rekan-rekan dalam grup riset yang telah mendukung kegiatan seminar nasional ini.

REFERENSI

- [1] M. Firdaus. 2012. *Manajemen Agribisnis*. Jakarta: Bumi Aksara.
- [2] T. C. Ningrum. 2016. *Peramalan Umlah Pengadaan dan Persediaan Beras di Perum Bulog Jatim*. Surabaya. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [3] W. Wei and Iam.W.S. 2006. *Analisis Model Arima Pada Pelanggan Listrik di Kota Makassar*. Makassar. Matematika Universitas Negeri Makassar.
- [4] Bahar, H. Sukarna, Nurfadillah. 2016. *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods* Second Edi. New York. Pearson Addison Wesley.
- [5] Halim. 2006. *Diktat Time Series*. Surabaya: Universitas Kristen Petra.
- [6] Rakhmawati Desty. 2010. *Estimasi Jumlah Produksi Beras Menggunakan Algoritma Backpropagation pada Metode Algoritma Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System (ANFIS)*. Skripsi. Purwokerto: UNSOED.

- [7] Assauri, Sofjan. 1984. *Teknik dan Metode Peramalan*. Jakarta: Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.
- [8] E. Jamil, Raupong. 2012. *Keterkaitan Antara Nilai Rata-Rata dan Nilai Konstan dalam Pemodelan Runtun Waktu Box-Jenkins*. Makassar. Universitas Hasanuddin.
- [9] S. A. .2008. *Analisis Prediksi Indeks Harga Saham Gabungan dengan Metode ARIMA*. Tesis. Semarang: Pasca Sarjana UNDIP.
- [10] K. Wanto. 2016. *Analisis Intervensi Data Deret Waktu*. Semarang. Universitas Negeri Semarang.
- [11] A. Sadeq. 2008. *Analisis Prediksi Indeks Harga Saham Gabungan Dengan Metode Arima*. Semarang. UNDIP.



ANALISIS SURVIVAL KEJADIAN BERULANG PADA DATA LAMA WAKTU PEMINJAMAN BUKU MAHASISWA JURUSAN STATISTIKA DENGAN MODEL COX PROPORTIONAL HAZARD

Miftahuddin
Universitas Syiah Kuala

Medina Suha Mazaya
Universitas Syiah Kuala

**Nurul Fadhilah
Hayyana A.**
Universitas Syiah Kuala

ABSTRAK: Kasus keterlambatan pengembalian buku di perpustakaan Universitas Syiah Kuala sering terjadi, hal disebabkan oleh faktor eksternal (peminjam) dan faktor internal (kondisi perpustakaan). Namun dari kedua faktor tersebut, kasus faktor eksternal yaitu dari peminjam buku akan diteliti lebih lanjut dalam penerapan model *Counting Process (CP)* dan model *Prentice William Peterson – Gap Time (PWP-GT)*. Analisis survival dapat digunakan untuk menganalisis kejadian berulang, baik kejadian berulang identik maupun tidak identik. Untuk kejadian pengembalian buku, pengategorian kejadian berulang dikategorikan identik dan tidak identik dapat berdasarkan tingkat keterlambatan pengembalian buku mahasiswa. Jika tingkat keterlambatan setiap peminjam sama, maka kejadian tersebut dikatakan kejadian identik, sebaliknya jika kejadian berulang mengindikasikan tahapan yang lebih lambat dari sebelumnya maka dikatakan kejadian tidak identik. Keberhasilan penanganan pengembalian buku tepat pada waktunya salah satunya dapat dilihat dari probabilitas ketahanan lama waktu pengembalian buku. Untuk mengidentifikasi probabilitas ketahanan waktu suatu objek, digunakan analisis *survival* dengan memodelkan faktor-faktor yang diduga berpengaruh terhadap probabilitas ketahanan lama waktu pengembalian buku. Pengujian asumsi menggunakan *recurrent event (RE)* memberikan kesimpulan bahwa variabel daya ingat pengembalian, banyaknya organisasi yang diikuti, pengkategorian jenis buku, jenis kelamin mahasiswa yang meminjam dan kejadian berulang dalam peminjaman buku memenuhi asumsi yang berarti probabilitas lama waktu pengembalian buku bersifat konstan sepanjang waktu jika ditinjau dari faktor daya ingat pengembalian, banyaknya organisasi yang diikuti, pengkategorian jenis buku, jenis kelamin mahasiswa yang meminjam dan kejadian berulang dalam peminjaman buku. Dengan menggunakan pendekatan *goodness of fit* untuk $\alpha = 0.1; 0.01; 0.5; 0.05$ didapatkan bahwa variabel daya ingat pengembalian, banyaknya organisasi yang diikuti, pengkategorian jenis buku dan kejadian berulang tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Untuk variabel jenis kelamin mahasiswa yang meminjam untuk $\alpha = 0.1; 0.01; 0.05$ didapat bahwa variabel jenis kelamin mahasiswa tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku, sedangkan untuk $\alpha = 0.05$, didapat bahwa variabel jenis kelamin mahasiswa tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Berdasarkan analisa *survival* pada kejadian lama waktu pengembalian buku mahasiswa (RE) diperoleh dua model dimana dari kedua model tersebut, disimpulkan bahwa model PWP-GT terbaik dengan nilai AIC sebesar 35.7685.

KEYWORDS: *recurrent event, Counting Process, PWP-GT, model Cox PH*

*Corresponding Author: Jurusan Statistika, FMIPA, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh Email: miftah@unsyiah.ac.id, medinasuhamazaya@gmail.com, nurulfadhilahhayyana03@gmail.com

PENDAHULUAN

Sebuah Institusi Pendidikan dalam menyelenggarakan belajar mengajar tidak terlepas dari peran dan fungsi perpustakaan di perguruan tinggi. Keberadaan perpustakaan menjadi kebutuhan mahasiswa dalam mencari berbagai sumber pembelajaran. Perkembangan informasi dan ilmu pengetahuan meningkat semakin pesat. Karena perpustakaan merupakan pusat sumber informasi yang bertugas menghimpun, mengolah, dan merawat bahan pustaka yang berisi informasi dari masa ke masa untuk kemudian disebarluaskan dan dimanfaatkan oleh mahasiswa. Mahasiswa pengguna perpustakaan sangat beragam. Menurut Sulisty-Basuki (2010:2.1), pengguna perpustakaan terdiri berbagai kelompok dan usia, mereka membutuhkan materi perpustakaan yang berbeda-beda. Hal inilah yang kemudian menimbulkan berbagai jenis buku yang dikelompokkan berdasarkan jenis mata kuliah jurusan di perguruan tinggi. Keberhasilan penggunaan dan peminjaman buku di perpustakaan dapat dilihat dari probabilitas ketahanan batas waktu peminjaman buku mahasiswa di perpustakaan. Semakin tinggi probabilitas ketahanan batas waktu peminjaman buku mahasiswa di perpustakaan mengindikasikan bahwa mahasiswa tersebut telah berhasil mengatasi kejadian pelanggaran berupa denda.

138

Dalam statistika terdapat satu metode yang digunakan untuk menganalisis ketahanan hidup yaitu analisis *survival*. Metode ini dapat digunakan untuk mengetahui bagaimana probabilitas suatu objek dapat bertahan hidup hingga waktu tertentu dan mengetahui bagaimana probabilitas terjadinya *failure* pada objek atau yang sering disebut dengan *hazard ratio*. Dalam pemodelan *survival* menggunakan pendekatan semiparametrik dibutuhkan terpenuhinya asumsi bahwa probabilitas terjadinya *failure* pada objek harus konstan sepanjang waktu yang disebut dengan asumsi *proportional hazard*.

Analisis ketahanan merupakan salah satu analisis yang digunakan dalam biostatistik yang membicarakan beberapa ukuran dan teknik yang digunakan untuk mengevaluasi status dari kejadian yang terjadi sehari-hari. Waktu sampai terjadinya suatu kejadian tersebut dikenal dengan istilah waktu *survival* atau waktu ketahanan. Dalam analisis ketahanan, terdapat tiga istilah yang perlu dipahami. Pertama, waktu individu untuk tetap bertahan pada periode pengamatan (waktu ketahanan). Kedua, kejadian (*event*) atau variabel yang menjadi fokus perhatian dalam penelitian. Istilah ketiga yang membedakan analisis ketahanan dengan analisis statistika lainnya adalah sensor. Tujuan analisis ketahanan adalah untuk mengetahui hubungan antara waktu kejadian dan peubah penjelas yang terukur pada saat dilakukan penelitian. Metode Regresi Cox merupakan suatu metode yang umum digunakan untuk data ketahanan dibanding metode lainnya. Pada model Cox Proportional Hazard (PH) diasumsikan

variabel-variabel prediktornya memenuhi asumsi Risiko PH. Sering ditemukan tidak semua variabel prediktor memenuhi asumsi PH. Karena itu, diperlukan metode lain yang dapat digunakan untuk menganalisis data survival tersebut. Apabila suatu individu mengalami kejadian yang sama lebih dari satu kali, kejadian ini disebut kejadian berulang. Kejadian berulang terbagi menjadi dua, yaitu kejadian berulang identik dan tidak identik.

TINJAUAN PUSTAKA

1.1 Analisis Ketahanan

Analisis ketahanan merupakan kumpulan prosedur statistik yang digunakan untuk menganalisis data. Analisis ini bertujuan untuk mengetahui variabel yang mempengaruhi kejadian tertentu. Dalam analisis ketahanan, waktu suatu objek tetap bertahan selama periode pengamatan atau sampai terjadinya suatu kejadian disebut waktu ketahanan (*survival time*). Data yang digunakan dalam analisis ketahanan hidup dapat berupa data terobservasi ataupun data tersensor. Dalam analisis ketahanan, ada tiga jenis tipe penyensoran yaitu penyensoran kanan, penyensoran kiri, dan penyensoran selang.

1.2 Fungsi-fungsi dalam Analisis Ketahanan

1. Fungsi Ketahanan

Fungsi ketahanan ($S(t)$) digunakan untuk menggambarkan fenomena waktu kejadian.

Fungsi ketahanan secara matematis dinyatakan sebagai berikut:

$$S(t) = P(T > t)$$

2. Fungsi Kegagalan

Fungsi kegagalan didefinisikan sebagai peluang suatu individu untuk mengalami kejadian dalam interval waktu dari t sampai $t+\Delta t$.

Secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{p(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} \right]$$

2.3 Model Cox Proportional Hazard

Model Cox Proportional Hazard merupakan salah satu model yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara waktu ketahanan dengan variabel-variabel yang diduga mempengaruhi waktu ketahanan. Model ini berdistribusi semi parametrik dan memiliki asumsi proportional hazard yaitu asumsi yang menyatakan bahwa fungsi kegagalan dari individu yang berlainan adalah proportional atau rasio dari fungsi kegagalan dua individu yang berlainan adalah konstan.

Model Cox Proportional Hazard dapat dituliskan sebagai berikut:

$$h(t, X) = h_0(t) \exp[\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_3 x_{3i}]$$

dengan:

$h(t, X)$: Fungsi kegagalan individu ke- i

$h_0(t)$: Fungsi kegagalan dasar

x_{ji} : Nilai variabel ke- j dari individu ke- i , dengan $j=1, 2, \dots, p$ dan $i=1, 2, \dots, n$

β_j : Koefisien regresi ke- j , dengan $j=1, 2, \dots, p$

Model Cox Proportional Hazard dapat memberikan informasi yang berguna berupa Hazard Ratio (HR) yang tidak bergantung pada $h_0(t)$. Hazard Ratio (HR) merupakan rasio dari tingkat hazard satu individu dengan tingkat hazard dari individu lain.

$$HR = \frac{h_A(t, X^*)}{h_B(t, X)} = \frac{h_0(t) \exp[\sum_{y=1}^p \beta_y X_y^*]}{h_0(t) \exp[\sum_{y=1}^p \beta_y X_y]}$$

Bila hazard rasio konstan sepanjang waktu, maka dapat dikatakan bahwa X_1, X_2, \dots, X_p memenuhi asumsi proportional hazard.

2.4 Kurva Kaplan-Meier dan Pengujian Asumsi Proportional Hazard

Kurva *Kaplan-Meier* merupakan kurva yang menggambarkan hubungan antara estimasi *survivor function* dengan waktu *survival* [10]. Jika probabilitas dari *Kaplan-Meier* dinotasikan dengan $S(t_{(j)})$ maka persamaan umum *Kaplan-Meier* adalah sebagai berikut

$$\hat{S}(t_{(j)}) = \prod_{i=1}^j \hat{Pr}(T > t_{(i)} | T \geq t_{(i)})$$

Asumsi *proportional hazard* (PH) adalah suatu keadaan dimana *hazard ratio* bersifat konstan terhadap waktu [10]. Terdapat tiga pendekatan yang dapat digunakan untuk menguji asumsi *proportional hazard* yaitu pendekatan grafik, pendekatan *goodness of fit* dan pendekatan variabel *time dependent*. Berikut ini merupakan penjelasan mengenai pengujian asumsi *proportional hazard* dengan menggunakan ketiga pendekatan tersebut.

1. Pendekatan Grafik

Terdapat dua jenis grafik yang dapat digunakan dalam pengujian asumsi *proportional hazard* yaitu grafik plot $\ln(-\ln S(t))$ terhadap waktu *survival* dan plot Kaplan-Meier pengamatan (*observed*) dan prediksi (*expected*) dari model *Cox proportional hazard*. Berikut ini adalah ilustrasi gambar plot $\ln(-\ln S(t))$ dan plot *observed versus expected* kurva survival.

2. Pendekatan Goodness of Fit

Goodness of fit merupakan salah satu pendekatan secara statistika. Langkah-langkah pengujian asumsi *proportional hazard* dengan uji *goodness of fit* adalah sebagai berikut

- a. Menggunakan model *Cox proportional hazard* untuk mendapatkan residual *schoenfeld* untuk setiap variabel prediktor. Residual *schoenfeld* ada pada setiap variabel prediktor pada model dan pada setiap objek yang mengalami *event*.
- b. Membuat variabel *rank* waktu *survival* yang telah diurutkan berdasarkan waktu *survival* mulai dari individu yang mengalami *event* pertama kali.
- c. Menguji korelasi antara variabel residual *schoenfeld* dan *rank* waktu *survival*.

2.5 Kejadian Berulang

Jika suatu individu mengalami kejadian yang sama lebih dari satu kali disebut kejadian berulang (*Recurrent Event*). Ada dua macam kejadian berulang, yaitu kejadian berulang identik dan kejadian berulang tidak identik.

- a. Kejadian berulang identik

Apabila kejadian berulang yang terjadi tidak menyebabkan efek perbedaan tertentu maka kejadian berulang tersebut dikatakan identik.

- b. Kejadian berulang tidak identik

Apabila kejadian berulang yang terjadi menyebabkan efek perbedaan tertentu maka kejadian berulang tersebut dikatakan tidak identik. Pada kejadian berulang tidak identik.

PEMBAHASAN

Deskripsi data

Data peminjaman buku pada tahun 2018 di UPT. Perpustakaan Universitas Syiah Kuala dengan sampel 21 mahasiswa dari jurusan Statistika FMIPA angkatan 2017 Universitas Syiah Kuala dengan pengambilan sampel acak. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan mahasiswa yang meminjam buku perpustakaan berdasarkan faktor yang terkait. Metode penelitian yang digunakan ialah metode kejadian berulang (*recurrent event*) dengan model *cox proportional hazard*.

Terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi ketahanan batas waktu peminjaman buku mahasiswa di perpustakaan yaitu jenis kelamin, daya ingat, keberadaan buku dan banyaknya organisasi yang diikuti. Jenis kelamin, daya ingat, keberadaan buku dan banyaknya organisasi yang diikuti merupakan faktor tersebut sangat signifikan mempengaruhi ketahanan batas waktu peminjaman buku mahasiswa di perpustakaan. Metode analisis yang digunakan untuk kejadian berulang tidak identik. Berikut ringkasan deskriptif data yang digunakan,

Tabel 1. Ringkasan deskriptif dataset daftar peminjaman buku

| Variabel | Mean | Median | Stdev | Min. | Max. |
|------------------------|--------|--------|-------|------|------|
| Id | 11 | 11 | | 1 | 21 |
| Start | 10.9 | 10 | 4.381 | 5 | 17 |
| Stop | 13.05 | 15 | 3.866 | 8 | 18 |
| Status | 0.7143 | 1 | | 0 | 1 |
| Daya ingat | 0.7143 | 1 | | 0 | 1 |
| Organisasi | 0.4762 | 0 | | 0 | 2 |
| Treatment (jenis buku) | 1.476 | 1 | | 1 | 2 |
| Sex | 1.81 | 2 | | 1 | 2 |
| Event | 2.286 | 2 | | 1 | 4 |

(No. Observasi = 21)

Keterangan Variabel :

- Id : Identitas mahasiswa
 Start : Waktu awal peminjaman buku
 Stop : Waktu akhir peminjaman buku
 Treatment : Kategori buku yang dipinjam, 1= buku kalkulus, 2 = buku analisis regresi
 Status : 1 = tepat waktu pengembalian, 0 = terlambat waktu pengembalian (tersensor)
 Daya Ingat : 1 = ingat mengembalikan buku, 0 = tidak ingat mengembalikan buku
 Organisasi : Banyaknya mengikuti organisasi
 Sex : Jenis kelamin, 1= laki-laki, 2 = perempuan
 Event : *Recurrent Event* (kejadian berulang) peminjaman buku

142

Model Pendekatan Counting Proses dan PWP-GT

Berikut model CP yang dihasilkan:

$$h(t, X) = h_0(t) \exp[\beta_1 \text{ daya ingat} + \beta_2 \text{ organisasi} + \beta_3 \text{ jenis buku} + \beta_4 \text{ sex} + \beta_5 \text{ event}]$$

$$h(t, X) = h_0(t) \exp[(1.854e + 01) \text{ daya ingat} + (3.240e - 01) \text{ organisasi} + (-2.995e - 01) \text{ jenis buku} + (-1.261e + 00) \text{ sex} + (-8.102e + 01) \text{ event}]$$

Berikut model PWP-GT yang dihasilkan:

$$h(t, X) = h_0(t) \exp[\beta_1 \text{ daya ingat} + \beta_2 \text{ organisasi} + \beta_3 \text{ jenis buku} + \beta_4 \text{ sex} + \beta_5 \text{ event}]$$

$$h(t, X) = h_0(t) \exp[(2.147e + 01) \text{daya ingat} \\ + (-4.777e - 02) \text{organisasi} \\ + (-1.8215e - 01) \text{jenis buku} + (-5.772e - 01) \text{sex} \\ + (1.020e - 01) \text{event}]$$

Setelah didapatkan kedua model tersebut, kita dapat membandingkan model mana yang lebih baik dengan menggunakan perhitungan AIC, sebagai berikut:

$$\text{Model CP} = -2\text{Ln}(10.97) + 2(21) = 37.2097$$

$$\text{Model PWP-GT} = -2\text{Ln}(22.55) + 2(21) = 35.7685$$

Dari perhitungan AIC diatas kita ketahui bahwa semakin kecil nilai AIC maka semakin baik model tersebut, sehingga dapat disimpulkan bahwa model model Prentice William Petersom-Gap Time (PWP-GT) lebih baik daripada model pendekatan Counting Proses.

Pengujian Asumsi

Setelah mendapatkan model terbaik, maka dilakukan pengujian asumsi. Berikut hipotesis pengujian yang dilakukan:

H_0 = Asumsi PH terpenuhi

H_1 = Asumsi PH tidak terpenuhi

Tabel 2. Uji asumsi dengan Alpha = 0.1

| Variabel | Chi-Square | P-Value | Keputusan |
|------------------------|------------|---------|-------------------|
| Daya ingat | 5.03e-09 | 1.000 | Tidak tolak H_0 |
| Organisasi | 6.99e-02 | 0.792 | Tidak tolak H_0 |
| Treatment (Jenis buku) | 6.44e-02 | 0.800 | Tidak tolak H_0 |
| Sex | 3.91e-01 | 0.532 | Tidak tolak H_0 |
| Event | 5.41e-02 | 0.816 | Tidak tolak H_0 |

Tabel 2 menunjukkan hasil pengujian asumsi pada data. Berdasarkan tabel dapat diketahui bahwa semua variabel mempunyai nilai *p-value* lebih dari 0.1 keputusan tidak tolak H_0 sehingga asumsi terpenuhi.

Tabel 3. Uji asumsi dengan Alpha = 0.01

| Variabel | Chi-Square | P-Value | Keputusan |
|------------------------|------------|---------|-------------------|
| Daya ingat | 5.03e-09 | 1.000 | Tidak tolak H_0 |
| Organisasi | 6.99e-02 | 0.792 | Tidak tolak H_0 |
| Treatment (Jenis buku) | 6.44e-02 | 0.800 | Tidak tolak H_0 |
| Sex | 3.91e-01 | 0.532 | Tidak tolak H_0 |
| Event | 5.41e-02 | 0.816 | Tidak tolak H_0 |

Tabel 3 menunjukkan hasil pengujian asumsi pada data. Berdasarkan tabel dapat diketahui bahwa semua variabel mempunyai nilai *p-value* lebih dari 0.01 keputusan tidak tolak H_0 sehingga asumsi terpenuhi.

Tabel 4. Uji asumsi dengan Alpha = 0.5

| Variabel | Chi-Square | P-Value | Keputusan |
|------------------------|------------|---------|-------------------|
| Daya ingat | 5.03e-09 | 1.000 | Tidak tolak H_0 |
| Organisasi | 6.99e-02 | 0.792 | Tidak tolak H_0 |
| Treatment (Jenis buku) | 6.44e-02 | 0.800 | Tidak tolak H_0 |
| Sex | 3.91e-01 | 0.532 | Tidak tolak H_0 |
| Event | 5.41e-02 | 0.816 | Tidak tolak H_0 |

Tabel 4 menunjukkan hasil pengujian asumsi pada data. Berdasarkan tabel dapat diketahui bahwa semua variabel mempunyai nilai *p-value* lebih dari 0.01 keputusan tidak tolak H_0 sehingga asumsi terpenuhi.

Tabel 5. Uji asumsi dengan Alpha = 0.05

| Variabel | Chi-Square | P-Value | Keputusan |
|------------------------|------------|---------|-------------------|
| Daya ingat | 5.03e-09 | 1.000 | Tidak tolak H_0 |
| Organisasi | 6.99e-02 | 0.792 | Tidak tolak H_0 |
| Treatment (Jenis buku) | 6.44e-02 | 0.800 | Tidak tolak H_0 |
| Sex | 3.91e-01 | 0.532 | Tidak tolak H_0 |
| Event | 5.41e-02 | 0.816 | Tidak tolak H_0 |

Tabel 5 menunjukkan hasil pengujian asumsi pada data. Berdasarkan tabel dapat diketahui bahwa semua variabel mempunyai nilai *p-value* lebih dari 0.05 keputusan tidak tolak H_0 sehingga asumsi terpenuhi.

Pengujian Signifikasi

a) Uji Serempak

H_0 = Secara bersama-sama tidak terdapat faktor-faktor yang berpengaruh secara signifikan terhadap lama waktu pengembalian buku.

Tabel 6. Uji signifikasi dengan serempak

| Model | df | G | no.event | p |
|--------------------------|----|-------|----------|-----------|
| Lama peminjaman buku (T) | 5 | 22.55 | 15 | 0.0004117 |

Berdasarkan tabel 6, dapat diketahui nilai *p-value* sebesar 0.0004117, dengan menggunakan $\alpha = 0.1$ ($p\text{-value} = 0.0004117 < \alpha$) maka keputusan tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan jika secara bersama-sama terdapat faktor-faktor yang berpengaruh secara signifikan terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.01$

($p\text{-value} = 0.0004117 < \alpha$) maka keputusan tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan jika secara bersama-sama terdapat faktor-faktor yang berpengaruh secara signifikan terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.5$ ($p\text{-value} = 0.0004117 < \alpha$) maka keputusan tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan jika secara bersama-sama terdapat faktor-faktor yang berpengaruh secara signifikan terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.05$ ($p\text{-value} = 0.05189 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan jika secara bersama-sama tidak terdapat faktor-faktor yang berpengaruh secara signifikan terhadap lama pengembalian buku.

b) *Uji Parsial*

a. Variabel Daya ingat

H_0 = daya ingat tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

H_1 = daya ingat berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

Tabel 7. Uji signifikansi dengan parsial pada variabel daya ingat

| Model | P |
|------------|-------|
| Daya ingat | 0.998 |

Berdasarkan tabel 7, dapat diketahui nilai $p\text{-value}$ sebesar 0.998, dengan menggunakan $\alpha = 0.1$ ($p\text{-value} = 0.998 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan daya ingat tidak berpengaruh secara signifikan terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.01$ ($p\text{-value} = 0.998 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan daya ingat tidak berpengaruh secara signifikan terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.5$ ($p\text{-value} = 0.998 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan daya ingat tidak berpengaruh secara signifikan terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.05$ ($p\text{-value} = 0.998 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan daya ingat tidak berpengaruh secara signifikan terhadap lama pengembalian buku.

b. Variabel Organisasi

H_0 = organisasi tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

H_1 = organisasi berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

Tabel 8. Uji signifikansi dengan parsial pada variabel daya ingat

| Model | p |
|------------|-------|
| Organisasi | 0.898 |

Berdasarkan tabel 8, dapat diketahui nilai p -value sebesar 0.898, dengan menggunakan $\alpha = 0.1$ (p -value = 0.898 > α) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan organisasi tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.01$ (p -value = 0.898 > α) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan organisasi tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.5$ (p -value = 0.898 > α) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan organisasi tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.05$ (p -value = 0.898 > α) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan organisasi tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku.

c. Variabel Jenis Buku (*Treatment*)

H_0 = jenis buku tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

H_1 = jenis buku berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

Tabel 9. Uji signifikansi dengan parsial pada variabel daya ingat

| Model | P |
|------------|-------|
| Jenis buku | 0.737 |

146

Berdasarkan tabel 9, dapat diketahui nilai p -value sebesar 0.737, dengan menggunakan $\alpha = 0.1$ (p -value = 0.737 > α) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan jenis buku tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.01$ (p -value = 0.737 > α) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan jenis buku tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.5$ (p -value = 0.737 > α) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan jenis buku tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.05$ (p -value = 0.737 > α) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan jenis buku tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku.

d. Variabel *Sex*

H_0 = *sex* tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

H_1 = *sex* berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

Tabel 10. Uji signifikansi dengan parsial pada variabel daya ingat

| Model | p |
|------------|-------|
| <i>Sex</i> | 0.399 |

Berdasarkan tabel 10, dapat diketahui nilai p -value sebesar 0.399, dengan menggunakan $\alpha = 0.1$ (p -value = 0.399 > α) maka keputusan tidak dapat tolak H_0

sehingga dapat disimpulkan sex tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.01$ ($p\text{-value} = 0.399 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan sex tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.5$ ($p\text{-value} = 0.399 < \alpha$) maka keputusan tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan sex berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.05$ ($p\text{-value} = 0.399 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan sex tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku.

e. Variabel *Event*

$H_0 = \text{event}$ tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

$H_1 = \text{event}$ berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

Tabel 11. Uji signifikansi dengan parsial pada variabel daya ingat

| Model | p |
|--------------|-------|
| <i>Event</i> | 0.821 |

Berdasarkan tabel 11, dapat diketahui nilai $p\text{-value}$ sebesar 0.821, dengan menggunakan $\alpha = 0.1$ ($p\text{-value} = 0.821 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan event tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.01$ ($p\text{-value} = 0.821 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan event tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.5$ ($p\text{-value} = 0.821 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan event tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Dengan menggunakan $\alpha = 0.05$ ($p\text{-value} = 0.821 > \alpha$) maka keputusan tidak dapat tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan event tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku

KESIMPULAN

Untuk analisa survival pada kejadian lama waktu pengembalian buku mahasiswa (*recurrent event*) didapat dua model yaitu model *Counting Process* dan PWP-GT yang kemudian dilakukan uji kecocokan model untuk membandingkan kedua model tersebut, diperoleh model PWP-GT adalah model terbaik dengan nilai AIC sebesar 35.7685.

Pengujian asumsi menggunakan *recurrent event* memberikan kesimpulan bahwa variabel daya ingat pengembalian, banyaknya organisasi yang diikuti, pengkategorian jenis buku, jenis kelamin mahasiswa yang meminjam dan kejadian berulang dalam peminjaman buku memenuhi asumsi yang berarti probabilitas lama waktu pengembalian buku bersifat konstan sepanjang waktu jika ditinjau dari faktor daya

ingat pengembalian, banyaknya organisasi yang diikuti, pengkategorian jenis buku, jenis kelamin mahasiswa yang meminjam dan kejadian berulang dalam peminjaman buku. Dengan menggunakan pendekatan *goodness of fit* untuk $\alpha = 0.1; 0.01; 0.5; 0.05$ didapatkan bahwa variabel daya ingat pengembalian, banyaknya organisasi yang diikuti, pengkategorian jenis buku dan kejadian berulang tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku. Untuk variabel jenis kelamin mahasiswa yang meminjam untuk $\alpha = 0.1; 0.01; 0.05$ didapat bahwa variabel jenis kelamin mahasiswa tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku, sedangkan untuk $\alpha = 0.05$, didapat bahwa variabel jenis kelamin mahasiswa tidak berpengaruh terhadap lama pengembalian buku.

DAFTAR PUSTAKA

- Guo, S. 2010. *Survival Analysis*. Oxford University Press, Inc. New York.
- Hosmer, D.W. dan Lemeshow, S. 2008. *Applied Survival Analysis, Regression Modelling of Time to Event Data*. Willey. New Jersey.
- Istiana, Purwani. 2014. *Layanan Perpustakaan*. Yogyakarta: Ombak.
- Lee, E.T. dan Wang, J.W. 2003. *Statistical method for Survival Data Analysis*. Michigan University. Michigan.
- Susanto, Ari. 2016. *Persepsi Mahasiswa Tentang Efektivitas Penerapan Denda Keterlambatan Pengembalian Buku dalam Kebijakan Peminjaman dan Pengembalian Koleksi di Perpustakaan UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta*. Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Fakultas Adab dan Ilmu Budaya UIN Sunan Kalijaga.
- Yusuf, Taslimah. 1996. *Manajemen Perpustakaan Umum*. Jakarta: Universitas Terbuka.



OPERATOR-SM PADA RUANG BARISAN SELISIH

(SM-OPERATOR ON DIFFERENCE SEQUENCE SPACE)

Muslim Ansori *
Universitas Lampung

Suharsono S
Universitas Lampung

ABSTRACT: Let be given some bounded difference sequence spaces. Further, it is constructed some mapping on the sequence spaces via infinite matrix operator with special norm. Then we investigate principal characteristic of the operator and some examples will be given.

KEYWORDS: Difference Sequence, Operator, Infinite Matrix.

* Corresponding Author: Jurusan Matematika FMIPA Jln Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung; Email: muslim.ansori@fmipa.unila.ac.id

PENDAHULUAN

Pada tulisan ini akan dikaji apa yang disebut operator pada ruang barisan selisih terbatas. Sifat-sifat dasar operator akan disajikan sebagai dasar untuk pengembangan lanjutan, yang sebelumnya sebagian sudah disajikan di dalam beberapa tulisan antara lain (Ansori dan Suharsono,2015) dengan mengkonstruksikan operator-SM pada ruang barisan l_2 . Selanjutnya dengan menggunakan ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$ (Et Colak,2000) dan juga dibahas dalam (Suharna,2013), akan dikonstruksikan kembali operator-SM tersebut dan diselidiki sifat-sifat dasarnya dengan memanfaatkan norma barisan selisih yang bersesuaian.

BAHAN DAN METODE

Operator A dikonstruksikan dari ruang barisan $l_2(\Delta)$ ke ruang barisan $l_2(\Delta)$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$. Selanjutnya, dikonstruksikan norma operator A . Norma operator tersebut tidak bergantung pada pemilihan basis. Jika pendefinisian operator dapat dilakukan maka akan diselidiki apakah koleksi semua operator tersebut membentuk ruang Banach. Sebagai aplikasi, operator A direpresentasikan sebagai matriks takhingga yang dikerjakan pada barisan barisan $l_2(\Delta)$ ke ruang barisan $l_2(\Delta)$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Ruang Barisan l_2

Sebelumnya perhatikan bahwa untuk $(R, \|\cdot\|)$ dengan $\|x\| = |x|$, $\forall x \in R$,

merupakan ruang Banach, artinya untuk setiap barisan Cauchy $\{x^n\} \subset R$, selalu konvergen, yaitu untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan m, n dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\| < \varepsilon$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ruang barisan l_2 yang didefinisikan

$$l_2 = \left\{ \tilde{x} = (x_k) \in R : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\},$$

dengan norm $\|\tilde{x}\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$, merupakan ruang Banach.

Ruang Barisan Selisih $l_2(\Delta)$

Ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$ didefinisikan sebagai

$$l_2(\Delta) = \{ \tilde{x} = (x_k) : \Delta \tilde{x} \in l_2 \}$$

terhadap norma

$$\|\tilde{x}\|_{(\Delta, 2)} = |x_1| + \|\Delta \tilde{x}\|_2$$

dengan rumus umum barisan selisih:

$$\Delta \tilde{x} = \{\Delta x_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^1 (-1)^i \binom{1}{i} x_{k+1-i} \right\}, \text{ atau } \Delta x_k = (x_{k+1} - x_k)$$

Langkah pertama akan ditunjukkan ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$ merupakan ruang linier, sebagai berikut :

untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_2(\Delta) \Leftrightarrow \Delta \tilde{x}, \Delta \tilde{y} \in l_2$

$$\Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

dan

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1} - y_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Diperoleh,

$$\Delta (\tilde{x} + \tilde{y}) = \Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{y} \in l_2$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k - \Delta y_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k) + (y_{k+1} - y_k)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1} - y_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \end{aligned}$$

Jadi $\tilde{x} + \tilde{y} \in l_2(\Delta)$ (4.1.1.a)

Untuk setiap skalar α dan $\tilde{x} \in l_2(\Delta)$ diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha\tilde{x}) &= \{\Delta\alpha x_k\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha(x_{k+1} - x_k)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^2 |x_{k+1} - x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \dots\dots\dots (4.1.1. b) \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.1.1.a) dan (4.1.1.b) terbukti bahwa $l_2(\Delta)$ merupakan ruang linier ■

Langkah kedua akan ditunjukkan ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$ merupakan ruang bernorm terhadap norm $\|\cdot\|_{(\Delta,2)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_2$ sebagai berikut :

I. Untuk setiap $\tilde{x} \in l_2(\Delta)$

$$\Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in l_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}\|_{(\Delta,2)} &= |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_2 = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_2 \\ &\Leftrightarrow |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_1| = 0 \text{ dan } \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ untuk setiap } k \\ &\Leftrightarrow |x_1| = 0 \text{ dan } |x_2 - x_1| = 0, |x_3 - x_2| = 0, \dots \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 - x_1 = 0, x_3 - x_2 = 0, \dots \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3, \dots = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0} \end{aligned}$$

152

II. Untuk setiap a skalar dan $\tilde{x} \in l_2(\Delta)$

$$\begin{aligned} \|a\tilde{x}\|_{(\Delta,2)} &= |ax_1| + \|\Delta a\tilde{x}\|_2 \\ &= |ax_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a(x_{k+1} - x_k)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |a||x_1| + |a| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |a| \left(|x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= |a|(|x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_2) = |a|\|\tilde{x}\|_{(\Delta,2)} \end{aligned}$$

III. Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_2(\Delta)$

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{(\Delta,2)} &= |x_1 + y_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k + y_k)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |x_1| + |y_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + |y_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |x_1| + \|\Delta x_k\|_2 + |y_1| + \|\Delta y_k\|_2 \\
&= \|\tilde{x}\|_{(\Delta,2)} + \|\tilde{y}\|_{(\Delta,2)}
\end{aligned}$$

Berdasarkan I,II,III benar bahwa $l_2(\Delta)$ merupakan ruang bernorm ■

Langkah ketiga akan ditunjukkan ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$ merupakan ruang bernorm yang lengkap, sebagai berikut:

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} = \{\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots\} \subset l_2(\Delta)$ dengan,

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{x}^{(1)} &= (\Delta x_1^{(1)}, \Delta x_2^{(1)}, \Delta x_3^{(1)}, \dots, \Delta x_k^{(1)}, \dots) \\
\Delta \tilde{x}^{(2)} &= (\Delta x_1^{(2)}, \Delta x_2^{(2)}, \Delta x_3^{(2)}, \dots, \Delta x_k^{(2)}, \dots) \\
\Delta \tilde{x}^{(3)} &= (\Delta x_1^{(3)}, \Delta x_2^{(3)}, \Delta x_3^{(3)}, \dots, \Delta x_k^{(3)}, \dots) \\
&\vdots \\
\Delta \tilde{x}^{(n)} &= (\Delta x_1^{(n)}, \Delta x_2^{(n)}, \Delta x_3^{(n)}, \dots, \Delta x_k^{(n)}, \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

diperoleh

153

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{x}^{(n)} &= \{\Delta x_k^{(n)}\} = (\Delta x_1^{(n)}, \Delta x_2^{(n)}, \Delta x_3^{(n)}, \dots, \Delta x_k^{(n)}, \dots) \\
\Delta \tilde{x}^{(m)} &= \{\Delta x_k^{(m)}\} = (\Delta x_1^{(m)}, \Delta x_2^{(m)}, \Delta x_3^{(m)}, \dots, \Delta x_k^{(m)}, \dots)
\end{aligned}$$

dengan $\Delta \tilde{x}^{(m)}, \Delta \tilde{x}^{(n)} \in l_2(\Delta)$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku:

$$\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta,2)} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x_1^{(m)} - x_1^{(n)}| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \dots \dots \dots (4.1.2.a)$$

Dilain pihak,

$$\begin{aligned}
\Delta(\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}) &= \Delta(x_1^{(m)} - x_1^{(n)}, x_2^{(m)} - x_2^{(n)}, x_3^{(m)} - x_3^{(n)} \dots x_k^{(m)} - x_k^{(n)}, \dots) \\
&= (x_2^{(m)} - x_2^{(n)}) - (x_1^{(m)} - x_1^{(n)}), (x_3^{(m)} - x_3^{(n)}) - (x_2^{(m)} - x_2^{(n)}), \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \left(x_{k+1}^{(m)} - x_{k+1}^{(n)} \right) - \left(x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \right) \right\} \\
 &= \left\{ \left(x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)} \right) - \left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} \right) \right\} \dots \dots \dots (4.1.2.b)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan (4.1.2.a) dan (4.1.2.b) diperoleh

$$\left| x_1^{(m)} - x_1^{(n)} \right| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)} \right) - \left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} \right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

untuk setiap $m, n \geq n_0$, yang berakibat

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \left| x_1^{(m)} - x_1^{(n)} \right| = 0$$

dan

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)} \right) - \left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} \right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0$$

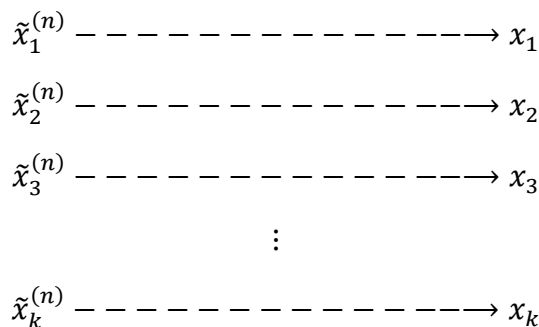
Oleh karena itu, untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \left| \left(x_{k+1}^{(m)} - x_{k+1}^{(n)} \right) - \left(x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \right) \right| = 0$$

atau

$$\begin{aligned}
 \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left| \tilde{x}_1^{(m)} - \tilde{x}_1^{(n)} \right| = 0, \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left| \tilde{x}_2^{(m)} - \tilde{x}_2^{(n)} \right| = 0, \\
 \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left| \tilde{x}_3^{(m)} - \tilde{x}_3^{(n)} \right| = 0, \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left| \tilde{x}_4^{(m)} - \tilde{x}_4^{(n)} \right| = 0, \dots \dots
 \end{aligned}$$

Jadi, barisan $\{\tilde{x}_k^{(n)}\}$ merupakan barisan Cauchy di \mathbb{R} . Karena \mathbb{R} lengkap, maka barisan $\{\tilde{x}_k^{(n)}\}$ konvergen. Dibentuk



$$\begin{array}{c} \vdots \\ \{\tilde{x}^{(n)}\} = \{\tilde{x}_k^{(n)}\} \text{-----} \rightarrow \{x_k\} = \tilde{x} \end{array}$$

Jadi barisan $\{\tilde{x}^{(n)}\}$ konvergen ke \tilde{x} . Sekarang tinggal menunjukkan bahwa $\tilde{x} \in l_2(\Delta)$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \|\Delta\tilde{x}\|_2 &= \|\Delta\tilde{x} - \Delta\tilde{x}^{(n)} + \Delta\tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta,2)} \\ &\leq \|\Delta\tilde{x} - \Delta\tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta,2)} + \|\Delta\tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta,2)} < \infty. \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\|\tilde{x}\|_{(\Delta,2)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_2 < \infty.$$

Berakibat $\tilde{x} \in l_2(\Delta)$.

Oleh karena itu, setiap barisan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_2(\Delta)$ konvergen ke $\tilde{x} \in l_2(\Delta)$. Dengan kata lain terbukti bahwa $l_2(\Delta)$ lengkap. Berdasarkan langkah pertama, langkah kedua dan langkah ketiga terbukti bahwa $l_2(\Delta)$ merupakan ruang Banach. ■

Operator-SM Pada Ruang Barisan Selisih

Ruang barisan $l_2(\Delta)$ merupakan ruang Banach dengan ruang dual $(l_2(\Delta))^* = \{x^*: l_2(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}\}$ yaitu koleksi semua fungsional pada $l_2(\Delta)$ yang bersifat linear dan kontinu.

Untuk sebarang $x^* \in (l_2(\Delta))^*$ dan $x \in l_2(\Delta)$, penulisan $\langle x, x^* \rangle$ dimaksudkan sebagai fungsional x^* pada x atau $x^*(x)$. Barisan vektor $\{e_n\} \subset l_2(\Delta)$ dinamakan basis pada $l_2(\Delta)$ jika untuk setiap vektor $x \in l_2(\Delta)$ terdapat barisan skalar yang tunggal $\{\alpha_n\}$ sehingga

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Barisan $\{e_n^*\} \in (l_2(\Delta))^*$ dengan $\|e_n^*\| = 1$ untuk setiap n dikatakan biortonormal terhadap basis $\{e_n\} \subset l_2(\Delta)$ jika

$$\langle e_m, e_n^* \rangle = \delta_{mn}$$

dengan $\delta_{mn} = 1$ untuk $m = n$ dan $\delta_{mn} = 0$ untuk $m \neq n$. Selanjutnya, pasangan $\{\{e_n\}, \{e_n^*\}\}$ disebut sistem biortonormal pada $l_2(\Delta)$. Jika pasangan $\{\{e_n\}, \{e_n^*\}\}$ merupakan sistem biortonormal pada $l_2(\Delta)$ maka

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

dengan $\langle x, e_n^* \rangle = \alpha_n$.

Jika $A \in \mathcal{L}_C(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ maka operator $A^* \in \mathcal{L}_C((l_2(\Delta))^*, (l_2(\Delta))^*)$ disebut operator pendamping (*adjoint operator*) A jika dan hanya jika untuk setiap $x \in l_2(\Delta)$ dan $y^* \in (l_2(\Delta))^*$, berlaku

$$\langle A(x), y^* \rangle = \langle x, A^*(y^*) \rangle$$

Jadi, jika $\{e_n\} \subset l_2(\Delta)$ dan $\{d_m^*\} \in (l_2(\Delta))^*$ diperoleh

$$\langle A(e_n), d_m^* \rangle = \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle$$

Jika $\{e_n\}, \{f_n\}, \{d_m^*\} \subset l_2(\Delta)$ basis pada $l_2(\Delta)$, maka untuk setiap $A \in \mathcal{L}_C(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ berlaku

$$A^*(d_m^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(e_n), d_m^* \rangle e_n^*$$

(a)

dan

$$A^*(d_m^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, A^*(d_m^*) \rangle f_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(f_n), d_m^* \rangle f_n^*$$

(b)

Berdasarkan persamaan (a) dan (b) diperoleh

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^*\| = \sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(f_k), d_m^* \rangle f_k^*\|$$

(c)

Berdasarkan persamaan (a),(b) dan (c) didefinisikan pengertian operator dari ruang barisan $l_2(\Delta)$ ke ruang barisan $l_2(\Delta)$ sebagai berikut:

Definisi 1.1 Operator $A \in \mathcal{L}_C(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ dinamakan operator-SM jika

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^*\| < \infty$$

dengan $\{e_n\}, \{d_m^*\} \subset l_2(\Delta)$ basis pada $l_2(\Delta)$.

Mudah dipahami bahwa bilangan $\|A\|$ dengan

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^*\| < \infty$$

tidak bergantung pada pemilihan basis $\{e_n\}$ pada $l_2(\Delta)$.

Selanjutnya, notasi $SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ menyatakan koleksi semua operator-SM dari ruang barisan $l_2(\Delta)$ ke ruang barisan $l_2(\Delta)$.

Teorema 1.2 Untuk setiap $A \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ berlaku

- (i) $\|A\| \leq \|A\|_{SM}$
- (ii) $SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ merupakan ruang Banach terhadap norma $\|\cdot\|_{SM}$
- (iii) Jika $A \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ maka A operator kompak.

Bukti:

- (i) Diambil sebarang basis $\{e_n\}, \{d_m\} \subset l_2(\Delta)$ dan $x \in l_2(\Delta)$, maka berdasarkan (a),(b) dan (c) diperoleh

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \|\sum_{m=1}^{\infty} \langle A(x), d_m^* \rangle d_m\| \\ &= \|\sum_{m=1}^{\infty} \langle x, A^*(d_m^*) \rangle d_m\| \\ &\leq \|x\| \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(d_m^*)\| \\ &= \|x\| \|\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^*\| \\ &= \|x\| \|A\|_{SM} \end{aligned}$$

157

yang berakibat $\|A\| \leq \|A\|_{SM}$.

- (ii) Pertama ditunjukkan bahwa $SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|\cdot\|_{SM}$ sebab:

- a) Untuk setiap $A \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^*\| \geq 0$$

dan

$$\begin{aligned} \|A\|_{SM} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^*\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* = A^*(d_m^*) = \theta \quad (\text{untuk setiap} \end{aligned}$$

m)

$$\Leftrightarrow A^* = O \text{ (operator nol)}$$

$$\Leftrightarrow A = O \text{ (operator nol)}$$

- b) Untuk setiap $A \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ dan skalar α , diperoleh

$$\|\alpha A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} \langle \alpha A(e_k), d_m^* \rangle e_k^*\|$$

$$\begin{aligned}
&= |\alpha| \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\
&= |\alpha| \|A\|_{SM}
\end{aligned}$$

c) Jika diberikan $A_1, A_2 \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ maka

$$\begin{aligned}
\|A_1 + A_2\|_{SM} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((A_1 + A_2)(e_k), d_m^*) e_k^* \right\| \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((A_1(e_k) + A_2(e_k)), d_m^*) e_k^* \right\| \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (A_1(e_k), d_m^*) e_k^* + \sum_{k=1}^{\infty} (A_2(e_k), d_m^*) e_k^* \right\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (A_1(e_k), d_m^*) e_k^* \right\| + \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (A_2(e_k), d_m^*) e_k^* \right\|
\end{aligned}$$

Dengan kata lain,

$$\|A_1 + A_2\|_{SM} \leq \|A_1\|_{SM} + \|A_2\|_{SM}.$$

Tinggal menunjukkan kelengkapan ruang $SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ sebagai berikut: Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$. Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sehingga untuk setiap bilangan bulat positif $i, j \geq n_0$, berlaku

$$\|A_i - A_j\|_{SM} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Akan dibuktikan bahwa terdapat $A \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ sehingga

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|A_i - A\|_{SM} = 0.$$

Karena

$$\|A_i - A_j\|_{\mathcal{L}_C(l_2, l_2)} \leq \|A_i - A_j\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap $A_i, A_j \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ dengan $i, j \geq n_0$, maka barisan $\{A_i\}$ juga merupakan barisan Cauchy di dalam $\mathcal{L}_C(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$. Karena $\mathcal{L}_C(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ ruang lengkap maka terdapat $A \in \mathcal{L}_C(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ sehingga $\lim_{j \rightarrow \infty} A_j = A$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((A_i - A)(e_k), d_m^*) e_k^* \right\| \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((A_i - A_j)(e_k), d_m^*) e_k^* \right\|
\end{aligned}$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \|A_i - A_j\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Untuk sebarang bilangan bulat $i \geq n_0$. Dengan kata lain, $A - A_i \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$, untuk $i \geq n_0$. Oleh karena itu, $A - A_{n_0} + A_{n_0} = A \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ dan terbukti bahwa barisan $\{A_i\}$ konvergen ke suatu $A \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$. Jadi $SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ merupakan ruang bernorma yang lengkap atau ruang Banach.

(iii) Jika $A \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ dan $x \in l_2(\Delta)$, maka

$$A(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle A(x), d_m^* \rangle d_m$$

Oleh karena itu, untuk setiap bilangan bulat positif n , dapat didefinisikan operator $A_n: l_2(\Delta) \rightarrow l_2(\Delta)$ dengan

$$A_n(x) = \sum_{m=1}^n \langle A(x), d_m^* \rangle d_m$$

Jelas bahwa $A_n \in \mathcal{L}_C(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ dan A_n merupakan operator berhingga. Dengan kata lain, A_n operator kompak. Karena $\{A_n\}$ konvergen ke A maka A operator kompak.

Berdasarkan Teorema 1.2 diperoleh

Akibat 1.3 $SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta)) \subset K(l_2(\Delta), l_2(\Delta)) \subset \mathcal{L}_C(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ dengan $K(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ koleksi operator kompak dari $l_2(\Delta)$ ke $l_2(\Delta)$

Operator $A \in SM(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ dapat diwakili oleh matriks takhingga A . Oleh karena itu, dalam bentuk matriks takhingga $A = (a_{ij}): l_2(\Delta) \rightarrow l_2(\Delta)$.

KESIMPULAN

Operator $A \in \mathcal{L}_C(l_2(\Delta), l_2(\Delta))$ dinamakan operator-SM jika

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^*\| < \infty$$

dengan $\{e_n\}, \{d_m\} \subset l_2(\Delta)$ basis pada $l_2(\Delta)$. Operator tersebut dapat diwakili oleh matriks takhingga dengan syarat-syarat tertentu.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih disampaikan kepada FMIPA Unila yang telah memfasilitasi terlaksananya kegiatan semirata BKS barat tahun 2019 ini.

REFERENSI

- Ansori, M., Suharsono, S. 2017. Operator Linear pada Ruang Barisan Terbatas l_2 , Prosiding SEMIRATA BKS PTN Wilayah Barat, Universitas Jambi, Jambi, 12-14 Mei 2017, hlm 59-63.
- Et Colak, R. On Some Difference Sequence Sets and Their Topological Properties, Bulletin of The Malaysian Mathematical Science Society, 125-130
- Suharna, H. 2013. Ruang Barisan Selisih $c_0(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$, $l_\infty(\Delta_m)$ dan $l_p(\Delta_m)$, Jurnal Ilmiah Program Studi Matematika STKIP Siliwangi Bandung, Vol 2, No 2, hlm 100-122.



BEBERAPA HASIL TAMBAHAN DARI TURUNAN FRAKSIONAL (SOME ADDITIONAL RESULTS OF FRACTIONAL DERIVATIVE)

Musraini M. *
Universitas Riau

Rustam Efendi
Universitas Riau

Endang Lily
Universitas Riau

Ponco Hidayah
Universitas Riau

ABSTRACT: The idea of the fractional calculus is how to determine the derivatives with fractional order, that is a rational number or even a real number. In this paper, we discuss the properties of fractional derivative which obeys classical derivative properties. Moreover, we discuss some improve results of fractional derivatives based on the definition presented by Katugampola. The further results of this paper are the analysis of fractional derivatives, fractional derivatives of inverse functions and hyperbolic functions. Then, its applications to the convexity, monotonicity and L'Hospital's Rule.

KEYWORDS: Fractional Calculus, Fractional Derivatives, Applications of Fractional Derivatives.

* Corresponding Author: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau, Pekanbaru Riau; Email: musraini.m4r@gmail.com

PENDAHULUAN

Kalkulus merupakan ilmu yang mempelajari perubahan, sebagaimana geometri yang mempelajari bentuk dan aljabar untuk mempelajari operasi dan penerapannya untuk memecahkan persamaan. (Latorre *et al.*, 2007) menyatakan pelajaran kalkulus adalah pintu gerbang menuju pelajaran matematika lainnya yang lebih tinggi, yang khusus mempelajari fungsi dan limit, yang secara umum dinamakan analisis matematika. Kalkulus memiliki dua cabang utama, kalkulus diferensial dan kalkulus integral yang saling berhubungan melalui teorema dasar kalkulus. Contoh cabang kalkulus yang lain adalah kalkulus proposisional, kalkulus variasi, kalkulus lambda, kalkulus proses dan kalkulus fraksional.

Stewart (2015) mengemukakan kalkulus diferensial merupakan cabang kalkulus yang fokus mempelajari bagaimana suatu besaran berubah dalam kaitannya dengan besaran lainnya. Konsep utama dalam kalkulus differensial adalah turunan. Turunan merupakan pengukuran terhadap bagaimana suatu fungsi berubah seiring perubahan nilai input.

Orde turunan dari suatu fungsi pada umumnya dihubungkan dengan bilangan asli. Maksudnya, jika diberikan suatu fungsi maka dapat ditentukan turunan ke (orde) satu, kedua, ketiga dan seterusnya.

Kalkulus fraksional merupakan cabang dari kalkulus yang menggabungkan konsep turunan dan integral suatu fungsi dengan orde bukan bilangan bulat, yaitu bilangan

rasional bahkan bilangan real. Ross (1977) mengatakan bahwa konsep kalkulus fraksional muncul pada tahun 1695, yaitu pertanyaan L'Hospital kepada Leibniz tentang turunan berorde setengah. Sejak saat itu banyak para ilmuwan matematika mencoba menjawab pertanyaan tersebut hingga dalam beberapa abad ditemukan berbagai jenis turunan fraksional diperkenalkan. Misalnya Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard yang dipaparkan dalam Tavassoli (2013) merupakan beberapa nama yang memperkenalkan jenis turunan fraksionalnya. Sebagian besar dari jenis turunan fraksional yang telah diperkenalkan tidak dapat digunakan untuk sifat-sifat turunan seperti aturan perkalian, aturan pembagian, aturan rantai, teorema Rolle, dan teorema nilai Rata-rata. Oleh karena itu (Khalil *et al.*, 2014), memperkenalkan ide yang menarik, yaitu mendeskripsikan suatu definisi limit turunan fraksional pada orde tertentu dan turunan fraksionalnya dapat digunakan terhadap aturan perkalian, aturan pembagian, teorema Rolle dan teorema nilai rata-rata seperti teorema dalam kalkulus klasik. Setelah itu banyak definisi limit suatu turunan fraksional yang diperkenalkan oleh berbagai macam matematikawan seperti, Katugampola (2014) memperkenalkan definisi turunan fraksionalnya dalam bentuk berbeda yang dapat digunakan untuk sifat-sifat turunan klasik. Berdasarkan definisi turunan fraksional ini yang merupakan ide dari Katugampola, pada penelitian ini bermaksud untuk membahas lebih lanjut mengenai sifat-sifat tambahan dari turunan dan integral fraksional serta beberapa beserta aplikasinya yang mana aplikasi dari kalkulus fraksional banyak ditemukan dalam berbagai bentuk seperti pada Dai *et al.* (2016), Shah *et al.* (2016) dan Saqib *et al.* (2016). Hasil kajian pada penelitian ini, diharapkan dapat menjadi dasar bagi penelitian tahap selanjutnya yang kajiannya lebih menitik beratkan pada sifat-sifat tambahan dan aplikasi. Dari sisi aplikasi, diharapkan termotivasi untuk mempelajari ilmu ini karena fakta menunjukkan cukup banyak aplikasinya baik dalam bidang ekonomi maupun teknik.

BAHAN DAN METODE

Penelitian ini dilakukan secara studi literatur dengan mempelajari buku teks dan artikel yang berkaitan dengan masalah ini. Pembahasan makalah ini mengacu pada definisi limit turunan klasik, yaitu

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (1)$$

yang dikenal sebagai turunan pertama fungsi f terhadap x .

Berdasarkan turunan tersebut suatu fungsi f dikatakan terdiferensial di titik a jika $f'(a)$ ada. Fungsi ini terdiferensialkan pada interval terbuka (a, b) $[(a, \infty)$ atau $(-\infty, a)$ atau $(-\infty, \infty)$] jika dapat diturunkan di setiap titik dalam interval tersebut. Kemudian, jika suatu fungsi f terdiferensial maka fungsi tersebut juga kontinu. Fungsi yang terdiferensial inilah yang digunakan untuk menjadi landasan apakah suatu fungsi untuk menentukan apakah fungsi tersebut terdiferensial fraksional.

Berbagai macam definisi turunan fraksional telah diperkenalkan berbagai macam matematikawan diantaranya, Khalil *et. al.* (2014) yang pertama kali mendefinisikan turunan dalam bentuk limit seperti turunan klasik, yaitu turunan fraksional berorde $\alpha \in (0,1)$ yang mana turunan tersebut merupakan perkalian antara fungsi kontinu dan turunan klasik. Kemudian, Katugampola (2014) juga mendefinisikan turunan fraksionalnya dalam bentuk yang lain, yaitu

$$D^\alpha(f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(xe^{\epsilon x^{-\alpha}}) - f(x)}{\epsilon}, \quad (2)$$

dengan $\alpha \in (0,1)$.

Pada definisi yang telah diperkenalkan oleh Katugampola (2014) berlaku berbagai macam sifat-sifat seperti turunan pada turunan pertama. Selanjutnya, dengan menggunakan definisi limit turunan Katugampola (2014) dibuktikan beberapa sifat-sifat dan aplikasi yang mirip seperti turunan klasik, yaitu operasi aljabar turunan, fungsi invers, teorema Rolle, teorema nilai rata-rata, aturan L'Hospital dan menentukan karakteristik fungsi konveks atau konkaf.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada makalah ini didiskusikan mengenai hasil tambahan dari turunan fraksional yang didefinisikan oleh Katugampola (2014), yaitu berbagai macam sifat turunan dan aplikasi seperti operasi aljabar turunan, fungsi invers, teorema Rolle, teorema nilai rata-rata, aturan L'Hospital dan menentukan karakteristik fungsi konveks atau konkaf.

Definisi 1. Misalkan $b > a > 0$ dan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Turunan fraksional dari f dengan orde $\alpha \in (0,1)$ didefinisikan dengan

$$D^\alpha(f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(xe^{\epsilon x^{-\alpha}}) - f(x)}{\epsilon},$$

untuk setiap $x > 0, \alpha \in (0,1)$. Jika f terdiferensial dengan orde α di $(0, a)$, $a > 0$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^\alpha(x)$ ada maka

$$f^\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f^\alpha(x).$$

Teorema 1. Jika $b > a > 0$ dan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang terdiferensial dan $x > a$ maka f terdiferensialkan dengan order α di x dan

$$f^\alpha(x) = x^{1-\alpha} \frac{df}{dx}(x). \quad (3)$$

Bukti. Dengan menggunakan persamaan (2)

$$\begin{aligned}
 f^\alpha(x) = D^\alpha(f)(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(xe^{\epsilon x^{-\alpha}}) - f(x)}{\epsilon}, \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha} + O(\epsilon)) - f(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\frac{hx^{\alpha-1}}{1+O(\epsilon)}} \\
 &= x^{1-\alpha} \frac{df}{dx}(x),
 \end{aligned}$$

■

Untuk $\alpha = 1$ hasil dari turunan fraksional tersebut menjadi turunan pertama kalkulus klasik, yaitu $x^{1-1} \frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x)$.

Berdasarkan Teorema 1, diperoleh hasil berikut.

Teorema 2. Jika $\alpha \in (0,1]$ dan f, g terdiferensialkan α di titik $x > 0$ maka berlaku beberapa sifat berikut:

- (i) $D^\alpha(af + bg)(x) = aD^\alpha(f)(x) + bD^\alpha(g)(x)$.
- (ii) $D^\alpha(fg)(x) = g(x)D^\alpha(f)(x) + f(x)D^\alpha(g)(x)$ (Aturan Perkalian).
- (iii) $D^\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)D^\alpha(f)(x) - f(x)D^\alpha(g)(x)}{[g(x)]^2}$ (Aturan Pembagian).
- (iv) $D^\alpha(f \circ g)(x) = f'(g(x))D^\alpha(g)(x)$ (Aturan Rantai).

Bukti.

- (i) Berdasarkan persamaan (2) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
 D^\alpha(af + bg)(x) &= x^{1-\alpha}(af + bg)'(x) \\
 &= x^{1-\alpha}(af + bg)'(x) \\
 &= x^{1-\alpha}(af'(x) + bg'(x)) \\
 &= x^{1-\alpha}af'(x) + x^{1-\alpha}bg'(x)
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu berlaku sifat linearitas pada sifat turunan fraksional.

- (ii) Dengan cara yang sama, yaitu menggunakan persamaan (2) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
 D^\alpha(fg)(x) &= x^{1-\alpha}(fg)'(x) \\
 &= x^{1-\alpha}(f'g + fg')(x) \\
 &= x^{1-\alpha}(f'g)(x) + x^{1-\alpha}(fg')(x) \\
 &= x^{1-\alpha}f'(x)g(x) + x^{1-\alpha}f(x)g'(x) \\
 D^\alpha(fg)(x) &= (D^\alpha f(x))g(x) + (D^\alpha g(x))f(x)
 \end{aligned}$$

- (iii) Dengan menggunakan persamaan (2) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
D^\alpha \left(\frac{f}{g} \right) (x) &= x^{1-\alpha} \left(\frac{f}{g} \right)' (x) \\
&= x^{1-\alpha} \frac{(g(x)f'(x) - f(x)g'(x))}{[g(x)]^2} \\
&= \frac{(g(x)f'(x)x^{1-\alpha} - f(x)g'(x)x^{1-\alpha})}{[g(x)]^2} \\
D^\alpha \left(\frac{f}{g} \right) (x) &= \frac{g(x)D^\alpha(f)(x) - f(x)D^\alpha(g)(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

(iv) Dengan menggunakan persamaan (2) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
D^\alpha(f \circ g)(x) &= x^{1-\alpha} (f \circ g)'(x) \\
&= x^{1-\alpha} f'(g(x))g'(x) \\
&= f'(g(x))x^{1-\alpha}g'(x) \\
D^\alpha(f \circ g)(x) &= f'(g(x))(D^\alpha(g)(x))
\end{aligned}$$

■

Teorema 3. (Teorema Rolle Fraksional) Misalkan $a > 0$ dan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang memenuhi

- (i) f kontinu di $[a, b]$,
- (ii) f terdiferensial α untuk beberapa $\alpha \in (0, 1)$,
- (iii) $f(a) = f(b)$,

Maka terdapat $c \in (a, b)$ sehingga $f^{(\alpha)}(c) = 0$.

Bukti. Karena f kontinu di $[a, b]$ dan $f(a) = f(b)$, terdapat $c \in (a, b)$ yang mana fungsi tersebut memiliki suatu titik ekstrim lokal, maka

$$D^\alpha(f(c)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(ce^{\epsilon c^{-\alpha}}) - f(c)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(ce^{\epsilon c^{-\alpha}}) - f(c)}{\epsilon}.$$

Akan tetapi, limitnya berbeda tanda sehingga haruslah $D^\alpha(f(c)) = 0$. ■

Teorema 4. (Teorema Nilai Rata-rata Fraksional) Misalkan $a > 0$ dan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang memenuhi kondisi berikut.

- (i) f kontinu pada $[a, b]$,
- (ii) f terdiferensial α pada beberapa $\alpha \in (0, 1)$,

maka terdapat $c \in (a, b)$, sehingga

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}. \quad (3)$$

Bukti.

Misalkan fungsi

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha \right).$$

Sudah jelas bahwa $F(x)$ memenuhi kondisi dari Teorema 3 yang ekuivalen terhadap turunan klasik yang diferensial pada interval (a, b) . Oleh karena itu, berdasarkan teorema 3, terdapat $c \in (a, b)$, sehingga $F'(c) = 0$. Berdasarkan fakta bahwa $D^{(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha \right) = 1$, diperoleh hasil pada persamaan (3). ■

Turunan fraksional ini juga dapat digunakan untuk menentukan kemonotonan suatu fungsi.

Teorema 5. (Kemonotonan) Misalkan $a > 0$ dan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang didefinisikan pada interval tutup $[a, b]$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$. Misalkan juga f kontinu dan nonnegatif

- (i) Jika $f^{(\alpha)}(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka f merupakan fungsi tidak menurun pada interval $[a, b]$.
- (ii) Jika $f^{(\alpha)}(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka f merupakan fungsi naik pada interval $[a, b]$.
- (iii) Jika $f^{(\alpha)}(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka f merupakan fungsi tidak menaik pada interval $[a, b]$.
- (iv) Jika $f^{(\alpha)}(x) < 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka f merupakan fungsi turun pada interval $[a, b]$.
- (v) Jika $f^{(\alpha)}(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka f merupakan fungsi konstan pada interval $[a, b]$.

Bukti.

Untuk membuktikan (i), misalkan $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$. Dengan menggunakan teorema 4 terdapat $c \in (x_1, x_2)$ sehingga

$$f(x_2) - f(x_1) = f^{(\alpha)}(c) \left(\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha \right).$$

Jika $f^{(\alpha)}(c) \geq 0$, maka $f(x_2) \geq f(x_1)$. Oleh karena itu, jika $f^{(\alpha)}(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f merupakan fungsi tidak menurun pada $[a, b]$.

Untuk bagian (ii), (iii), (iv) dapat dibuktikan dengan cara yang sama (i), sedangkan pada bagian (v) secara otomatis terbukti berdasarkan (i) dan (iii) sehingga fungsi $f^{(\alpha)}(x) = 0$ konstan, yaitu tidak naik dan tidak turun. ■

Teorema 6. (Aturan L'Hospital Fraksional) Misalkan f dan g merupakan fungsi pada interval $[a, b]$. Misalkan $f(a) = g(a) = 0$. Kemudian misalkan $g(x) \neq 0$ untuk

$0 < a < x < b$. Jika f dan g terdiferensial- α , maka limit dari $f(x)/g(x)$ ada di a dan sama dengan $f^{(\alpha)}(x)/g^{(\alpha)}(x)$, dengan demikian

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(\alpha)}(x)}{g^{(\alpha)}(x)}.$$

Bukti.

Karena $f(a) = g(a) = 0$, dapat ditulis $f(x)/g(x)$ untuk $a < x < b$ sebagai

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} x^{1-\alpha}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a} x^{1-\alpha}}$$

Dengan melimitkan kedua ruas diperoleh bahwa

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} x^{1-\alpha}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} x^{1-\alpha}}$$

Oleh karena itu dapat diperoleh kesimpulan bahwa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a^{1-\alpha} f'(x)}{a^{1-\alpha} g'(x)}.$$

■

Fungsi yang terdiferensial α dengan $\alpha \in (0,1)$ dapat digunakan untuk menentukan fungsi tersebut konveks atau konkaf dengan teorema berikut.

Teorema 7. Misalkan $a > 0$ dan $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi kontinu yang terdiferensial dengan orde α pada interval buka (a, b) ,

- (i) f merupakan fungsi konveks pada interval (a, b) jika dan hanya jika f' merupakan fungsi naik pada interval (a, b) .
- (ii) f merupakan fungsi konkaf pada interval (a, b) jika dan hanya jika f' merupakan fungsi naik pada interval (a, b) .

Bukti. Untuk membuktikan (i) misalkan f terdiferensial α pada (a, b) . Kemudian dengan teorema nilai rata-rata fraksional, untuk sebarang $x, y, z \in (a, b)$ dengan $x < z < y$, terdapat $c \in (x, z)$, $d \in (z, y)$ sehingga

$$x^{1-\alpha} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f^{(\alpha)}(c), \quad z^{1-\alpha} \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f^{(\alpha)}(d).$$

dengan catatan bahwa c lebih kecil dari d . Oleh karena itu, jika $f^{(\alpha)}$ merupakan fungsi naik pada interval (a, b) , maka $f^{(\alpha)}(c) \leq f^{(\alpha)}(d)$, dan ini menunjukkan bahwa f merupakan fungsi konveks pada interval (a, b) .

Sebaliknya, misalkan f merupakan fungsi terdiferensial α dan konveks pada interval (a, b) . Kemudian misalkan $x, y \in (a, b)$ dengan $x < y$ maka

$$f^{(\alpha)}(x) = x^{1-\alpha} \lim_{z_1 \rightarrow x^+} \frac{f(z_1) - f(x)}{z_1 - x}, \quad f^{(\alpha)}(y) = y^{1-\alpha} \lim_{z_2 \rightarrow y^-} \frac{f(y) - f(z_2)}{y - z_2}.$$

Tapi untuk z_1, z_2 dengan $x < z_1 < z_2 < y$, dengan konveksitas dari f , bahwa

$$z_1^{1-\alpha} \frac{f(z_1) - f(x)}{z_1 - x} \leq z_2^{1-\alpha} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \leq z_2^{1-\alpha} \frac{f(y) - f(z_2)}{y - z_2}.$$

Dengan mengabaikan ruas tengah dan misalkan $z_1 \rightarrow x^+, z_2 \rightarrow y^-$, dapat diketahui bahwa $f^{(\alpha)}(x) \leq f^{(\alpha)}(y)$, dan hal ini menunjukkan bahwa $f^{(\alpha)}$ merupakan fungsi naik.

(ii) Dapat dibuktikan dengan cara yang sama dengan (i) ■

Teorema 8. (Turunan fungsi Hiperbolik) Misalkan $b > a > 0$ dan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, maka

- | | | | |
|-------|--|------|--|
| (i) | $D^\alpha(\sinh x) = x^{1-\alpha} \cosh x.$ | (iv) | $D^\alpha(\cosh x) = x^{1-\alpha} \sinh x.$ |
| (ii) | $D^\alpha(\tanh x) = x^{1-\alpha} \operatorname{sech}^2 x.$ | (v) | |
| | $D^\alpha(\operatorname{csch} x) = -x^{1-\alpha} \operatorname{csch} x \coth x.$ | | |
| (iii) | $D^\alpha(\operatorname{sech} x) = -x^{1-\alpha} \operatorname{sech} x \tanh x.$ | (vi) | $D^\alpha(\coth x) = -x^{1-\alpha} \operatorname{csch} x.$ |

Bukti.

Untuk membuktikan (i) dapat digunakan teorema 1, yaitu

$$D^\alpha(\sinh x) = x^{1-\alpha} \frac{df}{dx}(x) = x^{1-\alpha}(\sinh x)' = x^{1-\alpha} \cosh x.$$

Cara yang sama dapat digunakan untuk membuktikan (ii), (iii), (iv), (v), (vi). ■

(Birgani *et al.*, 2019) menjelaskan teorema darbox fraksional, yaitu dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 9. Misalkan $b > a > 0$ dan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang memenuhi kriteria berikut.

- (i) f terdiferensial- α untuk $\alpha \in (0, 1)$
- (ii) $f^\alpha(a) \cdot f^\alpha(b) < 0$

maka terdapat $c \in (a, b)$, sedemikian sehingga $f^\alpha(c) = 0$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 1. Fungsi f terdiferensial pada $(0, +\infty)$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa

$$a^{1-\alpha} b^{1-\alpha} f'(a) f'(b) < 0,$$

Ini berarti bahwa, $f'(a)f'(b) < 0$. Selanjutnya dengan menggunakan teorema Darboux pada fungsi yang terdiferensiabel diperoleh bahwa terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = 0$, ini juga berarti bahwa $f''(c) = 0$.

■

Berdasarkan Teorema 9 berlaku pula kriteria berikut.

Teorema 10. Misalkan $b > a > 0$ dan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang terdiferensial dengan orde $\alpha \in (0, 1)$ dan $f(a) \neq f(b)$. Jika γ merupakan suatu bilangan antara $f^\alpha(a)$ dan $f^\alpha(b)$ maka terdapat $c \in (a, b)$ sehingga $f^\alpha(c) = \gamma$.

Bukti.

Misalkan $g(x) = f(x) - \gamma x$. Jika $f^\alpha(a) < \gamma < f^\alpha(b)$, maka $g^\alpha(a) = f^\alpha(a) - \gamma < 0$ dan $g^\alpha(b) = f^\alpha(b) - \gamma > 0$. Berdasarkan Teorema 9, yaitu terdapat $c \in (a, b)$, sedemikian sehingga $g^\alpha(c) = 0$. Oleh karena diperoleh

$$f^\alpha(c) = g^\alpha(c) + \gamma = \gamma,$$

sehingga terbukti untuk kasus $f^\alpha(a) < f^\alpha(b)$.

Untuk kasus $f^\alpha(a) > f^\alpha(b)$ dapat dibuktikan dengan cara yang sama. ■

Teorema 11. Misalkan $b > a > 0$ dan f terdiferensial- α pada interval $[a, b]$ dan untuk setiap $x \in [a, b]$, $f^\alpha(x) \neq 0$, maka

1. f merupakan fungsi satu-ke-satu pada $[a, b]$
2. f^{-1} terdiferensial α pada $[d, c] = [a, b]$
3. $(f^{-1})^\alpha(f(x)) = \frac{1}{f^\alpha(x)}$, untuk setiap $x \in [a, b]$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 10, baik itu $f^\alpha(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$ atau $f^\alpha(x) < 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, dalam masing-masing kasus tersebut pastilah $f(x)$ merupakan fungsi naik atau fungsi turun pada interval $[a, b]$ sehingga $f(x)$ merupakan fungsi satu-ke-satu pada interval $[a, b]$ sehingga memenuhi (1). Untuk membuktikan (2) dan (3), perhatikan bahwa $f^{-1}(x)$ kontinu, karena f kontinu dan monoton tegas. Misalkan $y_0 \in [c, d]$ dan $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Dari hal tersebut akan dibuktikan bahwa $(f^{-1})'(y_0)$ ada dan memiliki nilai $1/(f'(x_0))$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dapat ditulis $y = f(x)$, sehingga $x = f^{-1}(y)$.

Berdasarkan persamaan berikut

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

ketika $y \rightarrow y_0$, $x \rightarrow x_0$, karena fungsi f^{-1} kontinu, maka

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Berdasarkan Teorema 1 karenanya berlaku juga untuk turunan fraksional, yakni

$$y^{1-\alpha} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

sehingga

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(f(x)) = \frac{1}{f^{(\alpha)}(x)}. \quad \blacksquare$$

SIMPULAN

Berdasarkan hasil yang telah dikemukakan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa definisi turunan fraksional berorde $\alpha \in (0,1)$ merupakan perkalian antara turunan pertama dengan fungsi kontinu. Suatu fungsi terdiferensial dengan orde α jika fungsi tersebut terdiferensial dengan orde klasik yakni orde pertama. Kemudian dari turunan fungsi fraksional tersebut diperoleh juga berbagai macam sifat turunan dan aplikasi seperti operasi aljabar turunan, fungsi invers, teorema Rolle, teorema nilai rata-rata, aturan L'Hospital dan menentukan karakteristik fungsi konveks atau konkaf.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada LPPM Universitas Riau atas bantuannya sehingga penelitian ini dapat terlaksana.

REFERENSI

- R. G. Bartle dan D. R. Sherbert. 2010, Introduction to Real Analysis. Fourth Edition, John Wiley & Sons, Urbana.
- O. T. Birgani, S. Chandok, N. Dedović dan S. Radenović. 2019, A note on some recent results of the conformable derivative, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 3, 11-17.
- C.-Q. Dai, Y. Wang, J. Liu. 2016, Spatiotemporal Hermite-Gaussian solitons of a (3+1)-dimensional partially nonlocal nonlinear Schrodinger equation. *Nonlinear Dynamics*, 84, 1157-1161.
- U. Katungapola. 2014, A new fractional derivative with classical properties, preprint, arXiv:1410.6535.

- R. Khalil, M. Alhorani, A. Yousef dan M. Sababheh. 2014, A definition of fractional derivative, *Journal of Computational Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- D. R. Latorre, J. W. Kenelly, I. B. Reed, L. R. Carpenter, dan C. R. Harris. 2007, *Calculus Concepts: An Applied Approach to the Mathematics of Change*, Fourth Edition, Cengage Learning, Carolina.
- B. Ross. 1977, The development of fractional calculus 1695-1900, *Historia Mathematica*, 4, 75-89.
- N. A. Shah, A. F. I. Khan. 2016, Heat transfer analysis in a second grade fluid over and oscillating vertical plate using fractional Caputo-Fabrizio derivatives, *The European Physical Journal C*, 76, 1-11.
- N. A. Sheikh, A. F. I. Khan dan M. Saqib. 2016, A modern approach of Caputo-Fabrizio time-fractional derivative to MHD free convection flow of generalized second-grade fluid in a porous medium, *Neural Computing and Applications*, 1-11.
- C. Sungkono. 2009, *Kalkulus*, Edisi Kelima, Terjemahan dari Calculus. Fifth Edition oleh J. Stewart, Salemba Teknika, Jakarta,.
- M. H. Tavassoli, A. Tavassoli dan M. R. O. Rahimi. 2013, The geometric and physical interpretation of fractional order derivative of polynomial functions, *Differential Geometry-Dynamical System*, 15, 93-104.



ANALISIS LAMANYA ANTRIAN (M/M/1) PADA PELAYANAN ADMINISTRASI KESEHATAN (PENGGUNA BPJS) DI RUMAH SAKIT KESDAM BANDA ACEH

(ANALYSIS OF LONG QUEUE (M/M/1) IN HEALTH ADMINISTRATION SERVICES (USER BPJS) IN KESDAM BANDA ACEH HOSPITAL)

Nadia Ulfa*
Univ. Syiah Kuala

Miftahuddin
Univ. Syiah Kuala

ABSTRACT: The problems raised in this study are: how is the health administration service queue system (BPJS) in the hospital in Banda Aceh. The purpose of this study was to find out the system of health queue administration services (BPJS) at the hospital in Banda Aceh. From the calculation of analytical performance Queue Systems with Single Change Single Phase (M/M/1) Patient arrivals are most visible on Monday, where the average patient arrives highest at 09:00 to 10:00, where the average time the patient spent waiting for patients with the longest queue needed in the queue was 0.93 minutes and 0.13 minutes was the shortest time that occurred at 14:00 to 15:00. The longest time needed by a patient in the system is 12 minutes which occurs at 09:00 to 10:00 and the shortest time is 2.4 minutes which occurs from 14:00 to 15:00.

KEYWORDS: *M/M/1. BPJS, service queue system*

* Corresponding Author: Jurusan Statistika, FMIPA, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh; Email: nadiaulfa494@gmail.com

PENDAHULUAN

Perkembangan teknologi dan pembangunan yang ada disegala bidang saat ini berlangsung dengan cepat. Jasa merupakan sektor ekonomi terbesar yang berkembang secara cepat dalam masyarakat maju (Heizer, 2005). Di Indonesia pertumbuhan ekonomi yang cukup tinggi diikuti dengan pertumbuhan sektor jasa, salah satu perusahaan yang bergerak dibidang jasa adalah pelayanan Rumah Sakit. Jenis layanan kesehatan sangat sulit untuk ditentukan trafiknya, karena tidak diketahui kapan orang sakit atau membutuhkan layanan kesehatan. Hal ini tentu sangat mempengaruhi lamanya antrian pada pelayanan kesehatan di rumah sakit. Dengan variasi kedatangan pasien pada layanan, tentu akan mempengaruhi kinerja dan efisiensi dari petugas medis atau tenaga kerja yang ada, dan berpengaruh terhadap kepuasan dan kenyamanan pasien (Suryadhi, 2009).

Semakin banyaknya rumah sakit dan penawaran jasa kesehatan maka masyarakat akan semakin selektif dalam menentukan tempat untuk berobat, sehingga untuk dapat memenangkan kompetisi pihak rumah sakit hendaknya memperbaiki sistem pelayanan yang ada. Pentingnya pengoptimalan pelayanan yang diberikan kepada masyarakat, dapat dilakukan salah satunya dengan mengetahui sistem antrian yang tepat digunakan pada pelayanan kesehatan. Pelayanan yang diberikan Rumah Sakit kepada masyarakat meliputi jumlah tenaga medis, waktu pelayanan terhadap pasien. Pasien yang akan memasuki

antrian harus melalui beberapa tahap. Tahap pertama pasien menuju loket untuk memperoleh nomer antrian, setelah itu pasien akan dipanggil sesuai nomor urut untuk dilayani.. Hal ini sangat berpengaruh bagi pasien yang sebelumnya sudah mengantri karena harus rela menunggu lebih lama lagi untuk mendapatkan pelayanan.

Saat memberikan pelayanan kepada pasien, fenomena mengantri tidak dapat dihindari lagi dan sering dijumpai dan menjadi masalah yang harus segera ditemukan jalan keluarnya. Panjang dan lamanya antrian membuat pasien merasa tidak nyaman, karena menganggap waktu mereka terbuang percuma saat mereka mengantri sebelum dilayani. Antrian merupakan kegiatan menunggu giliran untuk dilayani karena kedatangan pelanggan dan waktu pelayanan yang tidak seimbang. Adanya perbedaan antara jumlah permintaan terhadap fasilitas pelayanan dan kemampuan fasilitas untuk melayani menimbulkan dua konsekuensi logis, yaitu timbulnya antrian dan timbulnya pengangguran kapasitas (Siswanto, 2007).

BAHAN DAN METODE

Teori antrian adalah bagian utama dari pengetahuan tentang antrian. Teori antrian adalah bidang ilmu yang melakukan penelitian untuk mengidentifikasi dan mengukur penyebab-penyebab serta konsekuensi-konsekuensi dari kegiatan mengantri. Menurut Heizer dan Render (2005) antrian adalah orang-orang atau barang dalam sebuah barisan yang sedang menunggu untuk dilayani.

Menurut Indriyani (2010) teori antrian merupakan sebuah bagian penting operasi dan juga alat yang sangat berharga bagi manager operasi. Antrian timbul disebabkan oleh kebutuhan akan layanan melebihi kemampuan pelayanan atau fasilitas layanan, sehingga pengguna fasilitas yang tiba tidak bisa segera mendapat layanan disebabkan kesibukan layanan. Menurut Stevenson dalam Indriyani (2010) teori antrian adalah pendekatan matematika untuk analisis garis tunggu. Sedangkan menurut Bronson dalam Fajar, (2012), proses antrian (*queueing process*) adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan seorang pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam suatu baris (antrian) jika semua pelayannya sibuk, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut.

Tujuan dasar model-model antrian adalah untuk meminimumkan total biaya, yaitu biaya langsung penyediaan fasilitas pelayanan dan biaya tidak langsung yang timbul karena para individu harus menunggu untuk dilayani. Bila suatu sistem mempunyai fasilitas pelayanan lebih dari jumlah optimal, ini berarti membutuhkan investasi modal yang berlebihan, tetapi bila jumlahnya kurang dari optimal maka hasilnya adalah tertundanya pelayanan. Model antrian merupakan peralatan penting untuk sistem pengelolaan yang

menguntungkan dengan menghilangkan antrian. Menurut Siswanto (2007) teori antrian bertujuan untuk meminimumkan sekaligus dua jenis biaya yaitu biaya langsung untuk menyediakan pelayanan dan biaya individu yang menunggu untuk memperoleh layanan.

Menurut Gross dan Haris (2008) sistem antrian adalah kedatangan pelanggan untuk mendapatkan pelayanan, menunggu untuk dilayani jika fasilitas pelayanan (server) masih sibuk, mendapatkan pelayanan dan kemudian meninggalkan sistem setelah dilayani. Pada umumnya, sistem antrian dapat diklasifikasikan menjadi sistem yang berbeda-beda dimana teori antrian dan simulasi sering diterapkan secara luas. Sistem antrian dapat diklasifikasikan menjadi sistem yang berbeda-beda dimana teori antrian dan simulasi sering diterapkan secara luas. Klasifikasi menurut Hillier dan Lieberman dalam Indriyani (2010) adalah sebagai berikut:

1. Sistem Pelayanan Komersial

Sistem pelayanan komersial merupakan aplikasi yang sangat luar luas dari model- model antrian seperti restoran, cafetaria, toko-toko, tempat potong rambut (salon), boutiques, super market, dan sebagainya.

2. Sistem pelayanan bisnis- industri

Sistem pelayanan bisnis-industri mencakup lini produksi, sistem material handling, sistem penggudangan, dan sistem-sistem informasi komputer.

3. Sistem pelayanan transportasi

4. Sistem pelayanan sosial

Sistem pelayanan sosial merupakan sistem pelayanan yang dikelola oleh kantor- kantor dan jawatan-jawatan lokal maupun nasional. Seperti kantor tenaga kerja, kantor registrasi SIM dan STNK, kantor pos, rumah sakit, puskesmas, dan sebagainya.

Menurut Heizer dan Render (2006), terdapat tiga komponen dalam sebuah sistem antrian, yaitu:

2.1 Karakteristik kedatangan atau masukan sistem

Sumber input yang mendatangkan pelanggan bagi sebuah sistem pelayanan memiliki karakteristik utama sebagai berikut:

a. Ukuran populasi

Merupakan sumber konsumen yang dilihat sebagai populasi tidak terbatas atau terbatas. Populasi tidak terbatas adalah jika jumlah kedatangan atau pelanggan pada sebuah waktu tertentu hanyalah sebagian kecil dari semua

kedatangan yang potensial. Sedangkan populasi terbatas adalah sebuah antrian ketika hanya ada pengguna pelayanan yang potensial dengan jumlah terbatas.

b. Perilaku kedatangan

Perilaku setiap konsumen berbeda-beda dalam memperoleh pelayanan, ada tiga karakteristik perilaku kedatangan yaitu pelanggan yang sabar, pelanggan yang menolak bergabung dalam antrian dan pelanggan yang membelot.

c. Pola kedatangan

Menggambarkan bagaimana distribusi pelanggan memasuki sistem. Distribusi kedatangan terdiri dari : *Constant arrival distribution* dan *Arrival pattern random*. *Constant arrival distribution* adalah pelanggan yang datang setiap periode tertentu sedangkan *Arrival pattern random* adalah pelanggan yang datang secara acak.

2.2 Disiplin antrian

Disiplin antrian merupakan aturan antrian yang mengacu pada peraturan pelanggan yang ada dalam barisan untuk menerima pelayanan yang terdiri dari:

- 2.1) *First Come First Served* (FCFS) atau *First In First out* (FIFO) yaitu pelanggan yang datang lebih dulu akan dilayani lebih dulu. Misalnya: sistem antrian pada Bank, SPBU, dan lain-lain.
- 2.2) *Last Come First Served* (LCFS) atau *Last In First Out* (LIFO) yaitu sistem antrian pelanggan yang datang terakhir akan dilayani lebih dulu. Misalnya: sistem antrian dalam elevator lift untuk lantai yang sama.
- 2.3) *Service in Random Order* (SIRO) yaitu panggilan didasarkan pada peluang secara acak, tidak peduli siapa dulu yang tiba untuk dilayani.
- 2.4) *Shortest Operation Times* (SOT) merupakan sistem pelayanan yang membutuhkan waktu pelayanan tersingkat mendapat pelayanan pertama.

2.3 Fasilitas pelayanan

Dua hal penting dalam karakteristik pelayanan sebagai berikut :

- 2.3.1 Desain sistem pelayanan
Pelayanan pada umumnya digolongkan menurut jumlah saluran yang ada dan jumlah tahapan.
- 2.3.2 Menurut jumlah saluran yang ada adalah sistem antrian jalur tunggal dan sistem antrian jalur berganda.
- 2.3.3 Menurut jumlah tahapan adalah sistem satu tahap dan sistem tahapan berganda.

2.4 Distribusi waktu pelayanan

Pola pelayanan serupa dengan pola kedatangan di mana pola ini bisa konstan ataupun acak. Jika waktu pelayanan konstan, maka waktu yang

diperlukan untuk melayani setiap pelanggan sama. Sedangkan waktu pelayanan acak merupakan waktu untuk melayani setiap pelanggan adalah acak atau tidak sama.

1. *Single Channel- Single Phase*

Sistem ini adalah yang paling sederhana. Single Chanel berarti bahwa hanya ada satu jalur untuk memasuki sistem layanan atau ada satu pelayan. Single phase menunjukkan bahwa hanya ada satu stasiun layanan sehingga yang telah menerima layanan dapat langsung keluar dari sistem antrian. Contohnya adalah pada pembelian tiket kereta api antar kota yang dilayani oleh satu loket, seorang pelayan toko dan sebagainya

2. *Single Channel- Multi Phase*

Istilah multi-phase berarti ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan dalam fase-fase. Misalnya pada proses pencucian mobil,

3. *Multi Channel- Single Phase*

Situasi ini terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh suatu antrian tunggal. Sebagai contoh adalah pada pembelian tiket yang dilayani oleh lebih dari satu loket, pelayanan potong rambut oleh beberapa tukang cukur dan sebagainya.

4. *Multi Channel- Multi Phase*

Sebagai contoh layanan kepada pasien di rumah sakit dari pendaftaran, diagnosa, tindakan medis sampai pembayaran. Sistem ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap, sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani pada suatu waktu.

METODE

Jenis penelitian ini adalah deskripsi kuantitatif dengan metode pengumpulan data yaitu observasi dimana menjabarkan data-data dengan didukung berbagai referensi untuk memperoleh landasan dalam melakukan pengamatan dilapangan. Sehingga akan diperoleh suatu kesimpulan yang terarah dari pokok bahasan. Observasi dilakukan selama 6 hari di mulai dari Senin sampai dengan Sabtu, dengan mengamati jumlah kedatangan pasien dan waktu yang diperlukan pasien untuk mengantri pelayanan rawat jalan dan lama waktu pelayanan pasien. Metode analisis data yang digunakan dalam penelitian ini yaitu model Antrian Single dan Antrian Prioritas Preemptive M/G/S yang menunjukkan bahwa tingkat kedatangan berdistribusi poisson, waktu pelayanan berdistribusi umum dengan jumlah server lebih dari satu yang mana sistem antrian akan mencapai kondisi *steady-state*. Struktur M/M/1 queue sebagai berikut,



HASIL DAN PEMBAHASAN

Deskripsi Lama waktu kedatangan pasien dan lama waktu pelayanan pada administrasi kesehatan (BPJS)

Tabel 1. Data kedatangan pasien

| Hari / Tgl | Periode Waktu (Jam) | Jumlah Kedatangan Pasien (orang) |
|--------------------------|---------------------|----------------------------------|
| 15 / 03 / 2019 (Jumat) | 08:25-09:25 | 12 |
| 20 / 03 / 2019 (Rabu) | 10:00-11:00 | 14 |
| 26 / 03 / 2019 (Selasa) | 14:00-15:00 | 10 |

Tabel 2. Data Rata-rata Tingkat Pelayanan Pasien

| Hari / Tgl | Periode Waktu (Jam) | Rata-rata Waktu Pelayanan Per orang | Tingkat Pelayanan |
|---------------------|---------------------|-------------------------------------|-------------------|
| 15/03/2019 (Jumat) | 08.00-09.00 | 5 menit | 15 orang |
| 20/03/2019 (Rabu) | 09.00-10.00 | | |
| 26/03/2019 (Selasa) | 10.00-11.00 | | |

Tabel 3. Analisis Sistem Antrian (M/M/1) berdasarkan Periode Waktu

| Periode Waktu (Jam) | λ | μ | $P_0 = \frac{1-\lambda}{\mu}$ | $P = \frac{\lambda}{\mu}$ | $L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ | $W_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ | $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ | $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ |
|---------------------|-----------|-------|-------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--|--|
| 08.00-09.00 | 12 | 15 | 0,2 | 0,8 | 4 | 4 | 0,31 | 0,26 |
| 09.00-10.00 | 14 | 15 | 0,06 | 1,07 | 14 | 12 | 0,93 | 0,93 |
| 14.00-15.00 | 10 | 15 | 0,33 | 1,5 | 2 | 2,4 | 0,18 | 0,13 |

Tingkat Utilisasi Petugas (ρ)

Tingkat utilitas petugas tertinggi terlihat pada jam jam 09.00-10.00 dimana pada periode waktu tersebut tingkat utilisasi sebesar 1,07 artinya Jika nilai yang dihasilkan $\rho > 1$ maka server tidak dapat melayani atau menampung pasien yang ada.

Rata-Rata Jumlah Pasien Dalam Antrian (L_q)

Rata-rata jumlah pasien dalam antrian terpanjang terjadi pada periode waktu 09.00-10.00 dimana rata-rata jumlah pasien yang mengantri sebanyak 0,93 orang dan rata-rata jumlah pasien dalam antrian terpendek terjadi pada periode waktu 14.00-15.00 dimana jumlah pasien yang mengantri sebanyak 0,18 orang.

Rata-Rata Jumlah Pasien Dalam Sistem (L_s)

Rata-rata jumlah pasien yang menunggu dalam sistem terpanjang terjadi pada periode waktu 09.00-10.00 dimana rata-rata jumlah pasien yang mengantri sebanyak 14 orang dan rata-rata jumlah pasien yang menunggu dalam sistem terpendek terjadi pada periode waktu 14.00-15.00 dimana jumlah pasien yang menunggu sebanyak 2 orang.

Waktu rata-rata yang dihabiskan pasien untuk menunggu dalam antrian (W_q)

Waktu terpanjang yang diperlukan pasien dalam antrian adalah 0,93 menit yang terjadi pada jam 09.00- 10.00 dan waktu terpendek adalah 0,13 menit yang terjadi pada jam 14.00-15.00.

Waktu Rata-Rata Yang Dihabiskan Seorang Pasien Dalam Sistem (W_s)

Waktu terpanjang yang diperlukan pasien dalam sistem adalah 12 menit yang terjadi pada jam 09.00-10.00 dan waktu terpendek adalah 2,4 menit yang terjadi pada jam 11.00-12.00.

KESIMPULAN

Sistem pelayanan administrasi antrian kesehatan (BPJS) di rumah sakit Kesdam Banda Aceh diketahui bahwa dari perhitungan kinerja analitis Sistem Antrian dengan *first-come first-served (FCFS) discipline* melalui *Single Change Single Phase (M/M/1)* kedatangan Pasien paling terlihat pada hari Senin, di mana rata-rata pasien datang tertinggi pada jam 09:00 hingga 10:00, di mana rata-rata waktu yang dihabiskan pasien menunggu pasien dengan antrian terpanjang yang diperlukan dalam antrian adalah 0,93 menit dan 0,13 menit adalah waktu tersingkat yang terjadi pada jam 14:00 hingga 15:00. Waktu telama yang dibutuhkan pasien dalam sistem adalah

12 menit yang terjadi pada pukul 09:00 hingga 10:00 dan waktu tersingkat adalah 2,4 menit yang terjadi pada pukul 14:00 hingga 15:00.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kepada semua pihak yang telah berpartisipasi dalam kegiatan SEMIRATA 2019 BKS PTN Barat bidang MIPA, Ketua Jurusan Statistika FMIPA Unsyiah, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Unsyiah dan kawan-kawan grup riset dalam mendukung kegiatan seminar nasional ini.

179

DAFTAR PUSTAKA

- Aulele, Salmon Notje, 2014. *Analisis Sistem Antrian pada Bank Mandiri Cabang Ambon*, Jurnal Barekeng Vol. 8 No. 1, Unpatti: Ambon.
- Aditama, Tommy Yoga dan Wardhani, Laksmi Prita, 2013. *Distribusi Waktu Tunggu Pada Antrian Dengan Menggunakan Disiplin Pelayanan Prioritas (studi Kasus : Instalasi Rawat Darurat di RSUD Dr. Soetomo Surabaya)*, Jurnal Sains dan Seni Pomits, Vol I, No. I, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Gross, D & Haris, C. M. 2008. *Fundamental of Queueing Theory: Fourth edition*. John Willey & Sons, Inc: New Jersey.
- Harahap, Siti Arian R, et.all. 2014. *Analisis Sistem Antrian Pelayanan Nasabah di PT. Bank Negara Indonesia (Persero) Tbk Kantor Cabang Utama USU*, Sainia Matematika, Vol. 02, No. 03.
- Heizer, J. & Render, B. 2005. *Operation Management*. Edisi 7. Buku I, Salemba Empat, Jakarta.
- Heizer, Jay dan Rander, Barry. 2006. *Operation Management* Buku 2 edisi ketujuh. Salemba Empat: Jakarta.
- Indriyani, D.D. 2010. *Pengoptimalan Pelayanan Nasabah Dengan Menggunakan Penerapan Teori Antrian Pada PT. BNI (Persero) TBK. Kantor Cabang Utama (KCU) Melawai Raya*. Skripsi. Universitas Islam Negeri syarif Hidayatullah, Jakarta.
- Riyanto, Agus, 2014. *Simulasi Sistem Antrian Menggunakan Promodel Di RS Hasan Sadikin Bandung*, Universitas Komputer Indonesia: Bandung.
- Rahayu, Anisa Alfiani, Sugito, Sidarno, 2013. *Analisis Model Waktu Antar Kedatangan Dan Waktu Pelayanan Pada Bagian Pembayaran Kasir Instalasi Rawat Inap Rsup Dr Kariadi Semarang*, Prosiding Seminar Nasional Statistika Universitas Diponegoro, ISBN : 978-602-14387-0-1.

- Rusdi, 2014. *Analisis penerapan sistem antrian model Multiple channel query system (m/m/s) pada Bagian registrasi pasien di rsud salewangang Maros*, Universitas Hasanudin : Makasar.
- Siswanto. 2007. "Operation Research". Jilid II. Erlangga, Jakarta.
- Sugito dan Marissa Fauziah. 2009. *Analisis Sistem Antrian Kereta Api di stasiun Besar Cirebon dan Stasiun Cirebon Prujakan*. Medi Statistika Vol 2 No 2: 111-120.
- Sugiyono. 2013. *Metode Penelitian Pendidikan : pendekatan kuantitatif, kualitatif dan R &D*. Alfabeta, Bandung.
- Suryadhi, Putu Ayu Rhamania dan Nichson JP Manurung. 2009. *Model Antrian Pada Pelayanan Kesehatana Di Rumah Sakit.*, Kampus Jimbaran Bali Vol. 8 No 2.



TIPE PENDUGA RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

(THE TYPE OF ESTIMATOR OF MEAN POPULATION IN SIMPLE RANDOM SAMPLING)

Noor Eli Goldameir*
Universitas Riau

Haposan Sirait
Universitas Riau

Irza Muharani
Universitas Riau

ABSTRACT: This paper aimed to discuss three types of estimation for population mean, which are simple random sampling mean estimator, linear regression estimator and regression ratio estimator using information on additional variables. The mean population obtained is based on simple random sampling is an unbiased estimator, while the other types of estimators are biased estimator. Then, the variance or Mean Square Error (MSE) of the three types of estimators is determined to obtain an estimator that is relatively more efficient by comparing the level of precision of the three types of estimators. Regression ratio estimator is the most efficient estimator compared to others.

KEYWORDS: Simple Random Sampling, Mean Square Error, Linear Regresi, Precision.

* Corresponding Author: Program Studi Statistika FMIPA Universitas Riau Pekanbaru; Email: noorellgoldameir@lecturer.unri.ac.id

PENDAHULUAN

Metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian penduga tanpa harus menambah ukuran sampel, yaitu metode rasio, *product*, regresi linier dan rasio regresi. Semuanya memanfaatkan hubungan antara variabel Y dan X . Penduga regresi adalah suatu metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian suatu penduga dimana penduga regresi dirancang untuk meningkatkan ketelitian dengan menggunakan variabel tambahan (X) yang berhubungan dengan variabel yang akan diteliti (Y). Ada tiga tipe penduga yang digunakan yaitu penduga rata-rata (\bar{y}) pada sampling acak sederhana, penduga regresi linear (\bar{Y}_{RL}) dan penduga rasio regresi (\bar{Y}_{RR}) dengan asumsi bahwa parameter dari variabel tambahan diketahui.

Bentuk umum penduga regresi linier untuk rata-rata populasi \bar{Y} dari variabel yang diteliti Y yang dinotasikan dengan \bar{Y}_{RL} dirumuskan pada persamaan (1.1) sebagai berikut:

$$\bar{Y}_{RL} = \bar{y} + \beta(\bar{X} - \bar{x}) \quad (1.1)$$

dengan \bar{y} adalah rata-rata sampel dari populasi Y , \bar{x} adalah rata-rata sampel dari populasi X , \bar{X} adalah rata-rata populasi X dan β adalah koefisien regresi dengan asumsi nilai \bar{X} diketahui.

Penduga regresi untuk rata-rata populasi telah banyak digunakan para peneliti. Sesuai dengan perkembangan ilmu statistika khususnya dalam pendugaan suatu parameter,

dilakukanlah modifikasi penduga regresi untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana menggunakan informasi pada variabel tambahan [3]. Penduga regresi yang dimodifikasi ini disebut penduga rasio regresi yang dinotasikan dengan \bar{Y}_{RR} dirumuskan pada persamaan (1.2) sebagai berikut:

$$\bar{Y}_{RR} = w_1 \bar{Y}_{RL} + w_2 \bar{y} \left[\frac{\eta \bar{x} + \lambda}{\eta \bar{x} + \lambda} \right]^\alpha \quad (1.2)$$

dengan w_1 dan w_2 adalah skalar yang ditentukan dan α , η dan λ adalah konstanta atau fungsi dari beberapa parameter populasi yang diketahui seperti rata-rata X dan merupakan konstanta yang mengambil nilai-nilai terbatas untuk merancang penduga yang berbeda.

Tiga penduga tersebut merupakan penduga bias untuk penduga (\bar{Y}_{RR}) dan penduga tak bias untuk penduga (\bar{y}) dan (\bar{Y}_{RL}). Oleh sebab itu, perlu ditentukan MSE dari masing-masing penduga untuk melihat ketelitiannya terhadap parameter. Semakin kecil nilai MSE yang diperoleh maka akan meningkatkan ketelitian dalam sampling.

TINJAUAN PUSTAKA

Sampling Acak Sederhana

Sampling acak sederhana merupakan suatu metode untuk mengambil n unit sampel dari populasi berukuran N unit. Setiap unit dari populasi mempunyai kesempatan yang sama untuk terambil sebagai unit sampel. Pengambilan sampel secara acak sederhana dapat dilakukan dengan pengembalian atau tanpa pengembalian, namun pada makalah ini pengambilan sampel dilakukan tanpa pengembalian sehingga unit yang telah terambil tidak mungkin terambil kembali menjadi anggota sampel, yang memberikan hasil yang diperoleh lebih akurat [8].

Definisi 2.1: [8] Pada pengambilan sampel tanpa pengembalian, banyaknya sampel yang akan terbentuk adalah C_n^N . Probabilitas terpilihnya anggota n dari N unit populasi sebagai unit sampel pada pengambilan pertama ialah n/N , probabilitas pada pengambilan kedua adalah $(n-1)/(N-1)$ dan seterusnya, sehingga probabilitas dari n unit terpilih pada pengambilan ke- n kali pada dirumuskan persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$\frac{n}{N} \frac{(n-1)}{(N-1)} \frac{(n-2)}{(N-2)} \dots \frac{1}{(N-n+1)} = \frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{1}{C_n^N} \quad (2.1)$$

Teorema 2.1: [6] Rata rata sampel (\bar{y}) yang diperoleh dengan sampling acak sederhana tanpa pengembalian merupakan penduga tak bias untuk rata-rata populasi (\bar{Y}).

Misalkan c adalah konstanta, $g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X)$ adalah fungsi dari variabel acak X sedemikian sehingga $E(g(X))$ dan $E(g_i(X))$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ada, sehingga dirumuskan persamaan (2.2) sebagai berikut [4]:

- (i) $E(c) = c$.
- (ii) $E(cg(X)) = cE(g(X))$.
- (iii) $E(\sum_{i=1}^n g_i(X)) = \sum_{i=1}^n E(g_i(X))$.
- (iv) $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- (v) $Var(X) = E(X_2) - \mu_2$, dengan $\mu_2 = E(X)$.

(2.2)

Suatu penduga dari parameter populasi memiliki beberapa sifat penduga dari populasi, yaitu penduga bias dan tak bias yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2: [5] Misalkan $\hat{\theta}$ adalah penduga untuk θ , $\forall \theta \in \Omega$, Ω merupakan ruang parameter. Penduga $\hat{\theta}$ dikatakan sebagai penduga tak bias, ketika didefinisikan pada persamaan (2.3) sebagai berikut:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (2.3)$$

Definisi 2.3: [5] Misalkan $\hat{\theta}^*$ adalah penduga untuk θ , $\forall \theta \in \Omega$, Ω merupakan ruang parameter. Penduga $\hat{\theta}^*$ dikatakan sebagai penduga bias, ketika didefinisikan pada persamaan (2.4) sebagai berikut:

$$E(\hat{\theta}^*) = \theta + B(\hat{\theta}^*) \quad (2.4)$$

Karena $B(\hat{\theta}^*) \neq 0$ adalah bias dari penduga $\hat{\theta}^*$ maka $B(\hat{\theta}^*)$ dapat dinyatakan dengan persamaan (2.5) sebagai berikut:

$$B(\hat{\theta}^*) = E(\hat{\theta}^*) - \theta \text{ atau } B(\hat{\theta}^*) = E(\hat{\theta}^* - \theta) \quad (2.5)$$

Selanjutnya, untuk melihat ketelitian dari suatu penduga tak bias dapat dilihat melalui variansi data tersebut. Berikut diberikan definisi tentang variansi.

183

Definisi 2.4: [5] Misalkan $\hat{\theta}$ adalah penduga tak bias untuk θ , $\forall \theta \in \Omega$, Ω merupakan ruang parameter. Variansi $\hat{\theta}$ yang dinotasikan dengan $V(\hat{\theta})$ pada persamaan (2.6) sebagai berikut:

$$V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 \quad (2.6)$$

Ketelitian penduga tak bias dapat ditentukan berdasarkan variansi dari penduga tersebut.

Teorema 2.2: [8] Variansi dari rata-rata sampel acak sederhana (\bar{y}) dirumuskan pada persamaan (2.7) sebagai berikut:

$$V(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} (1 - f) \quad (2.7)$$

dengan $f = n/N$ adalah fraksi sampel dan $S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / (N - 1)$ adalah variansi pada populasi.

Teorema 2.3: [8] Jika y_i, x_i merupakan sebuah pasangan yang bervariasi ditetapkan pada unit dalam populasi dan \bar{y}, \bar{x} merupakan rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n dan \bar{Y}, \bar{X} merupakan rata-rata populasi berukuran N , maka kovariansi \bar{y} dan \bar{x} dirumuskan pada persamaan (2.8) sebagai berikut:

$$Cov(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}) \quad (2.8)$$

Apabila suatu penduga merupakan penduga bias maka untuk melihat ketelitian suatu penduga berdasarkan nilai yang akan diduga ditinjau melalui *MSE*. Penduga yang efisien untuk penduga bias adalah penduga yang memiliki *MSE* terkecil. Adapun *MSE* didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.8 [1] Misalkan $\hat{\theta}^*$ merupakan penduga bias untuk θ , $\forall \theta \in \Omega$, Ω merupakan ruang parameter. Rata-rata kesalahan kuadrat dinotasikan dengan $MSE(\hat{\theta}^*)$ yang didefinisikan pada persamaan (2.9) sebagai berikut:

$$MSE(\hat{\theta}^*) = E(\hat{\theta}^* - \theta)^2 \quad (2.9)$$

Teorema 2.4 [6] Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan $I = [a, b]$, dengan N adalah bilangan asli, misalkan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dan $f', f'', \dots, f^{(n)}$ kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b) . Jika $x_0 \in I$ maka untuk sembarang $x \in I$ terdapat suatu titik $c \in (x, x_0)$ sehingga dirumuskan pada persamaan (2.10) sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (2.10)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penduga Regresi Linear Untuk Rata-Rata Populasi

Penduga regresi dirancang untuk meningkatkan ketelitian dengan memanfaatkan hubungan secara regresi linier antara variabel yang akan diteliti (Y) dengan variabel tambahan X dengan asumsi model regresi linear sederhana dirumuskan pada persamaan (3.1) sebagai berikut:

$$Y = BX \quad (3.1)$$

dengan Y adalah variabel tak bebas, X adalah variabel acak, parameter B adalah koefisien regresi,. Misalkan (x_i, y_i) adalah n pasangan data pengamatan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Dengan demikian, model regresi linear sederhana berdasarkan sampel dirumuskan pada persamaan (3.2) sebagai berikut:

$$\bar{y} = \beta \bar{x} \quad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.2), parameter β yang diperoleh dari sampel digunakan juga untuk menduga parameter populasi, penduga untuk rata-rata populasi dinotasikan dengan \bar{Y} dirumuskan pada persamaan (3.3) sebagai berikut:

$$\bar{Y} = \beta \bar{X} \quad (3.3)$$

Pengurangan persamaan (3.2) oleh persamaan (3.3) menghasilkan persamaan (3.4) sebagai berikut:

$$\hat{Y} = \bar{y} + \beta(\bar{X} - \bar{x}) \quad (3.4)$$

Parameter \hat{Y} yang disebut penduga regresi linier untuk rata-rata populasi dinotasikan dengan \bar{Y}_{RL} dirumuskan pada persamaan (3.5) sebagai berikut:

$$\bar{Y}_{RL} = \bar{y} + \beta(\bar{X} - \bar{x}) \quad (3.5)$$

Teorema 3.1: [6] Penduga \bar{Y}_{RL} merupakan penduga tak bias untuk rata-rata populasi (\bar{Y}) dengan variansi penduga \bar{Y}_{RL} dirumuskan pada persamaan (3.6) sebagai berikut:

$$V(\bar{Y}_{RL}) = \theta(S_y^2 - 2\beta S_{xy} + \beta^2 S_x^2) \quad (3.6)$$

dengan $\theta = \frac{1-f}{n}$.

Untuk mendapatkan penduga yang optimal, persamaan (3.6) didiferensialkan terhadap β sehingga diperoleh variansi minimum penduga \bar{Y}_{RL} . Bentuk variansi minimum penduga \bar{Y}_{RL} dirumuskan pada persamaan (3.7) sebagai berikut:

$$V(\bar{Y}_{RL}^*) = \theta \left(S_y^2 - \frac{S_{xy}^2}{S_x^2} \right) \quad (3.7)$$

Penduga Rasio Regresi Untuk Rata-Rata Populasi

Penduga rasio regresi untuk menduga rata-rata populasi pada sampling acak sederhana dinotasikan dengan (\bar{Y}_{RR}) dirumuskan pada persamaan (3.8) sebagai berikut:

$$\bar{Y}_{RR} = w_1 \bar{Y}_{RL} + w_2 \bar{y} \left[\frac{\eta \bar{x} + \lambda}{\eta \bar{x} + \lambda} \right]^\alpha \quad (3.8)$$

dengan w_1 dan w_2 adalah skalar yang ditentukan sehingga MSE dari penduga yang diajukan minimum. Simbol η dan λ bias sebagai konstanta atau fungsi dari beberapa parameter populasi yang diketahui seperti rata-rata X dan merupakan konstanta yang mengambil nilai-nilai terbatas untuk merancang penduga yang berbeda. Dalam ulasanya [3] menjelaskan bahwa penduga \bar{Y}_{RR} merupakan penduga bias.

185

Definisi 3.1: [1] Misalkan $\hat{\theta}^*$ merupakan penduga bias untuk θ , $\forall \theta \in \Omega$, Ω merupakan ruang parameter. Rata-rata kesalahan kuadrat dinotasikan dengan $MSE(\hat{\theta}^*)$ yang didefinisikan pada persamaan (3.9) sebagai berikut:

$$MSE(\hat{\theta}^*) = E(\hat{\theta}^* - \theta)^2 \quad (3.9)$$

MSE dari penduga \bar{Y}_{RR} dirumuskan pada persamaan (3.10) sebagai berikut:

$$MSE(\bar{Y}_{RR}) \approx \bar{Y}^2 (1 + w_1^2 A + w_2^2 B + 2w_1 w_2 C - 2w_1 - 2w_2 D) \quad (3.10)$$

Untuk mendapatkan nilai minimum dari persamaan (3.10) didiferensialkan terhadap w_1 pada persamaan (3.11) sebagai berikut:

$$\frac{\delta(MSE(\bar{Y}_{RR}))}{\delta w_1} = \bar{Y}^2 (2w_1 A + 2w_2 C - 2) \quad (3.11)$$

Kemudian didiferensialkan persamaan (3.64) terhadap w_2 menjadi persamaan (3.12) sebagai berikut

$$\frac{\delta(MSE(\bar{Y}_{RR}))}{\delta w_2} = \bar{Y}^2 (2w_1 C + 2w_2 B - 2D) \quad (3.12)$$

Persamaan (3.11) dan (3.12) disamadengankan dengan 0 sehingga diperoleh persamaan (3.13) dan (3.14) sebagai berikut:

$$\bar{Y}^2(2w_1A + 2w_2C - 2) = 0 \quad (3.13)$$

dan

$$\bar{Y}^2(2w_1C + 2w_2B - 2D) = 0 \quad (3.14)$$

Apabila persamaan (3.13) dan (3.14) dikalikan dengan $1/2\bar{Y}^2$ maka diperoleh persamaan (3.15) sebagai berikut:

$$w_1A + w_2C = 1 \quad (3.15)$$

dan

$$w_1C + w_2B = D \quad (3.16)$$

Berdasarkan persamaan (3.15) dan (3.16) diperoleh persamaan (3.17) sebagai berikut:

$$w_1 = \frac{B-CD}{AB-D^2} \quad (3.17)$$

dan

$$w_1 = \frac{AD-C}{AB-C^2} \quad (3.18)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.17) dan (3.18) ke persamaan (3.5) diperoleh penduga \bar{Y}_{RR} yang optimal dan dinotasikan sebagai penduga \bar{Y}_{RR}^* . Bentuk penduga \bar{Y}_{RR}^* dapat dilihat pada persamaan (3.19) sebagai berikut:

$$\bar{Y}_{RR}^* = \frac{B-CD}{AB-D^2} \bar{Y}_{RL} + \frac{AD-C}{AB-C^2} \bar{y} \left[\frac{\eta\bar{X}+\lambda}{\eta\bar{x}+\lambda} \right]^\alpha \quad (3.19)$$

Berdasarkan persamaan (3.10) sehingga MSE penduga \bar{Y}_{RR}^* diperoleh persamaan (3.20) sebagai berikut:

$$MSE(\bar{Y}_{RR}^*) = \bar{Y}^2 \left[1 - \frac{B-2CD+AD^2}{AB-C^2} \right] \quad (3.20)$$

Terdapat kasus khusus pada penduga \bar{Y}_{RR} dengan mengubah $w_2 = 1 - w_1$ pada persamaan (3.8) dinotasikan sebagai penduga \bar{Y}_{RR}^{**} diperoleh persamaan (3.21) sebagai berikut:

$$\bar{Y}_{RR}^{**} = w_1 \bar{Y}_{RL} + (1 - w_1) \bar{y} \left[\frac{\eta\bar{X}+\lambda}{\eta\bar{x}+\lambda} \right]^\alpha \quad (3.21)$$

Berdasarkan persamaan (3.10), MSE penduga \bar{Y}_{RR}^{**} diperoleh persamaan (3.22) sebagai berikut:

$$MSE(\bar{Y}_{RR}^{**}) \approx \bar{Y}^2(1 + B - 2D + w_1^2(A + B - 2C) - 2w_1(1 + B - C - D)) \quad (3.22)$$

Untuk mendapatkan nilai minimum, persamaan (3.22) didiferensialkan terhadap w_1 diperoleh persamaan (3.23) sebagai berikut:

$$\frac{\delta(MSE(\bar{Y}_{RR}^{**}))}{\delta w_1} = \bar{Y}^2(2w_1(A + B - 2C) - 2(1 + B - C - D)) \quad (3.23)$$

Selanjutnya persamaan (3.23) disamadengankan dengan nol sehingga diperoleh persamaan (3.24) sebagai berikut:

$$\bar{Y}^2(2w_1(A + B - 2C) - 2(1 + B - C - D)) = 0 \quad (3.24)$$

Karena $\bar{Y}^2 \neq 0$ maka persamaan (3.24) menjadi persamaan (3.25) sebagai berikut:

$$w_1 = \frac{1+B-C-D}{A+B-2C} \quad (3.25)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.25) ke persamaan (3.22) diperoleh MSE minimum \bar{Y}_{RR}^{**} yang dinotasikan sebagai $MSE_{min}(\bar{Y}_{RR}^{**})$. MSE minimum \bar{Y}_{RR}^{**} diperoleh persamaan (3.26) sebagai berikut:

$$MSE_{min}(\bar{Y}_{RR}^{**}) \approx \bar{Y}^2 \left[1 + B - 2D - \frac{(1+B-C-D)^2}{A+B-2C} \right] \quad (3.26)$$

Kemudian dengan menjabarkan persamaan (3.26) hasil yang diperoleh persamaan (3.27) sebagai berikut:

$$MSE_{min}(\bar{Y}_{RR}^{**}) \approx \theta \bar{Y}^2 C_y^2 (1 - \rho^2) \quad (3.27)$$

Penduga yang Efisien

Untuk menentukan penduga uang relatif lebih efisien dapat menggunakan Definisi 3.2.

Definisi 3.2: [2] Misalkan $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ merupakan penduga bias untuk θ , selanjutnya misalkan $MSE(\hat{\theta}_1)$ dan $MSE(\hat{\theta}_2)$ adalah MSE dari $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$, efisiensi relatif $\hat{\theta}_1$ terhadap $\hat{\theta}_2$ dinotasikan dengan $RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ didefinisikan pada persamaan (3.12) sebagai berikut:

$$RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)} \quad (3.12)$$

Ketika $RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) > 1$ diperoleh nilai $MSE(\hat{\theta}_2)$ lebih kecil dari $MSE(\hat{\theta}_1)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa penaksir $\hat{\theta}_2$ relatif lebih efisien dari penduga $\hat{\theta}_1$.

Berdasarkan Definisi 3.2 bahwa jika $\frac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)} > 1$ maka ekuivalen dengan persamaan (3.13) sebagai berikut:

$$MSE(\hat{\theta}_1) > MSE(\hat{\theta}_2) \quad (3.13)$$

Atau dapat ditulis persamaan (3.14) sebagai berikut:

$$MSE(\hat{\theta}_1) - MSE(\hat{\theta}_2) > 0 \quad (3.14)$$

Dengan demikian, penduga yang efisien antara penduga $\hat{\theta}_1$ dan penduga $\hat{\theta}_2$ dapat ditentukan berdasarkan selisih $MSE(\hat{\theta}_1)$ dengan $MSE(\hat{\theta}_2)$.

Berdasarkan Definisi 3.2 penduga yang efisien dari masing-masing penduga dapat ditentukan dengan cara membandingkan MSE masing-masing penduga tersebut. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Perbandingan antara penduga \bar{y} dan \bar{Y}_{RL}^* .

Berdasarkan persamaan (3.7) dan (2.7) diperoleh persamaan (3.15) sebagai berikut:

$$V(\bar{y}) - V(\bar{Y}_{RL}^*) > 0 \quad (3.15)$$

menghasilkan persamaan (3.16) sebagai berikut:

$$\theta \bar{Y}^2 C_y^2 \rho^2 > 0 \quad (3.16)$$

Artinya bahwa \bar{Y}_{RL}^* lebih efisien dari \bar{y} dalam kondisi apapun.

2. Perbandingan antara penduga \bar{Y}_{RL}^* dan \bar{Y}_{RR}^* .

Berdasarkan persamaan (3.6) dan (3.7) diperolehlah bahwa $V(\bar{Y}_{RL}^*) - V(\bar{Y}_{RR}^*) > 0$ menghasilkan persamaan (3.17) sebagai berikut:

$$\bar{Y}^2 \left[\frac{(B-C-A(B-D)-C(D-C))^2}{(AB-C^2)(A+B-2C)} \right] > 0 \quad (3.17)$$

- Artinya bahwa \bar{Y}_{RR}^* lebih efisien dari \bar{y} dalam kondisi apapun.
3. Perbandingkan antara \bar{y} dan \bar{Y}_{RL}^* .
Berdasarkan persamaan (3.11) dan (3.15) diperoleh $V(\bar{y}) - MSE(\bar{Y}_{RR}^*) > 0$.

Studi kasus pada makalah ini menggunakan data produksi kopi di Kecamatan Rangsang Pesisir Kabupaten Teluk Meranti pada tahun 2017 [7]. Data pada populasi terdiri dari 75 petani di Kecamatan Rangsang Pesisir. Variabel tambahan pada kasus ini adalah jumlah masing-masing tanaman (X) digunakan untuk mengetahui rata-rata tingkat produksi kopi (Y).

Menentukan penduga yang efisien untuk menduga rata-rata tingkat produksi kopi dengan menggunakan syarat penduga lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Hal ini secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung MSE dari masing-masing penduga yang diajukan. Sebagai informasi tambahan untuk menduga rata-rata tingkat produksi kopi digunakan jumlah masing-masing tanaman.

Menghitung MSE dari masing-masing penduga terlebih dahulu ditentukan nilai yang dibutuhkan. Informasi yang diperoleh dari data dapat dilihat pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Parameter yang Dibutuhkan Pada Populasi yang Diteliti

| Populasi | N | n | Parameter | | | | | |
|----------|----|----|-----------|-----------|-----------|---------|--------|----------|
| | | | \bar{Y} | \bar{X} | C_y | C_x | ρ | θ |
| I | 75 | 30 | 20729.6 | 956.8 | 0.1119797 | 0.13593 | 0.905 | 0.02 |

dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh pada Tabel 3.1 ke persamaan (2.7), (3.27), dan (3.20) serta menggunakan penduga \bar{Y}_{RR}^* maka diperoleh

- Penduga \bar{Y}_{RL}^* merupakan penduga yang lebih efisien dari pada penduga \bar{y} dengan selisih $88.308,00388 > 0$.
- Penduga \bar{Y}_{RR}^* merupakan penduga yang lebih efisien dari pada penduga \bar{Y}_{RL}^* dengan selisih $17.760,37402 > 0$.
- Penduga \bar{Y}_{RR}^* merupakan penduga yang lebih efisien daripada penduga \bar{y} dengan selisih $1.060683779 \times 10^5 > 0$.

Secara umum untuk menentukan penduga yang lebih efisien dapat juga dihitung berdasarkan nilai variansi atau MSE masing-masing penduga. Adapun penduga \bar{Y}_{RR}^* memiliki kelas penduga yang dibahas dengan nilai α , η dan λ di kelas penduga yang dapat dilihat pada Tabel 3.2 sebagai berikut:

Tabel 3. 1 Kelas penaduga rasio regresi yang dibahas

| Penaksir | Nilai Konstanta | | |
|--|-----------------|--------|-----------|
| | α | η | λ |
| $\bar{Y}_{RR}^* = \frac{B - CD}{AB - D^2} \bar{Y}_{RL} + \frac{AD - C}{AB - C^2} \bar{y} \left[\frac{\bar{X}}{\bar{x}} \right]$ | 1 | 1 | 0 |

Selanjutnya nilai MSE dari masing-masing penduga diberikan pada Tabel 3.3 sebagai berikut.

Tabel 3.3 Nilai MSE Untuk Ketiga Peduga

| Penaksir | MSE |
|------------------|---------------------------|
| \bar{y} | $1,077680779 \times 10^5$ |
| \bar{Y}_{RL}^* | 19460.07402 |
| \bar{Y}_{RR}^* | 19266.84670 |

Pada Tabel 3.3 bahwa kriteria penduga yang efisien melalui perbandingan tiga MSE diperoleh penduga \bar{Y}_{RR}^* merupakan penduga yang lebih efisien dari \bar{y} dan \bar{Y}_{RL}^* sehingga dapat disimpulkan bahwa penduga terbaik dari ketiga penduga yang digunakan adalah penduga \bar{Y}_{RR}^* .

SIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dikemukakan bahwa penduga rasio regresi merupakan penduga yang paling efisien dari dua penduga lainnya.

REFERENSI

- [1] D. N. Gurajati, *Basic Econometrics, Fourth Edition*, McGraw Hill, New York, 2003.
- [2] D. C. Montgomery dan G. C. Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers, Second Edition*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [3] H. P. Singh, A. Rathour dan R. S. Solanki, *An improvement over regression method of estimation*, *Statistica*, 72(2012), 415-429.
- [4] K. M. Ramachandran dan C. P. Tsokos, *Mathematical Statistics with Application in R, Second Edition*, Elsevier, 2015.
- [5] L. J. Bain dan M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition*, Brooks Cole, Pacific Grove, 1991.
- [6] R. G. Bartle dan D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*, Jhon Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2011.
- [7] R. E. Syahrial, *Analisis Faktor Faktor yang Mempengaruhi Produksi Usahatani Kopi di Kecamatan Rangsang Pesisir Kabupaten Kepulauan Meranti*, Skripsi Fakultas Pertanian Universitas Riau, Pekanbaru, 2017.
- [8] W. G. Cochran, *Sampling Techniques, Third Edition*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1977.



PEMBANDINGAN METODE PENDEKATAN EKSPONENSIAL DAN KOMBINASI VAM-MODI DALAM MASALAH TRANSPORTASI

(THE COMPARISON OF EXPONENTIAL APPROXIMATION AND COMBINATION OF VAM-MODI METHODS TO SOLVE TRANSPORTATION PROBLEM)

Notiragayu*
Universitas Lampung

Aulia Safitri
Universitas Lampung

Muslim Ansori
Universitas Lampung

Agus Sutrisno
Universitas Lampung

ABSTRACT: The Transportation Problem is a special cases of Linear Programming with objective to minimize the cost of transportation for commodity from sources to terminals. The Specific structure of transportation problem gives simpler computation procedure than simplex method. In this paper will be discussed Exponential Approximation And Combination Of VAM-MODI Methods To Solve Transportation Problem. For balanced transportation problem and for the problem where the supply is bigger than demand, the two methods give the same optimal solution while for the problem with demand is bigger than supply, the VAM-MODI is better but exponential approximation more efficient.

KEYWORDS: *Exponential approach, VAM-MODI*

* Corresponding Author: Jurusan Matematika FMIPA UNILA Bandar Lampung, Indonesia; Email: notiragayu@fmipa.unila.ac.id

PENDAHULUAN

Masalah transportasi merupakan kelas khusus program linear untuk meminimalkan biaya transportasi komoditas tertentu dari sejumlah asal ke sejumlah tujuan. Kekhususan struktur masalah transportasi menawarkan prosedur penyelesaian yang menghasilkan skema komputasi yang lebih sederhana dibandingkan dengan prosedur simpleks (Diah dkk, 2018). Secara matematis masalah transportasi diformulasikan sebagai berikut:

$$\text{Min } f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Dengan kendala : } \sum_{i=1}^m X_{ij} \geq d_j ; j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} \leq a_i ; i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

Keterangan : C_{ij} = ongkos yang diperlukan untuk mengangkut persatuan unit barang dari i ke j , X_{ij} = jumlah yang akan diangkut dari suplai i ke daerah tujuan j , a_i = umlah yang tersedia di suplai ke I , d_j = permintaan (demand) ke j , m = banyaknya tempat asal dan n = banyaknya tempat tujuan.

Masalah transportasi ditempatkan dalam suatu bentuk tabel khusus yang dinamakan tabel transportasi. Tabel ini mempunyai bentuk umum sebagai berikut :

Tabel 1. Tabel pada Masalah Transportasi

| DARI \ KE | | TUJUAN | | | | | | Kapasitas |
|----------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------------|-----------|
| | | 1 | 2 | ... | J | ... | N | |
| S U M B E R | 1 | C_{11} | C_{12} | ... | C_{1j} | ... | C_{1n} | a_1 |
| | | X_{11} | X_{12} | | X_{1j} | | X_{1n} | |
| | 2 | C_{21} | C_{22} | ... | C_{2j} | ... | C_{2n} | a_2 |
| | | X_{21} | X_{22} | | X_{2j} | | X_{2n} | |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| I | C_{i1} | C_{i2} | ... | C_{ij} | ... | C_{in} | a_j | |
| | X_{i1} | X_{i2} | | X_{ij} | | X_{in} | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | |
| M | C_{m1} | C_{m2} | ... | C_{mj} | ... | C_{mn} | a_m | |
| | X_{m1} | X_{m2} | | X_{mj} | | X_{mn} | | |
| Permintaan | d_1 | d_2 | ... | d_j | ... | d_n | $\sum a_i = \sum d_j$ | |

Dalam masalah transportasi, jika jumlah permintaan sama dengan jumlah persediaan, maka masalah tersebut dinamakan masalah transportasi seimbang (*balance transportation problem*). Jika jumlah permintaan tidak sama dengan jumlah persediaan maka masalah tersebut dinamakan masalah transportasi yang tidak seimbang (*unbalance transportation problem*). Pada masalah transportasi yang tidak seimbang terdapat dua kasus yaitu :

1. Jumlah persediaan melebihi jumlah permintaan
2. Jumlah permintaan melebihi jumlah persediaan

Untuk kedua kasus tersebut, dalam menyelesaikannya harus dibuat seimbang dengan menambahkan peubah 'dummy'. Jika persediaan lebih banyak dari permintaan, maka ditambahkan dummy pada permintaan, sedangkan jika permintaan lebih banyak dari persediaan maka ditambahkan dummy persediaan. (Wamiliana, 2015).

METODE KOMBINASI VAM-MODI

Dalam metode kombinasi VAM-MODI diperlukan dua langkah untuk mendapatkan solusi optimum dari masalah transportasi yaitu mencari solusi fisibel awal dengan metode pendekatan Vogel (VAM) kemudian mengujinya dengan tes uji optimum menggunakan modified distribution (MODI).

Adapun langkah-langkah pada metode *modified distribution* (Wijaya, 2012) sebagai berikut :

1. Membuat tabel transportasi

2. Menghitung nilai indeks pada masing-masing baris dan kolom dengan menggunakan rumus $R_i + K_j = C_{ij}$. Dimana R_i merupakan nilai indeks pada baris i , K_j merupakan nilai indeks pada kolom j dan C_{ij} adalah biaya transportasi dari sumber i ke tujuan j . Pemberian nilai indeks ini harus berdasarkan pada sel yang telah terisi atau digunakan. Sebagai alat bantu untuk memulai pencarian nilai indeks, maka nilai baris pertama (R_1) ditetapkan sama dengan nol.
3. Nilai indeks seluruh baris dan kolom diperoleh menggunakan rumus $R_i + K_j = C_{ij}$.
4. Mencari sel-sel yang kosong atau yang belum terisi
5. Menghitung besarnya nilai pada sel-sel kosong tersebut menggunakan rumus : $I_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j$
6. Apabila nilai sel-sel kosong tersebut keseluruhannya bernilai positif berarti proses tersebut telah menghasilkan biaya transportasi minimum. Apabila masih terdapat nilai negatif berarti masih terdapat penghematan biaya, maka dilakukan proses eksekusi terhadap sel yang memiliki angka negatif (pilih negatif terbesar apabila terdapat lebih dari satu nilai negatif)
7. Proses pengalokasian dilakukan dengan mengamati perpindahan sel yang dapat dilakukan pada tabel kosong tersebut dan memilih unit terkecil pada sel yang bernilai negatif dan menambahkan unit tersebut pada sel yang bernilai positif serta mengurangi unit tersebut pada sel yang bernilai negatif
8. Lakukan langkah dari awal (langkah 1) untuk memastikan semua nilai sel (I_{ij}) kosong tidak ada yang negatif.

192

METODE PENDEKATAN EKSPONENSIAL

Metode Pendekatan Eksponensial mudah dipahami dan memiliki perhitungan dengan sedikit iterasi. Dalam perhitungannya metode ini langsung didapatkan solusi optimum tanpa harus mencari solusi fisibel awalnya terlebih dahulu (Vannan & Rekha, 2013).

Langkah-langkah menentukan solusi optimum dengan metode Pendekatan Eksponensial, sebagai berikut:

1. Membentuk model transportasi (Tabel) dari masalah transportasi yang diberikan.
2. Mengurangi setiap entri baris dari tabel transportasi dari minimum baris masing-masing dan kemudian mengurangi setiap entri kolom tabel transportasi dari minimum kolom masing-masing, sehingga setiap baris dan kolom akan memiliki setidaknya satu nol.
3. Memilih nol yang terdapat pada sel ij dalam tabel. Menghitung jumlah total angka nol yang ada (tidak termasuk nol yang dipilih) dalam baris i dan kolom j . Kemudian menetapkan penalti eksponen (jumlah nol pada baris i dan kolom j tidak termasuk nol yang dipilih). Mengulangi prosedur untuk semua nol dalam tabel.
4. Memilih nol untuk minimum penalti eksponen yang didapat dari langkah 3 dan mengalokasikan nilai sel dengan jumlah maksimum yang mungkin. Jika terjadi nilai penalti eksponen sama untuk setiap sel maka pertama memeriksa nilai permintaan dan persediaan, menghitung nilai rata-ratanya dan menetapkan alokasi

untuk nilai rata-rata yang terendah. Jika tetap sama, maka memeriksa nilai yang sesuai dalam baris dan kolom, memilih yang minimum.

5. Menandai baris atau kolom (di mana persediaan atau permintaan menjadi nol) untuk tidak dimasukkan dalam perhitungan selanjutnya.
6. Memeriksa apakah tabel yang dihasilkan memiliki setidaknya satu nol dalam setiap kolom dan di setiap baris. Jika tidak kembali ke step 2.
7. Mengulangi langkah 3 hingga langkah 6 sampai semua permintaan terpenuhi dan semua persediaan habis.
8. Menghitung biaya optimumnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Data masalah transportasi yang digunakan dalam tulisan ini ada sembilan yang diperoleh dari beberapa sumber dan dibuat dalam 3 kelompok yaitu:

1. kelompok data dengan jumlah persediaan lebih banyak dari jumlah permintaan,
2. kelompok data dengan jumlah permintaan lebih banyak dari jumlah persediaan
3. kelompok data dengan jumlah persediaan sama dengan permintaan.

Kesemua data masalah transportasi ini diselesaikan dengan metode pendekatan eksponensial, metode kombinasi VAM-MODI dan menggunakan solver excel. Hasil perhitungan disajikan dalam table 2.

Table 2. Hasil Penghitungan Seluruh Data

| No. | Sumber Data | Metode Pendekatan Eksponensial | Metode Pendekatan Vogel-MODI | Program Solver Excel |
|-----|-------------------|--------------------------------|------------------------------|----------------------|
| 1. | Bulog Lampung | 441.850.000.000 | 441.850.000.000 | 441.850.000.000 |
| | Siringoringo,2005 | 55.300 | 55.300 | 55.300 |
| | Murthy,2007 | 65.000 | 65.000 | 65.000 |
| 2. | Herjanto,2008 | 29.100 | 28.450 | 35.700 |
| | Noer,2010 | 24.790 | 24.480 | 33.070 |
| | Sitinjak,2006 | 1570 | 1330 | 2070 |
| 3. | Siringoringo,2005 | 4900 | 4900 | 4900 |
| | Agustini,2009 | 785 | 785 | 785 |
| | Wamiliana,2015 | 907,5 | 909 | 907 |

Dari table 2 dapat dilihat hasil perhitungan masalah transportasi pada kelompok data pertama dan ketiga memperlihatkan hasil yang sama baik menggunakan metode eksponensial maupun kombinasi VAM-MODI, demikian juga hasil perhitungan menggunakan solver excel. Untuk kelompok data kedua perhitungan masalah

transportasi menggunakan metode VAM-MODI lebih optimal namun dalam proses perhitungannya melalui iterasi yang lebih banyak.

KESIMPULAN

Untuk masalah transportasi seimbang dan jumlah persediaan lebih besar dari jumlah permintaan, kedua metode pendekatan eksponensial (PE) dan VAM-MODI memberikan hasil optimal yang sama. Sementara untuk jumlah permintaan lebih besar dari jumlah persediaan, metode VAM-MODI lebih optimal dari PE, namun metode PE menggunakan prosedur langkah pintas yang lebih efisien, sementara metode VAM-MODI melalui iterasi yang lebih banyak.

DAFTAR PUSTAKA

Agustini, Dwi H. dan Rahmadi, Yus E. 2009. *Riset Operasional konsep-konsep dasar*. PT. Rineka Cipta, Jakarta.

Chaerani D dkk, 2018. *Pemrograman Linear*, Bitread Publishing, Bandung.

Herjanto, Eddy. 2008. *Manajemen Operasi Edisi 3*. Grasindo, Jakarta.

Murthy, P. Rama. 2005. *Operation Research*. New Age International (P) Ltd, Mumbai.

Siringoringo, Hotniar. 2005. *Seri Teknik Riset Operasional: Pemrograman Linear*. Penerbit Graha Ilmu, Yogyakarta.

Sitinjak, Tumpal J.R. 2006. Riset Operasi untuk Pengambilan Keputusan Manajerial dengan Aplikasi Excel. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Vannan, S. Ezhil and Rekha. 2013. A New Method for Obtaining an Optimal Solution for Transportation Problem. *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)*. (2):369-371.

Wamiliana, 2015. *Program Linear Teori dan Terapannya*. Anugrah Utama Raharja, Bandar Lampung.



PENERAPAN RANTAI MARKOV 3-STATE TERHADAP DATASET RADIASI MATAHARI GELOMBANG PENDEK

(APPLICATION OF 3-STATE MARKOV CHAIN FOR SHORTWAVE SOLAR RADIATION DATASET)

**Retno Wahyuni
Putri***

Univ. Syiah Kuala

Miftahuddin

Univ. Syiah Kuala

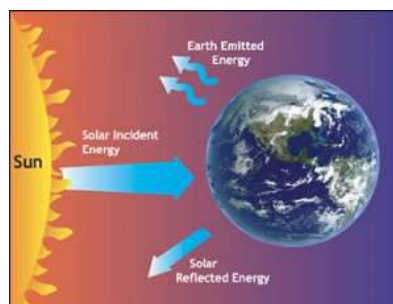
ABSTRACT: In this study discussed the formation of transition matrices, 3-states Markov chains and hypothesis testing of short-wave solar radiation data in the Indian Ocean at point 4N90E. Shortwave solar radiation is a very important element in life on earth which can also be said as an emission of energy that comes from the thermonuclear process that occurs in the sun. Solar radiation energy in the form of light and electromagnetic waves. This radiation is measured at 3.5 meters above sea level. The data used in this study is the SWRad (Shortwave Solar Radiation) dataset, which is data about short-wave solar radiation with daily observations in the period November 2006-June 2017. The 3-states Markov chain with state classification: 3.75 - 100Watt/m², 110 -295Watt/m²; and 300-500Watt/m². The results of model testing were obtained using the Chi-square test with a significant level of 0.05 indicating that there were differences in changes in the wavelength of shortwave solar radiation every day.

KEYWORDS: *Transition Matrix, Shortwave Solar Radiation, Chi Square Test*

* Corresponding Author: Jurusan Statistika, FMIPA, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh; Email: retnowahyuni Putri2000@gmail.com

PENDAHULUAN

Radiasi matahari merupakan salah satu parameter yang penting dalam pengukuran kenaikan pengaruh aktivitas manusia terhadap atmosfer oleh Global Atmosphere Watch (GAW) dikarenakan semakin tinggi potensi pemanasan global. Radiasi matahari dapat diklasifikasikan menjadi dua yaitu radiasi gelombang pendek dan radiasi gelombang panjang.



Gambar 1. Keseimbangan radiasi matahari

Tujuan dalam penelitian ini merancang sebuah Matriks Transisi dan Rantai Markov Radiasi Gelombang Pendek Cahaya Matahari. Sensor utama yang digunakan adalah Termopile yang akan mengukur intensitas radiasi gelombang pendek cahaya

matahari. Hasil pengukuran dari alat ini berupa tegangan yang diolah dan dikonversi oleh mikrokontroler ATmega2560 menjadi satuan radiasi matahari watt/m² dengan menggunakan nilai sensitifitas yang diperoleh dari kalibrasi *pyranometer* standar di laboratorium kalibrasi BMKG.



Gambar 2. Termopile



Gambar 3. Mikrokontroler



Gambar 4. Pyranometer

Radiasi matahari merupakan unsur yang sangat penting dalam kehidupan kita. Intensitas radiasi matahari akan berkurang oleh penyerapan dan pemantulan oleh atmosfer saat sebelum mencapai permukaan bumi. Ozon di atmosfer menyerap radiasi dengan panjang gelombang pendek (*ultraviolet*) sedangkan karbondioksida dan uap air menyerap sebagian radiasi dengan panjang gelombang yang lebih panjang (inframerah). Ada juga radiasi yang dipancarkan oleh molekul-molekul, gas, debu dan uap air dalam atmosfer.

Penyinaran atau isolasi adalah penerimaan energi matahari oleh permukaan bumi, bentuknya adalah sinar-sinar bergelombang pendek yang menerobos atmosfer. Sebelum mencapai permukaan bumi, sebagian hilang karena absorpsi. Adapun yang berhasil sampai ke bumi kemudian dilepaskan pula melalui refleksi, ini terutama terjadi di kedua daerah kutub bumi dan di dataran-dataran salju perairan. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan matriks peluang transisi dan bentuk rantai markov dari data SWRad di Samudera Hindia.

BAHAN DAN METODE

SW Rad (*Shortwave Solar Radiation*)

Radiasi matahari gelombang pendek diukur pada 3,5 meter di atas permukaan laut. Radiasi matahari gelombang pendek dapat juga dikatakan suatu pancaran energi

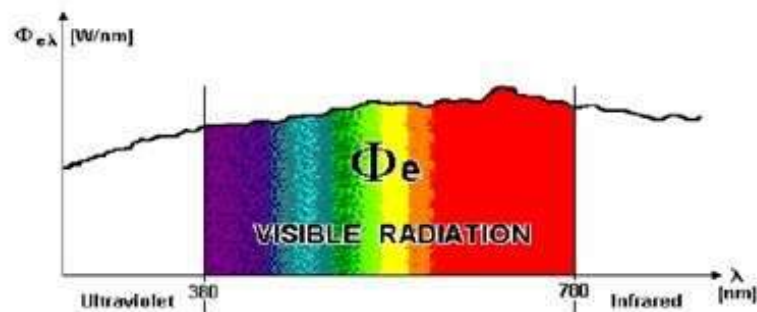
yang berasal dari proses *thermonuklir* yang terjadi di Matahari. Energi radiasi Matahari berbentuk sinar dan gelombang elektromagnetik. (Ahmad dadan,2019).

Menurut Ahmad Dadan, jumlah total radiasi yang diterima di permukaan bumi tergantung 4 (empat) faktor. Yaitu :

1. Jarak Matahari. Setiap perubahan jarak bumi dan Matahari menimbulkan variasi terhadap penerimaan energi Matahari
2. Intensitas radiasi Matahari, yaitu besar kecilnya sudut datang sinar Matahari pada permukaan bumi. Jumlah yang diterima berbanding lurus dengan sudut besarnya sudut datang. Sinar dengan sudut datang yang miring kurang memberikan energi pada permukaan bumi disebabkan karena energinya tersebar pada permukaan yang luas dan juga karena sinar tersebut harus menempuh lapisan atmosfer yang lebih jauh ketimbang jika sinar dengan sudut datang yang tegak lurus.
3. Panjang hari (*sun duration*), yaitu jarak dan lamanya antara Matahari terbit dan Matahari terbenam. Pengaruh atmosfer. Sinar yang melalui atmosfer sebagian akan diadsorpsi oleh gas-gas, debu dan uap air, dipantulkan kembali, dipancarkan dan sisanya diteruskan ke permukaan bumi.

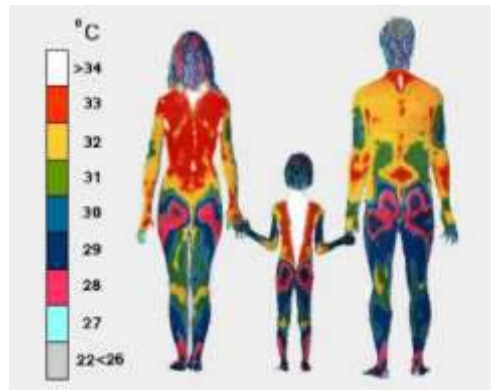
Energi radiasi matahari berbentuk sinar dan gelombang elektromagnetik. Radiasi elektromagnetik dapat dibedakan menjadi dua, yaitu :

- a. Radiasi yang terlihat oleh mata kita (visible radiation) cahaya



Gambar 5. Visible radiaton

- b. Radiasi yang dapat kita rasakan (kulit), namanya infra merah.



Gambar 6. Sinar inframerah yang dapat dirasakan kulit

Sedangkan berdasarkan asal (sumbernya), dapat dibedakan menjadi 3 klasifikasi, yaitu:

1) Radiasi Solar

Adalah radiasi yang dikeluarkan oleh matahari. Kira-kira 99.9% dari radiasi ini berupa elektromagnetik dengan panjang gelombang cahaya radiasi antara 0.15 – 4.0 micron atau 3.75- 100 watt/m².

2) Radiasi Terrestrial

Adalah radiasi yang dikeluarkan oleh planet bumi termasuk atmosfernya. Dengan panjang gelombang cahaya radiasi antara 110 – 295 watt/m².

3) Radiasi Total

Adalah jumlah radiasi solar dan terrestrial. Panjang gelombangnya cahaya radiasi antara 300-500 watt/m² (BMKG,2015).

Dalam penelitian ini, jenis data yang digunakan adalah data SWRad (*Shortwave Solar Radiation*) yaitu data tentang Radiasi Matahari gelombang pendek dengan pengambilan data secara harian mulai dari tahun 2006-2017 (NOAA,2019).

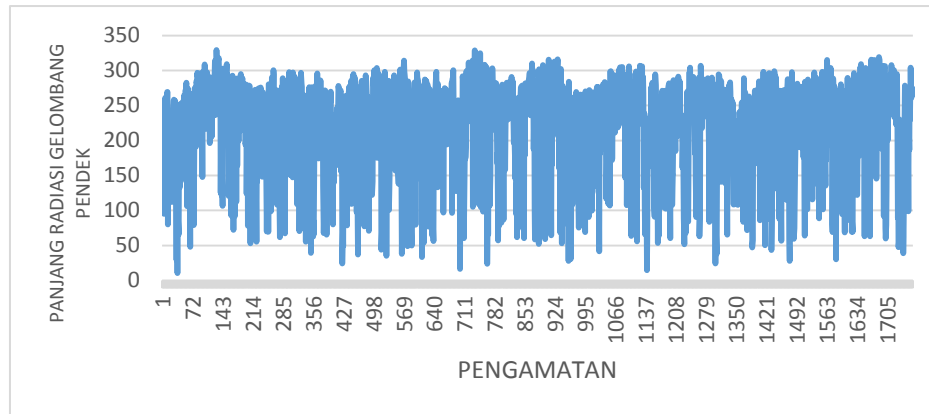
HASIL DAN PEMBAHASAN

Deskriptif Data

Tabel 1. *Summary Data*

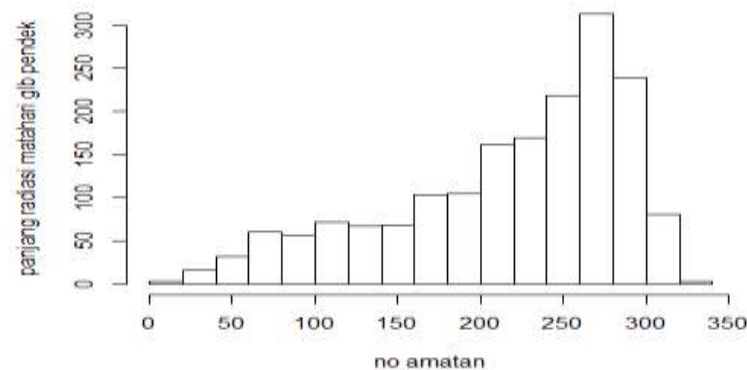
| Ukuran Pemusatan | | Ukuran Penyebaran | |
|------------------|--------|-------------------|---------|
| Median | 236.36 | Standar Deviasi | 91.29 |
| Modus | 265.72 | Varians | 7503.18 |
| Rata-Rata | 214.27 | Range | 300.05 |
| Q1 | 173.09 | Nilai Max | 329.17 |
| Q3 | 272.28 | Nilai minimum | 29.12 |

Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa panjang minimum radiasi matahari gelombang pendek di samudera hindia yaitu 29.12 watt/m^2 dan maksimum yaitu 329.17 watt/m^2 . Kemudian diperoleh median sebesar 236.36 watt/m^2 , rata-rata sebesar 214.27 watt/m^2 , dan modus sebesar 265.72 watt/m^2 . Untuk pola time series data kedalaman laut ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 7. Plot time series Radiasi Matahari Gelombang Pendek di Samudera Hindia

Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa Plot time series data radiasi matahari gelombang pendek di Samudera Hindia dari 17 November 2006 sampai 14 Juni 2017 membentuk pola stasioner. Untuk grafik histogram data kedalaman laut ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 8. Histogram data Radiasi matahari gelombang pendek di Samudera Hindia

Berdasarkan Gambar 3 diketahui bahwa histogram menjulur ke kiri karena data menumpuk pada pengamatan 150 sampai 300. Artinya bisa dikatakan bahwa data tidak berdistribusi normal.

Menentukan *State* (Keadaan) dan Rantai Markov

Keadaan adalah anggota dari ruang sampel atau himpunan bagian dari ruang sampel. Keadaan merupakan suatu kegiatan yang dapat menghasilkan *output*. Ruang keadaan adalah kumpulan semua keadaan dari suatu percobaan statistik yang dinotasikan dengan S . $S = \{X_n, n \geq 0\}$ dimana X_n yaitu kondisi Radiasi Matahari gelombang pendek dapat dinyatakan dengan:

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{Jika panjang radiasi matahari berada di bawah } 3.75 - 100\text{Watt/m}^2 \\ 2 & \text{Jika panjang radiasi matahari berada di antara } 110-295\text{Watt/m}^2 \\ 3 & \text{Jika panjang radiasi matahari berada di antara } 300-500\text{Watt/m}^2 \end{cases}$$

Sumber : Ketentuan standar di laboratorium kalibrasi BMKG 2015.

Peluang Transisi dan Rantai Markov

- **Matriks Peluang Transisi**

Tabel 2. Frekuensi panjang radiasi matahari gelombang pendek di Samudera Hindia

| Panjang radiasi 3.74-100 watt/m ² | Panjang radiasi 110- 295watt/m ² | Panjang radiasi 300- 500watt/m ² |
|---|--|--|
| 171 | 1524 | 70 |

Untuk memperoleh nilai peluang transisi digunakan rumus peluang $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ sehingga diperoleh:

$$p_{11} = \frac{n(1)}{n(S)} = \frac{171}{1765} = 0.096884$$

$$p_{12} = \frac{n(2)}{n(S)} = \frac{1524}{1765} = 0.863456$$

$$p_{13} = \frac{n(3)}{n(S)} = \frac{70}{1765} = 0.03966$$

Dengan demikian matriks peluang transisinya adalah:

$$p_i = [p_{11} \quad p_{12} \quad p_{13}]$$

$$p_i = [0.096884 \quad 0.863456 \quad 0.03966]$$

Tabel 3. Frekuensi Kondisi panjang gelombang radiasi matahari pada saat $t - 1$
Samudera Hindia.

| | rendah | normal | tinggi |
|--------|--------|--------|--------|
| rendah | 29 | 136 | 6 |
| normal | 135 | 1344 | 49 |
| tinggi | 2 | 48 | 20 |

Kemudian ,untuk memperoleh nilai matriks peluang transisi digunakan rumus peluang

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix}, \text{ setiap state dimisalkan dengan huruf dari a sampai e.}$$

e.

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad P_{ij} = \begin{vmatrix} 29 & 136 & 6 \\ 135 & 1344 & 49 \\ 2 & 48 & 20 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 171 \\ 1528 \\ 70 \end{matrix}$$

Untuk mendapatkan peluang transisinya :

201

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{n(1)}{n(S)} = \frac{29}{171} = 0.169591 & p_{12} &= \frac{n(2)}{n(S)} = \frac{136}{171} = 0.795322 \\ p_{13} &= \frac{n(3)}{n(S)} = \frac{6}{171} = 0.035088 & p_{21} &= \frac{n(4)}{n(S)} = \frac{135}{1528} = 0.088351 \\ p_{22} &= \frac{n(5)}{n(S)} = \frac{1344}{1528} = 0.879581 & p_{23} &= \frac{n(6)}{n(S)} = \frac{49}{1528} = 0.032068 \\ p_{31} &= \frac{n(7)}{n(S)} = \frac{2}{70} = 0.028571 & p_{32} &= \frac{n(8)}{n(S)} = \frac{48}{70} = 0.685714 \\ & & p_{33} &= \frac{n(9)}{n(S)} = \frac{20}{70} = 0.285714 \end{aligned}$$

Bentuk peluang matriks transisinya adalah :

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} 0.169591 & 0.795322 & 0.035088 \\ 0.088351 & 0.879581 & 0.032068 \\ 0.028571 & 0.685714 & 0.285714 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Rantai Markov

Model Rantai Markov dikembangkan oleh seorang ahli Rusia A.A. Markov pada tahun 1896. Analisa Rantai Markov adalah suatu metode yang mempelajari sifat - sifat suatu kejadian pada masa sekarang yang didasarkan pada sifat-sifatnya dimasa lalu dalam usaha menaksir sifat-sifat kejadian tersebut dimasa yang akan datang.

Dengan demikian, Rantai Markov akan menjelaskan gerakan dinamis beberapa variabel dalam satu periode waktu di masa yang akan datang berdasarkan informasi kejadian di masa kini. (Norris, 1997). Secara matematis dapat ditulis:

$\mathbf{X}_{t(j)} = \mathbf{P} \mathbf{X}_{t(j-1)}$ dimana : $X_{t(j)}$ = peluang kejadian, $P_{t(j)}$ = Probabilitas Transisional dan $t(j)$ = waktu ke- j

Proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ dikatakan sebagai rantai markov jika diketahui keadaannya, maka peluang keadaan suatu proses pada satu langkah kedepannya hanya di pengaruhi oleh keadaan sekarang. Secara sistematis dapat ditulis:

$$P[X(t_{n+1}) \in A | X(t) = x_t, t \leq t_n] = P[X(t_{n+1}) \in A | X(t_n) = x_{t_n}]$$

3.5 Sifat-sifat Rantai Markov

Suatu *state* j dikatakan *accessible* dari *state* i dan sebaliknya *state* i *accessible* dari *state* j , maka *state* i dan j dikatakan *communicate* (berkomunikasi) sebagai akibat dari definisi komunikasi, maka sifat-sifat relasi komunikasi sebagai berikut:

- **Sifat Refleksif**

Setiap *state* berkomunikasi dengan *state* itu sendiri, $P_{ii} = P[X_0 = i | (X_0 = i) = 1]$

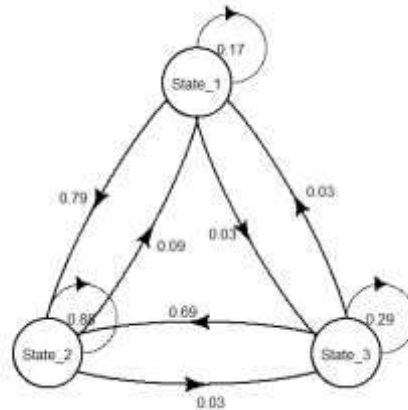
- **Sifat Simetris**

Jika *state*- i berkomunikasi dengan *state*- j , maka *state*- j berkomunikasi dengan *state*- i

- **Sifat Transitif**

Jika *state*- i berkomunikasi dengan *state*- j dan *state*- j berkomunikasi dengan *state*- k , maka *state*- i berkomunikasi dengan *state*- k (Pardoux, 2008).

Proses dikatakan *irreducible* bila setiap *state* dapat dicapai dari setiap *state* yang lain baik melalui transisi langsung maupun melalui beberapa urutan transisi. Proses dikatakan *reducible*, jika ruang keadaan hanya terdiri dari satu kelas, yaitu i jika dan hanya jika j , dimana sekali proses berada di *state*- j , $j \leq K$, proses tidak mungkin kembali ke *state* $K+1, K+2, \dots, N$. Suatu *state*- i dikatakan *recurrent* jika $P_i(X_n = i, n \text{ tak hingga}) = 1$, atau dengan kata lain jika suatu *state* dapat terjadi (muncul) lagi. *State recurrent* i dikatakan *recurrent positif* jika ekspektasi waktu sampai proses kembali ke *state* i adalah berhingga. Suatu *state* dikatakan *transient* jika $P_i(X_n = i, n \text{ tak hingga}) = 0$. Proses rantai markov dikatakan *ergodic* apabila *irreducible*, *recurrent positif*, dan *aperiodic* (Nawang Sari, 2008). Berdasarkan data SWRad dengan 3-*states*, dimana bentuk lingkaran merupakan *state* dan tanda panah merupakan nilai peluang transisinya. Maka bentuk rantai Markovnya adalah



Gambar 9. Peluang Rantai Markov

Berdasarkan rantai markov diatas dapat dilihat dari peluang yang nilainya paling besar adalah dari *state-2* (pada saat panjang radiasi matahari gelombang pendeknya dalam keadaan normal) menuju ke dirinya sendiri yaitu 0.88, kemudian dari *state-1* (pada saat panjang radiasi matahari gelombang pendek dalam keadaan rendah) ke *state-2* (pada saat panjang radiasi matahari gelombang pendeknya dalam keadaan normal) sebesar 0.79 dan yang terakhir adalah dari *state-3* (pada saat panjang radiasi matahari gelombang pendeknya dalam keadaan tinggi) menuju *state-2* (pada saat panjang radiasi matahari gelombang pendeknya dalam keadaan normal) yaitu sebesar 0.69. Semua yang menuju *state-2* memiliki peluang yang besar, mungkin dikarenakan *state-2* merupakan titik normal dari keadaan radiasi matahari gelombang pendek tersebut.

Uji Hipotesis *Chi-square*

Untuk menguji hipotesis digunakan persamaan uji statistik distribusi *Chi-square*. Hipotesisnya adalah,

H_0 : (Tidak ada perbedaan perubahan panjang gelombang pada radiasi matahari gelombang pendek setiap harinya) sedangkan

H_1 : (Ada perbedaan perubahan panjang gelombang pada radiasi matahari gelombang pendek setiap harinya).

Taraf signifikan (0.05), dengan derajat kebebasan $s^{r-1}(s-1)^2$ dimana untuk daerah penolakan hipotesisnya adalah : H_0 ditolak jika $X_{hitung}^2 > X_{tabel}^2(\alpha)$.

Statistik uji

$$x_{hitung}^2 = 2 \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_{ij} (\ln p_{ij} - \ln p_i) \right]$$

$$\begin{aligned}
 x_{hitung}^2 &= 2[29(\ln 0.169591 - \ln 0.096884) + 136(\ln 0.795322 - \ln 0.863456) + \\
 &6(\ln 0.035088 - \ln 0.03966) + 135(\ln 0.088351 - \ln 0.096884) + 1344(\ln 0.879581 - \\
 &\ln 0.863456) + 49(\ln 0.032068 - \ln 0.03966) + 2(\ln 0.028571 - \ln 0.096884) + \\
 &48(\ln 0.685714 - \ln 0.8634) + \\
 &20(\ln 0.285714 - \ln 0.03966)] \\
 x_{hitung}^2 &= 89.52
 \end{aligned}$$

Keputusan

Dari tabel Chi-square dengan taraf signifikan (α) sebesar 0,05 dan derajat kebebasan sebesar 3 diperoleh $x_{tabel}^2 = 7.81$. Karena $x_{hitung}^2 = 89.52 > X_{tabel}^2(\alpha) = 7.81$ maka H_0 ditolak pada taraf signifikan 5%. Hal ini berarti bahwa orde 0 dan orde 1 berbeda begitu juga dengan orde lainnya. Maka dapat dikatakan ada perbedaan perubahan panjang gelombang pada radiasi matahari gelombang pendek setiap harinya.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. Eksplorasi data radiasi matahari gelombang pendek adalah panjang minimum radiasi matahari gelombang pendek di Samudera Hindia yaitu 29.12 watt/m² dan maksimum yaitu 329.17 watt/m². Kemudian diperoleh median sebesar 236.36 watt/m², rata-rata sebesar 214.27 watt/m², dan modus sebesar 265.72 watt/m².
2. Berdasarkan histogram data radiasi matahari gelombang pendek menjulur ke kiri karena data menumpuk pada pengamatan 150 sampai 300. Artinya dapat dikatakan bahwa data tidak berdistribusi normal.
3. Berdasarkan rantai markov 3-states diperoleh bahwa peluang transisi tertinggi yaitu *state-2* panjang radiasi matahari dalam keadaan normal menuju dirinya sendiri panjang radiasi matahari sebesar 0.88, dengan peluang transisi terendah yaitu *state-3* panjang radiasi matahari dalam keadaan tinggi menuju *state-1* panjang radiasi matahari dalam keadaan rendah sebesar 0.03.
4. Pada pengujian hipotesis dengan uji Chi-square dengan taraf signifikan 0.05 didapatkan hasil bahwa ada perbedaan perubahan panjang gelombang pada radiasi matahari gelombang pendek.

UCAPAN TERIMAKASIH

Kepada semua pihak dan panitia yang telah mendukung dalam kegiatan SEMIRATA 2019, Ketua Jurusan Statistika FMIPA Unsyiah, LPPM Unsyiah dan rekan-rekan grup riset dalam memberi kontribusi dalam kegiatan ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, T.W. & Goodman, L.A. (2014). Statistical Inference about Markov Chains. *Journal The Annals of Mathematical Statistics*, halaman 100. Columbia University and University of Chicago.
- Dadan Ahmad. (2019). <https://www.sridianti.com/pengertian-radiasi-matahari.html> diakses pada tanggal 26 Maret 2019.
- Dwijanto. (2019). <http://ilmugeografi.com> diakses pada tanggal 27 Maret 2019.
- Mirah. (2002). Analisis Markov. <http://gustimirah.blogspot.com/2009/12/analisis-markov.html>. diakses pada tanggal 16 November 2017.
- Nawangsari, S., Iklima, F.M., & Wibowo, E.P. (2008). Konsep Markov Chain Untuk Menyelesaikan Prediksi Bencana Alam Di Wilayah Indonesia Dengan Studi Kasus Kotamadya Jakarta Utara. *Jurnal: Universitas Gunadarma*.
- Norris J.R. 1997. *Markov Chains*. Cambridge University Press, United Kingdom.
- Pardoux E., 2008. *Markov Process and Applications*. John Wiley and Sons Ltd., United Kingdom.
- Saji, N.H., B.N. Goswami, P.N. Vinayachandran, and T. Yamagata 1999: *Adipole mode in the tropical Indian Ocean*, *Nature.*, 401, 360-363.
- Web lembaga penelitian cuaca National Oceanic and Atmospheric Administration's (NOAA), (<http://www.pmel.noaa.gov/toa/dsupal/disedel>).



ESTIMASI PERSENTASE BUTA HURUF DI KABUPATEN MUKOMUKO DENGAN METODE *ROBUST EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION (REBLUP)*

Rizki Apriva

Hidayana *

Universitas Bengkulu

Fachri Faisal

Universitas Bengkulu

Etis Sunandi

Universitas Bengkulu

ABSTRACT: Buta huruf adalah proporsi penduduk usia tertentu yang tidak dapat membaca dan menulis huruf latin atau huruf lainnya terhadap penduduk usia tertentu. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan mengoptimalkan data yang tersedia dengan menggunakan metode pendugaan *area kecil*. Penelitian ini bertujuan untuk mengestimasi persentase buta huruf di Kabupaten Mukomuko dengan metode *Robust Empirical Best Linear Unbiased Prediction (REBLUP)* dan membandingkan nilai MSE dari penduga langsung dengan penduga *area kecil* menggunakan metode REBLUP. Data yang digunakan dalam penelitian ini meliputi persentase buta huruf, persentase keluarga miskin, persentase keluarga tanpa akses listrik, jumlah sarana kesehatan, jumlah penderita gizi buruk, jumlah kematian ibu saat melahirkan dan akses jalan. Analisis data yang digunakan yaitu pengecekan *outlier* pada data kemudian mengaplikasikan metode REBLUP serta menghitung nilai MSE. Hasil yang diperoleh yaitu nilai estimasi persentase buta huruf dengan menggunakan metode REBLUP dan menunjukkan bahwa nilai MSE penduga langsung jauh lebih besar dibandingkan penduga *area kecil* menggunakan metode REBLUP.

KEYWORDS: *REBLUP, area kecil, outlier, buta huruf, MSE*

PENDAHULUAN

Buta huruf adalah proporsi penduduk usia tertentu yang tidak dapat membaca dan menulis huruf latin atau huruf lainnya terhadap penduduk usia tertentu. Menurut Badan Pusat Statistik tahun 2017 tingkat persentase buta huruf di Provinsi Bengkulu yaitu 6,19% dan Kabupaten Mukomuko merupakan kabupaten yang memiliki persentase buta huruf paling besar di setiap tahunnya (Anonim, 2017).

Pendugaan buta huruf di tiap kecamatan atau desa tidak dapat dilakukan dengan mudah karena sampel yang tersedia terlalu kecil sehingga pendugaan buta huruf tidak cukup menggambarkan pada beberapa kecamatan atau desa. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan mengoptimalkan data yang tersedia dengan menggunakan metode pendugaan *area kecil*.

Area kecil didefinisikan sebagai sub populasi yang memiliki ukuran contoh yang kecil. Pendugaan *area kecil* merupakan pendugaan tidak langsung yang didasarkan pada model. Salah satu solusi yang digunakan pada pendugaan tidak langsung yaitu dengan cara menambahkan variabel-variabel pendukung dalam menduga parameter. Pendugaan *area kecil* memiliki beberapa macam pendekatan diantaranya adalah *Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP)*, *Empirical Bayes (EB)*, dan *Hierarchical Bayes (HB)*.

Metode yang digunakan untuk pendugaan *area* kecil salah satunya yaitu metode EBLUP yang menggunakan data kontinu dan berdistribusi Normal. Namun, tidak semua data yang digunakan berdistribusi Normal, adakalanya data yang digunakan memiliki *outlier*. Pada pendugaan *area* kecil, metode yang dapat digunakan untuk mengatasi *outlier* yaitu metode *Robust Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (REBLUP) dengan menggunakan pendekatan *M-Estimation*. Metode REBLUP *M-Estimation* dapat meminimumkan *Mean Square Error* (MSE) (Rao dan Isabel, 2015).

Beberapa penelitian yang telah dilakukan mengenai pendugaan *area* kecil dan *Robust Small Area Estimation* diantaranya yaitu Murtinasari, Hadi dan Anggraeni (2017) menggunakan *Robust Small Area Estimation* untuk kebutuhan rumah sederhana di Kabupaten Jember sehingga dengan menggunakan metode *Robust Small Area Estimation* dan membandingkan dengan metode EBLUP, metode *robust* baik digunakan untuk data *outlier* dan diperoleh yang membutuhkan jumlah rumah sederhana yang paling banyak yaitu Kecamatan Silo dan yang membutuhkan rumah sederhana paling sedikit yaitu Kecamatan Arjasa. Ningtyas, Rahmawati dan Wulandari (2015) menerapkan metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) pada model penduga *area* kecil dalam pendugaan pengeluaran per kapita di Kabupaten Brebes sehingga diperoleh bahwa pendugaan *area* kecil dengan metode EBLUP menghasilkan nilai *Mean Square Error* (MSE) lebih kecil dibandingkan dengan nilai MSE penduga langsung.

Berdasarkan uraian diatas, maka penulis akan mengaplikasikan metode REBLUP dengan menggunakan pendekatan *M-Estimation* tentang buta huruf level kecamatan di Kabupaten Mukomuko. Oleh karena itu tujuan yang akan dilakukan yaitu untuk mengestimasi persentase buta huruf di Kabupaten Mukomuko dengan metode *Robust Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (REBLUP). Membandingkan nilai penduga langsung dengan penduga *area* kecil dengan metode REBLUP

BAHAN DAN METODE

Penelitian ini menggunakan data persentase buta huruf (y), persen keluarga miskin (x_1), persen keluarga tanpa akses listrik (x_2), jumlah sarana kesehatan (x_3), jumlah penderita gizi buruk (x_4), jumlah kematian ibu saat melahirkan (x_5) dan akses jalan (x_6).

Small Area Estimation (SAE)

Small Area Estimation merupakan pendugaan parameter pada sub populasi yang lebih kecil dengan menggunakan informasi tambahan yang akan mempunyai sifat “meminjam kekuatan” (*borrowing strength*) dari hubungan antara rata-rata *area* kecil dan informasi tambahan tersebut. Informasi tambahan tersebut diperoleh dari variabel penyertanya. SAE memiliki dua jenis model dasar yang digunakan, yaitu model berbasis *area* dan model berbasis unit. Model yang digunakan dalam penelitian ini

adalah model berbasis area, karena data yang digunakan merupakan data yang terdapat pada area tertentu yaitu pada level area kecamatan.

Basic area level model atau model berbasis area merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan data penyerta yang hanya ada untuk level area tertentu, misalkan $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_{pi})^T$ dengan parameter yang akan diduga adalah θ_i yang diasumsikan mempunyai keterkaitan dengan \mathbf{x}_i . Data pendukung atau penyerta tersebut digunakan untuk membangun model

$$\theta_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i \quad (2.3)$$

dimana $i = 1, 2, 3, \dots, p$ dan $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$.

Keterangan :

θ_i : parameter penduga buta huruf di area-i

\mathbf{x}_i : vektor variabel pendukung yang diketahui elemen-elemennya

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter berukuran $p \times 1$ dimana $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \dots, \beta_{pi})$

v_i : pengaruh acak area kecil dengan asumsi $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$

Estimator θ_i dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung $\hat{\theta}_i$ telah tersedia yaitu:

$$\hat{\theta}_i = \theta_i + e_i \quad (2.4)$$

dimana $i = 1, 2, 3, \dots, p$ dengan $e_i \sim N(0, \psi_i)$ dan ψ_i diketahui.

Jika persamaan (2.3) dan (2.4) digabungkan, maka diperoleh model linier campuran (*mixed model*) sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_i \quad (2.5)$$

(Rao dan Isabel, 2015).

Model di atas dikenal sebagai model *Fay-Herriot*, dimana model tersebut terdiri dari pengaruh acak dan pengaruh tetap sehingga merupakan bentuk khusus dari model linier campuran (Kurnia, 2009).

Model pengaruh tetap dimana asumsi bahwa keragaman di dalam *small area* pada variabel respon dapat diterangkan seluruhnya oleh hubungan keragaman yang bersesuaian pada informasi tambahan. Sedangkan model pengaruh acak dimana asumsi keragaman spesifik *small area* tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan (Murtinasari, Hadi, dan Anggraeni, 2017).

Metode *Robust Empirical Best Linear Prediction* (REBLUP)

Untuk menduga parameter dengan *Robust Empirical Best Linear Prediction* (REBLUP) yaitu menggunakan REBLUP *M-Estimation*. *M-estimation* merupakan

metode regresi *robust* yang sering digunakan. *M-estimation* dipandang dengan baik untuk mengestimasi parameter yang disebabkan oleh pencilan (*outlier*). Pada prinsipnya, *M-estimation* merupakan estimasi yang meminimumkan jumlah fungsi *error* (Cahyandari dan Hisani, 2012). Penduga $\hat{\theta}_i^{REBLUP}$ dapat dibuat tidak sensitif terhadap *sample outlier* dengan menggantikan $\hat{\beta}$ dengan alternatif *robust outlier* (Chambers, Chandra dan Salvati, 2014). Huber dalam Chen (2002) mengatakan bahwa *M-Estimation* merupakan pendekatan yang paling sederhana baik komputasi maupun teoritis, fungsi yang digunakan dalam *M-Estimation* yaitu ψ melibatkan pengkuadratan residual yang kecil. Pada *Robust Empirical Best Linear Prediction*, *outlier* terjadi pada pengaruh acak yaitu $\hat{\beta}$ dan v sehingga fungsi ψ berada pada penduga *robust* untuk $\hat{\beta}$ dan v . Dalam Murtinasari, Hadi dan Anggraeni (2017), Payam dan Ray menuliskan bentuk prediktor *mean* dari REBLUP dengan *M-Estimation* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_i^{REBLUP\ MST} &= \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}^\psi + (1 - B_i)(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}^\psi) \\ &= \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}^\psi + y_i - B_i y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}^\psi + B_i \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}^\psi \\ &= (1 - B_i)y_i + B_i \mathbf{x}_i^T \hat{\beta}^\psi\end{aligned}\quad (2.11)$$

dengan

$$B_i = \frac{D_i}{A + D_i} \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, p$$

$A = \hat{\sigma}_v^2$ dan $D_i = \psi_i$ dengan ψ_i diketahui

Penduga $\hat{\beta}^\psi$ merupakan vektor penduga *robust M-estimation* dari pengaruh tetap dan pengaruh acak model. Berdasarkan Chambers, dkk (2012) digunakan pendugaan *Mean Square Error* dari $\hat{\theta}_i^{REBLUP\ MST}$ berdasarkan pendekatan *bootstrap*. Metode *bootstrap* adalah metode berbasis resampling data sampel dengan syarat pengembalian pada datanya dalam menyelesaikan statistik ukuran suatu sampel dengan harapan sampel tersebut mewakili data populasi sebenarnya. Adapun *Mean Square Error*nya yaitu:

$$MSE(\hat{\theta}_i^{REBLUP\ MST}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_i^{REBLUP\ MST*(b)} - \theta_i^{*(b)})^2 \quad (2.12)$$

dimana

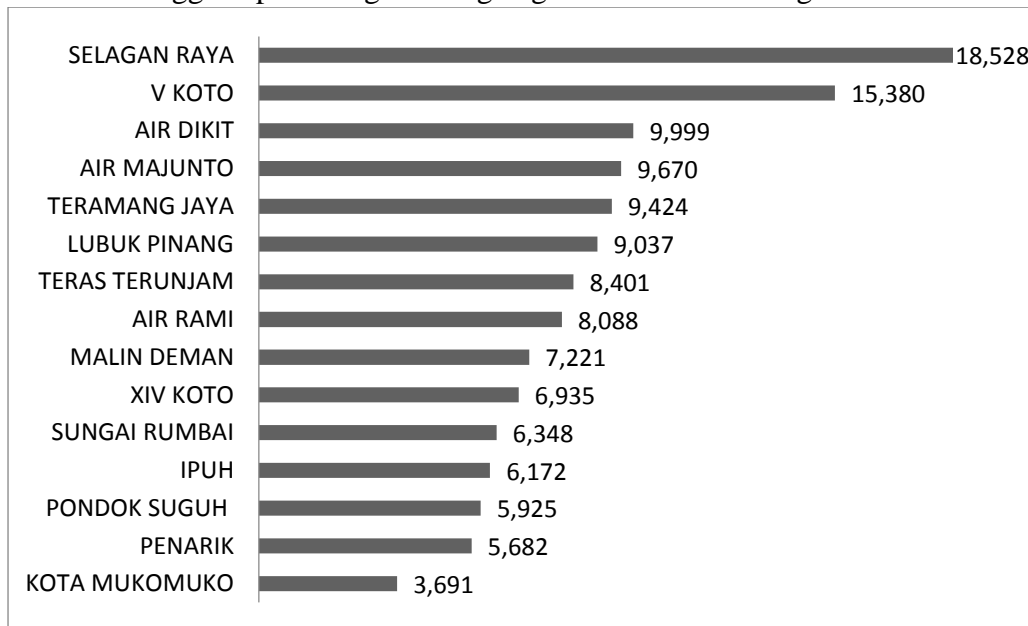
B : banyaknya pengulangan *bootstrap*

(Chambers, Chandra dan Salvati, 2014)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Nilai pendugaan langsung persentase buta huruf telah diperoleh dari BPS Kabupaten Mukomuko sehingga diperoleh nama-nama desa yang memiliki persentase paling besar dan paling kecil di Kabupaten Mukomuko. Kecilnya ukuran contoh

menyebabkan penduga langsung tidak dapat memberikan dugaan dengan presisi yang memadai. Sehingga dapat diringkas dengan grafik dan tabel sebagai berikut:



Gambar 1. Rata-rata Penduga langsung per kecamatan Kabupaten Mukomuko

210

Pendugaan langsung persentase buta huruf untuk setiap kecamatan dapat dilihat pada ringkasan tabel berikut:

Tabel 1. Pendugaan Langsung Persentase Buta Huruf ($\hat{\theta}$) per Kecamatan

| Variabel | N | Rata-rata | Maksimu | Minimum | Q_1 | Q_2 | Q_3 |
|----------------|----|-----------|---------|---------|-------|-------|-------|
| $\hat{\theta}$ | 15 | 8,700 | 18,528 | 3,591 | 6,17 | 8,08 | 9,67 |
| | | | | | 2 | 8 | 0 |

Tabel 1 menyajikan pendugaan langsung persentase buta huruf per kecamatan dengan 15 kecamatan yang ada di Kabupaten Mukomuko. Nilai rata-rata yang diperoleh dari 15 kecamatan tersebut ialah 8,700. Hasil dugaan terendah persentase buta huruf yaitu 3,591 terdapat pada Kecamatan Kota Mukomuko. Kecamatan Kota Mukomuko memiliki 9 desa yang terdapat di Kabupaten Mukomuko. Untuk hasil dugaan tertinggi yaitu 18,528 terdapat pada Kecamatan Selagan Raya dan kecamatan ini juga memiliki 9 desa. Selanjutnya, 25% pendugaan langsung persentase buta huruf yaitu 6,172 dan 75% nya yaitu 9,670.

Untuk perhitungan *Mean Square Error* (MSE) penduga langsung dapat dilihat pada Persamaan (2.2). Sehingga diperoleh hasil MSE penduga langsung sebagai berikut:

Tabel 2. Hasil MSE Penduga Langsung

| Nama Kecamatan | MSE Penduga Langsung | Nama Kecamatan | MSE Penduga Langsung |
|----------------|----------------------|----------------|----------------------|
| Air Dikit | 30,829 | Pondok Suguh | 11,441 |
| Air Majunto | 5,654 | Selagan Raya | 41,959 |
| Air Rami | 36,816 | Sungai Rumbai | 5,935 |
| Ipuh | 25,445 | Teramang Jaya | 18,087 |
| Kota Mukomuko | 12,134 | Teras Terunjam | 9,738 |
| Lubuk Pinang | 39,850 | V Koto | 47,166 |
| Malin Deman | 2,496 | XIV Koto | 8,438 |
| Penarik | 6,963 | | |

211

Tabel 1 merupakan hasil MSE penduga langsung dari 15 kecamatan yang terdapat pada Kabupaten Mukomuko. Dari tabel tersebut diperoleh nilai maksimum dan minimum serta rata-rata. Agar terlihat lebih jelas dapat dilihat ringkasan tersebut pada Tabel 2 seperti berikut ini.

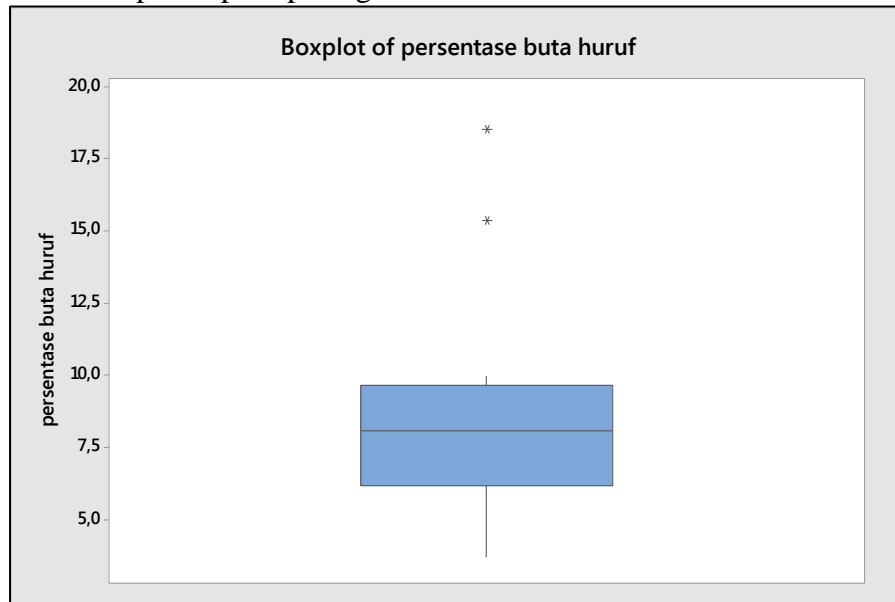
Tabel 3. MSE Penduga Langsung

| Variabel | N | Minimum | Maksimum | Rata-rata |
|----------------------|----|---------|----------|-----------|
| MSE penduga langsung | 15 | 2,496 | 47,166 | 20,197 |

Pada Tabel 2 terdapat nilai *Mean Square Error* (MSE) penduga langsung dengan jumlah data yang digunakan yaitu 15 kecamatan, sehingga diperoleh hasil rata-rata 20,197 nilai maksimum 47,166 dan nilai minimum 2,496. Nilai maksimum terdapat di Kecamatan V Koto sedangkan nilai minimum terdapat pada Kecamatan Malin Deman. Kecamatan V Koto memiliki 10 desa dan Kecamatan Malin Deman memiliki 8 desa.

Sebelum menggunakan metode REBLUP dilakukan uji *outlier* terlebih dahulu. Jika data tersebut tidak memiliki *oulier* metode yang digunakan yaitu metode EBLUP,

tetapi jika data tersebut memiliki *outlier* maka selanjutnya menggunakan metode REBLUP. Untuk data persentase buta huruf di Kabupaten Mukomuko menggunakan 152 desa dari 15 kecamatan memiliki beberapa *outlier*. Uji *outlier* ini menggunakan program Minitab agar mudah melihat kecamatan mana yang merupakan *outlier* pada data tersebut. Deteksi adanya *outlier* pada data persentase buta huruf dengan menggunakan boxplot seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 2. Boxplot persentase buta huruf per kecamatan Kabupaten Mukomuko

Dari Gambar 2 tersebut dapat dilihat bahwa terdapat *outlier* pada data, dengan menggunakan program Minitab dapat diketahui *outlier* yang terdapat pada boxplot tersebut. *Outlier* tersebut terdapat pada Kecamatan Selagan Raya dan Kecamatan V Koto. Kecamatan Selagan Raya memiliki 12 desa diantaranya Desa Aur Cina, Desa Sungai Ipuh I, Desa Sungai Jerinjing, Desa Sungai Gading, Desa Surian Bungkal, Desa Lubuk Sahung, Desa Sungai Ipuh II, Desa Lubuk Bangko, Desa Talang Buai, Desa Pondok Baru, Desa Sungai Ipuh dan Desa Talang Medan. Kecamatan V Koto memiliki 10 desa yaitu Desa Rasno, Desa Pondok Tengah, Desa Sungai Lintang, Desa Talang Petai, Desa Lalang Luas, Desa Pondok Panjang, Desa Talang Sakti, Desa Talang Sepakat, Desa Sungai Rengas dan Desa Lubuk Cabau.

Metode pada pendugaan parameter ini menggunakan program R versi 3.5.2. Parameter yang akan diduga yaitu $\hat{\theta}_i^{REBLUP\ MST}$, data *outlier* diikutsertakan dalam analisis. Hasil penduga $\hat{\theta}_i^{REBLUP\ MST}$ dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 4. Hasil Pendugaan Metode REBLUP Kecamatan

| Nama Kecamatan | Penduga REBLUP | Nama Kecamatan | Penduga REBLUP |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Air Dikit | 7,351 | Pondok Suguh | 5,694 |
| Air Majunto | 11,866 | Selagan Raya | 13,897 |
| Air Rami | 2,559 | Sungai Rumbai | 8,918 |
| Ipuh | 0,985 | Teramang Jaya | 6,441 |
| Kota Mukomuko | 0,408 | Teras Terunjam | 7,898 |
| Lubuk Pinang | 2,402 | V Koto | 9,517 |
| Malin Deman | 11,026 | XIV Koto | 7,511 |
| Penarik | 6,626 | | |

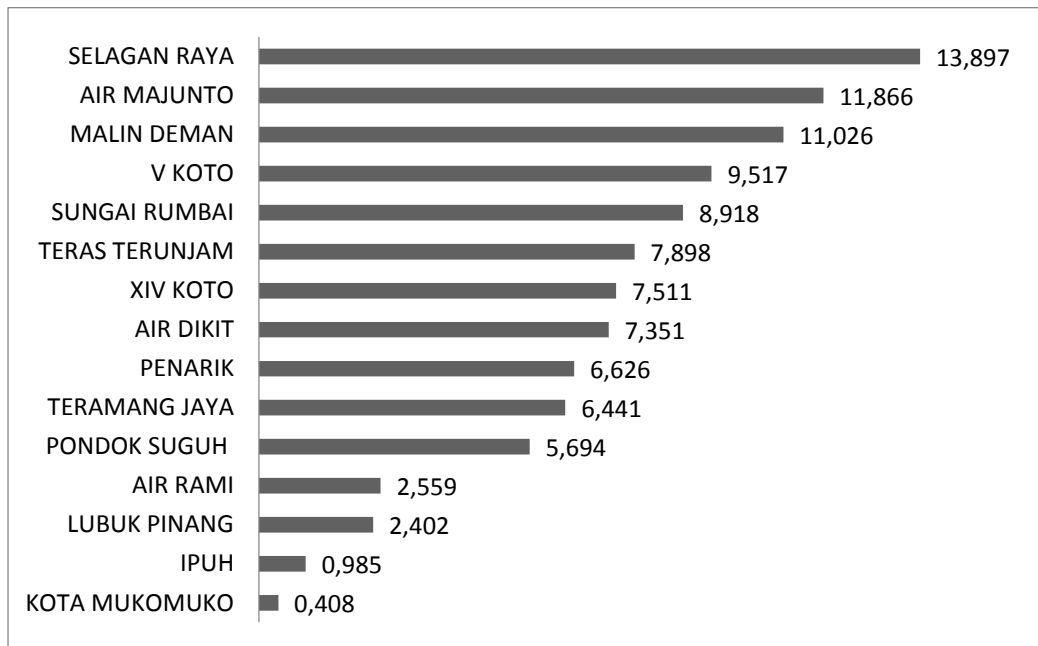
Hasil prediksi menggunakan metode REBLUP ditunjukkan bahwa desa yang memiliki persentase buta huruf terendah yaitu terdapat pada Kecamatan Kota Mukomuko. Sedangkan desa yang memiliki persentase buta huruf tertinggi yaitu terdapat pada Kecamatan Selagan Raya. Adapun ringkasan pendugaan metode REBLUP kecamatan dapat dilihat pada Tabel 5 dan hal ini disajikan pada gambar 3.

213

Tabel 5. Ringkasan Pendugaan Metode REBLUP Kecamatan

| Variabel | N | Maksimum | Minimum | Q_1 | Q_2 | Q_3 |
|----------------|----|----------|---------|-------|-------|-------|
| $\hat{\theta}$ | 15 | 13,897 | 0,408 | 2,559 | 7,351 | 9,651 |

Tabel 4 merupakan ringkasan pendugaan metode REBLUP kecamatan, data yang digunakan yaitu 15 data. Sehingga diperoleh nilai maksimum 13,897 dan nilai minimum yaitu 0,408. Kuartil 1 sekitar 2,559 dan kuartil 3 sekitar 9,651. Selisih kuartil 1 dan kuartil 3 atau yang dikenal dengan jarak antar kuartil adalah sekitar 7,092. Artinya 25% pendugaan metode REBLUP yaitu 2,559 dan 75% nya yaitu 9,651.



Gambar 3. Pendugaan rata-rata persentase buta huruf per kecamatan Kabupaten Mukomuko menggunakan metode REBLUP

214

Setelah memprediksi $\hat{\theta}_i^{REBLUP MST}$ akan dilanjutkan untuk menghitung MSE pada metode REBLUP. MSE tersebut merupakan tolak ukur untuk menganalisis kesalahan metode yang digunakan. Untuk menghitung nilai MSE menggunakan pengulangan bootstrap sebanyak 500 kali pengulangan *bootstrap* seperti yang telah dirumuskan pada Persamaan (2.12). Perhitungan MSE tersebut dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 6. Hasil MSE Penduga REBLUP

| Nama Kecamatan | MSE Penduga REBLUP | Nama Kecamatan | MSE Penduga REBLUP |
|----------------|--------------------|----------------|--------------------|
| Air Dikit | 1,486 | Pondok Suguh | 1,049 |
| Air Majunto | 1,351 | Selagan Raya | 0,912 |
| Air Rami | 0,819 | Sungai Rumbai | 1,114 |
| Ipuh | 0,751 | Teramang Jaya | 0,900 |
| Kota Mukomuko | 1,259 | Teras Terunjam | 1,426 |
| Lubuk Pinang | 1,559 | V Koto | 1,084 |
| Malin Deman | 1,382 | XIV Koto | 1,226 |
| Penarik | 0,793 | | |

Pada Tabel 6 dapat dilihat hasil MSE penduga REBLUP dari 15 kecamatan yang terdapat di Kabupaten Mukomuko. Sehingga diperoleh ringkasan dengan menggunakan tabel sebagai berikut:

Tabel 7. Nilai MSE REBLUP

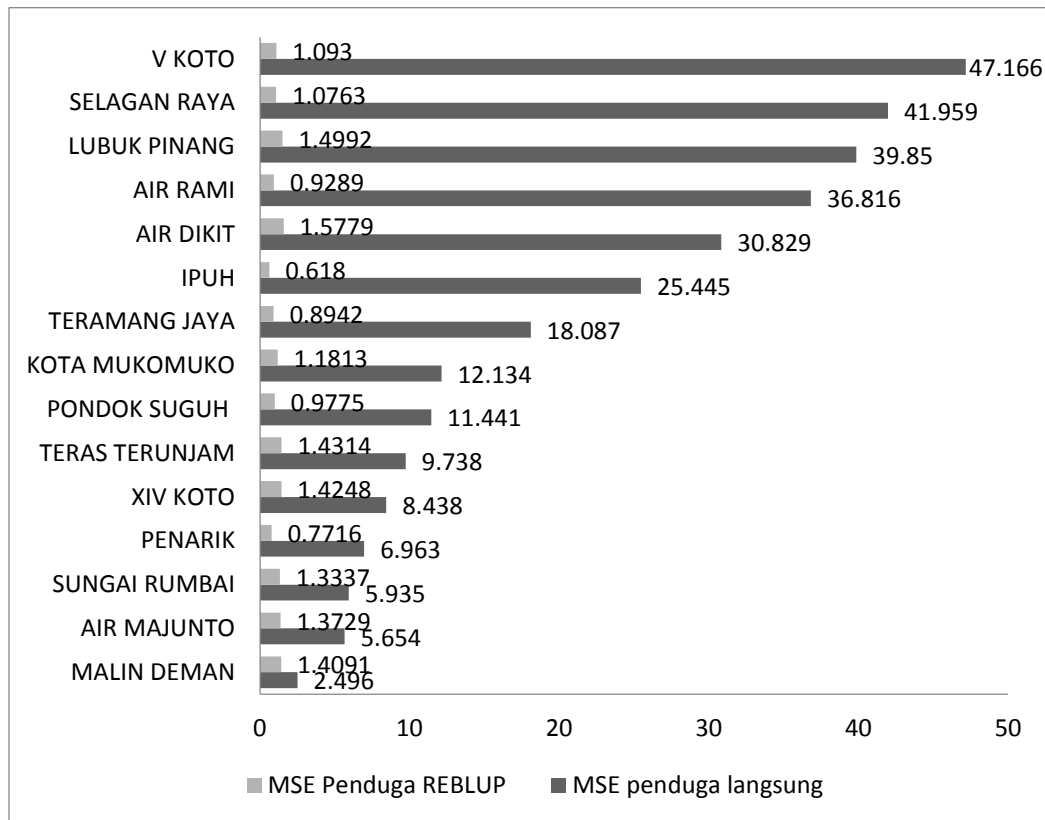
| Variabel | N | Minimum | Maksimum | Rata-rata |
|--------------------|----|---------|----------|-----------|
| MSE penduga REBLUP | 15 | 0,736 | 1,519 | 1,152 |

Dari Tabel 7 nilai MSE penduga REBLUP yang diperoleh dengan jumlah data 15, nilai minimum yaitu 0,736 nilai maksimum yaitu 1,519 dan nilai rata-rata 1,152. Nilai minimum terdapat di Kecamatan Penarik dan nilai maksimum terdapat pada Kecamatan Air Dikit. Kecamatan Penarik memiliki 14 desa dan Kecamatan Air Dikit memiliki 7 desa.

Setelah menghitung MSE penduga langsung dan MSE penduga REBLUP maka akan dilihat perbandingan dari MSE penduga langsung dan MSE penduga REBLUP untuk melihat mana yang lebih baik. Agar terlihat jelas, akan ditampilkan perbandingan MSE penduga REBLUP dengan MSE penduga langsung dengan menggunakan tabel dan grafik. Berikut merupakan ringkasan dari perbandingan MSE penduga REBLUP dengan MSE penduga langsung.

Tabel 8. Perbandingan MSE Penduga Langsung dan MSE REBLUP

| Variabel | N | Minimum | Maksimum | Rata-rata |
|----------------------|----|---------|----------|-----------|
| MSE penduga langsung | 15 | 7,265 | 83,881 | 33,945 |
| MSE penduga REBLUP | 15 | 0,736 | 1,519 | 1,152 |



Gambar 3. Perbandingan MSE penduga langsung dengan MSE penduga REBLUP

Pendugaan tidak langsung menggunakan metode REBLUP dengan pendekatan *M-Estimation* menghasilkan nilai MSE yang jauh lebih kecil dibandingkan pendugaan langsung. Nilai yang diperoleh dari pendugaan tidak langsung menggunakan metode REBLUP dapat dilihat pada Tabel 6. Nilai MSE penduga langsung memiliki rata-rata yaitu 33,945 sedangkan nilai MSE penduga tidak langsung menggunakan metode REBLUP yaitu 1,152. Berdasarkan hasil MSE penduga langsung dan penduga tidak langsung tersebut, hal ini berarti bahwa tingkat kesalahan yang dihasilkan oleh metode REBLUP jauh lebih kecil dibandingkan penduga langsung, dan lebih mampu menangani *outlier* pada area kecil.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan di bab sebelumnya diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil estimasi persentase buta huruf di Kabupaten Mukomuko menggunakan metode REBLUP *M-Estimation* pada *area* kecil yaitu Kecamatan Kota Mukomuko, Kecamatan Ipuh termasuk kedalam persentase buta huruf terendah.

Nilai persentase yang diperoleh Kecamatan Mukomuko dan Kecamatan Ipuh adalah 0,408% dan 0,985%. Sedangkan kecamatan yang memiliki nilai estimasi tertinggi yaitu Kecamatan Selagan Raya dengan nilai persentase 13,897%.

2. Nilai *Mean Square Error* (MSE) penduga *Robust Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (REBLUP) menghasilkan nilai MSE yang jauh lebih kecil dibandingkan dengan MSE penduga langsung. Artinya pendugaan dengan menggunakan metode *Robust Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (REBLUP) baik digunakan untuk data persentase buta huruf di Kabupaten Mukomuko.

UCAPAN TERIMAKASIH

Bapak **Fachri Faisal, S.Si., M.Si** dan Ibu **Etis Sunandi, S.Si., M.Si** yang telah banyak meluangkan waktu, membimbing, memberi arahan serta memberikan masukan.

DAFTAR PUSTAKA

- Anonim, 2017, Persentase Buta Huruf Badan Pusat Statistik, <https://bps.go.id/linkTableDinamis/view/id/1056>. Diakses pada tanggal 11 Januari 2019.
- Cahyandari, R., dan Hisani, 2012, Model Regresi Linier Berganda Menggunakan Penaksir Parameter Regresi Robust M-estimator Studi Kasus Produksi Padi di Provinsi Jawa Barat Tahun 2009), *Edisi Juli 2012*, Vol. VI No. 1-2, ISSN 1979-8911, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati.
- Chambers, R., Chandra, H., Salvati, N. & Tzavidis, N., 2014, Outlier robust small area estimation. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 76 (1), 47-69.
- Chen, C., 2002, *Robust Regressions and Outlier Detection*, New York, John Wiley and Sons.
- Murtinasari, F., Hadi, A. F., dan Anggraeni, D., 2017, Kebutuhan Rumah Sederhana di Kabupaten Jember dengan *Robust Small Area Estimation*. *Jurnal Ilmu Dasar*, Vol. 18 No. 1, Universitas Jember.
- Ningtyas, R., Rahmawati, R., dan Wulandari, Y., 2015, Penerapan Metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) Pada Model Penduga Area Kecil dalam Pendugaan Pengeluaran Per Kapita di Kabupaten Brebes, *Jurnal Gaussian*, Vol. 4 No. 4 Hal. 977-986, Universitas Diponegoro.
- Rao, and Isabel, 2015. *Small Area Estimation*, Wiley Series in Survey Methodology, America.
- Schoch, T, 2012, Robust Small Area Estimation, *Jurnal of Statistics*, Vol. 41 No. 4 Hal. 243-265, University of Applied Sciences Northwestern Switzerland.



PENGARUH HARGA YANG DIATUR PEMERINTAH DAN BAHAN MAKANAN TERHADAP INFLASI DI INDONESIA

(THE EFFECT OF GOVERNMENT-REGULATED PRICES AND FOODSTUFFS ON INFLATION IN INDONESIA)

Cintia Septemberini*
Universitas Bengkulu

Rahmat Kevin P
Universitas Bengkulu

Sekar Dwi Hafidhoh
Universitas Bengkulu

ABSTRACT: Inflation is an increase in general prices that apply in an economy from a country or other period. If a low and stable inflation rate will be a stimulator of economic growth. Every time there is a state upheaval, politics and economics at home and abroad are always linked to the problem of inflation. Government-regulated prices are prices of goods or services regulated by the government, for example the price of foodstuffs. Food is a basic human need that is needed at all times and requires good and proper processing to be beneficial for the body, because food is very necessary for the body. The method used in analyzing the effect of government-regulated prices and foodstuffs on inflation in Indonesia is multiple linear regression analysis wherein the independent variable is government-regulated prices and food ingredients, while the response variable is the inflation rate. Multiple linear regression is a multiple regression model if the dependent variable is data interval or scale scale (quantitative or numerical). While the independent variables generally also scale data intervals or ratios. The results and conclusions of this study are that there is an influence between prices regulated by the government and food ingredients for inflation in Indonesia.

KEYWORDS: Inflation, Government-regulated Prices, Foodstuffs, and Multiple Linear Regression.

* Corresponding Author: Program Studi Statistika FMIPA Universitas Bengkulu; Email: cintiasptmbrni05@gmail.com

PENDAHULUAN

Inflasi merupakan kenaikan harga-harga umum yang berlaku dalam suatu perekonomian dari suatu negara atau periode lainnya. Jika tingkat inflasi rendah dan stabil akan menjadi stimulator pertumbuhan ekonomi. Setiap kali ada gejolak negara, politik dan ekonomi di dalam maupun di luar negeri masyarakat selalu mengaitkan dengan masalah inflasi. Dalam teori makro, masalah makro ekonomi yang selalu dihadapi suatu negara adalah masalah pertumbuhan ekonomi, masalah ketidakstabilan kegiatan ekonomi, masalah pengangguran, masalah kenaikan harga-harga (inflasi) dan masalah neraca perdagangan. Isu perekonomian yang selalu menjadi perhatian penting dari pemerintahan negara-negara di dunia khususnya negara berkembang, yaitu Indonesia adalah inflasi. Indonesia merupakan salah satu negara berkembang yang pernah terkena dampak krisis ekonomi global.

Salah satu penyebab inflasi yaitu tarikan permintaan. Bertambahnya permintaan terhadap barang-barang dan jasa-jasa menyebabkan bertambahnya permintaan terhadap barang-barang permintaan faktor-faktor produksi. Inflasi terjadi karena suatu

kenaikan dalam permintaan total sewaktu perekonomian yang bersangkutan berada dalam situasi *full employment*. Inflasi yang ditimbulkan oleh permintaan total yang berlebihan sehingga terjadi perubahan pada tingkat harga dikenal dengan istilah *demand pull inflation*. Bertambahnya permintaan disebabkan oleh adanya kenaikan pengeluaran negara yang dibiayai melalui pencetakan uang atau pendapatan dari hasil ekspor sebagai akibat dari naiknya permintaan luar negeri atau meningkatnya investasi swasta. Inflasi bisa jadi terjadi karena pergeseran-pergeseran fungsi konsumsi, fungsi investasi dan fungsi pengeluaran negara. Ini berarti *demand full inflation* tidak hanya diakibatkan oleh suplay uang yang bertambah tetapi juga oleh penambahan fungsi konsumsi, investasi dan pengeluaran pemerintah.

Dengan inflasi, maka daya beli suatu mata uang menjadi lebih rendah atau menurun. Dengan menurunnya daya beli mata uang, maka kemampuan masyarakat berpendapatan tetap dalam membeli barang dan jasa kebutuhan sehari-hari akan menjadi semakin rendah. Laju inflasi yang tidak stabil juga menyulitkan perencanaan bagi dunia usaha, tidak mendorong masyarakat untuk menabung dan berbagai dampak negatif lain yang tidak kondusif bagi perekonomian secara keseluruhan.

Pada tahun 1998, Indonesia benar-benar merasakan dahsyatnya goncangan krisis finansial yang merembet pada kepercayaan. Setelah itu ekonomi Indonesia mulai bergerak dan bangkit kembali, namun pada tahun 2004 perlahan kondisi ekonomi Indonesia mulai merasakan tekanan kembali yang salah satu kasusnya karena imbas dari kenaikan harga minyak dunia. Sehingga pemerintah mengatur harga dengan menaikkan harga BBM domestik. Hal ini terjadi dikarenakan permintaan masyarakat melambung tinggi sementara persediaan semakin menipis. Semenjak peristiwa tersebut, Indonesia benar-benar mengalami inflasi, bukan hanya harga minyak yang diatur pemerintah itu saja yang mengalami kenaikan harga namun harga bahan makanan pun ikut melambung. Hal ini cukup membuat beban masyarakat menjadi semakin berat. Walaupun dengan adanya BLSM, masyarakat tidak dapat sepenuhnya memenuhi kebutuhan pokoknya seperti bahan makanan.

Beberapa penelitian tentang inflasi menggunakan analisis *time series* telah banyak dilakukan. Analisis tentang inflasi kebanyakan menggunakan model regresi. Model ini melibatkan satu variabel respon dan lebih dari satu variabel prediktor dalam data runtun waktu. Namun, karena model ini melibatkan satu variabel respon dan lebih dari satu variabel prediktor sehingga model ini bisa mengungkapkan hubungan antar variabel respon dengan variabel prediktornya.

Penelitian tentang faktor-faktor inflasi di Indonesia sangat menarik. Peneliti bisa menerapkan pemodelan regresi yang bisa memprediksi model inflasi dan mendapatkan model terbaik serta interpretasinya. Interpretasi inflasi dapat membantu dan bermanfaat dalam menghasilkan suatu informasi yang berguna bagi pemerintah maupun masyarakat umum.

Pengertian Inflasi

Inflasi merupakan gejala ekonomi yang sangat menarik untuk diperhatikan. Setiap kali ada gejolak sosial, politik atau ekonomi di dalam maupun di luar negeri, masyarakat akan selalu mengaitkannya dengan masalah inflasi. Perkataan ini mulai sangat populer di Indonesia sejak tahun 1960-an, sewaktu laju inflasi Indonesia demikian tinggi hingga mencapai sekitar 650% per tahun. Berdasarkan pengalaman pahit itu, mengartikan inflasi sebagai keadaan dimana harga barang-barang demikian tinggi atau dengan kata lain membunganya tinggi harga.

Para ekonom mendefinisikan inflasi secara berbeda-beda namun mempunyai inti yang sama yaitu kenaikan harga-harga yang cenderung naik secara terus menerus. Inflasi merupakan kecenderungan meningkatnya tingkat harga secara umum dan terus-menerus. Kenaikan harga dari satu atau dua barang saja tidak dapat disebut sebagai inflasi, kecuali bila kenaikan tersebut meluas kepada (mengakibatkan kenaikan) sebagian besar dari harga barang-barang lain. Kenaikan harga-harga disebabkan oleh faktor-faktor musiman (misalnya menjelang peringatan hari-hari besar) atau yang terjadi sekali saja (dan tidak mempunyai pengaruh lanjutan) tidak disebut inflasi.

Salah satu cara untuk mengukur inflasi adalah dengan menggunakan indeks harga konsumen (IHK). IHK merupakan salah satu indikator ekonomi penting dalam memberikan informasi mengenai perkembangan harga barang dan jasa yang dibayar oleh konsumen atau masyarakat dari waktu ke waktu. Perhitungan IHK dapat digunakan untuk mengukur perubahan pengeluaran barang dan jasa (paket komoditas) yang biasa dibeli oleh rumah tangga dari waktu ke waktu.

220

Harga yang Diatur Pemerintah

Harga merupakan unsur yang berbeda dengan unsur lainnya dalam bauran pemasaran. Bila unsur yang lain dalam pemasaran (yaitu produk, tempat/distribusi dan promosi) sifatnya adalah pengeluaran, maka harga merupakan unsur yang memiliki sifat menghasilkan atau mendapatkan pemasukan. Buchari Alma (2007 : 169) menyatakan bahwa harga adalah nilai suatu barang yang dinyatakan dengan uang. Philip Kotler (2005 : 24) menyatakan bahwa harga dalam arti sempit merupakan jumlah uang yang ditagihkan untuk suatu produk atau jasa, sedangkan dalam arti luas adalah jumlah dari nilai yang dipertukarkan konsumen untuk manfaat memiliki atau menggunakan produk atau jasa. Menurut definisi di atas, kebijakan mengenai harga sifatnya hanya sementara, berarti produsen harus mengikuti perkembangan harga di pasar dan harus mengetahui posisi perusahaan dalam situasi pasar secara keseluruhan. Harga yang diatur pemerintah adalah harga barang atau jasa yang diatur oleh pemerintah, misalnya harga bahan makanan.

Bahan Makanan

Budaya konsumsi pangan sebagian besar masyarakat Indonesia selama ini masih pada upaya pemenuhan kebutuhan energi untuk melakukan aktivitas secara fisik.

Pengertian pangan sering kali “dibatasi” hanya pada pangan pokok sumber karbohidrat yaitu beras. Pangan adalah segala sesuatu yang berasal dari sumber hayati dan air, baik yang diolah maupun tidak diolah, yang diperuntukkan sebagai makanan atau minuman bagi konsumsi manusia. Makanan adalah kebutuhan pokok manusia yang diperlukan setiap saat dan memerlukan pengolahan yang baik dan benar agar bermanfaat bagi tubuh, karena makanan sangat diperlukan untuk tubuh.

Meningkatkan *supply* bahan pangan dapat dilakukan dengan lebih memberikan perhatian pada pembangunan di sektor pertanian, khususnya sub sektor pertanian pangan. Modernisasi teknologi dan metode pengolahan lahan, serta penambahan luas lahan pertanian perlu dilakukan untuk meningkatkan laju produksi bahan pangan agar tercipta swasembada pangan.

Uji Hipotesis Regresi Linier Berganda Uji Serentak (Uji Signifikansi Regresi)

Merupakan suatu uji untuk menentukan hubungan linier antara variabel respon y dan sembarang variabel prediktor x dengan hipotesis sebagai berikut: $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0$ untuk sembarang j

Jumlah kuadrat total dapat dipartisi menjadi 2, yaitu :

$$JK_{total} = JK_{regresi} + JK_{galat}$$

Statistik uji dinyatakan dengan persamaan berikut :

$$F = \frac{JK_{regresi}/k}{JK_{regresi}/(n - k - 1)}$$

Dengan tingkat signifikansi sebesar α , maka diambil keputusan dengan menolak H_0 jika $F \geq F_{(\alpha, k, n-k-1)}$.

Uji Parsial

Uji parsial digunakan untuk mengetahui variabel independen yang berpengaruh signifikan secara individu terhadap variabel dependen, dengan hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

Statistik uji dinyatakan pada persamaan berikut :

$$t = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)}$$

Dengan tingkat signifikansi sebesar α , maka diambil keputusan dengan menolak H_0 jika $|t| \geq t_{(\alpha/2, n-k-1)}$.

Uji Asumsi Klasik

Uji asumsi untuk analisis regresi meliputi uji normalitas, multikolinieritas, heteroskedastisitas dan autokorelasi.

Normalitas

Uji normalitas digunakan untuk mengetahui apakah instrumen yang digunakan sebagai alat pengumpul data berdistribusi normal atau tidak. Pengujian normalitas data hasil penelitian dengan uji Kolmogrov-Smirnov dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Sampel berasal dari populasi berdistribusi normal

H_1 : Sampel berasal dari populasi berdistribusi tidak normal

Statistik uji Kolmogrov-Smirnov adalah sebagai berikut :

$$D = |F_s(x) - F_i|_{max}$$

Dengan tingkat signifikansi sebesar α , maka diambil keputusan menolak H_0 jika $D_0 \geq k$ dimana k adalah kuantil statistik uji Kolmogorov pada table K-S.

222

Multikolinieritas

Uji asumsi multikolinieritas ini dimaksudkan untuk membuktikan atau menguji ada tidaknya hubungan yang linier antara variabel bebas satu dengan variabel bebas lainnya. Salah satu cara untuk mendeteksi adanya multikolinieritas adalah dengan menghitung nilai *Variance Inflation Factors* (VIF) dengan rumus:

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Dengan R_j^2 adalah nilai koefisien determinasi regresi auxiliary antara variabel independen ke- j dengan variabel independen sisanya $(k - 1)$. Jika nilai VIF > 10 , maka secara signifikan dapat disimpulkan bahwa terdapat multikolinieritas.

Heteroskedastisitas

Uji asumsi heteroskedastisitas ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah varians residual absolut sama atau tidak sama untuk semua pengamatan. Pendekatan yang digunakan untuk mendeteksi ada tidaknya heteroskedastisitas, yaitu *rank* korelasi Spearman.

Autokorelasi

Pengujian autokorelasi ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah terjadi korelasi di antara data pengamatan atau tidak. Adanya korelasi dapat mengakibatkan

penaksir mempunyai varians tidak minimum dan uji-t tidak dapat digunakan, karena akan memberikan kesimpulan yang salah. Untuk mengetahui ada tidaknya autokorelasi dalam penelitian ini, dilakukan dengan uji Durbin-Watson dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Variabel gangguan tidak mengandung autokorelasi

H_1 : Variabel gangguan mengandung autokorelasi

Statistik uji Durbin-Watson dinyatakan pada persamaan berikut:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T (\hat{u}_{it} - \hat{u}_{it-1})^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T \hat{u}_{it}^2}$$

Bandingkan nilai statistik DW dengan nilai teoritik DW sebagai berikut untuk $\rho > 0$ (autokorelasi positif) :

1. $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho > 0$. H_0 ditolak pada taraf signifikansi α jika $4 - d < d_v$. Berarti secara signifikan terdapat autokorelasi positif.
2. $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho < 0$. H_0 ditolak pada taraf signifikansi α jika $d < d_v$. Berarti secara signifikan terdapat autokorelasi negatif.
3. $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho \neq 0$. H_0 ditolak pada taraf signifikansi 2α jika $d < d_v$ atau $(4 - d) < d_v$. Berarti secara signifikan terdapat autokorelasi positif atau negatif.

BAHAN DAN METODE

Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kuantitatif yang diolah secara metode statistika.

Variabel dan Tempat Penelitian

Variabel yang digunakan adalah inflasi di Indonesia sebagai variabel respon. Harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan sebagai variabel prediktor. Penelitian akan dilakukan di Laboratorium Komputasi Matematika Jurusan Matematika.

Tahapan Penelitian

Kegiatan penelitian secara garis besar prosedur dimulai dari merancang, mengumpulkan referensi dan data, menentukan model, pengujian model, pemilihan model terbaik dan interpretasi model terbaik. Secara terperinci tahapan penelitian ini meliputi kegiatan:

- 1) Studi literatur dan referensi

Studi literatur dan referensi dalam penelitian ini akan dilakukan dengan mengumpulkan sumber-sumber pustaka yang relevan dengan penelitian. Serta menentukan metode yang tepat untuk penelitian.

2) Pengumpulan data

Dalam penelitian ini akan digunakan data indeks inflasi di Indonesia, indeks harga yang diatur pemerintah dan indeks bahan makanan periode Januari-September tahun 2009-2018 di BPS Pusat.

3) Analisis model regresi

a) Statistik deskriptif variabel respon dan variabel prediktor

b) Memodelkan variabel respon dengan variabel prediktor

c) Melakukan pengujian kecocokan model regresi linier berganda

d) Melakukan pengujian koefisien regresi secara individual

e) Melakukan pengujian asumsi klasik, yaitu normalitas, homoskedastisitas, non autokorelasi dan non multikolinieritas

f) Membuat kesimpulan

4) Pemilihan model terbaik dan interpretasi model

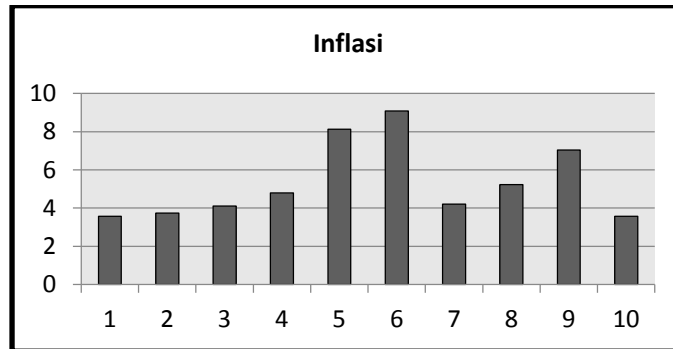
HASIL DAN PEMBAHASAN

Statistik Deskriptif Data Penelitian

Variabel yang digunakan adalah indeks inflasi di Indonesia sebagai variabel respon. Indeks harga yang diatur pemerintah dan indeks bahan makanan sebagai variabel prediktor. Data yang digunakan dalam penelitian ini terdapat sebanyak 120 data dimana dimulai dari Januari 2008-Desember 2018.

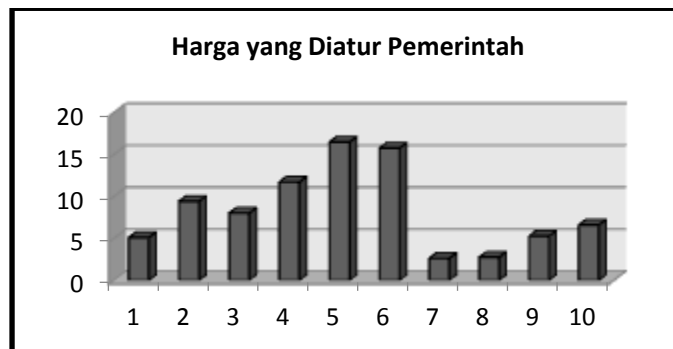
Tabel 1. Statistik Deskriptif Data

| Variabel | Min. | Maks. | Rata-rata | Median | Standar Deviasi | Ragam |
|------------------------------|------|-------|-----------|--------|-----------------|-------|
| Inflasi | 0,01 | 3,29 | 0,4453 | 0,3050 | 0,46454 | 0,216 |
| Harga yang Diatur Pemerintah | 0,00 | 7,90 | 0,6974 | 0,3050 | 1,11296 | 1,239 |
| Bahan Makanan | 0,07 | 5,46 | 1,105 | 0,855 | 0,95465 | 0,911 |



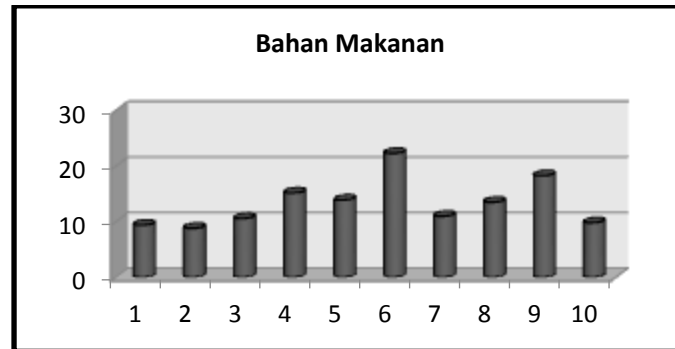
Gambar 1. *Grafik Inflasi di Indonesia Tahunan (2009-2018)*

Inflasi kita definisikan sebagai turunnya daya beli uang. Uang dalam jumlah sama seiring waktu tidak mampu untuk membeli barang yang senilai atau sama. Berdasarkan tabel di atas, didapatkan bahwa untuk variabel inflasi memiliki rata-rata indeks inflasi yaitu sebesar 0,4453, dengan indeks inflasi terendah yang pernah dialami di Indonesia yaitu sebesar 0,01 pada bulan September 2012 dan Oktober 2017. Sedangkan, indeks inflasi mengalami tertinggi yaitu sebesar 3,29 pada bulan Juli 2013. Inflasi di Indonesia selama 10 tahun (2009-2018) memiliki ragam yaitu 0,216. Berdasarkan grafik di atas, dapat dilihat bahwa Indonesia mengalami inflasi tertinggi yaitu 8,38 pada tahun 2013 dan inflasi terendah yaitu 2,78 pada tahun 2009.



Gambar 2. *Grafik Harga yang Diatur Pemerintah Tahunan (2009-2018)*

Harga yang diatur pemerintah adalah harga barang atau jasa yang diatur oleh pemerintah, misalnya harga bahan makanan. Berdasarkan tabel di atas, didapatkan bahwa untuk variabel harga yang diatur pemerintah memiliki rata-rata indeks yaitu sebesar 0,6974, dengan indeks terendah yang pernah dialami di Indonesia yaitu sebesar 0,00 pada bulan September 2018. Sedangkan, indeks inflasi mengalami tertinggi yaitu sebesar 7,90 pada bulan Juli 2013. Harga yang diatur pemerintah di Indonesia selama 10 tahun (2009-2018) memiliki ragam yaitu 1,239. Berdasarkan grafik di atas, dapat dilihat bahwa harga yang diatur pemerintah tertinggi pada tahun 2014 yaitu sebesar 17,57 sedangkan harga yang diatur pemerintah terendah pada tahun 2016 yaitu sebesar 0,21.



Gambar 3. Grafik Bahan Makanan Tahunan (2009-2018)

Makanan adalah kebutuhan pokok manusia yang diperlukan setiap saat dan memerlukan pengolahan yang baik dan benar agar bermanfaat bagi tubuh. Berdasarkan tabel di atas, didapatkan bahwa untuk variabel bahan makanan memiliki rata-rata indeks yaitu sebesar 1,105, dengan indeks terendah yang pernah dialami di Indonesia yaitu sebesar 0,07 pada bulan September 2016. Sedangkan, indeks inflasi mengalami tertinggi yaitu sebesar 5,46 pada bulan Juli 2013. Harga yang diatur pemerintah di Indonesia selama 10 tahun (2009-2018) memiliki ragam yaitu 0,911. Berdasarkan grafik di atas, diketahui bahwa bahan makanan terendah yaitu sebesar 1,26 pada tahun 2017 sedangkan tertinggi yaitu sebesar 15,64 pada tahun 2010.

226

Analisis Regresi Linear Berganda

Analisis regresi linear berganda digunakan untuk melihat apakah ada pengaruh antara harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan terhadap inflasi di Indonesia.

Tabel 2. Regresi Linier Berganda

| Variabel | $\hat{\beta}_t$ | Standard Error | t value | Signifikansi |
|-----------|-----------------|----------------|---------|--------------|
| Intercept | -0,01165 | 0,02990 | -0,39 | 0,698 |
| X_1 | 0,19139 | 0,01911 | 10,02 | 0,000 |
| X_2 | 0,29264 | 0,02228 | 13,14 | 0,000 |

Berdasarkan tabel di atas, didapatkan nilai-nilai koefisien untuk intersep yaitu -0,01165, untuk variabel harga yang di atur pemerintah yaitu 0,19139, dan variabel bahan makanan yaitu 0,29264. Berdasarkan tabel, variabel harga yang di atur pemerintah dan variabel bahan makanan signifikan. Sehingga, model yang terbentuk adalah:

$$\hat{Y} = -0,01165 + 0,19139X_1 + 0,29264X_2$$

Uji Asumsi Klasik

Uji Normalitas

Uji normalitas digunakan untuk mengetahui apakah residual dari data berdistribusi normal atau tidak.

Tabel 3. Uji Shapiro-Wilk

| Variabel | <i>p - value</i> |
|----------|------------------|
| Residual | 0,003249 |

Berdasarkan hasil pengujian dengan Uji Shapiro-Wilk, didapatkan nilai $p. value = 0,003249 < \alpha = 0,05$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa data residual tidak menyebar secara normal.

Uji Heteroskedastisitas

Uji asumsi heteroskedastisitas ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah varians residual absolut sama atau tidak sama untuk semua pengamatan.

Tabel 4. Uji Breusch-Pagan

| Variabel | <i>p - value</i> |
|----------|------------------|
| Residual | 0,002907 |

Berdasarkan hasil pengujian dengan Uji Breusch-Pagan, didapatkan nilai $p. value = 0,002907 < \alpha = 0,05$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa varian residual tidak homoskedastisitas atau heteroskedastisitas.

Uji Autokorelasi

Pengujian autokorelasi ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah terjadi korelasi di antara data pengamatan atau tidak.

Tabel 5. Uji Durbin-Watson

| Variabel | <i>p - value</i> |
|----------|------------------|
| Residual | 0,006298 |

Berdasarkan hasil pengujian dengan Uji Durbin-Watson, didapatkan nilai $p. value = 0,006298 < \alpha = 0,05$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa variabel residual mengandung autokorelasi.

Uji Multikolinearitas

Uji asumsi multikolinieritas ini dimaksudkan untuk membuktikan atau menguji ada tidaknya hubungan yang linier antara variabel bebas satu dengan variabel bebas lainnya.

Tabel 6. Uji VIF

| Variabel | VIF |
|----------|----------|
| X_1 | 1,195407 |
| X_2 | 1,195407 |

Berdasarkan hasil pengujian dengan Uji VIF, didapatkan nilai $VIF = 1,195407 < 10$ untuk variabel harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa variabel bebas tidak mengandung multikolinieritas.

Kesimpulan Uji Asumsi Klasik

Berdasarkan pengujian data untuk memenuhi uji asumsi klasik, didapatkan bahwa data tersebut melanggar beberapa asumsi yaitu normalitas, heteroskedastisitas, dan autokorelasi. Sehingga, diperlukannya perbaikan data dengan melakukan transformasi Box-Cox. Transformasi Box-Cox yaitu transformasi pangkat berparameter tunggal λ (*lambda*), katakanlah terhadap Variabel Y , maka dapat dilakukan transformasi terhadap Y yang dipangkatkan dengan parameter λ , sehingga menjadi Y^λ . nilai λ biasanya antara -5 sampai 5. Pendugaan parameter dapat dicari dengan menggunakan Metode Kemungkinan Maksimum (*Maximum Likelihood Method*). dari banyak nilai λ dipilih sedemikian sehingga didapat jumlah kuadrat sisaan paling minimum yang diharapkan memperoleh transformasi terbaik. Jadi, dilakukan transformasi pada variabel respon dan variabel prediktor. Setelah dilakukan transformasi, maka akan dilakukan pemodelan ulang dan pengecekan asumsi klasik.

Analisis Regresi Linear Berganda (Data Transformasi)

Analisis regresi linear berganda digunakan untuk melihat apakah ada pengaruh antara harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan terhadap inflasi di Indonesia.

Tabel 7. Regresi Linier Berganda

| Variabel | $\hat{\beta}_i$ | Standard Error | t value | Signifikansi |
|-----------|-----------------|----------------|---------|--------------|
| Intercept | 0,704496 | 0,021860 | 32,227 | 0,000 |
| X_1 | 0,036042 | 0,009034 | 3,990 | 0,000 |
| X_2 | 0,106077 | 0,012104 | 8,764 | 0,000 |

Berdasarkan tabel di atas, didapatkan nilai-nilai koefisien untuk intersep yaitu 0,704, untuk variabel harga yang di atur pemerintah yaitu 0,036, dan variabel bahan makanan yaitu 0,106. Berdasarkan tabel, variabel harga yang di atur pemerintah dan variabel bahan makanan signifikan. Sehingga, model yang terbentuk adalah:

$$\hat{Y} = 0,704496 + 0,036042X_1 + 0,106077X_2$$

Uji Asumsi Klasik (Data Transformasi)

Uji Normalitas

Uji normalitas digunakan untuk mengetahui apakah residual dari data berdistribusi normal atau tidak. Uji yang digunakan setelah ditransformasi Box-Cox yaitu Uji Jarque Bera.

Tabel 8. Uji Jarque Bera

| Variabel | <i>p</i> – <i>value</i> |
|-----------------------|-------------------------|
| <i>Y</i> | 0,9377 |
| <i>X</i> ₁ | 0,1267 |

Berdasarkan hasil pengujian dengan Uji Jarque Bera, didapatkan nilai *p. value* *Y* = 0,9377 > α = 0,05 dan *p. value* *X*₁ = 0,1267 > α = 0,05. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa data menyebar secara normal.

Uji Heteroskedastisitas

Uji asumsi heteroskedastisitas ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah varians residual absolut sama atau tidak sama untuk semua pengamatan.

Tabel 9. Uji Breusch-Pagan

| Variabel | <i>p</i> – <i>value</i> |
|----------|-------------------------|
| Residual | 0,4698 |

Berdasarkan hasil pengujian dengan Uji Breusch-Pagan, didapatkan nilai *p. value* = 0,4698 > α = 0,05. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa varian residual homoskedastisitas atau tidak heteroskedastisitas.

Uji Autokorelasi

Pengujian autokorelasi ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah terjadi korelasi di antara data pengamatan atau tidak.

Tabel 10. Uji Durbin-Watson

| Variabel | <i>p</i> – <i>value</i> |
|----------|-------------------------|
| Residual | 0,1701 |

Berdasarkan hasil pengujian dengan Uji Durbin-Watson, didapatkan nilai *p. value* = 0,1701 > α = 0,05. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa variabel residual tidak mengandung autokorelasi.

Uji Multikolinearitas

Uji asumsi multikolinieritas ini dimaksudkan untuk membuktikan atau menguji ada tidaknya hubungan yang linier antara variabel bebas satu dengan variabel bebas lainnya.

Tabel 11. Uji VIF

| Variabel | VIF |
|----------|----------|
| X_1 | 1,083442 |
| X_2 | 1,083442 |

Berdasarkan hasil pengujian dengan Uji VIF, didapatkan nilai $VIF = 1,083442 < 10$ untuk variabel harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa variabel bebas tidak mengandung multikolinieritas.

Uji Signifikansi Parameter

Uji Simultan (Uji F)

230

1) Hipotesis

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1: \text{Tidak } \beta_i = 0, \text{ untuk } i = 1,2$$

2) Besaran Yang Diperlukan

$$\alpha = 5\% = 0,05$$

$$n = 120$$

Ket :

α : taraf nyata pengujian

n : banyaknya sampel.

3) Statistik Uji

$$F_{hit} = \frac{KTR}{KTG} = 60,744$$

Ket :

KTR : Kuadrat Tengah Regresi

KTG : Kuadrat Tengah Galat

4) Kriteria Penolakan

Tolak H_0 jika $p. value < \alpha$

Terima H_0 jika $p. value > \alpha$

5) Kesimpulan

Berdasarkan nilai $p. value = 0,000 < 0,05$ sehingga H_0 ditolak. Artinya, variabel prediktor yaitu harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan memberikan pengaruh secara bersama-sama terhadap variabel respon yaitu inflasi.

Uji Parsial (Uji t)

a. Variabel Harga yang Diatur Pemerintah

1) Hipotesis

H_0 : variabel harga yang diatur pemerintah tidak signifikan

H_1 : variabel harga yang diatur pemerintah signifikan

2) Besaran Yang Diperlukan

$\alpha = 5\% = 0,05$

$$n = 120$$

Ket :

α : taraf nyata pengujian

n : banyaknya sampel.

3) Statistik Uji

$$t_{hit} = \frac{\hat{\beta}_1}{SE(\hat{\beta}_1)} = 3,990$$

Ket :

$\hat{\beta}_1$: Parameter variabel X_1

$SE(\hat{\beta}_1)$: Standard Error parameter variabel X_1

4) Kriteria Penolakan

Tolak H_0 jika $p. value < \alpha$

Terima H_0 jika $p. value > \alpha$

5) Kesimpulan

Berdasarkan nilai $p. value = 0,000 < 0,05$ sehingga H_0 ditolak. Artinya, variabel harga yang diatur pemerintah memberikan pengaruh secara parsial terhadap variabel respon yaitu inflasi.

b. Bahan Makanan

1) Hipotesis

H_0 : variabel bahan makanan tidak signifikan

H_1 : variabel bahan makanan signifikan

- 2) Besaran Yang Diperlukan
 $\alpha = 5\% = 0,05$

$$n = 120$$

Ket :

α : taraf nyata pengujian

n : banyaknya sampel.

- 3) Statistik Uji

$$t_{hit} = \frac{\hat{\beta}_2}{SE(\hat{\beta}_2)} = 8,764$$

Ket :

$\hat{\beta}_2$: Parameter variabel X_2

$SE(\hat{\beta}_2)$: *Standard Error* parameter variabel X_2

- 4) Kriteria Penolakan

Tolak H_0 jika $p. value < \alpha$

Terima H_0 jika $p. value > \alpha$

- 5) Kesimpulan

Berdasarkan nilai $p. value = 0,000 < 0,05$ sehingga H_0 ditolak. Artinya, variabel bahan makanan memberikan pengaruh secara parsial terhadap variabel respon yaitu inflasi.

232

Pemilihan Model Terbaik dan Interpretasi Model

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan model regresi yang bagus yaitu model dengan variabel yang sudah ditransformasi Box-Cox karena model tersebut sudah memenuhi semua uji asumsi klasik pada regresi linear berganda. Sehingga model yang didapatkan yaitu:

$$\hat{Y} = 0,7044496 + 0,036042X_1 + 0,106077X_2.$$

Setelah dilakukan uji signifikansi parameter dan uji parsial, didapatkan bahwa semua variabel prediktor yaitu harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan memberikan pengaruh yang signifikan dan positif terhadap inflasi di Indonesia, dengan nilai koefisien determinasi sebesar 0,5094 atau 50,94% artinya variabel harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan dapat menjelaskan sebesar 50,94% terhadap variabel inflasi di Indonesia.

SIMPULAN

Berdasarkan pemilihan model regresi yang bagus yaitu model dengan variabel yang sudah ditransformasi Box-Cox karena model tersebut sudah memenuhi semua uji

asumsi klasik pada regresi linear berganda. Sehingga, model yang didapatkan yaitu :
 $\hat{Y} = 0,704 + 0,036X_1 + 0,106X_2$.

Setelah dilakukan uji signifikansi parameter dan uji parsial, didapatkan bahwa semua variabel prediktor yaitu harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan memberikan pengaruh yang signifikan dan positif terhadap inflasi di Indonesia, dengan nilai koefisien determinasi sebesar 0,5094 atau 50,94% artinya variabel harga yang diatur pemerintah dan bahan makanan dapat menjelaskan sebesar 50,94% terhadap variabel inflasi di Indonesia.

UCAPAN TERIMA KASIH

Syukur Alhamdulillah senantiasa penulis haturkan kehadiran Allah SWT yang memiliki keistimewaan dan pemberian segala kenikmatan besar, baik nikmat iman, kesehatan dan kekuatan didalam penyusunan penulisan ini. Salawat dan salam senantiasa turunkan kepada Sayyidina Muhammad SAW keluarga dan para sahabatnya dan penegak sunnah-Nya sampai kelak akhir zaman.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Ibu Dyah Setyo Rini, S.Si, M.Sc selaku Dosen Pembimbing, disela-sela rutinitasnya namun tetap meluangkan waktunya untuk memberikan petunjuk, dorongan, saran dan arahan, orang tua yang selalu mendoakan kelancaran penelitian kami, serta teman-teman yang saling membantu dalam menyelesaikan penelitian ini. Dan terima kasih kepada lembaga Kemristekdikti yang telah membiayai penelitian kami.

REFERENSI

- Alma, Buchari. 2007. *Manajemen Pemasaran dan Pemasaran Jasa*. Alfabeta, Bandung.
- Atmadja, A.S. *Inflasi Di Indonesia*. Jurnal Akuntansi dan Keuangan, 1999 Vol. 1 No. 1, hal 59-64.
- Endri. *Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Inflasi Di Indonesia*. Jurnal Ekonomi Pembangunan, 2008 Vol. 13 No. 1, hal 1.
- Gujarati, D.N. 1978. *Ekonometrika Dasar*. Erlangga, Jakarta.
- Gunawan, Anton Hermanto. 1991. *Anggaran Pemerintah dan Inflasi Di Indonesia*. Gramedia Pustaka Umum, Jakarta.
- Hanafie, Rita. *Peran Pangan Pokok Lokal Tradisional dalam Diverifikasi Konsumsi Pangan*. J-SEP, 2010 Vol. 4 No. 2, hal 1.

- Heryanto, Imam. *Analisis Pengaruh Produk, Harga, Distribusi dan Promosi Terhadap Keputusan Pembelian serta Implikasinya pada Kepuasan Pelanggan*. Jurnal Ekonomi, Bisnis & Entrepreneurship, 2015 Vol. 9 No. 2, hal 84.
- Kalado, Harjunata Y.T., Tri Oldy Rotinsulu dan Mauna Th. B. Maramis. *Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Inflasi Di Indonesia Periode 2000-2014*. Jurnal Berkala Ilmiah Efisiensi, 2016 Vol. 16 No. 1, hal 708.
- Montgomery, D.C. 2012. *Introduction to Linear Regression Analysis*. Wiley.
- Panjaitan, M.N.Y. dan Wardoyo. *Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Inflasi Di Indonesia*. Jurnal Ekonomi Bisnis, 2016 Vol. 21 No. 3, hal 182-185.
- Saputra, Kurniawan. *Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Inflasi Di Indonesia 2007-2012*. Diponegoro Journal Of Economics, 2014 Vol. 3 No. 1, hal 2-9.
- Sulaiman, Wahid. 2004. *Analisis Regresi Menggunakan SPSS*. Andi, Yogyakarta.



FUNGSI KONTINU HOLDER PADA KALKULUS FRAKSIONAL SELARAS

S Wibowo *
Universitas Sebelas
Maret Surakarta

V Y Kurniawan
Universitas Sebelas
Maret Surakarta

Siswanto
Universitas Sebelas
Maret Surakarta

ABSTRACT: In 2014 Khalil *et.al* gave a new definition of fractional derivative and fractional integrals for $\alpha \in (0, 1]$ where the form of definition shows that it is the most natural definition, and the most useful, called conformable fractional derivative. Furthermore, if $\alpha = 1$ the definition coincides with the classical definition of the first order derivative. It is known that the first differentiated function is a Holder continuous function of order one. In this paper we will show that the conformable fractional derivative with $\alpha \in (0,1)$ are satisfies Holder continuous functions order $\alpha \in (0,1)$. With conformable fractional calculus can be shown a function that is conformable fractional derivative with $\alpha \in (0,1)$ are satisfies Holder continuous functions of order $\alpha \in (0,1)$.

KEYWORDS: conformable fractional derivative, Holder continuous function.

* Corresponding Author: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Sebelas Maret Surakarta, Indonesia, Banten; Email: supriyadi_w@staff.uns.ac.id

PENDAHULUAN

Teori kalkulus untuk order bukan bilangan bulat selanjutnya disebut kalkulus fraksional, adalah setua kalkulus dan telah menjadi topik penelitian yang menarik selama beberapa abad. Idenya dimotivasi oleh pertanyaan yang diarahkan ke Leibniz oleh L'Hospital, "Apa artinya dengan $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, untuk $n = \frac{1}{2}$?". Sejak itu, para ahli matematika mencoba menjawab pertanyaan ini selama berabad-abad dalam beberapa sudut pandang, untuk memberikan makna kepada turunan bukan bilangan bulat. Pengembangan kalkulus fraksional dan penerapannya telah menarik banyak peneliti di abad terakhir dan sekarang (Miller and Ross, 1993). Dampak kalkulus fraksional ini, baik yang murni maupun penerapannya pada cabang ilmu pengetahuan dan rekayasa, mulai meningkat secara substansial selama dua dekade terakhir.

Berbagai jenis turunan fraksional diperkenalkan antara lain oleh Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Erdelyi-Kober, Grünwald-Letnikov, Marchaud dan Riesz. Gagasan utama di balik kalkulus fraksional ini dapat diringkas dalam dua pendekatan. Pendekatan pertama adalah Riemann-Liouville yang didasarkan pada iterasi operator integral n kali dan kemudian menggantinya dengan rumus integral Cauchy, di mana dengan mengubah nilai $n!$ menjadi fungsi Gamma, sehingga integral fraksional dapat didefinisikan. Sebagian besar turunan fraksional didefinisikan melalui integral fraksional. Pendekatan kedua adalah pendekatan Grünwald-Letnikov yang

didasarkan pada iterasi turunan ke- n kali dan kemudian menggunakan fungsi Gamma. Semua definisi derivatif fraksional yang telah disebutkan di atas memenuhi sifat bahwa turunan fraksionalnya linier. Berikut ini adalah inkonsistensi derivatif fraksional yang ada, yaitu 1) derivatif dari fungsi konstan adalah nol kecuali derivatif tipe Caputo, 2) tidak mematuhi aturan perkalian dua fungsi (*product rule*), 3) tidak mematuhi aturan pembagian dua fungsi (*quotient rule*), 4) aturan rantai (*chain rule*), 5) tidak mempunyai korespondensi dengan Teorema Rolle, 6) tidak mempunyai korespondensi dengan Teorema Nilai Rata-Rata (*Mean value Theorem*) (El Khatib, 2016). Perkembangan dalam dekade terakhir dari kalkulus fraksional diberikan oleh Khalil *et.al* (2014) dengan mendefinisikan turunan fraksional baru yang lebih sederhana dan berperilaku sangat baik yang disebut turunan fraksional selaras (*conformable fractional derivative*).

Fungsi kontinu Holder berorder $\alpha \in (0,1)$ merupakan perluasan fungsi kontinu Lipschitz, dimana fungsi dengan kondisi ini mempunyai sifat-sifat yang menarik, antara lain telah digunakan oleh Wibowo *et.al* untuk mempelajari perilaku fungsi singular Cantor-Lebesgue terkait dengan perubahan dimensi fraktal (Wibowo *et.al*, 2019 a, 2019 b). Tujuan penulisan artikel ini adalah untuk mencari hubungan antara fungsi yang terdiferensial fraksional selaras untuk $\alpha \in (0,1)$ dengan fungsi kontinu Holder berorder $\alpha \in (0,1)$.

1.1 Derivative Fraksional Selaras

Diberikan fungsi $f: [0, \infty) \rightarrow R$ dan $t > 0$. Derivatif fungsi f di t didefinisikan oleh $\frac{df}{dt}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$, menurut ini diperoleh $\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$. Dapatkah dengan cara serupa didefinisikan derivatif untuk order fraksional α untuk $0 < \alpha \leq 1$. Khalil *et.al* (2014) mendefinisikan derivatif fraksional yang didasarkan derivatif biasa serta masih mempertahankan sifat-sifat penting dalam derivatif biasa antara lain aturan perkalian (*product rule*), aturan rantai (*chain rule*), derivatif dari fungsi konstan adalah nol serta sifat-sifat penting lainnya, selanjutnya derivatif fraksional selaras didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1 Diberikan $f: [0, \infty) \rightarrow R$. Derivatif fraksional selaras (*conformable fractional derivative*) dari f dengan order α untuk $0 < \alpha < 1$, didefinisikan oleh

$$T_{\alpha}(f)(t) = f^{(\alpha)}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

untuk semua $t > 0$. Jika fungsi f terdiferensial- α untuk suatu $(0, a)$, $a > 0$ dan $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ ada, maka didefinisikan

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t).$$

Selanjutnya, notasi $T_\alpha(f)(t)$ kadang-kadang dinotasikan oleh $f^{(\alpha)}(t)$ atau $\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha}(t)$ untuk menyatakan turunan fraksional selaras berorder α .

Mudah untuk ditunjukkan operator T_α akan memenuhi sifat-sifat berikut.

Teorema 1.2 Diberikan $\alpha \in (0,1]$ dan fungsi f, g terdiferensial- α di titik $t > 0$. Maka berlaku

- 1) $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$
- 2) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ untuk semua $p \in R$
- 3) $T_\alpha(\lambda) = 0$ untuk semua fungsi konstan $f(t) = \lambda$
- 4) $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$
- 5) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$
- 6) Jika f terdiferensial, maka $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$.

Berikut akan diberikan teorema dasar analisis seperti teorema Rolle dan teorema nilai rata-rata untuk derivatif fraksional selaras.

Teorema 1.3 Diberikan $a > 0$ dan $f: [a, b] \rightarrow R$ yang memenuhi syarat

- 1) f kontinu pada $[a, b]$
- 2) f terdiferensial - α untuk suatu $\alpha \in (0,1)$
- 3) $f(a) = f(b)$.

Maka terdapat $c \in (a,b)$ yang memenuhi $f^{(\alpha)}(c) = 0$.

Teorema 1.4 Diberikan $a > 0$ dan $f: [a, b] \rightarrow R$ yang memenuhi syarat

- 1) f kontinu pada $[a, b]$
- 2) f terdiferensial - α untuk suatu $\alpha \in (0,1)$.

Maka terdapat $c \in (a,b)$ yang memenuhi $f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$.

Bukti-bukti dari Teorema 1.2-1.4 dapat dilihat di Khalil *et.al* (2014).

1.2 Fungsi Kontinu Holder Berorder $\alpha \in (0,1)$

Menurut Ross *et.al* (1994/5) fungsi kontinu Holder berorder $\alpha \in (0,1)$ didefinisikan sebagai berikut.

Definition 1.5 Fungsi $f: R \rightarrow R$ dikatakan fungsi kontinu Holder berorder $\alpha \in (0,1)$, jika terdapat konstanta $c > 0$ yang memenuhi

$$|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^\alpha$$

untuk semua $x, y \in F$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut akan diberikan hubungan antara fungsi yang terdiferensial fraksional selaras dengan fungsi kontinu Holder berorder $\alpha \in (0,1)$.

Teorema 2.1 Diberikan $a > 0$ dan fungsi $f: [a, b] \rightarrow R$ terdiferensial $-\alpha$ untuk suatu $\alpha \in (0,1)$ dan memenuhi $|f^{(\alpha)}(x)| \leq M$ maka fungsi f merupakan fungsi kontinu Holder berorder $\alpha \in (0,1)$.

Bukti. Dengan teorema nilai rata-rata kalkulus fraksional selaras

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{\frac{1}{\alpha}y^\alpha - \frac{1}{\alpha}x^\alpha} \right| = |f^{(\alpha)}(c)|, c \in (x, y).$$

Berakibat

$$|f(y) - f(x)| = |f^{(\alpha)}(c)| \left| \frac{1}{\alpha}y^\alpha - \frac{1}{\alpha}x^\alpha \right|$$

Oleh karena $|f^{(\alpha)}(x)|$ ada dan terbatas oleh M , maka

$$|f(y) - f(x)| \leq M \left| \frac{1}{\alpha}y^\alpha - \frac{1}{\alpha}x^\alpha \right| \leq \frac{M}{\alpha} |y - x|^\alpha.$$

Terbukti fungsi f memenuhi kondisi Holder berorder $\alpha \in (0,1)$.

■

Berikut diberikan contoh fungsi yang memenuhi kondisi Holder berorder $-\alpha$ tetapi tidak terdiferensial fraksional selaras berorder $\alpha \in (0,1)$.

Contoh 2.2 Diberikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^\alpha, & x \in [0, 0.5] \\ 2x^\alpha - 1, & x \in (0.5, 1] \end{cases}.$$

Fungsi f tidak terdiferensial fraksional selaras berorder $\alpha \in (0,1)$ di $x = 0.5$, karena

$$f^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, 0.5) \\ 1, & x \in (0.5, 1] \end{cases}$$

Tetapi

$$\begin{aligned}
 |f(y) - f(x)| &= |(2x^\alpha - 1) - (1 - 2x^\alpha)| \\
 &\leq |(2x^\alpha - 1) + (1 - 2x^\alpha)| \\
 &= 2|y^\alpha - x^\alpha| \\
 &\leq 2|y - x|^\alpha
 \end{aligned}$$

untuk semua $0 \leq x < 0.5 < y \leq 1$.

Selanjutnya, dalam contoh berikut akan ditunjukkan bahwa konsep fungsi kontinu Holder berorder $\alpha \in (0,1)$ adalah lebih kuat dari konsep kontinu seragam, dalam artian terdapat fungsi kontinu seragam tetapi bukan fungsi kontinu Holder.

Contoh 2.3 Diberikan fungsi $f(x) = \sqrt{x^\alpha}$, $x \in [0,1]$ dengan $\alpha \in (0,1)$. Untuk sebarang $x, y \in [0,1]$ dengan $0 \leq x \leq y \leq 1$ maka akan berlaku $0 \leq x^\alpha \leq y^\alpha \leq 1$ dan $|\sqrt{y^\alpha} - \sqrt{x^\alpha}| \leq \sqrt{|y^\alpha - x^\alpha|} \leq \sqrt{|y - x|^\alpha}$ dengan $\alpha \in (0,1)$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ pilih $\delta = \varepsilon^{\frac{2}{\alpha}}$. Untuk sebarang $x, y \in [0,1]$, jika $|y - x| < \delta$ maka berlaku

$$|\sqrt{y^\alpha} - \sqrt{x^\alpha}| \leq \sqrt{|y^\alpha - x^\alpha|} \leq \sqrt{|y - x|^\alpha} < \sqrt{\delta^\alpha} = \varepsilon$$

239

Fungsi $f(x) = \sqrt{x^\alpha}$ kontinu seragam pada $[0,1]$.

Sedangkan, fungsi $f(x) = \sqrt{x^\alpha}$ bukan merupakan fungsi kontinu Holder berorder $\alpha \in (0,1)$ akan ditunjukkan sebagai berikut. Diberikan $0 < c < \infty$, akan ditunjukkan terdapat $x, y \in [0,1]$ yang memenuhi $c|y - x|^\alpha < |\sqrt{y^\alpha} - \sqrt{x^\alpha}|$

Pilih $x = 0$ dan $y > 0$ yang memenuhi $c\sqrt{y^\alpha} < 1$ dengan sifat Archimedes (*Archimidean property*). Ketaksamaan $c\sqrt{y^\alpha} < 1$ dapat dituliskan sebagai $cy^\alpha < \sqrt{y^\alpha}$, selanjutnya diperoleh

$$c|y - x|^\alpha = c|y - 0|^\alpha = cy^\alpha < \sqrt{y^\alpha} = |\sqrt{y^\alpha} - \sqrt{0}| = |\sqrt{y^\alpha} - \sqrt{x^\alpha}|$$

Jadi fungsi $f(x) = \sqrt{x^\alpha}$ tidak kontinu Holder berorder $\alpha \in (0,1)$ pada $[0,1]$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa setiap fungsi yang terdiferensial fraksional selaras untuk α adalah fungsi kontinu Holder berorder α , serta dapat diberikan contoh fungsi kontinu seragam tetapi bukan fungsi kontinu Holder

239

berorder α , dan fungsi kontinu Holder berorder α tetapi bukan fungsi yang terdiferensial fraksional selaras untuk $\alpha \in (0,1)$.

REFERENSI

- El-Khatib, M.S. 2016. On Katugampola Fractional Calculus. A Thesis, Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements of The Degree of Master of Science in Mathematics, Al-Azhar University-Gaza, Palestine.
- Khalil, M.R., AlHorani, A., Yousef, M., Sababheh. 2014. A New Definition of Fractional Derivative, *J. Comput. Appl. Math.* 264, 65–70.
- Miller, K.S., and B. Ross. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons, New York, USA.
- Ross, B, Samko, S.G., and Love, E.R. 1994/5. Functions That Have No First Order Derivative Might Have Fractional Derivatives Of All Orders Less Than One” *Real Analysis Exchange Vol.20(2), pp. 140-147*
- Wibowo, S., Kurniawan, V. K., and Siswanto. 2019a. The γ –Dimension of Images the Integral Staircase. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1218 (2019) 012021*
- Wibowo, S., Kurniawan, V. K., and Siswanto. 2019b. The γ -Dimension of Images of Bi-Lipschitz Function. Manuscript submitted for publication in the Proceeding of The 2nd International Conference on Mathematics : Education, Theory and Application (ICMETA) 2018



SIFAT-SIFAT GRAF ANNIHILATOR IDEAL DARI RING KOMUTATIF

(THE IDEAL ANNIHILATOR GRAPH PROPERTIES OF THE COMMUTATIVE RING).

Ami Rahmawati *
Universitas Sebelas
Maret

**Vika Yugi
Kurniawan**
Universitas Sebelas
Maret

Supriyadi Wibowo
Universitas Sebelas
Maret

ABSTRACT: Untuk suatu ring komutatif dengan elemen satuan R dan ideal sejati I dari R , dapat didefinisikan suatu graf annihilator ideal. Graf annihilator terhadap ideal I dari R dinotasikan dengan $AG_I(R)$ adalah graf tak berarah dengan himpunan vertex $V(AG_I(R)) = \{x \in R \setminus I \mid xy \in I, y \notin I\}$ dan dua vertex yang berbeda x dan y adjacent jika dan hanya jika $A_I(xy) \neq A_I(x) \cup A_I(y)$, dimana $A_I(x) = \{r \in R \mid rx \in I\}$. Penelitian ini membahas sifat-sifat dasar dari $AG_I(R)$ serta karakteristik planar dan outerplanar dari $AG_I(R)$.

KEYWORDS: Graf pembagi nol, graf annihilator, girth, planar, outerplanar.

* Corresponding Author: Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Sebelas Maret; Jl. Ir Sutami No. 36 A, Jebres, Surakarta, Jawa Tengah 57126; Email: amirahmawati@student.uns.ac.id

PENDAHULUAN

Akhir-akhir ini, banyak penelitian yang menghubungkan antara graf dengan struktur aljabar. Salah satu yang menjadi perhatian adalah graf pembagi nol, yang dinotasikan $\Gamma(R)$. Gagasan graf pembagi nol berawal dari Beck [6] pada tahun 1988, yaitu dengan mengambil semua elemen R menjadi *vertex* dan mengutamakan pada pewarnaan. Kemudian pada tahun 1999, graf pembagi nol diperkenalkan oleh Anderson dan Livingston [4]. Jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan, $Z(R)$ menotasikan himpunan pembagi nol di R . Pada tahun 2003, Redmond [12] memperkenalkan graf pembagi nol berdasarkan *ideal* dari *ring* komutatif. Selanjutnya pada tahun 2014, Badawi [5] memperkenalkan graf *annihilator* $AG(R)$ dari *ring* komutatif R . Suatu graf *annihilator* R dengan $a \in R$ dan $ann_R(a) = \{r \in R \mid ra = 0\}$ adalah graf tak berarah dengan *vertex* $Z(R)^*$, dan dua *vertex* berbeda x dan y *adjacent* jika dan hanya jika $ann_R(xy) \neq ann_R(x) \cup ann_R(y)$.

Penelitian ini membahas graf *annihilator* terhadap *ideal* I dari R atau disebut sebagai graf *annihilator ideal* yang dinotasikan $AG_I(R)$ yang mengacu pada Afkhami *et al.* [2]. Suatu $x \in R$ dan $A_I(x) = \{r \in R \mid rx \in I\}$. Graf *annihilator ideal* adalah

graf tak berarah $AG_I(R)$ dengan $vertex V(AG_I(R)) = \{x \in R \setminus I \mid xy \in I, y \notin I\}$, dan dua $vertex$ berbeda x dan y *adjacent* jika dan hanya jika $A_I(xy) \neq A_I(x) \cup A_I(y)$.

Suatu graf tak berarah G dengan notasi $V(G)$ merupakan himpunan $vertex$ pada G untuk setiap $vertex x \in V(G)$, $d_G(x)$ menunjukkan himpunan $vertex$ yang *adjacent* ke x , dan $|d_G(x)|$ disebut *degree* pada x . Graf G dikatakan terhubung jika terdapat *path* diantara setiap pasangan $vertex$ yang berbeda pada G . Jarak antara dua $vertex$ berbeda x dan y dinotasikan $d(x, y)$ merupakan panjang *path* terpendek diantara x dan y ($d(x, y) = \infty$ jika tidak terdapat *path*). *Diameter* dari G adalah $diam(G) = \sup\{d(x, y) : x \neq y, (x, y \in V(G))\}$. Suatu *clique* pada graf adalah setiap subgraf lengkap pada graf dan banyaknya $vertex$ dalam *clique* terbesar pada G dinotasikan $\omega(G)$, disebut sebagai order *clique* pada G . Suatu graf G dan H dengan notasi $G = H$ dan $G \cong H$ masing-masing menunjukkan identik dan graf *isomorphic*. Artikel ini membahas sifat-sifat dasar dari $AG_I(R)$ serta karakteristik graf planar dan *outerplanar* pada $AG_I(R)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

242

1. Sifat dasar dari $AG_I(R)$

Diberikan proposisi untuk menyelidiki sifat dasar dari $AG_I(R)$ dan hubungan antara graf $AG_I(R)$ dan $AG(R/I)$.

Proposisi 2.1. *Diketahui I adalah ideal dari R . Graf $AG_I(R) = \emptyset$ jika dan hanya jika I adalah ideal prima.*

Bukti. Diketahui I ideal di R maka untuk setiap $x \in R$ dan $y \in I$ berlaku $xy \in I$. Karena $AG_I(R) = \emptyset$ maka untuk setiap $x, y \in R \setminus I$ berlaku $xy \notin I$. Dengan demikian untuk setiap $xy \in I$, pasti berlaku $x \in I$ atau $y \in I$ sehingga terbukti bahwa I merupakan ideal prima.

Sebaliknya diketahui I merupakan ideal prima di R , maka untuk sembarang dua ideal A dan B di R berlaku $AB \subseteq I$ sedemikian sehingga $A \subseteq I$ dan $B \subseteq I$. Misalkan $x \in A$ dan $y \in B$ maka berlaku $xy \in I$, akibatnya tidak memenuhi syarat dari $vertex$ $AG_I(R)$ dimana x dan y bukan elemen dari ideal I sehingga diperoleh $AG_I(R) = \emptyset$.

■

Proposisi 2.2. *Diketahui $x + I$ dan $y + I$ adalah dua elemen yang berbeda dari R/I . Vertex $x + I$ adjacent dengan $y + I$ pada $AG(R/I)$ jika dan hanya jika x adjacent dengan y pada $AG_I(R)$.*

Bukti. Ambil sebarang $x + I, y + I \in R/I$. Diketahui $(x + I, y + I) \in E(AG(R/I))$ maka berlaku $ann_{R/I}(xy + I) \neq ann_{R/I}(x + I) \cup ann_{R/I}(y + I)$ dengan $ann_{R/I}(a + I) = \{r \in R \mid r(a + I) = 0\}$. Sehingga

$$\begin{aligned} ann_{R/I}(x + I) &= \{r + I \in R/I \mid (r + I)(x + I) = rx + I = 0 \in I\} \\ ann_{R/I}(y + I) &= \{r + I \in R/I \mid (r + I)(y + I) = ry + I = 0 \in I\} \\ ann_{R/I}(xy + I) &= \{r + I \in R/I \mid (r + I)(xy + I) = rxy + I = 0 \in I\} \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh

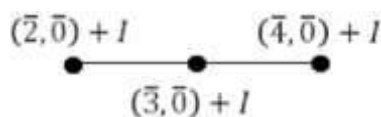
$$\begin{aligned} A_I(x) &= \{r \in R \mid rx \in I\} \\ A_I(y) &= \{r \in R \mid ry \in I\} \\ A_I(xy) &= \{r \in R \mid rxy \in I\} \end{aligned}$$

dengan $A_I(xy) \neq A_I(x) \cup A_I(y)$ berarti x adjacent dengan y pada $AG_I(R)$.

■

Berikut merupakan contoh $AG(R/I) \cong AG(S/J)$ dimana I dan J masing-masing merupakan *ideal* dari *ring* R dan S , tetapi graf $AG_I(R)$ dan $AG_J(S)$ belum tentu *isomorphic*.

Contoh 2.1. Diberikan *ring* $R = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ dengan *ideal* $I = 0 \times \mathbb{Z}_3$ diperoleh $R/I = \{((\bar{0}, \bar{0}) + I), ((\bar{1}, \bar{0}) + I), ((\bar{2}, \bar{0}) + I), ((\bar{3}, \bar{0}) + I), ((\bar{4}, \bar{0}) + I), ((\bar{5}, \bar{0}) + I)\}$. Himpunan *vertex* dari $AG(R/I)$ adalah $Z(R/I) \setminus \{0\}$ dengan $V(AG(R/I)) = \{((\bar{2}, \bar{0}) + I), ((\bar{3}, \bar{0}) + I), ((\bar{4}, \bar{0}) + I)\}$. Himpunan *vertex* yang *adjacent* dari $AG(R/I)$ adalah $ann_{R/I}(xy) \neq ann_{R/I}(x) \cup ann_{R/I}(y)$ dengan $E(AG(R/I)) = \{((\bar{2}, \bar{0}) + I)((\bar{3}, \bar{0}) + I), ((\bar{3}, \bar{0}) + I)((\bar{4}, \bar{0}) + I)\}$ ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf $AG(R/I)$

Sedangkan himpunan *vertex* dari $AG_I(R)$ adalah $\{x \in R \setminus I \mid xy \in I, y \notin I\}$ dengan $V(AG_I(R)) = \{(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{2})\}$.

Menentukan *annihilator* untuk setiap *vertex* dari $AG_I(R)$ dengan $A_I(x) = \{r \in R \mid rx \in I\}$ yaitu

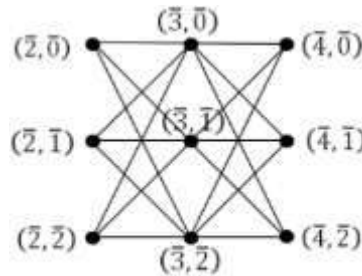
$$\begin{aligned} A_I(\bar{2}, \bar{0}) &= A_I(\bar{2}, \bar{1}) = A_I(\bar{2}, \bar{2}) = A_I(\bar{4}, \bar{0}) = A_I(\bar{4}, \bar{1}) = A_I(\bar{4}, \bar{2}) \\ A_I(\bar{2}, \bar{0}) &= \{(\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{2})\} \\ A_I(\bar{3}, \bar{0}) &= A_I(\bar{3}, \bar{1}) = A_I(\bar{3}, \bar{2}) \end{aligned}$$

$$A_I(\bar{3}, \bar{0}) = \{(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{2})\}.$$

Himpunan *vertex* yang *adjacent* dari $AG_I(R)$ adalah $\{A_I(xy) \neq A_I(x) \cup A_I(y)\}$ dengan

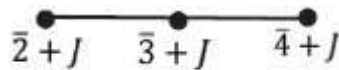
$$E(AG_I(R)) = \left\{ \begin{array}{llll} ((\bar{2}, \bar{0})(\bar{3}, \bar{0})), & ((\bar{2}, \bar{0})(\bar{3}, \bar{1})), & ((\bar{2}, \bar{0})(\bar{3}, \bar{2})), & ((\bar{2}, \bar{1})(\bar{3}, \bar{0})), \\ ((\bar{2}, \bar{1})(\bar{3}, \bar{1})), & ((\bar{2}, \bar{1})(\bar{3}, \bar{2})), & ((\bar{2}, \bar{2})(\bar{3}, \bar{0})), & ((\bar{2}, \bar{2})(\bar{3}, \bar{1})), \\ ((\bar{2}, \bar{2})(\bar{3}, \bar{2})), & ((\bar{3}, \bar{0})(\bar{4}, \bar{0})), & ((\bar{3}, \bar{0})(\bar{4}, \bar{2})), & ((\bar{3}, \bar{1})(\bar{4}, \bar{0})), \\ ((\bar{3}, \bar{1})(\bar{4}, \bar{1})), & ((\bar{3}, \bar{1})(\bar{4}, \bar{2})), & ((\bar{3}, \bar{2})(\bar{4}, \bar{0})), & ((\bar{3}, \bar{2})(\bar{4}, \bar{1})), \\ ((\bar{3}, \bar{2})(\bar{4}, \bar{1})), & ((\bar{3}, \bar{2})(\bar{4}, \bar{2})) & & \end{array} \right\}$$

yang ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf $AG_I(R)$

Diberikan ring $S = \mathbb{Z}_{24}$ dengan ideal $J = \langle 6 \rangle$ diperoleh $S/J = \{(\bar{0} + J), (\bar{1} + J), (\bar{2} + J), (\bar{3} + J), (\bar{4} + J), (\bar{5} + J)\}$. Himpunan *vertex* dari $AG(S/J)$ adalah $Z(S/J) \setminus \{0\}$ dengan $V(AG(S/J)) = \{(\bar{2} + J), (\bar{3} + J), (\bar{4} + J)\}$. Himpunan *vertex* yang *adjacent* dari $AG(S/J)$ adalah $\{ann_{S/J}(xy) \neq ann_{S/J}(x) \cup ann_{S/J}(y)\}$ dengan $E(AG(S/J)) = \{((\bar{2} + J)(\bar{3} + J)), ((\bar{3} + J)(\bar{4} + J))\}$ ditunjukkan pada Gambar 3.



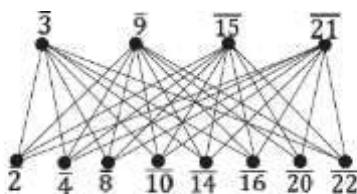
Gambar 3. Graf $AG(S/J)$

Sedangkan himpunan *vertex* dari $AG_J(S)$ adalah $\{x \in S \setminus J \mid xy \in J, y \notin J\}$ dengan $V(AG_J(S)) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{20}, \bar{21}, \bar{22}\}$. Menentukan *annihilator* untuk setiap *vertex* dari $AG_J(S)$ dengan $A_J(x) = \{r \in R \mid rx \in J\}$ yaitu
 $A_J(\bar{2}) = A_J(\bar{4}) = A_J(\bar{8}) = A_J(\bar{10}) = A_J(\bar{14}) = A_J(\bar{16}) = A_J(\bar{20}) = A_J(\bar{22})$
 $A_J(\bar{2}) = \{\bar{3}, \bar{9}, \bar{15}, \bar{21}\}$
 $A_J(\bar{3}) = A_J(\bar{9}) = A_J(\bar{15}) = A_J(\bar{21})$
 $A_J(\bar{3}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{20}, \bar{22}\}.$

Himpunan *vertex* yang *adjacent* dari $AG_J(S)$ adalah $\{A_J(xy) \neq A_J(x) \cup A_J(y)\}$ dengan

$$E(AG_J(S)) = \left\{ \begin{array}{l} (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{9}), (\bar{2}, \bar{15}), (\bar{2}, \bar{21}), (\bar{4}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{9}), (\bar{4}, \bar{15}), (\bar{4}, \bar{21}), \\ (\bar{8}, \bar{3}), (\bar{8}, \bar{9}), (\bar{8}, \bar{15}), (\bar{8}, \bar{21}), (\bar{10}, \bar{3}), (\bar{10}, \bar{9}), (\bar{10}, \bar{15}), \\ (\bar{10}, \bar{21}), (\bar{14}, \bar{3}), (\bar{14}, \bar{9}), (\bar{14}, \bar{15}), (\bar{14}, \bar{21}), (\bar{16}, \bar{3}), (\bar{16}, \bar{9}), \\ (\bar{16}, \bar{15}), (\bar{16}, \bar{21}), (\bar{20}, \bar{3}), (\bar{20}, \bar{9}), (\bar{20}, \bar{15}), (\bar{20}, \bar{21}), (\bar{22}, \bar{3}), \\ (\bar{22}, \bar{9}), (\bar{22}, \bar{15}), (\bar{22}, \bar{21}) \end{array} \right\}$$

yang ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Graf bipartit lengkap $AG_J(S)$

Berdasarkan Gambar 1 dan Gambar 3 terlihat bahwa $AG(R/I) \cong AG(S/J)$, sedangkan Gambar 2 dan Gambar 4 graf $AG_I(R)$ dan $AG_J(S)$ belum tentu *isomorphic*.

Redmond [12] mendefinisikan $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq R$ sebagai himpunan representasikan *coset* dari *vertex-vertex* di $AG(R/I)$. *Column* pada $AG_I(R)$ adalah subhimpunan $a_\lambda + I = \{a_\lambda + i : i \in I\}$. Selanjutnya, jika terdapat $r \in R \setminus I$ sedemikian sehingga $ra_\lambda \notin I$ dan $ra_\lambda^2 \in I$, $a_\lambda + I$ disebut sebagai *connected column* pada $AG_I(R)$.

Teorema 2.3. *Jika $a_\lambda + I$ adalah connected column dari $AG_I(R)$, maka $a_\lambda + I$ adalah subgraf lengkap dari $AG_I(R)$ dan $\omega(AG_I(R)) \geq |I|$.*

Bukti. Misalkan banyaknya *vertex* pada $AG_I(R)$ adalah sebanyak n dapat ditulis $V(AG_I(R)) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Akan dibuktikan $a_\lambda + I$ adalah subgraf lengkap dari $AG_I(R)$. Diketahui $a_\lambda + I$ adalah *connected column* dari $AG_I(R)$ maka terdapat $r \in R \setminus I$ sedemikian sehingga $ra_\lambda \notin I$ dan $ra_\lambda^2 \in I$. Akibatnya untuk setiap *vertex* pada $AG_I(R)$ saling terhubung ke *vertex* lainnya sehingga $d_G(a_\lambda) = n - 1$ dengan $\lambda = 1, 2, \dots, n$. Oleh karenanya diperoleh subgraf lengkap. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\omega(AG_I(R)) \geq |I|$. Misalkan $|I| = k$. Diketahui bahwa $\omega(AG_I(R))$ adalah banyaknya *vertex* dalam *clique* atau subgraf lengkap terbesar pada $AG_I(R)$ sehingga $\omega(AG_I(R)) = n = k^2$. Berarti $\omega(AG_I(R)) = n \geq k = |I|$. Jadi terbukti bahwa $a_\lambda + I$ adalah *connected column* dari $AG_I(R)$, maka $a_\lambda + I$ adalah subgraf lengkap dari $AG_I(R)$ dan $\omega(AG_I(R)) \geq |I|$. ■

Suatu *girth* pada G adalah panjang terpendek *cycle* dalam G , dinotasikan $gr(G)$. Nilai $gr(G) = \infty$ jika G tidak memiliki *cycle*. Diberikan teorema tentang *girth* pada graf $AG_I(R)$.

Teorema 2.4. *Jika $AG_I(R) \neq \Gamma_I(R)$ maka $gr(AG_I(R)) \leq 4$.*

Bukti. Karena $AG_I(R) \neq \Gamma_I(R)$, maka terdapat *vertex* x dan y yang *adjacent* sehingga $xy \notin I$. Oleh karena itu, terdapat $1 \neq r \in R \setminus I$ sehingga $rx \in I, ry \in I$, dan $xy \notin I$. Selanjutnya, jika $r \notin \{x, y\}$ maka jelas bahwa r merupakan *vertex* dari $AG_I(R)$ yang *adjacent* dengan kedua *vertex* x dan y , dan diperoleh *cycle* $x - r - y - x$. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan bahwa $r = x$ maka jelas $x \neq x^2, y \neq xy$ dan diperoleh *cycle* $x - y - x^2 - xy - x$.

■

2. Karakterisasi Planar dan *outerplanar* dari graf *annihilator ideal*.

Graf planar adalah suatu graf yang dapat digambarkan pada bidang sedemikian rupa sehingga *edge*-nya hanya bersilangan di titik akhir. Kuratowski memberikan karakterisasi dari graf planar, dikenal sebagai Teorema Kuratowski mengatakan bahwa suatu graf adalah planar jika dan hanya jika tidak termuat subgraf dari K_5 atau $K_{3,3}$. Berikut diberikan teorema dan lema mengenai karakterisasi graf planar dari $AG_I(R)$.

Teorema 3.1. *Diketahui R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan I ideal dari R , $|V(AG(R/I))| = 1$. Berlaku graf $AG_I(R)$ adalah planar jika dan hanya jika $|I| \leq 4$.*

Bukti. Misalkan $V(AG(R/I)) = \{x + I\}$. Jelas bahwa $x^2 \in I$ dan $x + I$ adalah *connected column* pada $AG_I(R)$. Berdasarkan Teorema 2.3, $AG_I(R)$ adalah *isomorphic* terhadap graf lengkap $K_{|I|}$. Jadi, $AG_I(R)$ adalah *planar* jika dan hanya jika $|I| \leq 4$.

■

Lema 3.1. *Jika $|V(AG(R/I))| \geq 2$ dan $|I| \geq 3$ maka $AG_I(R)$ bukan planar.*

Bukti. Andaikan $a + I \in V(AG(R/I))$. Perhatikan bahwa $AG(R)$ terhubung karena $\Gamma(R)$ juga terhubung, dan $\Gamma(R)$ merupakan subgraf dari $AG(R)$ dengan $V(\Gamma(R)) = V(AG(R))$. Karena $|V(AG(R/I))| \geq 2$ dan $AG(R/I)$ terhubung, maka terdapat $b \in R \setminus I$ sedemikian sehingga *vertex* a dan b *adjacent* dalam $AG_I(R)$. Karena $AG_I(R)$ mempunyai subgraf yang *isomorphic* terhadap $K_{3,3}$ dengan himpunan *vertex* $\{a, a + x_1, a + x_2\} \cup \{b, b + x_1, b + x_2\}$, dimana $x_1 \neq x_2 \in I \setminus \{0\}$. Sehingga $AG_I(R)$ memuat subgraf yang *isomorphic* terhadap $K_{3,3}$. Jadi $AG_I(R)$ bukan planar.

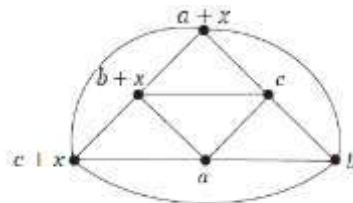
■

Contoh 3.1. Pada Contoh 2.1, ring $R = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ dengan ideal $I = 0 \times \mathbb{Z}_3$ berdasarkan lema $|V(AG(R/I))| = 3 \geq 2$ dan $|I| = 3 \geq 3$ maka diperoleh $AG_I(R)$ bukan planar. Jelas terbukti pada Gambar 2 yang menunjukkan bahwa $AG_I(R)$ bukan planar.

Teorema 3.2. Untuk $|V(AG(R/I))| = 3$ dan $|I| = 2$, berlaku $AG_I(R)$ bukan planar jika dan hanya jika $AG(R/I)$ adalah graf lengkap sedemikian sehingga minimal satu dari vertex merupakan connected column dalam $AG_I(R)$.

Bukti. Pertama andaikan bahwa $AG(R/I)$ adalah graf lengkap dengan vertex $a + I, b + I$, dan $c + I$. Tanpa mengurangi keumuman sifat, andaikan bahwa $a + I$ merupakan connected column, maka $AG_I(R)$ mempunyai subgraf yang isomorphism terhadap $K_{3,3}$ dengan himpunan vertex $\{b, b + x, a\} \cup \{c, c + x, a + x\}$, dimana $x \in I \setminus \{0\}$. Karena $AG_I(R)$ memuat copy-an dari $K_{3,3}$, yang berarti bukan planar.

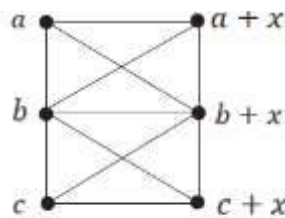
Untuk pernyataan sebaliknya, dengan kontradiksi jika $AG(R/I)$ graf lengkap, maka tidak satupun dari vertex-nya adalah connected column, atau $AG(R/I)$ bukan graf lengkap. Jika $AG(R/I)$ graf lengkap dan tidak ada vertex yang connected column, maka pada Gambar 5, $AG_I(R)$ merupakan planar dan hal ini kontradiksi.



Gambar 5. Graf $AG_I(R)$

Selanjutnya, andaikan bahwa $AG(R/I)$ bukanlah suatu segitiga, dapat dikatakan $a + I$ dan $c + I$ tidak adjacent. Maka pada Gambar 6, $AG_I(R)$ merupakan planar dan hal ini kontradiksi. Sehingga terbukti.

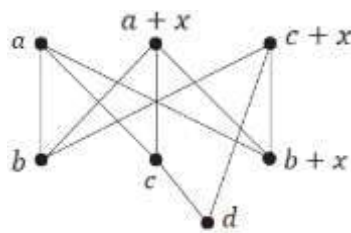
■



Gambar 6. Graf $AG_I(R)$

Teorema 3.3. Untuk $|V(AG(R/I))| \geq 4$ dan $|I| = 2$, berlaku $AG_I(R)$ bukan planar jika dan hanya jika terdapat subdivision dari graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ dalam $AG(R/I)$.

Bukti. Pertama, andaikan bahwa terdapat *subdivision* dari graf lengkap K_3 dalam $AG(R/I)$. Anggap bahwa $a + I, b + I, c + I$, dan $d + I$ adalah *vertex* berbeda pada $AG(R/I)$. Jika *vertex*-nya berbentuk persegi dalam $AG(R/I)$, maka $AG_I(R)$ mempunyai subgraf yang *isomorphic* terhadap $K_{3,3}$ dengan himpunan *vertex* $\{a, a + x, c\} \cup \{b, b + x, d\}$, dimana $x \in I \setminus \{0\}$. Karena $AG_I(R)$ memuat subgraf yang *isomorphic* terhadap $K_{3,3}$, sehingga $AG_I(R)$ bukan planar. Jika a, b , dan c berbentuk segitiga dalam $AG_I(R/I)$ maka pada Gambar 7 graf $AG_I(R)$ memuat suatu *subdivision* $K_{3,3}$. Jadi $AG_I(R)$ bukanlah planar.



Gambar 7. Graf $AG_I(R)$

Pernyataan sebaliknya jelas bahwa graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ bukanlah planar.

■

Suatu graf tak berarah adalah graf *outerplanar* jika dapat digambarkan pada suatu bidang tanpa saling bersilangan sedemikian sehingga setiap *vertex*-nya memiliki *face* tak berhingga. Karakteristik dari graf *outerplanar* adalah jika dan hanya jika tidak termuat *subdivisi* graf lengkap K_4 atau graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ (oleh Harary [10]). Berikut diberikan teorema tentang graf *outerplanar* dari $AG_I(R)$.

Teorema 3.4. Untuk $|V(AG(R/I))| = 1$ berlaku $|I| \leq 3$, jika dan hanya jika $AG_I(R)$ adalah *outerplanar*.

Bukti. Berdasarkan Teorema 3.1, karena $|V(AG(R/I))| = 1$ maka $AG_I(R)$ adalah *isomorphic* terhadap $K_{|I|}$ untuk $|I| \leq 4$ adalah planar. Tetapi, jika $|I| \geq 4$ (R) memuat subgraf yang *isomorphic* terhadap K_4 sehingga tidak memenuhi graf *outerplanar*. Berarti, untuk $|I| \leq 3$ maka $AG_I(R)$ merupakan graf *outerplanar*.

Pernyataan sebaliknya adalah jelas bahwa apabila $AG_I(R)$ merupakan graf *outerplanar* maka tidak memuat subgraf yang *isomorphic* terhadap K_4 sehingga pasti $|I| \leq 3$ untuk $|V(AG(R/I))| = 1$.

■

Teorema 3.5. Jika $|I|, |V(AG(R/I))| \geq 2$ dan minimal satu dari himpunan $V(AG(R/I))$ atau I memiliki tiga elemen maka $AG_I(R)$ bukan graf *outerplanar*.

Bukti. Pertama, andaikan $|I| \geq 3$ maka himpunan *vertex* $\{a, a + x_1, a + x_2\} \cup \{b, b + x_1, b + x_2\}$ dimana x_1 dan x_2 elemen yang berbeda tak nol dari I dan a, b adalah elemen yang berbeda dari $R \setminus I$, membentuk graf $K_{2,3}$. Sehingga $AG_I(R)$ memuat subgraf yang *isomorphic* terhadap $K_{2,3}$. Kedua, andaikan bahwa $|V(AG(R/I))| \geq 3$ dan $a + I, b + I, c + I$ adalah *vertex* yang berbeda pada $AG(R/I)$. Karena $AG(R/I)$ terhubung, berarti $a + I$ dan $c + I$ *adjacent* dengan $b + I$ sehingga *vertex* a dan c *adjacent* ke b dalam $AG_I(R)$. Selanjutnya, himpunan *vertex* $\{a, a + x_1, c\} \cup \{b, b + x_1\}$ membentuk graf $K_{2,3}$. Karena $AG_I(R)$ memuat subgraf yang *isomorphic* terhadap $K_{2,3}$, berarti $AG_I(R)$ bukan merupakan graf *outerplanar*.

■

Contoh 3.2. Pada Contoh 2.1, *ring* $S = \mathbb{Z}_{24}$ dengan *ideal* $J = \langle 6 \rangle$ diperoleh $|J| = 4 > 2, |V(AG(S/J))| = 3 \geq 2$ maka $AG_J(S)$ bukan merupakan *outerplanar*. Jelas terlihat pada Gambar 4 berupa graf bipartit lengkap $K_{4,8}$ yang menunjukkan bahwa $AG_J(S)$ bukan graf *outerplanar*.

Teorema 3.6. Untuk $|I| = |V(AG(R/I))| = 2$ berlaku $AG_I(R)$ bukan merupakan *outerplanar* jika dan hanya jika terdapat dua *connected column* pada $AG_I(R)$.

Bukti. Perhatikan bahwa $AG_I(R)$ terhubung karena $\Gamma_I(R)$ terhubung (Redmond [12]) dan $\Gamma_I(R)$ adalah subgraf pada $AG_I(R)$ dengan $V(\Gamma_I(R)) = V(AG_I(R))$ diperoleh $|I| = |V(AG(R/I))| = 2$ dan $|V(AG_I(R))| = 4$. Jadi, jelas bahwa terdapat dua *connected column* pada $AG_I(R)$ jika dan hanya jika $AG_I(R)$ *isomorphic* terhadap K_4 . Sehingga terbukti.

■

REFERENSI

- Adkins, William A., and Steven H. Weintraub (1992), *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, Inc., New York.
- Afkhami, M., N. Hoseini, and K. Khashyarmanesh (2016), *The Annihilator Ideal Graph of A Commutative Ring*, Note Mat. **36** no.1, 1-10.
- Akbari, S., H. R. Maimani, and S. Yassemi (2003), *When A Zero-Divisor Graph is Planar or A Complete r-Partite Graph*, Journal of Algebra **270**, 169-180.
- Anderson, D. F., and P. S. Livingston (1999), *The Zero-Divisor Graph of A Commutative Ring*, J. Algebra **217**, 434-447.
- Badawi, A. (2014), *On The Annihilator Graph of A Commutative Ring*, Communications in Algebra **42**, 1-14.

- Beck, I. (1988), *Coloring of Commutative Rings*, J. Algebra **116**, 208-226.
- Chartrand, G. (1977), *Introductory Graph Theory*, Dover Publication, Inc., New York.
- Chartrand, G., L. Lesniak, and P. Zhang (2016), *Graphs and Digraphs*, 6th ed., CRC Press, New York.
- Fraleigh, John. B. (2003), *First Course in Abstract Algebra*, 7th ed., Pearson Education, India.
- Harary, F. (1972), *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Malik, D. S., John N. Mordeson, and M. K. Sen (2007), *Introduction to Abstract Algebra*, United States of America, 581-582.
- Redmond, S. P. (2003), *An Ideal-Based Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring*, Communications in Algebra **31**, 4425-4443.



PERBANDINGAN SOLUSI PERSAMAAN VAN DER POL MENGUNAKAN METODE *MULTIPLE SCALE* DAN METODE KRYLOFF DAN BOGOLIUBOFF

(COMPARISON OF VAN DER POL EQUATION SOLUTIONS USING *MULTIPLE SCALE* METHOD AND KRYLOFF AND BOGOLIUBOFF METHOD)

Yuni Yulida*
Universitas Lambung
Mangkurat

Muhammad Ahsar K
Universitas Lambung
Mangkurat

ABSTRACT: Van der Pol equation is one of the problems of a nonlinear ordinary differential equation that becomes a prototype for a system with a limit cycle oscillation. This equation contains perturbation terms that are difficult to solve analytically to obtain exact solutions. Therefore, special methods are needed to obtain an approach solution. One method that can be used to obtain solution approach and overcome the problem of perturbation is multiple scale method. On the other hand, the Van der Pol equation is classified as a quasi linear differential equation that satisfies the requirements to be solved by Kryloff and Bogoliuboff method. In this study, we determined approach solutions of the Van der Pol equation by using both multiple scale method and the Kryloff and Bogoliuboff method, then we compared the two solutions to the Runge-Kutta method solution. Our result is the Van der Pol equation solution using the multiple scale method was closer to the Runge-Kutta method solution, compared with the Kryloff and Bogoliuboff method. However, the three methods provide amplitude that converges to the same value.

KEYWORDS: Van der Pol equation, *multiple scale* method, Kryloff and Bogoliuboff method, Runge-Kutta method.

* Corresponding Author: Program Studi Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat, Jl. A. Yani km 35,800 Banjarbaru, Kalimantan Selatan 70714; Email: y_yulida@ulm.ac.id

PENDAHULUAN

Persamaan Van der Pol memiliki sejarah yang panjang dalam perkembangan teori maupun aplikasinya. Dalam bidang biologi, persamaan Van der Pol diperluas dan diaplikasikan ke bidang planar sebagai model untuk potensial aksi dari neuron. Dalam bidang seismologi, persamaan ini digunakan untuk memodelkan interaksi dua lempeng dalam patahan geologis. Kemudian pada bidang neurologi, persamaan Van der Pol digunakan dalam mempelajari sistem kontrol penggerak jaringan saraf di sumsum tulang belakang. Sedangkan Van der Pol sendiri membangun sejumlah model sirkuit elektronik jantung manusia untuk mempelajari berbagai kestabilan dinamika jantung.

Persamaan Van der Pol merupakan persamaan diferensial yang mengandung suku-suku gangguan (yang biasa disebut perturbasi) dan sulit diselesaikan secara analitik untuk memperoleh solusi eksak (Bajaj, 2013). Oleh karena itu, dibutuhkan metode khusus untuk memperoleh solusi pendekatan. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi pendekatan dan mengatasi masalah perturbasi

adalah metode *multiple scale*. Metode ini digolongkan sebagai salah satu metode perturbasi yang digunakan untuk menentukan solusi aproksimasi yang dinyatakan dalam bentuk ekspansi barisan dari suatu sistem yang mengandung suku-suku perturbasi, yaitu suatu parameter yang bernilai kecil (Hinch, 1991). Menurut Nafyeh (1993), metode *multiple scale* dapat menangkap solusi dengan perilaku periodik dan menangani masalah sistem teredam.

Di sisi lain, persamaan Van der Pol merupakan persamaan diferensial dengan turunan tertinggi yang tidak memuat perkalian antara variabel-variabel tak bebas dengan turunannya, sehingga dapat digolongkan sebagai persamaan diferensial quasi linier. Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial quasi linier adalah metode Kryloff dan Bogoliuboff. Metode ini pertama kali dikemukakan oleh Kryloff dan Bogoliuboff pada tahun 1937, para ahli matematika dari Rusia, yang menggunakan metode variasi parameter (Ross, 2004) sebagai dasar pengembangan metodenya.

BAHAN DAN METODE

Berikut disajikan pustaka yang terkait sebagai berikut.

1. Metode *Multiple Scale*

Metode *Multiple Scale* adalah salah satu metode perturbasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear yang mengandung suku-suku perturbasi. Metode *Multiple Scale* memberikan solusi bagaimana menghilangkan suku-suku tersebut, sehingga dapat menghasilkan solusi yang dekat dari solusi eksaknya. Berikut ini merupakan contoh klasik yang digunakan untuk mengilustrasikan *Multiple Scale*.

Diberikan persamaan

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad \text{dengan kondisi awal } y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (1)$$

dan diasumsikan solusi persamaan (2.30) ditulis dalam bentuk

$$y = y_0(t_1, t_2) + \varepsilon y_1(t_1, t_2) + \varepsilon^2 y_2(t_1, t_2) + \dots \quad (2)$$

untuk t_1, t_2, t_3 didefinisikan dengan $t_1 = t$, $t_2 = \varepsilon t$, sehingga operator diferensial yang digunakan adalah

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (3)$$

Dari persamaan (2) dan (3) didapat

$$y' = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \right) y, \text{ serta} \quad (4)$$

$$y'' = \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) y$$

⋮

Selanjutnya, persamaan (2) dan (4) disubstitusi ke persamaan (1), diperoleh

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1^2} + \dots \right) + \left(2\varepsilon \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1 \partial t_2} + \dots \right) \right] \\ & + \left[\left(\varepsilon \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \varepsilon^3 \frac{\partial y_2}{\partial t_1} + \dots \right) \right. \\ & \left. + \left(\varepsilon^2 \frac{\partial y_0}{\partial t_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial y_1}{\partial t_2} + \varepsilon^4 \frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \dots \right) + \dots \right] + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya dikumpulkan suku-suku sejenis dalam pangkat ε , sehingga didapatkan :

Order (ε^0) : $\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 = 0$, Order (ε^1) : $\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + y_1 = 0$ dan seterusnya. Berdasarkan penyelesaian masalah order, selanjutnya akan didapat solusi dari persamaan Van der Pol dalam $y(t; \varepsilon)$, Holmes (1995) dan Karim (2019).

2. Metode Kryloff dan Bogoliuboff

253

Berdasarkan (Ross, 2004) dan (Adlyni dkk, 2017), Metode Kryloff dan Bogoliuboff digunakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial biasa quasi linier. Persamaan diferensial biasa quasi linier tersebut berbentuk

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x + \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (5)$$

dengan ω^2 merupakan percepatan sudut dan μ adalah parameter yang cukup kecil $|\mu| \ll 1$ pada kasus osilasi, sedemikian sehingga bentuk nonlinier $\mu f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ relatif kecil. Persamaan Van der Pol sendiri merupakan persamaan quasi linier dengan kasus $\omega^2 = 1$ dan $\mu f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt}$. (6)

Pada tulisan (Adlyni dkk, 2017), solusi dari persamaan diferensial biasa quasi linier diperoleh bergantung pada parameter. Jika $\mu = 0$ maka diperoleh persamaan linier $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ dengan solusi $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ dengan A dan ϕ konstan. Jika $\mu \neq 0$ maka solusi diperoleh dengan mengasumsikan bahwa konstanta yang terdapat pada solusi persamaan linier diubah dalam bentuk fungsi $x(t) = A(t) \sin[\omega t + \phi(t)]$ (7) dengan fungsi $A(t)$ dan $\phi(t)$ ditentukan oleh sistem berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= -\frac{\mu}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(A \sin \theta, \omega A \cos \theta) \cos \theta d\theta \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\mu}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \theta, \omega A \cos \theta) \sin \theta d\theta\end{aligned}\quad (8)$$

3. Prosedur Penelitian

Solusi Pendekatan persamaan Van der Pol pada penelitian ini ditentukan menggunakan 2 metode yaitu Metode *Multiple Scale* dan Metode Kryloff dan Bogoliuboff. Langkah-langkah dalam menentukan solusi tersebut adalah menentukan solusi pendekatan dengan Metode *Multiple Scale (MS)*, menentukan solusi pendekatan dengan Metode Kryloff dan Bogoliuboff (MK) dan membandingkan solusi yang diperoleh pada langkah 1 dan 2 dengan solusi menggunakan Metode Rungge Kutta (RK4).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Van der Pol merupakan persamaan diferensial order dua yang berbentuk

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (9)$$

254

dengan x adalah koordinat posisi yang merupakan fungsi dari waktu t , dan μ adalah parameter skalar yang menunjukkan nonlinier dan kekuatan redaman, dengan $0 < \mu \leq 1$.

Salah satu hal yang penting pada analisa Persamaan Van der Pol adalah menentukan solusi pendekatan, karena solusi eksak sulit untuk ditentukan. Solusi pendekatan untuk persamaan Van der Pol (9) dapat menggunakan metode *Multiple Scale* dan Metode Kryloff dan Bogoliuboff sebagai berikut.

Solusi pendekatan persamaan Van der Pol menggunakan metode *Multiple Scale*

Pada Metode *Multiple Scale* ini diasumsikan bahwa solusi Persamaan (9) berbentuk: $x = x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots$ (10)

dengan (dimisalkan) $t_1 = t, t_2 = \mu t$, dan menggunakan Persamaan (10) dan (3) diperoleh:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu \frac{\partial}{\partial t_2} \right) x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) x \quad (11)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (10) dan (11) ke Persamaan (9) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + x &= \mu \left(1 - x^2 \right) \frac{dx}{dt} \\ \Leftrightarrow \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) + 1 \right) x_0(t_1, t_2) &+ \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \quad (12) \\ &= \varepsilon \left(1 - x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu \frac{\partial}{\partial t_2} \right) x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \end{aligned}$$

Persamaan (12), diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) x_0(t_1, t_2) &+ \mu x_1(t_1, t_2) + \dots + x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \\ - \mu \left(1 - x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \right) &\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu \frac{\partial}{\partial t_2} \right) x_0(t_1, t_2) + \mu \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu \frac{\partial}{\partial t_2} \right) x_1(t_1, t_2) + \dots \\ = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \right) &+ 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \\ + x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \\ - \varepsilon \left(1 - x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \right) &\left(\frac{\partial}{\partial t_1} x_0(t_1, t_2) + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t_2} x_0(t_1, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_1} x_1(t_1, t_2) \right) + \dots \right) \\ = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \right) &+ 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \\ + x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots - \mu \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_1} x_0(t_1, t_2) + \mu \left(\frac{\partial}{\partial t_2} x_0(t_1, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_1} x_1(t_1, t_2) \right) + \dots \right) \right. \\ &\left. - \left(\frac{\partial}{\partial t_1} x_0(t_1, t_2) + 2\mu x_0(t_1, t_2) x_1(t_1, t_2) + \dots \frac{\partial}{\partial t_1} x_0(t_1, t_2) \right) \right. \\ &\left. + \mu \left(\frac{\partial}{\partial t_1} x_0(t_1, t_2) + 2\mu x_0(t_1, t_2) x_1(t_1, t_2) + \dots \left(\frac{\partial}{\partial t_2} x_0(t_1, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_1} x_1(t_1, t_2) \right) \right) \right) \\ = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_0 + \mu \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_1 + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0 + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_1 + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} x_0 + \mu^3 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} x_1 + x_0 + \mu x_1 - \mu \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 \\ - \mu^2 \frac{\partial}{\partial t_2} x_0 - \mu^2 \frac{\partial}{\partial t_1} x_1 + \mu x_0^2 \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 + 2\mu^2 x_0 x_1 \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 + \mu^2 x_0^2 \frac{\partial}{\partial t_2} x_0 + \mu^2 x_0^2 \frac{\partial}{\partial t_1} x_1 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_0 + x_0 + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_1 + x_1 + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0 + - \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 + x_0^2 \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 \right) + \dots = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

Dari Persamaan (13), dengan mengumpulkan suku-suku yang sejenis dalam pangkat μ , maka diperoleh:

$$\text{Order } O(\mu^0): \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_0 + x_0 = 0 \quad (14)$$

$$\text{Order } O(\mu^1): \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_1 + x_1 = 1 - x_0^2 \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 - 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0 \quad (15)$$

Persamaan (15) adalah persamaan diferensial order 2 homogen, jadi solusi umum persamaan tersebut adalah

$$x_0(t_1) = a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1). \quad (16)$$

dengan $a_0(t_2)$ dan $b_0(t_2)$ adalah fungsi-fungsi sebarang dalam t_2 . Persamaan (16) dapat ditulis menjadi $x_0(t_1) = a(t_2) \cos t_1 + \theta(t_2)$ (17)

Dengan menggunakan sifat Euler, Persamaan (17) dapat dinyatakan

$$x_0(t_1) = \frac{1}{2} a e^{i\theta} e^{it_1} + \frac{1}{2} a e^{-i\theta} e^{-it_1}. \quad (18)$$

$$\text{Misalkan: } R(t_2) = \frac{1}{2} a e^{i\theta}, \bar{R}(t_2) = \frac{1}{2} a e^{-i\theta}, \quad (19)$$

$$\text{Maka Persamaan (18) menjadi } x_0(t_1) = R(t_2) e^{it_1} + \bar{R}(t_2) e^{-it_1} \quad (20)$$

Dari Persamaan (20) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial t_1} &= R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1} \\ \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1 \partial t_2} &= R' i e^{it_1} - \bar{R}' i e^{-it_1} \end{aligned} \quad (21)$$

Pers (21) disubstitusi ke $O(\mu^1)$ pada Persamaan (15), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_1 + x_1 &= 1 - x_0^2 \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 - 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0 \\ &= [R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1}] + R^2 e^{i2t_1} [R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1}] + 2 R \bar{R} [R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1}] \\ &\quad + \bar{R}^2 e^{-i2t_1} [R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1}] - 2 R' i e^{it_1} - 2 \bar{R}' i e^{-it_1} \\ &= R i + R^2 \bar{R} i - 2 R' i e^{it_1} + R^3 i e^{i3t_1} - \bar{R} i + R \bar{R}^2 i + 2 \bar{R}' i e^{-it_1} \\ &\quad - \bar{R} i e^{-i3t_1} \end{aligned} \quad (22)$$

Dengan mengganti kompleks konjugat dengan cc , maka diperoleh

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_1 + x_1 = R i + R^2 \bar{R} i - 2 R' i e^{it_1} + R^3 i e^{i3t_1} + cc \quad (23)$$

Dengan memilih suku yang memuat e^{it_1} dan membuatnya bernilai nol, maka diperoleh: $R i + R^2 \bar{R} i - 2 R' i e^{it_1} = 0$

Karena $e^{it} \neq 0$, maka $Ri + R^2 \bar{R}i - 2R'i = 0$

(24)

Dengan menggunakan Persamaan (19) dan mengingat $t_2 = \varepsilon t_1$, maka Persamaan (24) menjadi

$$\left(\frac{1}{2} ai - a'i + a\theta' + \frac{1}{8} a^3 i \right) e^{i\theta} = 0. \quad (25)$$

Karena $e^{i\theta} \neq 0$, maka diperoleh

$$\left(\frac{1}{2} a - a' + \frac{1}{8} a^3 \right) i + a\theta' = 0 \quad (26)$$

Persamaan (26) akan bernilai nol, jika memenuhi sistem

$$a' = \frac{1}{2} a - \frac{1}{8} a^3, \quad (27)$$

$$a\theta' = 0$$

Dari persamaan (27) yang bagian kedua, diperoleh solusi $\theta = \theta_0$ maka solusi (17) menjadi

$$x_0(t_1) = a t_2 \cos t_1 + \theta_0 + O(\mu) \quad (28)$$

Dari persamaan (27) bagian pertama merupakan persamaan Bernoulli, dengan nilai awal $a(0) = a_0 > 0$ diperoleh solusi pendekatan (28) menjadi

$$x_0(t_1) = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + 4 - a_0^2 e^{-t_2}}} \cos t_1 + \theta_0 + O(\mu) \quad (29)$$

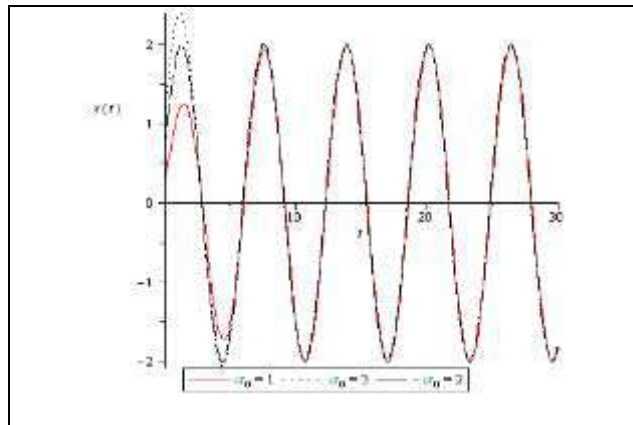
Jadi solusi perturbasi Persamaan Van Der Pol (10) didekati menggunakan suku pertama diperoleh

$$x(t) = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + 4 - a_0^2 e^{-\mu t}}} \cos t + \theta_0 \quad (30)$$

dengan $a(t) = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + 4 - a_0^2 e^{-\mu t}}}$. Selanjutnya, berdasarkan persamaan (30) dapat

dianalisa bahwa Jika $a_0 = 2$ maka $a(t) = 2$ sehingga menghasilkan solusi periodik yaitu $x(t) = 2 \cos t + \theta_0$. Jika $0 < a_0 < 2$ atau $a_0 > 2$ untuk $t \rightarrow \infty$ maka diperoleh

$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 2$. Berikut diberikan grafik solusi $x(t)$ menggunakan Metode *Multiple Scale* dengan variasi nilai amplitudo awal a_0 .



Gambar 1. Solusi Persamaan Van der Pol menggunakan Metode *Multiple Scale* dengan variasi nilai a_0

Solusi Pendekatan Metode Kryloff dan Bogoliuboff

Menurut (Ross, 2004) dan (Adlini, dkk 2017), Persamaan Quasi Linier dapat diselesaikan Metode Kryloff dan Bogoliuboff. Persamaan Van der Pol (9) sendiri merupakan persamaan quasi linier dengan kasus yaitu:

$$\omega^2 = 1 \text{ dan}$$

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} \quad (31)$$

Sehingga metode ini dapat diterapkan untuk menentukan solusi pendekatan dari Persamaan Van der Pol (4.1).

Jika $\mu = 0$ maka Persamaan (9) merupakan persamaan linier dengan solusi $x(t) = a \sin \theta$ dan turunannya $\frac{dx}{dt} = a \cos \theta$. Selanjutnya berdasarkan Persamaan (31) diperoleh $f(a \sin \theta, a \cos \theta) = (a^2 \sin^2 \theta - 1) a \cos \theta$ (32)

Solusi (9) untuk $\mu \neq 0$ adalah $x(t) = a(t) \sin[t + \phi(t)]$, dengan fungsi $a(t)$ dan $\phi(t)$ ditentukan oleh Sistem (8), dengan menggunakan Persamaan (32) diperoleh

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 \theta - 1) a \cos^2 \theta d\theta$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu}{2\pi a} \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 \theta - 1) a \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Atau

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{\pi a^3}{4} - a\pi \right] \quad (33)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (34)$$

Dari persamaan (34) diperoleh solusi $\phi(t) = \phi_0$ (35)

Persamaan (33) merupakan persamaan diferensial Persamaan Bernoulli, jika diberikan nilai awal $a(0) = a_0 > 0$ diperoleh solusi

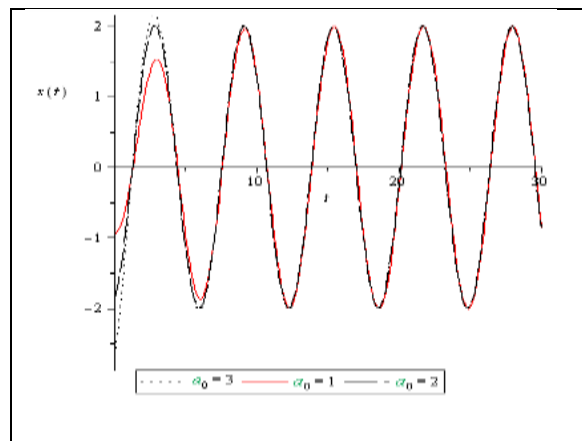
$$a(t) = \sqrt{\frac{a_0^2 e^{\mu t}}{1 + \frac{a_0^2}{4}(e^{\mu t} - 1)}} \quad (36)$$

Jadi Solusi pendekatan persamaan Van Der Pol (9) adalah

$$x(t) = \frac{a_0 e^{\frac{\mu}{2}t}}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2}{4}(e^{\mu t} - 1)}} \sin[t + \phi_0] \quad (37)$$

Dari persamaan (36) dapat dianalisa bahwa, jika $a_0 = 2$ maka $a(t) = 2$ sehingga menghasilkan solusi periodik yaitu $x(t) = 2 \sin[t + \phi_0]$. Jika $0 < a_0 < 2$ atau $a_0 > 2$ untuk $t \rightarrow \infty$ maka diperoleh $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 2$. Berikut disajikan grafik solusi persamaan Van der pol (38) dengan variasi nilai amplitudo awal.

259



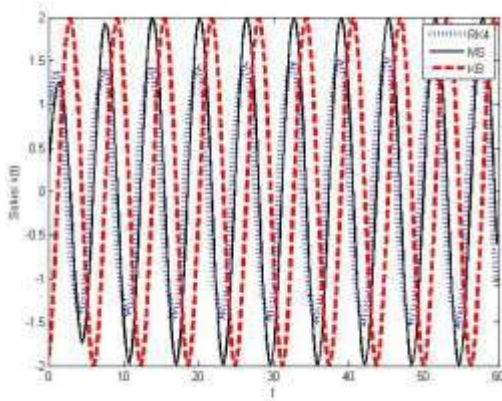
Gambar 2. Solusi Persamaan Van der Pol menggunakan Metode Kryloff dan Bogoliuboff dengan variasi nilai α_0

Jadi berdasarkan analisa solusi pendekatan dan grafik (Gambar 1 dan 2) menggunakan Metode *Multiple Scale* dan Metode Kryloff dan Bogoliuboff dapat

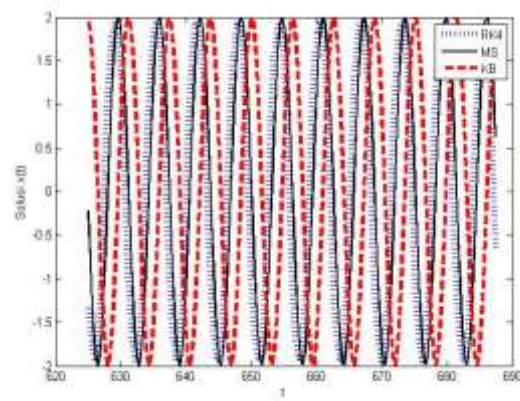
disimpulkan bahwa dengan diberikan variasi nilai amplitudo awal maka solusi persamaan Van der Pol akan konvergen ke solusi periodik dengan periode 2.

Perbandingan solusi metode *Multiple Scale* (MS) dengan Metode Kryloff dan Bogoliuboff (KB) terhadap solusi Metode Rungge Kutta (RK4)

Selanjutnya diberikan grafik solusi menggunakan metode *Multiple Scale* (MS), Metode *Kryloff* dan *Bogoliuboff* (KB) dan solusi menggunakan Metode Rungge Kutta (RK4).

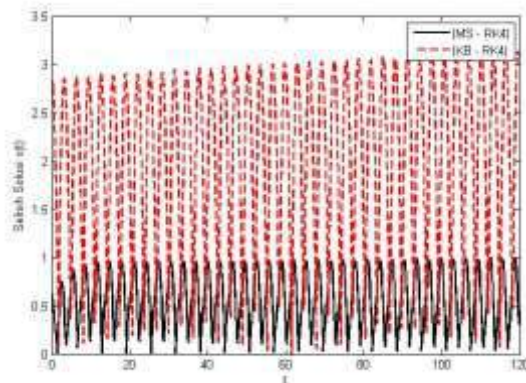


Gambar 3a. Grafik solusi menggunakan metode *Multiple Scale* (MS), Metode *Kryloff* dan *Bogoliuboff* (KB) serta Metode Rungge Kutta (RK4) untuk $t = 0..60$

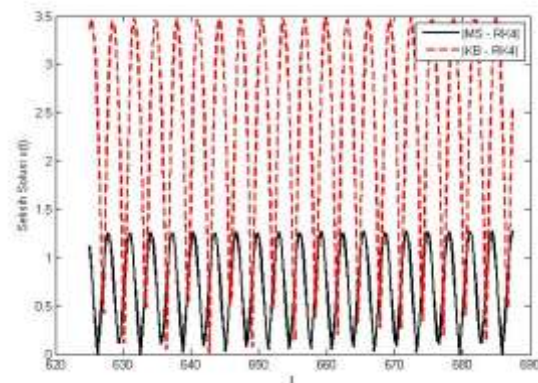


Gambar 3b. Grafik solusi menggunakan metode *Multiple Scale* (MS), Metode *Kryloff* dan *Bogoliuboff* (KB) serta Metode Rungge Kutta (RK4) untuk $t = 620..690$

Dari Gambar 3a metode MS dan Metode KB solusinya lebih cepat konvergen ke amplitudo 2, dibanding dengan Metode RK4. Sedangkan Gambar 3b ketiga metode konvergen ke amplitudo yang sama yaitu 2. Berdasarkan grafik (gambar 3a dan 3b) solusi yang diperoleh menggunakan metode MS lebih dekat dengan solusi menggunakan Metode RK4, dibandingkan dengan KB. Untuk memperlihatkan kedekatan solusi tersebut diberikan Gambar 4a dan 4b yaitu Perbandingan solusi metode MS dengan Metode KB terhadap solusi Metode RK4 berikut.



Gambar 4a. Grafik Perbandingan solusi metode *Multiple Scale (MS)* dengan Metode *Kryloff* dan *Bogoliuboff (KB)* terhadap solusi Metode Rungge Kutta (RK4) untuk $t = 0 \dots 120$



Gambar 4b. Grafik Perbandingan solusi metode *Multiple Scale (MS)* dengan Metode *Kryloff* dan *Bogoliuboff (KB)* terhadap solusi Metode Rungge Kutta (RK4) untuk $t = 620 \dots 690$

REFERENSI

Adlini, S., Yulida, Y. dan Faisal. 2017. *Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Quasi Linier Menggunakan Metode Kryloff dan Bogoliuboff*. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya I (SIMANTAP I) Program Studi Matematika FMIPA ULM, Banjarbaru, Hal. 68-73, ISBN 978-602-61597-0-0.

Bajaj, V. and Prakash, N. 2013. Non Linear Oscillator Systems and Solving Techniques. *Int. Journal of Scientific and Research Publications*, Vol 3, page 1-9.

Braun, M. 1992. *Differential Equation and Their Applications-Fourth Edition*. Springer-Verlag. New York

Hinch, E.J. 1991. *Perturbation Methods*. Cambridge, Cambridge University Press.

Holmes, M.H. 1995. *Introduction to Perturbation Methods. Applied Math*. New York, Springer-Verlag

Karim, M.A. 2019. *Estimasi Parameter pada Persamaan Diferensial Biasa Fuzzy*, Disertasi Program Doktor, Institut Teknologi Bandung

Nayfeh, A.H. 1993. *Introduction to Perturbation Techniques*. Willey Classic Library. Virginia.

Ross, S.L. 2004. *Differential Equations*. Third Edition. John Wiley & Sons, New Delhi.



PENGARUH USIA DAN TINGKAT PENDIDIKAN IBU HAMIL TERHADAP KEPATUHAN MELAKSANAKAN ANTE NATAL CARE MELALUI MODEL COX PROPORTIONAL HAZARD

(EFFECT OF AGE AND EDUCATION LEVEL OF PREGNANT WOMEN ON COMPLIANCE IMPLEMENTING ANTE NATAL CARE BY COX PROPORTIONAL HAZARD MODEL)

Zubara Hadis *
Univ. Syiah Kuala

Nur Husna Adila
Univ. Syiah Kuala

Miftahuddin
Univ. Syiah Kuala

ABSTRACT: One way to overcome maternal mortality (MMR) and infant mortality (IMR) is to carry out pregnancy checking or ante natal care (ANC). ANC is care provided to pregnant women before labor takes place so that the mother or baby is safe. Through ANC, we can detect early if there is a disturbance so that the mother and baby can be treated early. The study was conducted with the aim of analyzing how the relationship of age and education level to adherence to implementing ANC in pregnant women at the Lueng le Village Health Center, Krueng District, Barona Jaya, Aceh Besar. This study used as many as 5 samples of pregnant women at Krueng Health Center Barona Jaya, Aceh Besar. The results were obtained from 5 existing data samples, 2 mothers aged 20-30 years, and 3 mothers aged 30-40 years. While the educational level of the mother's samples taken varied between elementary and high school. From the chi-square results the value of p-value for the age of 0.828 and for the level of elementary education is 1,000 and the SMA is 1,000 with the real level used at 0.05. So the conclusion is that there is a relationship between the age of pregnant women to ANC compliance in Lueng le Village Health Center, Krueng Barona Jaya District, Aceh Besar, but there is no correlation between the education level of pregnant women in ANC compliance at Lueng le Village Health Center, Krueng Barona Jaya District, Aceh Besar.

KEYWORDS: *ANC, Age, Education Level, Cox PH Model*

* Corresponding Author: Jurusan Statistika FMIPA Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh; Email: hadiszubara@gmail.com

PENDAHULUAN

Pelayanan Ante Natal Care (ANC) adalah pelayanan kesehatan oleh tenaga kesehatan terlatih untuk ibu selama masa kehamilannya, dilaksanakan sesuai dengan standar pelayanan antenatal yang ditetapkan dalam standar pelayanan kebidanan (Kemenkes, 2010). Menurut Kemenkes RI (2010) menyatakan bahwa standar pelayanan kebidanan meliputi 24 standar yaitu: a. Standar pelayanan umum (2 standar) b. Standar pelayanan Ante Natal Care (6 standar) c. Standar pelayanan persalinan (4 standar) d. Standar pelayanan nifas (3 standar).

Salah satu indikator untuk melihat keberhasilan kualitas pelayan obstetri dan ginekologi, dapat dilihat dari penurunan Angka Kematian Ibu (AKI) dan Angka

Kematian Bayi (AKB). Berdasarkan target dari kemenkes, untuk *Millenium Development Goals* Indonesia, AKI 102 kematian ibu per 100.000 kelahiran hidup, dan AKB 20 kematian bayi per 1000 kelahiran hidup. Penyebab dari AKI dan AKB sendiri dapat karena perdarahan, pre/eklamsia, partus lama, abortus, dan infeksi (Kemenkes RI & WHO, 2013).

AKI dan AKB ini dapat diturunkan dengan program dari kementerian kesehatan yang dikeluarkan pada tahun 2012, yaitu *Expanding Maternal and Neonatal Survival* (EMAS). Salah satunya dengan cara melakukan *ante natal care* (ANC). Penilaiannya sendiri dapat dilakukan dengan melihat cakupan Kunjungan antenatal ke-1 (K1) dan Kunjungan antenatal ke-4 (K4). Cakupan K1 adalah jumlah ibu hamil yang telah memperoleh pelayanan antenatal pertama kali oleh tenaga kesehatan dibandingkan jumlah sasaran ibu hamil di satu wilayah kerja pada kurun waktu satu tahun. Sedangkan cakupan K4 adalah jumlah ibu hamil yang telah memperoleh pelayanan antenatal sesuai dengan standar paling sedikit empat kali sesuai jadwal yang dianjurkan di tiap trimester dibandingkan jumlah sasaran ibu hamil di satu wilayah kerja pada kurun waktu satu tahun (Kemenskes RI, 2016).

Cakupan K1 pada tahun 2015 di Indonesia sendiri sebesar 95,75%, dan untuk cakupan K4 87,48%. Untuk keseluruhan wilayah yang ada di Indonesia bila dirata-rata ternyata masih banyak ibu hamil yang tidak memeriksakan kehamilannya sesuai standar yang diberikan Kemenkes. Ada beberapa faktor yang mempengaruhi kepatuhan untuk melaksanakan ANC. Menurut Profil Kesehatan Provinsi Aceh tahun 2015, K1 di Kabupaten Aceh Besar sebesar 95,47%, sedangkan untuk K4 sebesar 95,11%.

Melihat cukup tingginya kunjungan K1 dan K4 di Kabupaten Aceh Besar, maka perlu dicari faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi. Faktor yang diteliti adalah usia dan tingkat pendidikan. Sehingga, penelitian ini bertujuan untuk mengetahui apakah ada hubungan antara usia dan tingkat pendidikan terhadap tingkat kepatuhan ANC di Puskesmas Desa Lueng Ie, Kecamatan Krueng Barona Jaya, Aceh Besar.

BAHAN DAN METODE

Analisis Survival

Analisis survival merupakan suatu analisis data dimana variabel yang diperhatikan adalah jangka waktu dari awal pengamatan sampai suatu kejadian terjadi dengan melihat variabel yang mempengaruhi kejadian tersebut. Di dalam analisis survival dibutuhkan beberapa factor seperti waktu awal pencatatan (*start point*) yang didefinisikan dengan baik, waktu akhir pencatatan (*end point*) yang terdefinisi dengan

baik untuk mengetahui status tersensor maupun tidak tersensor suatu data, dan skala waktu pengukuran yang jelas (hari, minggu atau tahun).

Waktu survival dapat didefinisikan sebagai suatu variabel yang mengukur waktu dari suatu titik awal (*start point*) sampai dengan titik akhir (*end point*) yang ditetapkan. Selain itu, suatu kejadian dapat pula dikatakan sebagai sebuah kegagalan (*failure*) apabila munculnya suatu penyakit, atau peristiwa peristiwa buruk lainnya yang menimpa suatu objek. Akan tetapi, suatu kegagalan (*failure*) tidak selamanya merupakan suatu peristiwa yang buruk, terdapat pula suatu peristiwa yang kegagalannya merupakan suatu peristiwa positif, misalnya sembuhnya seseorang dari suatu penyakit, seseorang mendapatkan suatu pekerjaan.

Metode Cox Propotional Hazard

Salah satu tujuan dari analisis survival adalah untuk menyelidiki hubungan antara waktu survival dengan variabel-variabel yang diduga mempengaruhi waktu survival. Salah satu analisis yang dapat menyelidiki hubungan tersebut adalah *Regresi Cox Propotional Hazard*. *Regresi Cox* termasuk dalam metode semiparametrik, dimana didalam metode ini tidak memerlukan informasi tentang distribusi yang mendasari waktu survival dan fungsi *baseline hazard* tidak harus ditentukan untuk mengestimasi parameternya. Selain metode semiparametrik, terdapat metode lainnya yang dapat digunakan menganalisis data survival, yaitu metode parametrik, metode nonparametrik dan metode semiparametrik. Metode parametrik mengasumsikan bahwa distribusi yang mendasari waktu survival mengikuti suatu distribusi tertentu, misalnya distribusi *Weibull*, *gamma*, *eksponensial*. Metode nonparametrik digunakan apabila data yang digunakan tidak mengikuti suatu distribusi tertentu seperti *metode Kaplan Meier dan Nelson-Aalen*. Secara umum, bentuk dari model *Cox* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h(t, X) &= h_0(t) \exp(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k) \\ &= h_0(t) e^{(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k)} \end{aligned}$$

dimana:

$h_0(t)$ = Fungsi *baseline hazard*

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ = Parameter regresi

X_1, X_2, \dots, X_k = Variabel-variabel penjelas (kovariat)

Metode Penelitian

Penelitian ini dengan menggunakan *simple random sampling* (penarikan sampel sederhana) pada data kunjungan ibu hamil di Puskesmas Desa Lueng Ie, Kecamatan Krueng Barona Jaya, Aceh Besar dari Mei 2018 sampai April 2019. Jumlah total

populasi ada 24 dengan sampel sebanyak 5 ibu hamil. Data didapatkan dari rekan medis ibu hamil yang melakukan kunjungan pemeriksaan ke Puskesmas Desa Lueng Ie, Kecamatan Krueng Barona Jaya, Aceh Besar. Pengolahan data untuk metode *Regresi Cox Propotional Hazard* menggunakan aplikasi Rstudio.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Estimasi Parameter Model Cox Proportional Hazard

Dengan bantuan software Rstudio diperoleh estimasi parameter dengan metode likelihood, didapatkan hasil sebagai berikut

Tabel 1. Estimasi Parameter Model Cox Proportional Hazard

| Variabel | Parameter estimate | SE | Chisq | P |
|----------------|--------------------|----------|----------|--------|
| Usia | -4.36E-02 | 2.08E-02 | 4.70E-02 | 0.0362 |
| Pendidikan SD | 2.07E+01 | 1.72E+04 | 1.74E-11 | 0.999 |
| Pendidikan SMA | 2.01E+01 | 1.72E+04 | 1.25E-10 | 0.9991 |

Sehingga diperoleh estimasi model cox Proportional Hazard dengan metode *partial likelihood* sebagai berikut :

$$H(t,x) = h_0(t) \exp [-4.36e-02 (\text{Usia}) + 2.07e+01 (\text{Pendidikan SD}) - 2.01e+01 (\text{Pendidikan SMA})]$$

Untuk mengetahui apakah model diatas sudah tepat, maka dilakukan uji partial ratio likelihood.

Hipotesis yang digunakan untuk uji partial ratio likelihood sebagai berikut.

$$H_0 : \beta_1 = 0, j = 1 \dots, p \text{ (Model tidak sesuai)}$$

$$H_a : \beta_1 \neq 0, j = 1 \dots, p \text{ (Model sesuai)}$$

Dengan taraf signifikansi α 5% (0,05). Statistik uji yang digunakan adalah

$$G = -2[\ln L(0) - \ln L(\beta_j)]$$

Statistik pada pengujian ini adalah $X^2_{(\alpha, db=p)}$

H_0 ditolak jika $G \geq X^2_{(\alpha, db=p)}$ atau $P\text{value} \leq \alpha$, dengan p adalah banyaknya variabel bebas.

Dari hasil output software Rstudio diperoleh nilai log likelihood untuk model tanpa variabel bebas (model null) yaitu 14.56 dan nilai log likelihood untuk model cox pada persamaan yaitu 8.34 sehingga diperoleh perhitungan sebagai berikut

$$G = -2[\ln L(0) - \ln L(\beta_j)]$$

$$G = (14.56 - 8.34)$$

$$G = 6.22$$

Dikarenakan $G = 6.22 \geq X^2_{(\alpha, db=p)} = 0.103$ atau $P\text{value} = 0.0362 \leq 0.05$ maka dapat disimpulkan bahwa model sesuai.

Pengujian Parameter

Hasil penelitian yang dilakukan pada Mei 2019 menunjukkan bahwa terdapat hubungan usia ibu hamil terhadap kepatuhan ANC di Puskesmas Desa Lueng Ie, Kecamatan Krueng Barona Jaya, Aceh Besar, tetapi tidak terdapat hubungan tingkat pendidikan ibu hamil terhadap kepatuhan ANC di Puskesmas Desa Lueng Ie, Kecamatan Krueng Barona Jaya, Aceh Besar. Berikut adalah model Cox Proportional Hazard yang didapat dari data tersebut:

$$H(t,x) = h_0(t) \exp [-4.355e-02(\text{usia}) + 2.074e+01(\text{tingkat pendidikan SD}) + 2.010e+01(\text{tingkat pendidikan SMA})]$$

Setelah itu dilakukan uji asumsi proportional hazard diperoleh tabel hasil:

Tabel 2. Uji asumsi Proportional Hazard

| Variabel | Rho | Chisq | P |
|----------------|---------|----------|-------|
| Usia | -0.0894 | 4.70E-02 | 0.828 |
| Pendidikan SD | -0.022 | 1.74E-11 | 1.000 |
| Pendidikan SMA | -0.1064 | 1.25E-10 | 1.000 |

Dengan menggunakan taraf nyata sebesar 0,05, berdasarkan tabel tersebut dapat dilihat bahwa semua variabel memenuhi asumsi proportional hazard karena nilai *p-value* lebih besar dari taraf nyata. Karena memenuhi asumsi proportional hazard maka dapat dilakukan uji signifikansi terhadap variabel tersebut untuk mengetahui pengaruh setiap variabel terhadap ANC. Berikut adalah tabel hasil penelitian:

Tabel 3. Uji signifikansi parameter

| Variabel | Coef | Exp(Coef) | Se(Coef) | Z | P |
|----------------|-----------|-----------|----------|--------|--------|
| Usia | -4.36E-02 | 9.57E-02 | 2.08E-02 | -2.095 | 0.0362 |
| Pendidikan SD | 2.07E+01 | 1.02E+09 | 1.72E+04 | 0.001 | 0.999 |
| Pendidikan SMA | 2.01E+01 | 5.34E+08 | 1.72E+04 | 0.001 | 0.9991 |

Berdasarkan tabel tersebut dapat dilihat bahwa usia ibu hamil berpengaruh terhadap kepatuhan ANC di Puskesmas Desa Lueng Ie, Kecamatan Krueng Barona

Jaya, Aceh Besar karena Pvalue lebih kecil daripada taraf nyata ($0,0362 < 0,05$). Sedangkan tingkat pendidikan ibu hamil tidak berpengaruh terhadap kepatuhan ANC di Puskesmas Desa Lueng Ie, Kecamatan Krueng Barona Jaya, Aceh Besar karena Pvalue lebih besar daripada taraf nyata ($0,999$ dan $0,9991 > 0,05$).

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas maka dapat disimpulkan bahwa usia ibu hamil berpengaruh terhadap kepatuhan ANC sedangkan tingkat pendidikan baik SD maupun SMA tidak berpengaruh terhadap kepatuhan ANC di Puskesmas Desa Lueng Ie, Kecamatan Krueng Barona Jaya, Aceh Besar. Diharapkan adanya kerja sama antara tenaga medis dan keluarga ibu hamil agar kunjungan ANC dapat dilakukan secara teratur untuk memantau keadaan perkembangan janin sehingga dapat menurunkan resiko kematian bagi ibu dan bayi.

UCAPAN TERIMAKASIH

Kepada semua pihak yang telah berpartisipasi dalam kegiatan SEMIRATA 2019 BKS PTN Barat Bidang MIPA, Ketua Jurusan Statistika FMIPA Unsyiah, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat Unsyiah dan kawan-kawan grup riset dalam mendukung kegiatan Seminar Nasional ini.

267

DAFTAR PUSTAKA

- Kemenkes RI, 2010. *Pedoman Pelayanan Antenatal Terpadu*. Jakarta: KemenKes RI.
- Kemenkes RI & WHO, 2013. *Buku Saku Pelayanan Kesehatan Ibu di Fasilitas Kesehatan Dasar dan Rujukan*. Jakarta: Kementerian Kesehatan RI.
- Kemenskes RI, 2016. *Profil Kesehatan Indonesia 2015*. Jakarta: Kemenkes RI.
- Sastroasmoro, S. dan Ismael, S., 2011. *Dasar-dasar Metodologi Penelitian Klinis*, Jakarta: Sagung Seto.
- Siregar, N., 2013. *Faktor-faktor yang Memengaruhi Pemanfaatan Pelayanan ANC di Wilayah Kerja Puskesmas Sosopan Kabupaten Padang Lawas Tahun 2012*, Tesis.
- Tim Penyusun, 2014. *Panduan Praktik Klinis Bagi Dokter di Fasilitas Pelayanan Kesehatan Primer*. Jakarta
- Tombakan, S. G., Purwandari, A. & Tando, N. M., 2016. *Asuhan Kebidanan Komunitas*. Bogor: InMedia.
- Wagiyo, N. & Putrono, 2016. *Asuhan Keperawatan Antenatal, Intanatal, dan Bayi Baru Lahir*. Yogyakarta: CV. Andi Offset.
- <https://idtesis.com/k4-kontak-minimal-4-kali-selama-masa-kehamilan/> diakses pada tanggal 25 Mei 2019



PENYELIDIKAN EKSISTENSI BASIS DALAM MODUL P_n ATAS RING \mathbb{R}

(INVESTIGATION OF BASIS EXISTENCE IN P_n MODULE OVER RING \mathbb{R})

**Zulfia Memi
Mayasari***
Universitas Bengkulu

Mulia Astuti
Universitas Bengkulu

Novi Yarni
Universitas Bengkulu

ABSTRACT: This article discusses the formation of a mathematical system formed from the set of real numbers \mathbb{R} and the polynomial over ring \mathbb{R} that is P_n . The mathematical system formed is called the P_n module over the ring \mathbb{R} . Then we investigate the existence the torsion element and basis in P_n module over ring \mathbb{R} . Based on the investigation it can be shown the existence of torsion element and the basis in this module. The results show that based on the existence of the torsion element, P_n module over ring \mathbb{R} is a torsion free module and based on the existence of the basis, the module is a free module.

KEYWORDS: *set of real number, polynomial, module, torsion element, basis.*

* Corresponding Author: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu; Email: zulfiameyimayasari@yahoo.com

PENDAHULUAN

Struktur aljabar adalah himpunan atau beberapa himpunan yang dilengkapi dengan suatu operasi atau beberapa operasi yang memenuhi aksioma-aksioma (sifat-sifat) tertentu. Salah satu struktur aljabar yang melibatkan dua operasi biner dan dua himpunan tak kosong adalah modul. Diberikan suatu ring R dan grup abelian $(M, +)$. Jika terdapat suatu pemetaan $f: R \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan dengan $f(r, m) = rm$, maka M disebut R -Modul apabila untuk setiap r, s anggota R dan setiap m, n anggota M memenuhi aksioma-aksioma yaitu : $(r + s)m = rm + sm$ dan $m(r + s) = mr + ms$, $r(m + n) = rm + rn$ dan $(m + n)r = mr + nr$, $(rs)m = r(sm)$ dan $m(rs) = (mr)s$. Jika ring R tersebut memuat elemen satuan 1_R sehingga berlaku $1m = m1 = m$ maka M disebut unital R -modul (Malik, Mordeson dan Sen, 1997). M merupakan R -Modul dinotasikan sebagai R -modul M . Dalam suatu R -modul M , jika $m \in M$ dan terdapat $r \in R \setminus \{0\}$ sedemikian sehingga $rm = 0$ maka m disebut elemen torsi. Suatu modul yang semua elemennya merupakan elemen torsi disebut modul torsi (Wijayanti dan Wahyuni, 2013). Apabila suatu modul memiliki basis maka modul tersebut disebut modul bebas.

Beberapa peneliti telah melakukan penelitian mengenai modul, diantaranya adalah Sari dan Wijayanti (2015) meneliti hubungan antara modul dan modul bersih yang memperoleh hasil bahwa setiap modul merupakan submodul dari suatu modul bersih. Penelitian lain dilakukan oleh Kurnia, Wardayani dan Suroto (2016) yang meneliti mengenai pembentukan modul R^n atas ring $M_{n \times n}(R)$ dan memperoleh

kesimpulan bahwa R^n adalah $M_{n \times n}(R)$ -modul dan berdasarkan sifat eksistensi elemen torsi pada modul ini maka modul R^n adalah modul torsi. Dalam artikel ini dibahas tentang sistem matematika yang dibentuk dari himpunan bilangan riil \mathbb{R} dan himpunan polinomial atas ring \mathbb{R} yaitu P_n serta keberadaan elemen torsi dan basis didalamnya.

TINJAUAN PUSTAKA

Grup dan Semigrup

Definisi 2.1. Misalkan G himpunan tak kosong dan "*" adalah operasi yang didefinisikan pada G dan dinotasikan dengan $(G,*)$. $(G,*)$ dinamakan grup apabila :

- i. G terhadap operasi "*" bersifat tertutup, $(\forall a, b \in G)$ berlaku $a * b \in G$
- ii. G terhadap operasi "*" bersifat asosiatif, $(\forall a, b, c \in G)$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$
- iii. G memuat elemen identitas, $(\exists e \in G)$ sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$ untuk setiap $a \in G$, e disebut elemen identitas
- iv. Setiap elemen di G memiliki invers, $(\forall a \in G)(\exists b \in G)$ sedemikian sehingga $b * a = a * b = e$. b disebut invers dari a dinotasikan $b = a^{-1}$.

Jika grup $(G,*)$ memenuhi sifat komutatif yaitu $b * a = a * b$ $(\forall a, b \in G)$ maka disebut grup abelian.

269

Definisi 2.2. Misalkan G himpunan tak kosong dan "*" adalah operasi yang didefinisikan pada G dan dinotasikan dengan $(G,*)$. $(G,*)$ dinamakan semigrup apabila :

- i. G terhadap operasi "*" bersifat tertutup, $(\forall a, b \in G)$ berlaku $a * b \in G$
- ii. G terhadap operasi "*" bersifat asosiatif, $(\forall a, b, c \in G)$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

Ring dan Ring polinomial

Definisi 2.3. Suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi "+" dan "•" disebut ring dan dinotasikan dengan $(R, +, \bullet)$, apabila:

- i. $(R, +)$ merupakan grup abelian
- ii. (R, \bullet) merupakan semigrup
- iii. $(R, +, \bullet)$ bersifat distributif kiri dan kanan, artinya $(\forall a, b, c \in R)$ berlaku:
 1. $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$
 2. $(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$

Selanjutnya penulisan ring $(R, +, \bullet)$ ditulis sebagai ring R . Suatu ring R disebut ring komutatif jika ring tersebut memenuhi hukum komutatif terhadap operasi kedua, yaitu $a \bullet b = b \bullet a$ ($\forall a, b \in R$).

Misalkan \mathbb{R} himpunan semua bilangan riil. Himpunan \mathbb{R} terhadap operasi $' + '$ dan $' \bullet '$ yang didefinisikan sebagai penjumlahan dan perkalian dalam aljabar biasa merupakan ring (Adkinds and Weintraub, 1992).

Definisi 2.4. Misalkan R ring. Suatu polinomial $f(x)$ dengan koefisien di R dan *indeterminate* x adalah jumlahan tak hingga:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

dengan $a_i = 0$ kecuali sebanyak berhingga nilai i . Derajat dari $f(x)$ disimbolkan dengan $\delta(f(x))$, yaitu nilai maksimum i dengan $a_i \neq 0$. Himpunan semua polinomial atas ring R dinotasikan dengan $R[x]$. Himpunan semua polinomial atas ring R , yaitu $R[x]$ terhadap operasi $' + '$ dan $' \bullet '$ yang didefinisikan seperti pada Persamaan (2.1) dan (2.2) berikut merupakan ring dan dinamakan ring polinomial dan dinotasikan dengan $(R[x], +, \bullet)$ (Raisinghanian and Aggarwal, 1980).

Misalkan $(x), g(x) \in R[x]$. Operasi $' + '$ dan $' \bullet '$ pada $R[x]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \text{ dengan } a_i \in R, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ g(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n \text{ dengan } b_i \in R, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ f(x) + g(x) &= \sum_{i=0}^n c_i x^i, \text{ dengan } c_i = a_i + b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n \quad \dots (2.1) \\ f(x) \bullet g(x) &= \sum_{i=0}^{2n} d_i x^i, \text{ dengan } d_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}, k = 0, 1, 2, \dots, 2n \quad \dots (2.2) \end{aligned}$$

Jelas bahwa jika \mathbb{R} ring maka himpunan semua polinomial atas ring \mathbb{R} yaitu $\mathbb{R}[x]$ terhadap operasi $' + '$ dan $' \bullet '$ yang didefinisikan seperti pada Persamaan (2.1) dan (2.2) merupakan ring, sehingga pasti memenuhi $(\mathbb{R}[x], +)$ grup abelian. Selanjutnya, dalam artikel ini $\mathbb{R}[x]$ akan dituliskan sebagai P_n .

Modul

Definisi 2.4. Diberikan ring R dan grup abelian $(M, +)$. Jika terdapat suatu pemetaan $f : R \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan dengan $f(r, m) = rm$ maka M disebut R -modul apabila untuk setiap $r, s \in R$ dan untuk semua $m, n \in M$ memenuhi aksioma berikut :

- i. $(r + s)m = rm + sm$ dan $m(r + s) = mr + ms$,
- ii. $r(m + n) = rm + rn$ dan $(m + n)r = mr + nr$,
- iii. $(r \bullet s)m = r(sm)$ dan $m(r \bullet s) = (mr)s$, dan
Jika ring R memuat elemen 1_R sehingga :

- iv. $1m = m1 = m$, maka M disebut unital R -modul

Definisi 2.5. Misalkan M adalah Modul atas ring R . Suatu $m \in M$ disebut elemen torsi jika terdapat $r \in R \setminus \{0\}$ sedemikian sehingga $rm = 0$.

Himpunan semua elemen torsi didalam modul M dinotasikan dengan M_τ .

Definisi 2.6. Diberikan modul M atas ring R .

- i. Modul M disebut modul bebas torsi jika elemen torsi di M hanya elemen 0_M . Dengan kata lain $M_\tau = \{0_M\}$.
- ii. Modul M disebut modul torsi jika setiap elemen $m \in M$ merupakan elemen torsi. Dengan kata lain $M_\tau = M$.

Definisi 2.7. R -modul M dikatakan bebas jika M mempunyai basis, yakni ada $B \subseteq M$ dengan sifat:

- i. B membangun M , yaitu $(\forall m \in M)(\exists r_1, r_2, \dots, r_n \in R)(\exists b_1, b_2, \dots, b_n \in B) \quad (m = \sum r_i b_i)$
- ii. B bebas linear, yaitu $(\exists r_1, r_2, \dots, r_n \in R) r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_n b_n = 0 \Rightarrow r_1, r_2, \dots, r_n = 0$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas sistem matematika yang terbentuk dari \mathbb{R} dan P_n serta eksistensi elemen torsi dan basis dalam struktur yang dibentuk tersebut.

Lemma 1.

Grup abelian $(P_n, +)$ dengan operasi $' + '$ yang didefinisikan seperti pada Persamaan (2.1) merupakan modul atas ring \mathbb{R} .

Bukti:

Didefinisikan suatu pemetaan $\circ : \mathbb{R} \times P_n \rightarrow P_n$ dengan $(a, f) \mapsto af$ dan $af = a \bullet f$ ($\forall f \in P_n, \forall a \in \mathbb{R}$). Akan ditunjukkan 3 aksioma pada Definisi 2.4 terpenuhi yaitu ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ dan $\forall f, g \in P_n$) berlaku:

- i. $(a + b)f = af + bf$ dan $f(a + b) = fa + fb$
- ii. $a[f + g] = af + ag$ dan $[f + g]a = fa + ga$
- iii. $(a \bullet b)f = a[bf]$ dan $f(a \bullet b) = [fa]b$

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ dan $f, g \in P_n$

$$\text{Misalkan } f = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$g = g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} (a + b)f &= (a + b) \cdot f(x) \\ &= (a + b) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\ &= (a + b) \cdot a_0 + (a + b) \cdot a_1x + (a + b) \cdot a_2x^2 + \dots + (a + b) \cdot a_nx^n \\ &= (a \cdot a_0 + b \cdot a_0) + (a \cdot a_1x + b \cdot a_1x) + (a \cdot a_2x^2 + b \cdot a_2x^2) + \\ &\quad \dots (a \cdot a_nx^n + b \cdot a_nx^n) \\ &= (a \cdot a_0 + a \cdot a_1x + a \cdot a_2x^2 + \dots + a \cdot a_nx^n) + (b \cdot a_0 + b \cdot a_1x + \\ &\quad b \cdot a_2x^2 + \dots + b \cdot a_nx^n) \\ &= a \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + b \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\ &= a \cdot f(x) + b \cdot f(x) \\ &= af + bf \end{aligned} \quad \dots (2.3)$$

272

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(x) \cdot (a + b) \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot (a + b) \\ &= (a_0 \cdot (a + b) + a_1x \cdot (a + b) + a_2x^2 \cdot (a + b) + \dots + a_nx^n \cdot (a + b)) \\ &= (a_0 \cdot a + a_0 \cdot b) + (a_1x \cdot a + a_1x \cdot b) + (a_2x^2 \cdot a + a_2x^2 \cdot b) + \dots + \\ &\quad (a_nx^n \cdot a + a_nx^n \cdot b) \\ &= (a_0 \cdot a + a_1x \cdot a + a_2x^2 \cdot a + \dots + a_nx^n \cdot a) + (a_0 \cdot b + a_1x \cdot b + \\ &\quad a_2x^2 \cdot b + \dots + a_nx^n \cdot b) \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot a + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot b \\ &= f(x) \cdot a + f(x) \cdot b \\ &= fa + fb \end{aligned} \quad \dots (2.4)$$

Dari Persamaan (2.3) dan (2.4) terbukti bahwa:

$$(a + b)f = af + bf \text{ dan } f(a + b) = fa + fb$$

Perhatikan bahwa :

$$a[f + g] = a \cdot [f(x) + g(x)]$$

$$\begin{aligned}
&= a \cdot [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)] \\
&= a \cdot [(a_0 + b_0) + (a_1x + b_1x) + (a_2x^2 + b_2x^2) + \dots + (a_nx^n + b_nx^n)] \\
&= a \cdot (a_0 + b_0) + a \cdot (a_1 + b_1) + a \cdot (a_2 + b_2) + \dots + a \cdot (a_nx^n + b_nx^n) \\
&= (a \cdot a_0 + a \cdot b_0) + (a \cdot a_1x + a \cdot b_1x) + \dots + (a \cdot a_2x^2 + a \cdot b_2x^2) + \dots + \\
&\quad (a \cdot a_nx^n + a \cdot b_nx^n) \\
&= (a \cdot a_0 + a \cdot a_1x + a \cdot a_2x^2 + \dots + a \cdot a_nx^n) + (a \cdot b_0 + a \cdot b_1x + \\
&\quad a \cdot b_2x^2 + \dots + a \cdot b_nx^n) \\
&= a \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + a \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) \\
&= a \cdot f(x) + a \cdot g(x) \\
&= af + ag \qquad \dots (2.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f + g]a &= [f(x) + g(x)] \cdot a \\
&= [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)] \cdot a \\
&= [(a_0 + b_0) + (a_1x + b_1x) + (a_2x^2 + b_2x^2) + \dots + (a_nx^n + b_nx^n)] \cdot a \\
&= (a_0 + b_0) \cdot a + (a_1x + b_1x) \cdot a + (a_2x^2 + b_2x^2) \cdot a + \dots + (a_nx^n + \\
&\quad b_nx^n) \cdot a \\
&= (a_0 \cdot a + b_0 \cdot a) + (a_1x \cdot a + b_1x \cdot a) + (a_2x^2 \cdot a + b_2x^2 \cdot a) + \dots + \\
&\quad (a_nx^n \cdot a + b_nx^n \cdot a) \\
&= (a_0 \cdot a + a_1x \cdot a + a_2x^2 \cdot a + \dots + a_nx^n \cdot a) + (b_0 \cdot a + b_1x \cdot a + b_2x^2 \cdot a + \\
&\quad \dots + b_nx^n \cdot a) \\
&= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot a + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) \cdot a \\
&= f(x) \cdot a + g(x) \cdot a \\
&= fa + ga \qquad \dots (2.6)
\end{aligned}$$

Dari Persamaan (2.5) dan (2.6) terbukti bahwa:

$$a[f + g] = af + ag \text{ dan } [f + g]a = fa + ga$$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)f(x) &= (a \cdot b) \cdot f(x) \\
&= (a \cdot b) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\
&= (a \cdot b) \cdot a_0 + (a \cdot b) \cdot a_1x + (a \cdot b) \cdot a_2x^2 + \dots + (a \cdot b) \cdot a_nx^n \\
&= (a \cdot b \cdot a_0 + a \cdot b \cdot a_1x + a \cdot b \cdot a_2x^2 + \dots + a \cdot b \cdot a_nx^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a \cdot (b \cdot a_0 + b \cdot a_1 x + b \cdot a_2 x^2 + \dots + b \cdot a_n x^n) \\
 &= a \cdot [b \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)] \\
 &= a \cdot [b \cdot f(x)] \\
 &= a \cdot [bf(x)] \\
 &= a[bf] \qquad \dots (2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(a \cdot b) &= f(x) \cdot (a \cdot b) \\
 &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) \cdot (a \cdot b) \\
 &= (a_0 \cdot a \cdot b + a_1 x \cdot a \cdot b + a_2 x^2 \cdot a \cdot b + \dots + a_n x^n \cdot a \cdot b) \\
 &= (a_0 \cdot a + a_1 x \cdot a + a_2 x^2 \cdot a + \dots + a_n x^n \cdot a) \cdot b \\
 &= [(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) \cdot a] \cdot b \\
 &= [f(x) \cdot a] \cdot b \\
 &= [f(x)a] \cdot b \\
 &= [fa]b \qquad \dots (2.8)
 \end{aligned}$$

274 Dari Persamaan (2.7) dan (2.8) terbukti bahwa:

$$(a \cdot b)f = a[bf] \text{ dan } f(a \cdot b) = [fa]b$$

Terbukti bahwa P_n merupakan modul atas ring \mathbb{R} dan dinotasikan dengan \mathbb{R} –modul P_n . ■

Lemma 3.2.

\mathbb{R} –modul P_n merupakan modul bebas torsi.

Bukti:

Akan diselidiki elemen torsi pada \mathbb{R} –modul P_n . Berdasarkan Definisi 2.5, $f \in P_n$ disebut elemen torsi jika terdapat $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sedemikian sehingga $rf = 0$.

Terdapat 2 kasus untuk menentukan elemen torsi dalam modul P_n , yaitu :

- i. $f = 0$
- ii. $f \neq 0$

Kasus (i) : $f = 0$

Jika $f = 0$ maka jelas bahwa $rf = 0, \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (2.9)

Kasus (ii) : $f \neq 0$

Misalkan $f = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \neq 0$

Selanjutnya dipilih $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Perhatikan bahwa \mathbb{R} ring tanpa pembagi nol $r \neq 0 \in \mathbb{R}$ dan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tidak semuanya nol, artinya $\exists a_k \neq 0$ (untuk $0 \leq k \leq n$) sehingga $r \cdot a_k \neq 0$. Hal ini mengakibatkan bahwa :

$$\begin{aligned} r \circ f &= r \bullet f(x) \\ &= r \bullet (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\ &= (r \bullet a_0 + r \bullet a_1x + r \bullet a_2x^2 + \dots + r \bullet a_nx^n) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Jadi, jika $f \neq 0$ maka $rf \neq 0, \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (2.10)

Dari Persamaan (2.9) dan (2.10), dapat disimpulkan bahwa P_n adalah modul bebas torsi. ■

Lemma 3.3.

\mathbb{R} –modul P_n merupakan modul bebas

Bukti:

\mathbb{R} –modul P_n dikatakan modul bebas jika P_n mempunyai basis.

Diketahui bahwa P_n merupakan modul atas ring \mathbb{R} . Dibentuk suatu himpunan $B_n \subseteq P_n$ yaitu $B_n = \{b_0 + b_1x + b_2x^2 \dots + b_nx^n \mid b_n \in B \text{ dan } B \subseteq \mathbb{R}\}$. Berdasarkan Lemma 3.2, \mathbb{R} –modul P_n merupakan modul bebas torsi, sehingga:

$$a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n = 0 \quad \dots (2.11)$$

$(\forall f_1, f_2, \dots, f_n \in B_n)$ hanya dipenuhi oleh $a_1, a_2, \dots, a_n = 0$. Artinya B_n bebas linier.

Selanjutnya ambil sebarang $f \in P_n$. Untuk $(a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R})(\exists f_1, f_2, \dots, f_n \in B_n)$, dibentuk:

$$a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n = f \quad \dots (2.12)$$

Perhatikan bahwa Persamaan (2.11) dan (2.12) mempunyai koefisien yang sama sehingga pembuktian dapat dilakukan secara simultan. Karena Persamaan (2.11) hanya mempunyai solusi trivial ekuivalen dengan Persamaan (2.12) konsisten untuk untuk setiap $f \in P_n$. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa dari himpunan bilangan riil \mathbb{R} dan himpunan polinomial atas ring \mathbb{R} , yaitu P_n dapat dibentuk suatu sistem yang dinamakan modul P_n atas ring \mathbb{R} . Berdasarkan eksistensi elemen torsi,

modul ini merupakan modul bebas torsi dan berdasarkan eksistensi basis, modul tersebut merupakan modul bebas.

DAFTAR PUSTAKA

- Adkinds, W.A & Weintraub, S.H. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer –Verlag.
- Kurnia, A.D., Wardayani, A., dan Suroto. 2016. Modul R^n Atas Ring Matriks $M_{n \times n}(R)$. *prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapan 2016*, p- ISSN:2550-0384;e-ISSN:2550-0392.
- Malik, D.S., Mordeson, J.M. and Sen, M.K. 1997. *Fundamentals of Abstract Algebra*. McGraw, Hill Book Company, United States of America.
- Raisinghania, M.D., and Aggrwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*, S. Chand & Company LTD, Delhi.
- Sari, K., dan Wijayanti, I.E. 2015. Setiap Modul Merupakan Submodul dari Suatu Modul Bersih. *Jurnal Matematika Integratif*. 11(1), 65-74.
- Wijayanti, I.E., dan Wahyuni, S. 2013. *Teori Modul*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.



OPTIMALISASI PENJADWALAN WAKTU PENYELESAIAN PROYEK KONTRUKSI DENGAN CPM (*CRITICAL PATH METHOD*) (Studi Kasus: Pembangunan Gedung Olahraga Universitas Bengkulu)

OPTIMIZING THE TIME SCHEDULE OF COMPLETING CONSTRUCTION PROJECT USING CRITICAL PATH METHOD (Case Study: Sport Building, University of Bengkulu)

Ririn Hasentri*
Universitas Bengkulu

Fanani H Widodo
Universitas Bengkulu

Siska Yosmar
Universitas Bengkulu

ABSTRACT: Project Scheduling can be used to find the ordered relation among activities in term of project completion in shortest time by considering the network of activity steps according to completion times. The objective of research is to verify the optimality of time schedule for completing the project of sport building at University of Bengkulu using *Critical Path Method* (CPM). **The research results in critical path, the order of** predecessor activities, and the shortest time of completing project, that is 26 weeks or appropriately 6 months and days or more less 180 days with respect to Event Times (ET) and *Late Times* (LT). In conclusion the research indicates that the project planning and its execution have been consistent in term of network theory, especially CPM.

KEYWORDS: *Event Times, Late Times, Predecessor, Critical Path Method*

* Corresponding Author: Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Bengkulu, Indonesia; Email: ririnhasentri@gmail.com

PENDAHULUAN

Sejalan dengan pertumbuhan ekonomi bangsa Indonesia, banyak terdapat pembangunan di berbagai sektor yang berkembang sangat pesat. Banyak pihak swasta atau pihak pemerintah berlomba untuk melakukan pembangunan. Kegiatan pembangunan ini berupa proyek-proyek, misalnya proyek pembangunan tempat usaha, proyek gudang, proyek konstruksi, proyek infrastruktur dan lain-lain. Salah satu yang melaksanakan pembangunan proyek yaitu Universitas Bengkulu untuk memenuhi fasilitas mahasiswanya.

Universitas Bengkulu (UNIB) merupakan perguruan tinggi negeri yang terdapat di Kota Bengkulu. Perguruan tinggi ini sudah berdiri sejak 24 April 1982. Sejak berdirinya UNIB telah banyak memiliki fasilitas penunjang dalam bentuk gedung-gedung untuk memenuhi kebutuhan mahasiswa, diantaranya gedung rektorat, gedung serba guna (GSG), perpustakaan, gedung perkuliahan serta laboratorium. Banyak upaya meningkatkan kualitas UNIB sehingga banyak dilakukan pembangunan gedung salah satunya telah dilaksanakan pembangunan gedung olahraga. Pembangunannya telah selesai pada akhir tahun 2018 dan telah diresmikan pada tanggal 27 Desember 2018. Kini gedung olahraga tersebut telah dibuka untuk memenuhi aktivitas mahasiswa.

Proyek pembangunan Gedung Olahraga merupakan salah satu proyek yang mempunyai tingkat kompleksitas yang tinggi. Proyek ini harus diselesaikan dengan waktu yang telah ditentukan. Akan tetapi apabila para pekerja dapat menyelesaikan pekerjaan tersebut lebih cepat dari waktu yang telah ditentukan perusahaan maka akan tercapai optimalisasi waktu dan biaya yang diinginkan. Untuk pencapaian hal tersebut dibutuhkan penjadwalan waktu pelaksanaan pekerjaan dengan baik.

Penjadwalan proyek membantu menunjukkan hubungan setiap aktivitas dengan aktivitas lainnya dan terhadap keseluruhan proyek, mengidentifikasi hubungan yang harus diselesaikan lebih dahulu diantara aktivitas lainnya, serta menunjukkan perkiraan waktu yang realistis untuk setiap aktivitas dan proses kegiatan perencanaan, pelaksanaan, dan penerapannya. Salah satu metode penjadwalan yang dapat digunakan adalah *critical path method* (CPM).

CPM adalah suatu metode perencanaan dan pengendalian proyek-proyek untuk menyelesaikan suatu perencanaan urutan-urutan pekerjaan menjadi teratur berdasarkan jumlah waktu yang dibutuhkan (Mulyono, 2007). Tujuan dari metode CPM adalah menentukan waktu yang diperlukan untuk merampungkan proyek atau menentukan lintasan kritis (*critical path*). Salah satu keuntungan CPM, menurut Ezekiel, Tjakra, dan Pingkan (2016) yaitu CPM cocok untuk penjadwalan, formulasi, dan mengelola berbagai kegiatan di semua pekerjaan konstruksi, karena menyediakan jadwal yang dibangun berdasarkan pengalaman, serta pengamatan yang telah dilakukan.

Berdasarkan penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Wahyuti (2012) pada analisis pendekatan *critical path method* (CPM) dalam penentuan waktu penyelesaian proyek pembangunan gedung dengan studi kasus gedung kedokteran UNIB. Waktu optimal penyelesaian proyek tersebut adalah selama 14 minggu atau lebih kurang selama 98 hari. Penelitian lainnya dilakukan oleh Pebrianti (2014) yaitu tentang analisa *crashing project* untuk optimalisasi penyelesaian proyek dengan pendekatan *critical path method* (CPM) dengan studi kasus Gedung Kuliah Bersama 5 UNIB. Waktu tercepat penyelesaian proyek tersebut 16 minggu atau sekitar 118 hari dengan biaya tambahan sebesar Rp 1.191.676.418,22 sedangkan penelitian ini membahas optimalisasi penjadwalan waktu penyelesaian proyek konstruksi dengan metode CPM pada pembangunan Gedung Olahraga Universitas Bengkulu (UNIB) dari jadwal tahapan pembangunan awal sampai akhir.

Tujuan dari penelitian ini adalah mengoptimalkan penjadwalan waktu penyelesaian proyek konstruksi pada Gedung Olahraga Universitas Bengkulu dengan menggunakan metode CPM.

Tinjauan Pustaka

Penjadwalan proyek adalah pembuatan rencana pelaksanaan setiap kegiatan di dalam suatu proyek dengan mengoptimalkan efisiensi pemakaian waktu dan sumber daya yang tersedia, tetapi kesesuaian presedensi diantara kegiatan tetap dipenuhi (Taha, 1996).

Badri (1991) mengatakan bahwa *network planning* pada prinsipnya adalah hubungan ketergantungan antara bagian-bagian pekerjaan (*variables*) yang digambarkan/divisualisasikan dalam diagram *network*.

Herjanto (2007), menyatakan bahwa terdapat simbol dan notasi yang dipakai dalam *network planning* yaitu:

1. Anak panah
Anak panah menggambarkan kegiatan (*activity*). Arah anak panah menunjukkan arah kegiatan, sehingga dapat diketahui kegiatan yang mendahului (*preceding activity*) dan kegiatan yang mengikuti (*succeeding activity*).
2. Lingkaran
Lingkaran (*node*) menggambarkan peristiwa (*event*). Setiap kegiatan selalu dimulai dengan suatu peristiwa dan diakhiri dengan suatu peristiwa juga, yaitu peristiwa mulainya kegiatan dan peristiwa selesainya kegiatan itu.
3. Anak panah terputus-putus (*dummy*)
Dummy menunjukkan suatu kegiatan semu, yang diperlukan untuk menggambarkan adanya hubungan di antara dua kegiatan. Mengingat *dummy* merupakan kegiatan semu maka lama kegiatan *dummy* adalah nol.

Critical path method (CPM) merupakan dasar dari sistem perencanaan dan pengendalian kemajuan pekerjaan yang didasari pada *network* atau jaringan kerja. Haming dan Nurnajamuddin (2011) mengatakan bahwa *critical path method* (CPM) atau metode jalur kritis merupakan diagram kerja yang memandang waktu pelaksanaan kegiatan yang ada dalam jaringan bersifat unik (tunggal) dan deterministic (pasti), dan dapat diprediksi karena ada pengalaman mengerjakan pekerjaan yang sama pada proyek sebelumnya.

Menurut Mulyono (2007), CPM adalah suatu metode perencanaan dan pengendalian proyek-proyek untuk menyelesaikan suatu perencanaan urutan-urutan pekerjaan menjadi teratur berdasarkan jumlah waktu yang dibutuhkan.

Menurut Winston (2004), pada perhitungan maju, perhitungan bergerak mulai dari *initial event* menuju *terminal event*. Maksudnya ialah menghitung waktu yang paling tercepat terjadinya kejadian dan waktu paling cepat dimulainya serta diselesaikan kegiatan-kegiatan (*ET, ES dan EF*).

$$ET(j) = \max (EF(i_1, j), EF(i_2, j), \dots, EF(i_n, j))$$

Menurut Winston (2004), perhitungan yang bergerak dari *terminal event* menuju ke *initial event* adalah perhitungan mundur. Tujuannya ialah untuk menghitung waktu paling lambat terjadinya kejadian dan waktu paling lambat dimulainya dan diselesaikannya kegiatan-kegiatan (*LS, LT dan LF*).

$$LT(i) = \min ((LS(i_1, j), LS(i_2, j), \dots, LS(i_n, j))$$

Menurut Winston (2004), total *float* adalah jumlah waktu di mana waktu penyelesaian suatu kegiatan dapat diundur tanpa mempengaruhi waktu paling cepat dari penyelesaian proyek secara keseluruhan.

$$TF (i, j) = LT(j) - ET(i) - t(i, j)$$

Menurut Winston (2004), *free float* adalah jumlah waktu dimana penyelesaian suatu kegiatan dapat diundur tanpa mempengaruhi waktu paling cepat dimulainya kegiatan yang lain atau waktu paling cepat terjadinya kejadian lain pada jaringan kerja.

$$FF(i, j) = ET(j) - ET(i) - t(i, j)$$

Jalur kritis (*critical path*) adalah jalur dalam jaringan yang membutuhkan waktu penyelesaian paling lama (Mulyono, 2007).

BAHAN DAN METODE

Berdasarkan data yang dibutuhkan, maka penelitian ini menggunakan data sekunder dengan cara mengambil langsung data yang ada di Universitas Bengkulu (UNIB).

Data yang diperlukan dalam penelitian ini adalah:

1. Data detail dari setiap kegiatan dan waktu dalam penyelesaian proyek pembangunan Gedung Olahraga Universitas Bengkulu (UNIB).
2. Data mengenai kegiatan-kegiatan yang mendahului (*predecessor*) dan kegiatan yang mengikuti suatu kegiatan tertentu (*successor*) serta hubungan antara kegiatan satu dengan kegiatan lainnya.

Analisa penelitian ini menggunakan metode CPM dengan langkah sebagai berikut:

1. Menentukan hubungan *predecessor* dari setiap kegiatan.
2. Membentuk jaringan (*network*) dari setiap hubungan *predecessor* dan durasi normal setiap kegiatan.
3. Melakukan perhitungan secara manual dengan langkah sebagai berikut:
 - a. Hitung nilai $ET(j)$ untuk setiap kegiatan (i, j) dengan menggunakan perhitungan maju.
 - b. Hitung nilai $LT(i)$ untuk setiap kegiatan (i, j) dengan menggunakan perhitungan mundur.
 - c. Hitung nilai $TF(i, j)$ dan nilai $FF(i, j)$ untuk setiap kegiatan (i, j) dengan menggunakan rumus yang telah dijelaskan sebelumnya.
 - d. Mengidentifikasi lintasan kritis pada diagram *network*, dimana nilai ET dan LT memenuhi ketiga hal dalam penentuan jalur kritis yang di telah bahas sebelumnya. Critical path dapat ditentukan pada sembarang kegiatan (i, j) dimana total float dari setiap kegiatan (i, j) bernilai nol.
 - e. Hitung total waktu dari kegiatan-kegiatan yang ada pada lintasan kritis

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari permasalahan yang ada maka dibuat perencanaan yang baik, agar perusahaan dalam membangun proyeknya dapat mencapai waktu penyelesaian yang optimal. Dalam penelitian pembangunan Gedung Olahraga UNIB waktu pelaksanaan yang digunakan adalah perminggu. Setiap waktu pelaksanaan terdapat persentase (%) bobot penyelesaian pekerjaan dari awal sampai akhir. Jadwal pelaksanaan pekerjaan penyelesaian proyek pembangunan gedung olahraga UNIB terlihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Daftar Rencana Kegiatan Pembangunan Gedung Olahraga UNIB Tahun Anggaran 2018

| No | Tahapan Pekerjaan | Minggu |
|-------|---|--------|
| I | Pekerjaan Persiapan | 3 |
| II | Pekerjaan Struktur | |
| | II.1. Lantai Dasar Elv + 0.00 s/d + 3.70 | 2 |
| | II.2. Lantai Elv + 3.70 s/d + 4.70 | 2 |
| | II.3. Lantai Elv + 9.00 s/d + 11.00 | 3 |
| III | Pekerjaan Arsitektur | |
| | III.1. Pekerjaan Pasangan dan Beton | 22 |
| | III.2. Pekerjaan Kayu, Besi, Alumunium dan Kaca | 8 |
| | III.3. Pekerjaan Plafond | 3 |
| | III.4. Pekerjaan Kunci/penggantung | 1 |
| | III.5. Pekerjaan Sanitasi dan Sanitair | 3 |
| | III.6. Pekerjaan Pengecetan | 7 |
| IV | Pekerjaan Mekanikal dan Plumbing | |
| | IV.1. Penyediaan, Suplai & Instalasi Pipa Air Bersih | 4 |
| | IV.2. Sistem Pemipaan Air Bekas Kotor & Pengolahan Limbah | 3 |
| | IV.3. Sistem Drainasi Bangunan & Instalasi Air Hujan | 5 |
| V | Pekerjaan Elektrikal | 4 |
| | V.1. penyediaan jaringan & distribusi listrik | 5 |
| | V.2. instalasi penerangan & kotak kontak | 5 |
| Total | 15 kegiatan | 75 |

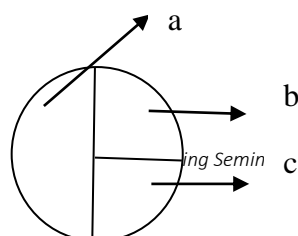
Penentuan jaringan (*network*) pada pembangunan Gedung Olahraga UNIB diperlukan untuk mengoptimalkan penjadwalan waktu dalam menyelesaikan proyek ini. Sebelum melakukan perhitungan diperlukan menentukan *predecessor* untuk menghitung setiap kegiatan yang mendahului kegiatan yang satu dengan yang lainnya. Penentuan *predecessor* dilakukan dengan cara pengamatan terhadap setiap pekerjaan dan setelah itu, dapat ditentukan pekerjaan mana saja yang harus dikerjakan terlebih

dahulu sebelum memulai pekerjaan yang lain. Dalam penentuan *predecessor* pada rencana jadwal pelaksanaan pekerjaan dapat dilihat dari pekerjaan sebelum memulai pekerjaan lainnya.

Tabel 2. Kegiatan yang Mendahului (*Predecessor*) setiap pekerjaan dari tahap awal sampai akhir pada pembangunan gedung olahraga UNIB tahun anggaran 2018

| No | Kegiatan | Kegiatan yang Mendahului (<i>Predecessor</i>) | Waktu/ Minggu |
|----|----------|--|------------------|
| 1 | I | - | 3 |
| 2 | II.1 | I | 2 |
| 3 | II.2 | II.1 | 2 |
| 4 | II.3 | II.2 | 3 |
| 5 | III.1 | I | 22 |
| 6 | III.2 | II.3 | 8 |
| 7 | III.3 | II.1 | 3 |
| 8 | III.4 | III.3 | 1 |
| 9 | III.5 | III.2, III.4 | 3 |
| 10 | III.6 | III.3 | 7 |
| 11 | IV.1 | II.3, III.3 | 4 |
| 12 | IV.2 | IV.1 | 3 |
| 13 | IV.3 | IV.1 | 5 |
| 14 | V.1 | II.3 | 4 |
| 15 | V.2 | III.2, III.5, IV.1, IV.2, IV.3, V.1 | 5 |

Setelah terbentuk jaringannya, maka dilakukan perhitungan dengan menggunakan metode CPM yaitu perhitungan maju (*forward computation*), perhitungan mundur (*backward computation*), perhitungan total *float* dan perhitungan *free float* sehingga didapatlah jalur kritis dari jaringan tersebut. berikut gambar lingkaran kejadian.



Gambar 1. Gambar Lingkaran Kejadian

Keterangan:

- a adalah ruang untuk nomor kejadian
- b adalah ruang untuk menunjukkan waktu paling cepat dalam memulai suatu kejadian (ET), yang merupakan hasil dari perhitungan maju (*forward computation*)
- c adalah ruang untuk menunjukkan waktu paling lambat dalam penyelesaian suatu kejadian (LT), yang merupakan hasil perhitungan mundur (*backward computation*)

Pembentukan jaringan diperlukan ketelitian dalam menggambarnya, dengan memasukkan 15 variabel dari data rencana jadwal pelaksanaan pekerjaan pembangunan Gedung Olahraga UNIB. Hasil jaringan dari pembangunan Gedung Olahraga UNIB terdiri dari 13 *node*, 15 *arc* dan 5 *dummy activity*.

Setelah pembentukan jaringan selesai dibuat, langkah selanjutnya melakukan perhitungan secara manual dengan menggunakan CPM. Hasil perhitungan secara manual dapat dilihat pada Tabel 3, Tabel 4, dan Tabel 5 seperti berikut ini:

Tabel 3. Hasil Perhitungan Maju (Forward Computation) dan Perhitungan Mundur (Backward Computation)

| <i>Node</i> | $ET(j)$ | $LT(i)$ |
|-------------|---------|---------|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 3 |
| 3 | 5 | 5 |
| 4 | 7 | 7 |
| 5 | 8 | 10 |
| 6 | 10 | 10 |
| 7 | 9 | 18 |
| 8 | 18 | 18 |
| 9 | 21 | 21 |
| 10 | 14 | 16 |
| 11 | 19 | 21 |
| 12 | 21 | 21 |
| 13 | 26 | 26 |

Tabel 4. Hasil perhitungan Total *Float* dan *Free Float*

| <i>Event</i> | | Uraian kegiatan (<i>i, j</i>) | Total <i>Float</i> (<i>i, j</i>) | <i>Free Float</i> (<i>i, j</i>) |
|--------------|----------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| <i>i</i> | <i>J</i> | | <i>TF</i> (<i>i, j</i>) | <i>FF</i> (<i>i, j</i>) |
| 1 | - | <i>Start</i> | 0 | 0 |
| | 2 | I | 0 | 0 |
| 2 | 3 | II.1 | 0 | 0 |
| | 13 | III.1 | 1 | 1 |
| 3 | 4 | II.2 | 0 | 0 |
| | 5 | III.3 | 2 | 0 |
| 4 | 6 | II.3 | 0 | 0 |
| 5 | 6 | <i>Dummy</i> | 2 | 2 |
| | 7 | III.4 | 9 | 0 |
| | 13 | III.6 | 11 | 11 |
| 6 | 8 | III.2 | 0 | 0 |
| | 10 | IV.1 | 2 | 0 |
| | 12 | V.1 | 7 | 7 |
| 7 | 8 | <i>Dummy</i> | 9 | 9 |
| 8 | 9 | III.5 | 0 | 0 |
| | 12 | <i>Dummy</i> | 3 | 3 |
| 9 | 12 | <i>Dummy</i> | 0 | 0 |
| 10 | 11 | IV.3 | 2 | 0 |
| | 12 | IV.2 | 4 | 4 |
| 11 | 12 | <i>Dummy</i> | 2 | 2 |
| 12 | 13 | V.2 | 0 | 0 |
| 13 | - | <i>Finish</i> | 0 | 0 |

Tabel 5. Hasil Perhitungan Jalur Kritis (*Critical Path*)

| Event | | Uraian Kegiatan (<i>i, j</i>) | Critical Path <i>ET(i, j)</i> |
|----------|----------|------------------------------------|----------------------------------|
| <i>i</i> | <i>j</i> | | |
| 1 | - | <i>Start</i> | 0 |
| | 2 | I | 0 |
| 2 | 3 | II.1 | 0 |
| | 13 | III.1 | 0 |
| 3 | 4 | II.2 | 0 |
| | 5 | III.3 | -2 |
| 4 | 6 | II.3 | 0 |
| 5 | 6 | <i>Dummy</i> | 2 |
| | 7 | III.4 | -7 |
| | 13 | III.6 | 2 |
| 6 | 8 | III.2 | 0 |
| | 10 | IV.1 | -2 |
| | 12 | V.1 | 0 |
| 7 | 8 | <i>Dummy</i> | 9 |
| 8 | 9 | III.5 | 0 |
| | 12 | <i>Dummy</i> | 0 |
| 9 | 12 | <i>Dummy</i> | 0 |
| 10 | 11 | IV.3 | 0 |
| | 12 | IV.2 | 2 |
| 11 | 12 | <i>Dummy</i> | 2 |
| 12 | 13 | V.2 | 0 |
| 13 | - | <i>Finish</i> | 0 |

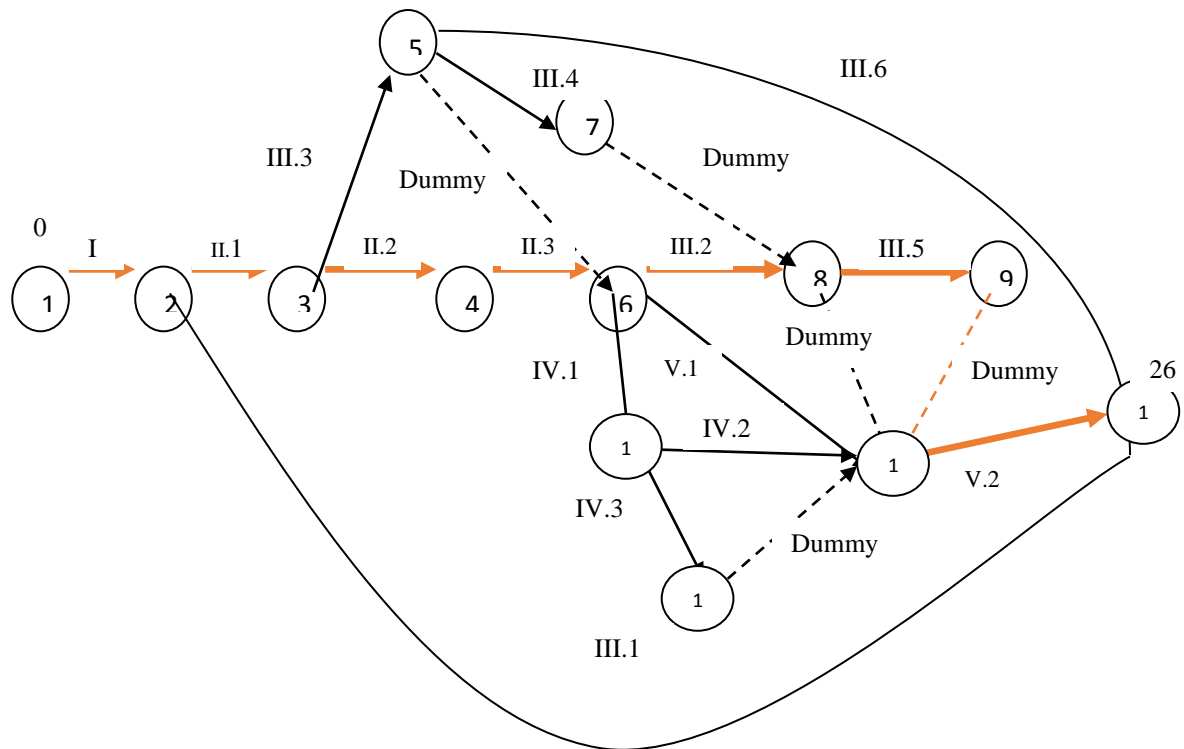
Jalur kritis dapat ditentukan dari perhitungan diatas dengan mengidentifikasi kegiatan-kegiatan kritis yang terdapat pada diagram *network* (jaringan). Berdasarkan hasil perhitungan diketahui bahwa jalur kritis pada diagram *network* pembangunan Gedung Olahraga UNIB adalah:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 13$$

$$I \rightarrow II.1 \rightarrow II.2 \rightarrow II.3 \rightarrow III.2 \rightarrow III.5 \rightarrow Dummy \rightarrow V.2$$

$$= 3 + 2 + 2 + 3 + 8 + 3 + 0 + 5$$

$$= 26 \text{ Minggu}$$



Gambar 2. Jalur Kritis

Perbandingan Kurva S dan CPM (*critical path method*)

Berdasarkan hasil perhitungan secara manual maka dapat dibandingkan hasilnya perhitungan menggunakan CPM dengan data kurva S yang sudah diketahui, bahwa pembangunan Gedung Olahraga UNIB selesai pada waktu 26 minggu atau 6 bulan 14 hari atau kurang lebih sekitar 180 hari diketahui dari nilai *earliest event time (ET)* dan *latest event time (LT)* dan waktu yang diperoleh dengan menggunakan CPM sama dengan waktu yang ada pada data kurva S yaitu 26 minggu. Jadi penelitian ini dengan menggunakan CPM tidak lebih baik atau lebih buruk dari menggunakan metode Kurva S.

KESIMPULAN

Optimalisasi penjadwalan waktu penyelesaian pembangunan Gedung Olahraga UNIB dapat ditentukan dengan menggunakan Metode CPM. Berdasarkan hasil perhitungan manual dengan menggunakan Metode CPM diperoleh hasilnya, bahwa pembangunan gedung olahraga UNIB selesai pada waktu 26 minggu atau 6 bulan 14 hari atau kurang lebih sekitar 180 hari diketahui dari nilai *earliest event time (ET)* dan *latest event time (LT)* dan waktu yang diperoleh dengan menggunakan CPM

sama dengan waktu yang diperkirakan oleh konsultan pengawas CV. Tri Putera dengan menggunakan metode Kurva S yaitu 26 minggu. Jadi penelitian ini dengan menggunakan CPM tidak lebih baik atau lebih buruk dari menggunakan metode Kurva S.

DAFTAR PUSTAKA

- Badri, S. 1991. *Dasar-Dasar Network Planning (Dasar-Dasar Perencanaan Jaringan Kerja)*. Cetakan 2. Rineka Cipta. Jakarta.
- Ezekiel, R. M. I., Tjakra, J. dan Pingkan, A. K. P. 2016. Penerapan Metode CPM pada Proyek Konstruksi (Studi Kasus Pembangunan Gedung Baru Kompleks Eben Haezer Manado). *Jurnal Sipil Statist*. 4 (9): 551-558.
- Haming, M. dan Nurnajamuddin, M. 2011. *Manajemen Produksi Modern*. Bumi Aksara. Jakarta.
- Herjanto, E. 2007. *Manajemen operasi*. Edisi Ketiga. Grasindo. Jakarta.
- Mulyono, S. 2007. *Riset Operasi*. Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. Jakarta.
- Pebrianti, I. 2014. Analisis Crashing Project untuk Optimalisasi Penyelesaian Proyek Dengan Pendekatan Critical Path Method (CPM) Studi Kasus Gedung Kuliah Bersama 5 Universitas Bengkulu. *Skripsi*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu.
- Taha, H. A. 1996. *Riset Operasi Suatu Pengantar*. Binarupa Aksara. Jakarta.
- Wahyuti, R. 2012. Analisis Pendekatan Critical Path Method (CPM) dalam Penentuan Waktu Penyelesaian Proyek Pembangunan Gedung Studi Kasus Gedung Kedokteran Universitas Bengkulu. *Skripsi*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu.
- Winston, W. L. 2004. *Operations Research Application and Algorithms*. Fourth Edition. Thomas Brooks. Canada.



APLIKASI MODEL SEASONAL ARIMA UNTUK PREDIKSI JUMLAH WISATAWAN MANCANEGARA PROVINSI KEPULAUAN RIAU

(THE APPLICATION OF SEASONAL ARIMA MODEL TO FORECAST THE NUMBER OF FOREIGN TOURIST VISITING KEPULAUAN RIAU PROVINCE)

Ari Pani Desvina *
UIN Suska Riau

Khairunnissa
UIN Suska Riau

Mas'ud Zein
UIN Suska Riau

Rado Yendra
UIN Suska Riau

ABSTRACT: The ARIMA model is a model of in the Box Jenkins method that completely ignores independent variable to make forecasting. Seasonal ARIMA model happens when if ARIMA model experienced iteration on certain time, this model would experience seasonal pattern causing a model for ARIMA. This paper discusses the best model of data foreign tourist visiting to the Kepulauan Riau Province and determine the forecasting of number foreign tourist visiting to the Kepulauan Riau Province in the future. In this study, data used is the number of foreign tourist visiting to the Kepulauan Riau Province, from January 2008 to September 2017 and it is obtained from Central Bureau of Statistics in Kepulauan Riau Province. The results showed that seasonal ARIMA(2,1,1)(0,1,1)¹² is an appropriate model to data foreign tourist visiting to the Kepulauan Riau Province, and this model can be used for forecasting analysis. The forecast results show that the pattern of data on forecasting results for the future follows the pattern of actual data, with the error percentage forecasting is 5,485%.

KEYWORDS: *Box Jenkins, seasonal ARIMA, foreign tourists.*

* Corresponding Author: Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Suska Riau, Indonesia; Email: aripanidesvina@uin-suska.ac.id, aripanidesvina@gmail.com, nissamtk2@gmail.com, rado.yendra@uin-suska.ac.id

PENDAHULUAN

Sektor pariwisata memegang peranan penting dalam perekonomian Indonesia, baik sebagai salah satu sumber penerimaan devisa maupun penciptaan lapangan kerja serta kesempatan berusaha. Pariwisata merupakan salah satu sektor yang memberikan kontribusi terbesar dalam perolehan devisa negara. Kinerja sektor pariwisata sebagai penghasil devisa ditentukan oleh kemampuan kita untuk mendatangkan sebanyak mungkin wisatawan mancanegara ke Indonesia. Provinsi Kepulauan Riau merupakan salah satu provinsi di Indonesia yang penuh dengan limpahan rahmat dari Tuhan Yang Maha Esa. Selain letak geografisnya yang sangat strategis karena berada pada pintu masuk Selat Malaka dari sebelah Timur juga berbatasan dengan pusat bisnis dan keuangan di Asia Pasifik yakni Singapura, selain itu Provinsi ini juga berbatasan langsung dengan Malaysia.

Peningkatan pertumbuhan ekonomi dapat terjadi salah satunya melalui sektor pariwisata, dimana tersedianya lapangan kerja dan dapat juga menjadi *multiplier effect* untuk pengembangan sektor perekonomian yang lain. Kepulauan Riau merupakan gerbang wisata mancanegara kedua setelah Pulau Bali, yang cukup

strategis untuk wisatawan mancanegara. Potensi objek wisata di Provinsi Kepulauan Riau didominasi oleh pantai antara lain Pantai Melur dan Pantai Nongsa di Kota Batam, Pantai Belawan di Kabupaten Karimun, Pantai Lagoi, Pantai Tanjung Berakit, Pantai Trikora, dan Bintan *Leisure Park* di Kabupaten Bintan. Kabupaten Natuna terkenal dengan wisata baharinya seperti *snorkeling*. Selain wisata pantai dan bahari, Provinsi Kepulauan Riau juga memiliki objek wisata lainnya seperti cagar budaya, makam-makam bersejarah, tarian-tarian tradisional serta event-event khas daerah. Di Kota Tanjungpinang terdapat pulau penyengat sebagai pulau bersejarah karena di pulau ini terdapat mesjid bersejarah dan makam-makam Raja Haji Fisabilillah dan Raja Ali Haji yang kedua-duanya adalah pahlawan nasional (Badan Pusat Statistik, 2017).

Provinsi Kepulauan Riau yang memiliki berbagai pesona keindahan alam dan budaya tradisi yang dapat menjadi salah satu aset pariwisata yang sangat berharga. Dengan luas wilayah yang didominasi oleh lautan, menjadikan Provinsi Kepulauan Riau sebagai salah satu destinasi pariwisata kemaritiman. Pengembangan kepariwisataan di Provinsi Kepulauan Riau mendapatkan prioritas utama berdasarkan misi ketiga mengembangkan wisata berbasis kelautan, budaya lokal dan keunggulan wilayah. Sasaran Peningkatan jumlah pengunjung/wisatawan diupayakan melalui kegiatan pada Program Pengembangan Destinasi Pariwisata dan Program Pengembangan Pemasaran Pariwisata. Program ini ditujukan untuk meningkatkan pengelolaan destinasi wisata dan aset-aset warisan budaya yang menjadi daya tarik wisata yang kompetitif dengan pendekatan profesional, kemitraan swasta, pemerintah, dan masyarakat, serta memperkuat jaringan kelembagaan, dan pengembangan pemasaran selain proaktif melakukan pemasaran pariwisata melalui berbagai event dan promosi yang dilakukan baik di Indonesia maupun di luar negeri sehingga dapat mendorong investasi.

Penelitian yang berhubungan dengan peramalan jumlah wisatawan mancanegara yang menggunakan metode *Box-Jenkins* dengan model *seasonal ARIMA*, diantaranya “*Forecasting International Tourism Demand in Malaysia Using Box Jenkins Sarima Application*” oleh Loganathan, dkk (2010). “*Modeling and Forecasting Tourist Flows to Barbados using Seasonal Univariate Time Series Models*” oleh Mahalia Jackman (2010).

Berdasarkan penjelasan tentang peramalan jumlah wisatawan mancanegara tersebut, maka perlu dilakukan prediksi tentang jumlah wisatawan mancanegara untuk waktu yang akan datang dengan menggunakan model *seasonal ARIMA*. Sehingga dengan adanya hasil prediksi dari jumlah wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau ini, dapat membantu pihak pemerintah selaku pengambil kebijakan dalam upaya peningkatan aset daerah untuk daya tarik wisatawan mancanegara berkunjung ke Provinsi Kepulauan Riau. Mengingat pentingnya mengetahui pola pergerakan data jumlah wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau, maka penelitian ini bertujuan untuk menentukan model runtun waktu yang sesuai untuk data jumlah wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau dengan menggunakan model *seasonal ARIMA*. Serta menentukan hasil prediksi jumlah wisatawan

mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau di waktu yang akan datang dengan menggunakan model terbaik tersebut.

BAHAN DAN METODE

Time Series dengan Metode Box-Jenkins

Peramalan banyak digunakan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan seperti ekonomi, kesehatan, lingkungan, teknik, peternakan dan pertanian, dan lain-lain. Dengan adanya peramalan, suatu institusi dapat membuat suatu keputusan atau kebijakan tentang apa yang akan terjadi di masa yang akan datang berdasarkan fenomena yang terjadi sebelumnya. Analisis *time series* bertujuan untuk memperoleh satu uraian ringkas tentang ciri-ciri satu proses *time series* yang tertentu. *Time series* bermakna sebagai satu koleksi sampel yang dikaji secara berturut-turut melalui waktu (Bowerman et al, 2005).

Suatu *time series* y_t dapat dijelaskan dengan menggunakan suatu model trend $y_t = TR_t + \varepsilon_t$ dengan y_t = nilai *time series* pada masa t, TR_t = trend pada masa t, ε_t = ralat pada masa t (Cryer et al, 2008 dan Wei, 2006).

Metode peramalan yang telah dikenalkan oleh G.E.P. Box dan G.M. Jenkins adalah metode Box-Jenkins. Model yang dihasilkan oleh metode Box-Jenkins ada beberapa model yaitu model *moving average* (MA), *autoregressive* (AR), satu kelas model yang berguna untuk *time series* yang merupakan kombinasi proses MA dan AR yaitu ARMA. Model-model ini adalah model dari metode Box-Jenkins yang linier dan stasioner. Sedangkan model untuk metode Box-Jenkins yang non stasioner adalah model ARIMA dan SARIMA. Proses membentuk model dengan metode Box-Jenkins dapat dilakukan dengan empat langkah. Langkah pertama yaitu identifikasi model, langkah kedua estimasi parameter model-model yang diperoleh, langkah ketiga verifikasi model dan langkah keempat menentukan hasil peramalan waktu yang akan datang (Box Jenkins et al, 2008 dan Brocklebank et al, 2003).

Identifikasi model dengan metode Box-Jenkins, pertama sekali yang harus ditentukan adalah apakah data *time series* yang hendak dilakukan peramalan adalah *stationary* atau *non-stationary*. Jika tidak *stationary*, kita perlu mengubah data *time series* itu kepada data *time series* yang *stationary* dengan melakukan *differencing* beberapa kali sampai data *time series* tersebut adalah *stationary*. *Stationary* atau *non-stationary* suatu data dapat diuji dengan menggunakan plot *time series* data aktual dan plot pasangan ACF dan PACF (Maddala et al, 1992).

Autocorrelation function (ACF) dan *Partial autocorrelation function* (PACF) digunakan untuk menentukan model sementara. Setelah model sementara diperoleh maka perlu dilakukan estimasi parameter dari model-model sementara tersebut. Estimasi parameter dapat dilakukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

Hasil estimasi parameter yang diperoleh harus diuji signifikansinya, sehingga model yang kita dapatkan benar-benar model yang sesuai untuk data (Montgomery et al, 2008).

Model yang diperoleh tidak dapat digunakan langsung untuk analisis selanjutnya yaitu peramalan, tetapi perlu dilakukan tahap berikutnya yaitu verifikasi model. Satu cara yang baik untuk memeriksa kecukupan keseluruhan model dari metode Box-Jenkins adalah analisis *residual* yang diperoleh dari model. Dengan demikian kita menggunakan uji statistik Ljung-Box untuk menentukan apakah K sampel pertama autokorelasi bagi *residual* menunjukkan kecukupan bagi model atau tidak. Uji statistik Ljung-Box adalah:

$$Q^* = n'(n'+2) \sum_{i=1}^k (n'-1)^{-1} r_i^2(\hat{\alpha}) \quad (1)$$

dengan $n' = n - d$, n = bilangan data *time series* asal, d = derajat *differencing*, $r_i^2(\hat{\alpha})$ = kuadrat dari $r_i(\hat{\alpha})$ = sampel autokorelasi *residual* di lag i . H_0 : data adalah acak lawannya H_a : data adalah tidak acak. Jika Q^* lebih kecil dari $\chi_{\alpha}^2(K - n_c)$, kita terima H_0 . *Residual* itu adalah tidak berkorelasi dan model tersebut dikatakan sesuai untuk data. Jika Q^* lebih besar dari $\chi_{\alpha}^2(K - n_c)$ maka kita gagal terima H_0 . Model itu gagal mewakili data dan penentuan model yang baru hendak dilakukan (Vandaele et al, 1983 dan Wai et al, 2008).

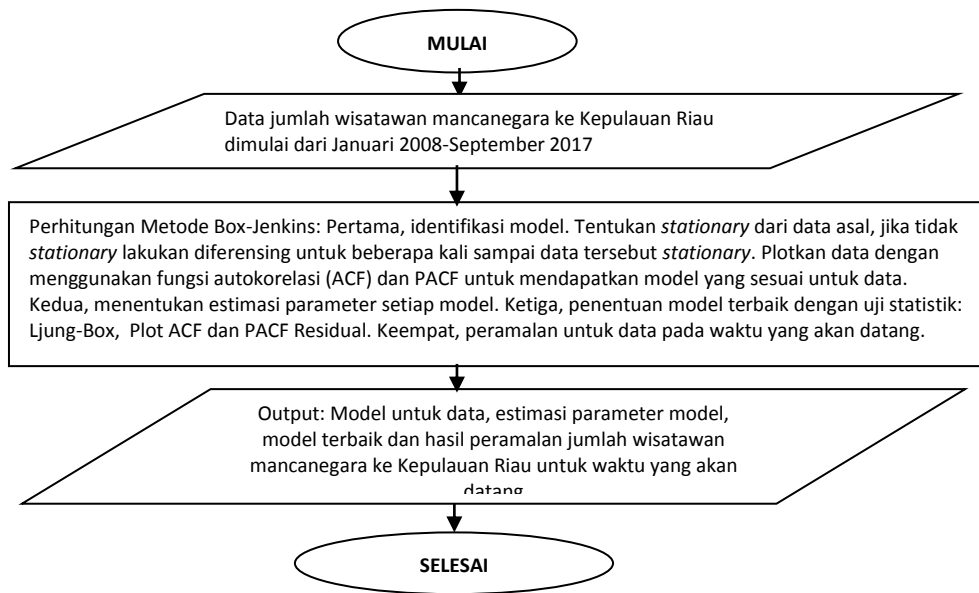
292

Selain dari uji statistik Ljung-Box, dengan menggunakan plot ACF dan PACF residual dapat juga digunakan untuk verifikasi model. Jika nilai korelasi residual pada plot ACF dan PACF tidak ada yang memotong garis batas atas dan batas bawah nilai korelasi residual, maka model tersebut dikatakan model terbaik untuk analisis selanjutnya yaitu analisis peramalan. Model yang ditetapkan adalah sesuai, kemudian peramalan *time series* untuk waktu yang akan datang dapat dilakukan. Peramalan tersebut meliputi peramalan data *training*, peramalan data *testing* dan peramalan untuk waktu yang akan datang (Desvina, 2012 dan Makridakis et al, 1999).

Metodologi Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data jumlah wisatawan mancanegara ke Kepulauan Riau mulai dari Januari 2008-September 2017, data ini diperoleh dari Badan Pusat Statistik Provinsi Kepulauan Riau, selanjutnya diaplikasikan kedalam bentuk pemrograman E-Views dan Minitab.

Prosedur penelitian mempunyai aturan-aturan khusus dalam memasukkan data untuk dianalisis, yang disebut sebagai prosedur simulasi seperti ditunjukkan pada gambar berikut ini:



Gambar 1. Flowchart Metodologi Penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

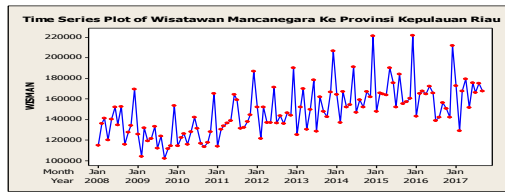
Peramalan dilakukan terhadap data jumlah wisatawan mancanegara ke Kepulauan Riau yang diamati secara bulanan mulai dari Januari 2008–September 2017. Tingkat kunjungan jumlah wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau selama 9 tahun mulai dari Januari 2008 sampai September 2017 mengalami tren naik. Selanjutnya dilakukan tahap-tahap pembentukan model peramalan dengan menggunakan metode *Box Jenkins* yaitu identifikasi model, estimasi parameter dalam model, *diagnostics check*, dan penerapan model untuk peramalan.

293

Pembentukan Model Peramalan Jumlah Wisatawan Mancanegara ke Kepulauan Riau

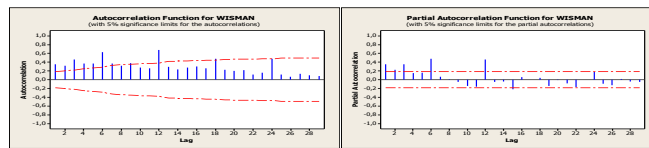
Tahap 1. Identifikasi Model

Tahap identifikasi model bertujuan untuk melihat kestasioneran data dan mencari model sementara yang sesuai dengan membuat plot data aktual, grafik autokorelasi dan grafik autokorelasi parsial serta tabel uji *unit root*. Berikut merupakan grafik data aktual jumlah wisatawan mancanegara ke Kepulauan Riau sebanyak 117 data terhitung dari bulan Januari 2008 sampai September 2017:



Gambar 2. Grafik Data Aktual Jumlah Wisatawan Mancanegara

Berdasarkan Gambar 2 dapat dilihat secara visual (kasat mata) menunjukkan bahwa terjadi pola musiman pada data jumlah kunjungan wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau. Pola musiman tersebut mengindikasikan bahwa data tidak stasioner. Untuk lebih meyakinkan maka dilakukan uji pasangan ACF dan PACF sebagai berikut:



Gambar 3. ACF dan PACF Data Aktual Jumlah Wisatawan Mancanegara

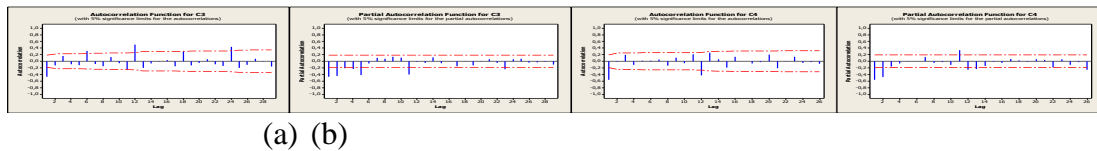
294

Grafik ACF dan PACF pada Gambar 3 menunjukkan bahwa data tidak stasioner karena lag-lag pada fungsi autokorelasi atau parsial autokorelasi tidak turun secara eksponensial. Berikut dilakukan uji unit root untuk memastikan apakah data tersebut stasioner atau tidak.

Tabel 1. Nilai Uji ADF Berbanding dengan Nilai Kritik MacKinnon Jumlah Wisatawan Mancanegara

| Anggran | Nilai Kritik MacKinnon | Statistik-t | Anggran | Nilai Kritik MacKinnon | Statistik-t |
|--------------------------------------|------------------------|-------------|--|------------------------|-------------|
| <i>Augmented Dickey Fuller (ADF)</i> | <i>ADF</i> | -5.467.230 | <i>Kwiatkows ki-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)</i> | <i>KPSS</i> | 0.025044 |
| | 1% | -3.493.747 | | 1% | 0.739000 |
| | 5% | -2.889.200 | | 5% | 0.463000 |
| | 10% | -2.581.596 | | 10% | 0.347000 |
| <i>Philips Perron (PP)</i> | <i>PP</i> | -5.345.797 | | | |
| | 1% | -3.488.063 | | | |
| | 5% | -2.886.732 | | | |
| | 10% | -2.580.281 | | | |

Berdasarkan uji ADF dan PP diperoleh bahwa nilai $P >$ nilai mutlak Kritik MacKinnon pada tingkat signifikansi 5%. Jika nilai $P >$ nilai mutlak bagi nilai Kritik MacKinnon, maka tolak H_0 . Sehingga dapat dikatakan bahwa terdapat *unit root* atau data tidak stasioner. Begitu juga dengan uji KPSS, menunjukkan bahwa nilai $t <$ nilai mutlak bagi nilai kritik MacKinnon pada tingkat signifikansi 5%, juga tolak H_0 . Sehingga dapat dikatakan bahwa terdapat *unit root* atau data tidak stasioner. Untuk menjadikan data tersebut menjadi data stasioner, maka kita lakukan *differencing* orde satu nonmusiman dan musiman. Berikut adalah plot ACF dan PACF *differencing* orde satu Nonmusiman dan Musiman:



Gambar 4. (a) Plot ACF dan PACF *Differencing* Orde Satu Nonmusiman dan (b) Plot ACF dan PACF *Differencing* Orde Satu Musiman

Berdasarkan Gambar 4(a) dan 4(b) dapat dilihat bahwa data sudah stasioner dari unsur tren karena lag-lag pada grafik ACF dan PACF hasil *differencing* non musiman dan musiman sudah turun secara eksponensial. Gambar 4(a) dapat dilihat bahwa lag-lag pada grafik ACF turun secara eksponensial dan PACF terpangkas setelah lag 2. Sedangkan Gambar 4(b) dapat dilihat bahwa lag-lag pada grafik ACF terpangkas setelah lag 1 dan PACF turun secara eksponensial. Grafik ACF pada Gambar 4(a) dan 4(b) dapat menunjukkan bahwa nilai korelasi positif tertinggi pada lag 12 yaitu 0,503047. Hal ini berarti bahwa periode *seasonal* nya signifikan pada lag 12, maka diperoleh nilai $S = 12$.

Sehingga model sementara yang diperoleh berdasarkan *differencing* non musiman dan musiman orde satu untuk memprediksi jumlah wisatawan mancanegara ke Kepulauan Riau adalah model *seasonal* $ARIMA(1,1,0)(1,1,0)^{12}$, *seasonal* $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)^{12}$, *seasonal* $ARIMA(1,1,1)(1,1,1)^{12}$, *seasonal* $ARIMA(2,1,0)(2,1,0)^{12}$ dan model *seasonal* $ARIMA(2,1,1)(0,1,1)^{12}$ adalah:

Tabel 2. Model-Model Sementara yang sesuai

| Model | Bentuk Matematis |
|--|--|
| <i>Seasonal</i> $ARIMA(1,1,0)(1,1,0)^{12}$ | $\phi_1 B \Phi_1(B)^{12} (1-B)^1 (1-B^{12})^1 Z_t = a_t$ |
| <i>Seasonal</i> $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)^{12}$ | $(1-B)^1 (1-B^{12})^1 Z_t = \theta_1(B) \Theta(B^{12}) a_t$ |
| <i>Seasonal</i> $ARIMA(2,1,0)(2,1,0)^{12}$ | $\phi_2 B \Phi_2(B)^{12} (1-B)^1 (1-B^{12})^1 Z_t = a_t$ |
| <i>Seasonal</i> $ARIMA(2,1,1)(0,1,1)^{12}$ | $\phi_2 B (1-B)^1 (1-B^{12})^1 Z_t = \theta_1(B) \Theta(B^{12}) a_t$ |

Tahap 2. Estimasi Parameter Model

Setelah model sementara diperoleh, tahap selanjutnya yaitu mengestimasi parameter dalam model sementara tersebut. Estimasi parameter dilakukan dengan metode kuadrat terkecil. Berikut hasil estimasi parameter yaitu:

Tabel 3. Estimasi Parameter Model

| Model | Parameter | Koefisien | P-value | Keputusan |
|---|------------|-----------|---------|------------|
| SEASONAL ARIMA(1,1,0)(1,1,0) ¹² | ϕ_1 | -0,5806 | 0,000 | Signifikan |
| | Φ_1 | -0,5846 | 0,000 | Signifikan |
| SEASONAL ARIMA(0,1,1)(0,1,1) ¹² | θ_1 | 0,7668 | 0,000 | Signifikan |
| | Θ_1 | 0,7939 | 0,000 | Signifikan |
| SEASONAL ARIMA(2,1,0)(2,1,0) ¹² | ϕ_1 | -0,9024 | 0,000 | Signifikan |
| | ϕ_2 | -0,5817 | 0,000 | Signifikan |
| | Φ_1 | -0,8224 | 0,000 | Signifikan |
| | Φ_2 | -0,5150 | 0,000 | Signifikan |
| SEASONAL ARIMA(2,1,1)(0,1,1) ¹² | ϕ_1 | -0,5819 | 0,000 | Signifikan |
| | ϕ_2 | -0,4335 | 0,000 | Signifikan |
| | θ_1 | 0,3949 | 0,010 | Signifikan |
| | Θ_1 | 0,8236 | 0,000 | Signifikan |

Berdasarkan tabel hasil estimasi parameter tersebut, diperoleh bahwa semua parameter dari keempat model tersebut sudah signifikan dalam model.

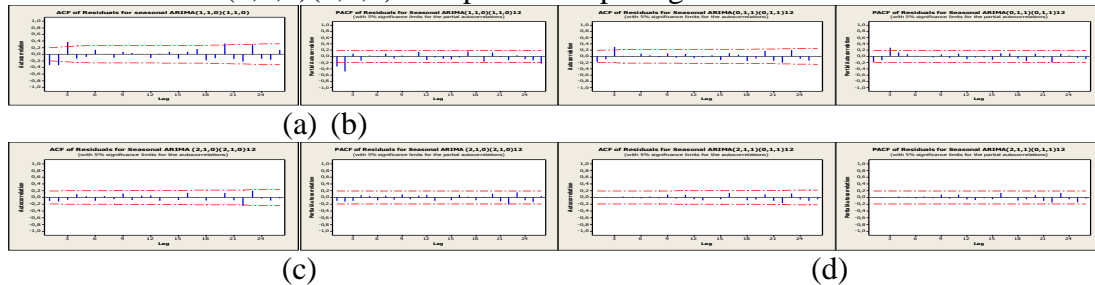
Tahap 3. Verifikasi Model (*Diagnostic Check*)

Tahap *diagnostik check* yaitu melihat apakah model yang dihasilkan sudah layak digunakan untuk peramalan atau belum, dengan melihat residual yang dihasilkan model. Penulis menggunakan tiga uji yaitu uji independensi, uji kenormalan residual, dan uji kerandaman residual untuk model *seasonal ARIMA(1,1,0)(1,1,0)*¹², *seasonal ARIMA(0,1,1)(0,1,1)*¹², *seasonal ARIMA (2,1,0)(2,1,0)*¹² dan model *seasonal ARIMA(2,1,1)(0,1,1)*¹².

a. Uji Independensi Residual

Uji ini dilakukan untuk mendeteksi independensi residual antar lag. Model layak digunakan jika residualnya tidak berkorelasi (independen) dan mengikuti proses random. Uji independensi residual dilakukan dengan melihat pasangan ACF dan PACF residual yang dihasilkan model dan membandingkan nilai *P-value* pada *output* proses *Ljung Box Pierce* dengan level toleransi (α) yang digunakan dalam uji hipotesis H_0 : Residual model mengikuti proses random lawan H_1 : Residual model tidak mengikuti proses random. Kriteria penerimaan H_0 yaitu jika *P-value* > level toleransi

(α). Grafik ACF dan PACF residual (a) model *seasonal ARIMA*(1,1,0)(1,1,0)¹², (b) *seasonal ARIMA*(0,1,1)(0,1,1)¹², (c) *seasonal ARIMA* (2,1,0)(2,1,0)¹² dan (d) model *seasonal ARIMA*(2,1,1)(0,1,1)¹² dapat dilihat pada gambar berikut:

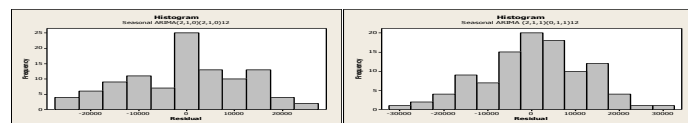


Gambar 5. Plot ACF dan PACF Residual Keempat Model Seasonal ARIMA

Grafik ACF dan PACF pada Gambar 5 menunjukkan bahwa terdapat lag yang memotong garis batas atas dan batas bawah nilai korelasi residual pada model *seasonal ARIMA*(1,1,0)(1,1,0)¹² dan model *seasonal ARIMA*(0,1,1)(0,1,1)¹², sehingga dapat disimpulkan bahwa residual yang dihasilkan kedua model tersebut berkorelasi, dapat diartikan kedua model tersebut tidak layak digunakan untuk tahap selanjutnya yaitu peramalan. Sedangkan model *seasonal ARIMA* (2,1,0)(2,1,0)¹² dan model *seasonal ARIMA*(2,1,1)(0,1,1)¹² tidak terdapat lag yang memotong garis batas atas dan batas bawah nilai korelasi residual, sehingga kedua model ini layak digunakan untuk tahap selanjutnya yaitu peramalan.

b. Uji Kenormalan Residual

Kenormalan residual dapat dilihat pada histogram residual yang dihasilkan model. Jika histogram residual yang dihasilkan model telah mengikuti pola kurva normal, maka model telah memenuhi asumsi kenormalan. Gambar 6 merupakan histogram residual (a) *seasonal ARIMA* (2,1,0)(2,1,0)¹² dan (b) model *seasonal ARIMA*(2,1,1)(0,1,1)¹² data jumlah wisatawan mancanegara ke Kepulauan Riau.



Gambar 6. Histogram Residual yang Dihasilkan Kedua Model

Gambar 6 menunjukkan histogram residual yang dihasilkan model telah mengikuti pola kurva normal, sehingga asumsi kenormalan terpenuhi. Berdasarkan uji yang dilakukan pada tahap diagnostik, diperoleh bahwa model sementara model *seasonal ARIMA* (2,1,0)(2,1,0)¹² dan model *seasonal ARIMA*(2,1,1)(0,1,1)¹² layak digunakan untuk tahap peramalan.

c. Uji Kerandoman Residual

Berdasarkan kedua uji sebelumnya diperoleh dua model yang memenuhi untuk dilanjutkan ke tahap selanjutnya yaitu peramalan. Sehingga perlu dilakukan uji berikutnya yaitu uji kerandoman residual. Uji kerandoman *residual* dapat dilakukan pada kedua model tersebut dengan menggunakan uji statistik *Ljung-Box Pierce* dengan cara membandingkan nilai *P-value* dengan toleransi yang digunakan. Hipotesis yang

digunakan adalah H_0 : Residual model mengikuti proses random lawan H_1 : Residual model tidak mengikuti proses random.

Syarat terima H_0 yaitu jika $p\text{-value} > \alpha$ artinya residual model mengikuti proses random. Berikut merupakan *output* proses *Ljung-Box* yang dihasilkan model.

Tabel 4. Output Proses Ljung Box Pierce

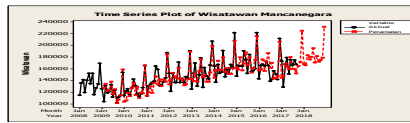
| lag | P-Value | |
|-----|--|--|
| | Seasonal ARIMA(2,1,0)(2,1,0) ¹² | Seasonal ARIMA(2,1,1)(0,1,1) ¹² |
| 12 | 0,262 | 0,933 |
| 24 | 0,033 | 0,688 |
| 36 | 0,087 | 0,879 |
| 48 | 0,041 | 0,799 |

Berdasarkan *output Ljung Box Pierce* pada Tabel 4 dapat diketahui bahwa model *seasonal ARIMA(2,1,0)(2,1,0)¹²* pada lag 24 dan lag 48 mempunyai nilai *P-value* yang lebih kecil dari pada level toleransi 5%, maka tolak H_0 dan dapat disimpulkan bahwa model *seasonal ARIMA(2,1,0)(2,1,0)¹²* tidak layak digunakan untuk peramalan. Sedangkan model *seasonal ARIMA(2,1,1)(0,1,1)¹²* setiap lagnya pada *output Ljung Box Pierce* mempunyai nilai *P-value* yang lebih besar dari level toleransi 5%, sehingga terima H_0 yang berarti model *seasonal ARIMA(2,1,1)(0,1,1)¹²* layak digunakan untuk tahap selanjutnya yaitu peramalan. Sehingga model matematis untuk model *seasonal ARIMA(2,1,1)(0,1,1)¹²* yaitu:

$$Z_t = Z_{t-1} + 0,1484Z_{t-2} + 0,4335Z_{t-3} + Z_{t-12} - 0,4184Z_{t-13} + 0,4184Z_{t-14} - 0,5819Z_{t-15} - 0,3948a_{t-1} - 0,8236a_{t-2} + 0,3251a_{t-3} + a_t \quad (2)$$

Tahap 4. Penerapan Model untuk Peramalan

Setelah diperoleh model yang layak digunakan untuk peramalan, tahap selanjutnya yaitu menggunakan model untuk peramalan, yang dibedakan untuk data *training*, data *testing* dan peramalan. Data *training* yaitu data yang digunakan untuk membangun model peramalan. Penulis menggunakan data *training* sebanyak 102 data yaitu data dari bulan Januari 2008 sampai bulan Juni 2016. Peramalan dengan menggunakan model *seasonal ARIMA(2,1,1)(0,1,1)¹²* pada Persamaan (2) untuk data *training* menghasilkan bahwa pola data *training* mendekati pola data aktual. Sedangkan dilakukan peramalan data *testing* bertujuan untuk melihat ketepatan hasil peramalan tanpa menggunakan data aktual. Penulis menggunakan data *testing* sebanyak 15 data yaitu dari bulan Juli 2016 sampai September 2017, dengan hasil bahwa pola data *testing* mendekati pola data aktual. Selanjutnya dilakukan peramalan peramalan jumlah wisatawan mancanegara ke Kepulauan Riau untuk waktu yang akan datang yaitu Oktober 2017 sampai Desember 2018, hasilnya dapat lihat pada gambar berikut ini:



Gambar 7. Grafik Peramalan *Training*, *Testing* dan Peramalan Tahun 2018

Gambar 7 menunjukkan bahwa dapat dilihat bahwa plot data hasil peramalan jumlah kunjungan wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau menggunakan model *seasonal* ARIMA(2,1,1)(0,1,1)¹² memiliki pola data yang hampir sama dengan pola data aktual pada tahun-tahun sebelumnya. Hasil peramalan ini dapat memberikan gambaran kepada Pemerintah bahwa jumlah kunjungan wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau mengikuti pola data tahun sebelumnya dan terjadi peningkatan. Sehingga Pemerintah selaku pengambil kebijakan dapat membuat suatu perencanaan tentang manajemen dan tata kelola tempat wisata di Provinsi Kepulauan Riau, agar wisatawan mancanegara yang ingin berkunjung ke Provinsi Kepulauan Riau semakin meningkat setiap tahunnya, dengan demikian APBD Provinsi Kepulauan Riau juga meningkat.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan yaitu analisa dan tahap-tahap pembentukan model peramalan, maka dapat disimpulkan bahwa model yang sesuai untuk data jumlah kunjungan wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau yaitu model *seasonal* ARIMA(2,1,1)(0,1,1)¹². Hasil peramalan menunjukkan bahwa, terdapatnya pola data hasil peramalan yang hampir sama dengan pola data aktual pada tahun-tahun sebelumnya. Hasil peramalan ini dapat memberikan gambaran kepada Pemerintah bahwa jumlah kunjungan wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau mengikuti pola data tahun sebelumnya dan terjadi peningkatan. Sehingga Pemerintah selaku pengambil kebijakan dapat membuat suatu perencanaan tentang manajemen dan tata kelola tempat wisata di Provinsi Kepulauan Riau, agar wisatawan mancanegara yang ingin berkunjung ke Provinsi Kepulauan Riau semakin meningkat setiap tahunnya, dengan demikian APBD Provinsi Kepulauan Riau juga meningkat.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih yang sebesar-besarnya kepada pihak Badan Pusat Statistik Provinsi Kepulauan Riau, yang telah memberi bantuan kepada peneliti untuk mendapatkan data jumlah kunjungan wisatawan mancanegara ke Provinsi Kepulauan Riau.

DAFTAR PUSTAKA

- Badan Pusat Statistik. 2017. *Data Jumlah Kunjungan Wisatawan Provinsi Kepulauan Riau*. Kepulauan Riau.
- Box, G.E.P, Jenkins, G.Mand Reinsel, G.C. 2008. *Time Series Analysis Forecasting and Control*, 4th ed, John Wiley & Sons Inc Publication, New Jersey.
- Bowerman, B.L., O'Connell, R.T. & Koehler, A.B. 2005. *Forecasting, Time Series, Regression an Applied Approach*, 4th Edition. [Belmont, CA](#): Thomson Brooks/cole.
- Brocklebank, J.C & David, A.D. 2003. "*SAS for Forecasting Time Series*", 2th edition. New York : John Wiley & Sons, Inc.
- Cryer, J.D. & Kung, S.C. 2008. *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer Dordrecht Heidelberg London, New York.
- Desvina, Ari Pani. 2014. "*Penerapan Metode Box-Jenkins untuk Memprediksi Jumlah Mahasiswa Universitas Islam Negeri Suska Riau*". Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Suska Riau. Pekanbaru.
- Maddala, G.S. 1992. *Introduction to Econometrics*. Edisi ke-2. New York: Macmillan Publishing Company.
- Makridakis dan S. Wheelwright. 1999. *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Jakarta: Binarupa Aksara.
- Montgomery, Douglas C dkk. 2008. *Intoduction to Time Series Analysis and Forecasting*. United State of America. Wiley Interscience.
- Vandaele, W. 1983. "*Applield Time Series and Box-Jenkins Models*." New York: Academic Press, Inc.
- Wai, H.M., Teo, K. & Yee, K.M. 2008. FDI and Economic Growth Relationship: An Empirical Study on Malaysia. *International Business Research*, 1:2: 11-18.
- Wei, William W.S. 2006. "*Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods*". 2nd edition. Pennsylvania: Pearson Education Inc.