Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 16, Roma (1996), 587-598

Sull'esistenza globale in futuro e sulla limitatezza parziale dei moti di un'ampia classe di sistemi olonomi scleronomi

M. BELLONI – C. RISITO

RIASSUNTO: *Si forniscono delle condizioni sufficienti per l'esistenza globale in futuro e per la limitatezza parziale dei moti di un'ampia classe di sistemi olonomi scleronomi, utilizzando il metodo di confronto introdotto da* R. CONTI [4], *e scegliendo come funzione di Liapunov l'energia totale del sistema. I teoremi ottenuti nel presente lavoro trovano applicazione sia quando l'energia potenziale del sistema è inferiormente limitata* (*caso studiato dal secondo autore* [8], [3]) *sia quando non lo è* (*caso studiato per primo da* G. CANTARELLI [1], [2], *e indipendentemente da* P. PUCCI *e* J. SERRIN [7]).

ABSTRACT: *Sufficient conditions for the global existence in the future and the partial boundedness of the motions of a wide class of holonomic scleronomic systems are given, using the comparison method introduced by* R. CONTI [4], *and taking as Liapunov function the total energy of the system. The theorems obtained in the present paper can be used both when the potential energy of the system is bounded from below* (*a case studied by the second author* [8], [3]) *and when it is not* (*a case first studied by* G. CANTARELLI [1], [2], *and independently by* P. PUCCI *and* J. SERRIN [7]).

I risultati del presente lavoro sono stati esposti dal Dott. M. Belloni a Firenze in occasione del Congresso Internazionale "Ordinary Differential Equations and their Applications" (20-24 Sett. 1993). Lavoro eseguito con i fondi M.U.R.S.T., 40% e 60%.

KEY WORDS AND PHRASES: *Esistenza globale in futuro – Limitatezza parziale – Disuguaglianza differenziale – Equazione di confronto.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 70H35, 34A15, 34C11

1 – Introduzione

Sia S un sistema materiale a n gradi di libertà, soggetto a vincoli olonomi, bilaterali, lisci e indipendenti dal tempo (sistema *olonomo scleronomo*), e sia $q^T = (q_1, \dots, q_n)$ una n-upla di coordinate lagrangiane indipendenti, variabili in $\mathbb{R}^n$. Sia $T = (1/2)\dot{q}^T A(q)\dot{q}$ l'energia cinetica di S, dove $A = A(q)$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, *definita positiva* per ogni $q \in \mathbb{R}^n$, e di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Sul sistema S agisce, oltre ad una sollecitazione derivante da un potenziale *generalizzato*, con energia potenziale $\Pi = \Pi(t, q)$ di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, anche una sollecitazione *aggiuntiva* generica le cui componenti lagrangiane $Q_1, \dots, Q_n$ siano funzioni definite e continue in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Le equazioni del moto del sistema S sono le *equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i(t, q, \dot{q}) \quad (i = 1, \dots, n)\,, \tag{1}$$

dove $\mathcal{L} := T - \Pi$ è la funzione lagrangiana. Le funzioni $A(q), \Pi(t, q)$ e $Q(t, q, \dot{q})$, dove $Q^T = (Q_1, \dots, Q_n)$, siano inoltre sufficientemente regolari in modo da assicurare l'unicità delle soluzioni $q(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)$ del problema di Cauchy associato alle (1), in corrispondenza ad ogni $(t_0, q_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Nel presente lavoro si studia il problema dell'esistenza globale in futuro e della limitatezza parziale dei moti di S (cioè delle soluzioni delle equazioni di Lagrange (1)), utilizzando il *metodo di confronto* [4], e scegliendo come funzione di Liapunov l'*energia totale* $T + \Pi$ di S.

Si suppone innanzi tutto che risulti soddisfatta la seguente disuguaglianza differenziale

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) \le g(t, T + \Pi) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,, \tag{2}$$

dove $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e sufficientemente regolare in modo da assicurare l'unicità delle soluzioni $u(t, t_0, u_0)$ del problema di Cauchy associato all'*equazione di confronto* $\dot{u} = g(t, u)$, per ogni $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, e tale che tutte le soluzioni $u(t, t_0, u_0)$, con $u_0 \ge 0$, esistano globalmente in futuro. Si osservi che nel caso particolare in cui la sollecitazione aggiuntiva sia *dissipativa* ed inoltre l'energia potenziale

Π sia *indipendente dal tempo*, la disuguaglianza (2) risulta soddisfatta ponendo $g(t,u) \equiv 0$.

Si suppone inoltre che sia

$$\Pi(t,q) \geq -h(t)\varphi(\|q\|) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\,, \tag{3}$$

dove $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ è una funzione continua (con $\mathbb{R}^+$ si è indicato l'insieme dei numeri reali non-negativi e con $\mathbb{R}_0^+$ quello dei numeri reali strettamente positivi), $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è una *funzione di classe* K nel senso di W. Hahn [5], cioè continua e strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$, con $\varphi(0) = 0$, e $\|q\|$ è la norma euclidea del vettore $q \in \mathbb{R}^n$.

Si possono presentare i seguenti due casi:

I) φ è limitata in $\mathbb{R}^+$. Allora l'energia potenziale Π *è inferiormente limitata* in ogni insieme del tipo $I \times \mathbb{R}^n$, dove I è un qualsiasi intervallo limitato di $\mathbb{R}^+$, e si ricade nel caso studiato dal secondo autore [8], [3],

II) $\varphi(r) \to \infty$ per $r \to \infty$. Allora si può presentare il caso, studiato da G. Cantarelli [1], [2] e da P. Pucci e J. Serrin [7], nel quale l'energia potenziale Π *non è inferiormente limitata*. Nel lavoro [7] si assume che $T(q,\dot{q})$ sia una funzione *strettamente convessa* rispetto alle velocità lagrangiane $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ (non necessariamente una forma quadratica, come avviene per i sistemi olonomi); si assume però che la sollecitazione aggiuntiva sia *dissipativa*.

L'ipotesi che la matrice $A(q)$ sia *definita positiva* per ogni $q \in \mathbb{R}^n$, implica l'esistenza di una funzione continua $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ tale che si abbia [3]

$$T(q,\dot{q}) \geq \alpha(\|q\|)\|\dot{q}\|^2 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,, \tag{4}$$

dove $\|\dot{q}\|$ è la norma euclidea del vettore $\dot{q}^T = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ di $\mathbb{R}^n$.

Nel presente lavoro si dimostra che se, oltre alle condizioni (2), (3), (4), risulta soddisfatta anche la seguente condizione (la quale, per il tramite delle disuguaglianze (3) e (4), stabilisce un legame indiretto tra T e Π)

$$\int^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha(r)}{\varphi(r)}}\, dr = \infty\,, \tag{5}$$

oppure la condizione più restrittiva: $\varphi(r) = O(\alpha(r))$ per $r \to \infty$, allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange (1) esistono globalmente in futuro (Teorema 1 e Corollario 1 del n.2). Il Teorema 1 del presente lavoro estende il risultato del Teorema 2 stabilito in [8] al caso in cui Π non sia inferiormente limitata in $I \times \mathbb{R}^n$ (caso che può presentarsi soltanto se φ non è limitata in $\mathbb{R}^+$; se invece φ è limitata in $\mathbb{R}^+$, si ritrova il teorema citato).

Si stabiliscono inoltre due teoremi (Teorema 2 e Teorema 3 del n.3), i quali forniscono delle condizioni sufficienti per la limitatezza *parziale* dei moti di S rispetto alle sole velocità lagrangiane $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ (secondo la definizione di A.S. Oziraner [6]). Questi due teoremi estendono la prima parte del Teorema 3 stabilito in [8] al caso in cui Π non sia inferiormente limitata in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Infine un esempio illustra i principali risultati ottenuti.

2 – Condizioni sufficienti per l'esistenza globale in futuro dei moti del sistema S

Sussiste il seguente teorema di esistenza globale in futuro per i moti del sistema olonomo scleronomo S soddisfacente le ipotesi introdotte nel precedente n.1.

TEOREMA 1. *Se sono soddisfatte le seguenti condizioni*

$$\text{(i)} \qquad Q^T\dot{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \le g(t, T + \Pi) \qquad \forall (t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,,$$

dove la funzione $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e sufficientemente regolare in modo da assicurare l'unicità delle soluzioni $u(t, t_0, u_0)$ del problema di Cauchy associato all'equazione di confronto $\dot{u} = g(t, u)$, per ogni $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, e tale che tutte le soluzioni con $u_0 \ge 0$ esistano globalmente in futuro (cioè siano definite nell'intervallo di tempo $[t_0, \infty)$),

$$\text{(ii)} \qquad \Pi(t, q) \ge -h(t)\varphi(\|q\|) \qquad \forall (t, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\,,$$

dove la funzione $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ è continua, e $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è una *funzione di classe K,*

(iii)
$$\int^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha(r)}{\varphi(r)}}\,dr = \infty\,,$$

dove $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ è la funzione continua che compare nella disuguaglianza (4) del n. 1,

allora tutti i moti del sistema S esistono globalmente in futuro.

Si supponga per assurdo che l'intervallo massimale destro di esistenza $J^+ := [t_0, \omega)$ di una soluzione $q = q(t)$ della (1) sia *limitato* ($t_0 < \omega < \infty$), e si indichi con $T(t)+\Pi(t)$ l'energia totale di S calcolata lungo la suddetta soluzione, e con $E_0 := T(t_0) + \Pi(t_0)$ il suo valore nell'istante iniziale t_0. Utilizzando il metodo di confronto [4], e tenuto conto della condizione (i) e dell'identità: $(d/dt)\{T + \Pi\} \equiv Q^T\dot{q} + \partial\Pi/\partial t$, si ha

$$T(t) + \Pi(t) \leq u(t, t_0, |E_0|) \leq k \qquad \forall t \in J^+\,, \tag{6}$$

dove $k(\in \mathbb{R}_0^+)$ è un'opportuna costante, la cui esistenza è assicurata dal fatto che la soluzione $u(t, t_0, |E_0|)$ dell'equazione di confronto è definita in $[t_0, \infty)$, per la (i), ed è quindi limitata nell'intervallo limitato J^+. Tenuto conto della condizione (ii) e della disuguaglianza (4), dalla (6) si ottiene

$$\|\dot{q}(t)\| \leq \sqrt{\frac{k + H\varphi(\|q(t)\|)}{\alpha(\|q(t)\|)}} \qquad \forall t \in J^+\,, \tag{7}$$

dove $H(\in \mathbb{R}_0^+)$ è il massimo della funzione continua $h = h(t)$ nell'intervallo compatto $\overline{J}^+$.

Ricordando che è $(d/dt)\|q(t)\| \leq \|\dot{q}(t)\|$ (dove la derivata (d/dt), che compare nel primo membro della disuguaglianza, va sostituita con la derivata destra negli eventuali istanti in cui la funzione $q(t)$ si annulla), dalla (7) si ricava una disuguaglianza differenziale in $\|q(t)\|$. Utilizzando nuovamente il metodo di confronto [4], si ottiene la seguente maggiorazione

$$\|q(t)\| \leq v(t, t_0, \|q(t_0)\|) \qquad \forall t \in J^+\,, \tag{8}$$

dove $v(t, t_0, \|q(t_0)\|)$ è la soluzione della seguente equazione di confronto

$$\dot{v} = \sqrt{\frac{k + H\varphi(v)}{\alpha(v)}}\,, \tag{9}$$

soddisfacente la condizione iniziale $v(t_0) = \|q(t_0)\|$.

La condizione (iii) implica $\int^\infty \sqrt{\alpha(v)/(k + H\varphi(v))}\, dv = \infty$, $\forall(k, H) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$[(1)], il che assicura [4] l'esistenza globale in futuro di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (9). Di conseguenza la funzione $\|q(t)\|$ è limitata in J^+, e quindi anche la funzione $\|\dot{q}(t)\|$ è limitata in J^+ (come si riconosce dalla (7)), ma ciò è in contraddizione con $\lim\limits_{t \to \omega^-} \{\|q(t)\| + \|\dot{q}(t)\|\} = \infty$, ed il Teorema 1 resta così dimostrato.

Se ad esempio si ha: $Q^T \dot{q} \leq 0$, $\partial\Pi/\partial t \equiv 0$, $\Pi(q) \geq -\lambda\|q\|^2$ con $\lambda = \text{cost}. > 0$, $T(q, \dot{q}) \geq \alpha_* \|\dot{q}\|^2$ con $\alpha_* = \text{cost}. > 0$, si riconosce che tutte le condizioni del Teorema 1 risultano soddisfatte con: $g(t, u) \equiv 0$, $h(t) \equiv \lambda$, $\varphi(r) \equiv r^2$, $\alpha(r) \equiv \alpha_*$, e quindi tutti i moti di S esistono globalmente in futuro.

Osservazione. Il seguente esempio mostra che la condizione (iii) del Teorema 1 non è troppo restrittiva. Si supponga che S sia un sistema olonomo scleronomo *conservativo* ad un solo grado di libertà, per il quale si abbia

$$\Pi = -\varphi(|q|)\,, \quad T = \alpha(|q|)\dot{q}^2\,, \tag{10}$$

dove φ è una funzione di classe K (limitata o non) e $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ è una funzione continua. Sia $q = q(t)$ la soluzione dell'equazione di Lagrange corrispondente alle seguenti condizioni iniziali: $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0 > 0$, e sia J^+ il suo intervallo massimale destro di esistenza. Per l'integrale primo dell'energia si ha

$$\dot{q}(t) = \sqrt{\frac{T_0 + \varphi(q(t))}{\alpha(q(t))}} \qquad \forall t \in J^+\,, \tag{11}$$

[(1)] Si possono presentare i seguenti due casi:
I) $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r) = l (< \infty)$. Posto $R := \varphi^{-1}(l/2)$, nell'intervallo $[R, \infty)$ si ha: $(l/2) \leq \varphi(r) < l$, da cui segue che $\sqrt{\alpha(r)/\varphi(r)} \leq \sqrt{(2/l)\alpha(r)}$. Infine, integrando in $[R, \infty)$, si ottiene $\int^\infty \sqrt{\alpha(r)}dr = \infty$, da cui segue l'asserto, essendo $\sqrt{\alpha(r)/(k + H\varphi(r))} > \sqrt{\alpha(r)/(k + Hl)}$, $\forall r \geq R$.
II) $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r) = \infty$. Posto $R := \varphi^{-1}(k)$, nell'intervallo $[R, \infty)$ si ha: $\varphi(r) \geq k$, da cui segue che $\sqrt{\alpha(r)/(k + H\varphi(r))} \geq \sqrt{\alpha(r)/(1 + H)\varphi(r)}$, ed integrando in $[R, \infty)$ si ottiene l'asserto. Si osservi infine che, anche quando la funzione φ non è limitata, la condizione (iii) implica $\int^\infty \sqrt{\alpha(r)}dr = \infty$, essendo $\sqrt{\alpha(r)/\varphi(r)} \leq \sqrt{\alpha(r)/k}$, $\forall r \geq R$.

essendo $|q(t)| \equiv q(t)$, dato che la funzione $q(t)$ è strettamente crescente in J^+. Separando le variabili ed integrando tra 0 e $t(\in J^+)$, si ottiene

$$\int_0^{q(t)} \sqrt{\frac{\alpha(q)}{T_0 + \varphi(q)}}\, dq = t \qquad \forall t \in J^+ , \tag{12}$$

da cui si riconosce che, se non è soddisfatta la condizione (iii), la soluzione $q = q(t)$ non è prolungabile in futuro (si osservi che le prime due condizioni (i) e (ii) del Teorema 1 risultano invece soddisfatte).

Sussistono i seguenti due corollari del Teorema 1.

Corollario 1. *Per l'esistenza globale in futuro di tutti i moti del sistema S sono sufficienti le condizioni* (i), (ii) *del Teorema 1, unite alla seguente*
(iii)$'$ *esiste una costante $C(>0)$ tale che si abbia*

$$\varphi(r) \le C\alpha(r) \qquad \forall r \ge R ,$$

dove il numero reale $R(\ge 0)$ può essere scelto arbitrariamente grande.

Corollario 2. *Si supponga che esistano i due limiti*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(r)}{r^\beta} = \lambda , \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{\alpha(r)}{r^\gamma} = \mu , \tag{i$'$}$$

dove $\lambda, \mu, \beta, \gamma$ sono quattro numeri reali soddisfacenti le seguenti limitazioni: $0 < \lambda, \mu < \infty$; $\beta \ge 0$; $\gamma \ge \beta - 2$. Se inoltre sono soddisfatte le prime due condizioni (i) *e* (ii) *del Teorema 1, allora tutti i moti del sistema S esistono globalmente in futuro.*

Infatti, se i due limiti (i)$'$ esistono, sono finiti e diversi da zero, la condizione (iii) del Teorema 1 è equivalente alla condizione: $\gamma \ge \beta - 2$.

3 – Condizioni sufficienti per la limitatezza parziale dei moti del sistema S rispetto alle velocità lagrangiane

Sussiste il seguente teorema di limitatezza parziale per i moti del sistema olonomo scleronomo S soddisfacente le ipotesi introdotte nel n.1.

Teorema 2. *Si supponga che siano soddisfatte le seguenti condizioni, unitamente alla condizione* (i) *del Teorema 1*

(ii) *tutte le soluzioni dell'equazione di confronto, con $u_0 > 0$, sono superiormente limitate in $[t_0, \infty)$, cioè si ha*

$$(\forall\, t_0 \geq 0)(\forall\, u_0 > 0)(\exists k > 0)(\forall\, t \geq t_0) \quad u(t, t_0, u_0) \leq k\,, \tag{13}$$

(iii) $$\Pi(t, q) \geq -\varphi(\|q\|) \qquad \forall (t, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\,,$$

dove $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è una funzione di classe K,

(iv) *esiste una costante $C(> 0)$ tale che si abbia*

$$\varphi(r) \leq C\alpha(r) \qquad \forall r \geq R\,,$$

dove il numero reale $R(\geq 0)$ può essere scelto arbitrariamente grande, e $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ è la funzione che compare nella disuguaglianza (4)*.*

Allora tutti i moti del sistema S esistono globalmente in futuro e sono inoltre $\dot q$-equilimitati, cioè si ha [6]

$$\begin{cases} (\forall t_0 \geq 0)(\forall \rho > 0)(\exists L > 0)(\forall (q_0, \dot q_0) : \|q_0\| + \|\dot q_0\| \leq \rho) \\ (\forall t \geq t_0) \quad \|\dot q(t, t_0, q_0, \dot q_0)\| < L\,. \end{cases} \tag{14}$$

Se inoltre sono soddisfatte le ulteriori due condizioni

(v) $$\Pi(t, q) \leq \Pi_*(q) \qquad \forall (t, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\,,$$

dove la funzione $\Pi_* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua,

(vi) *la costante k, che compare nella definizione* (13)*, è indipendente da t_0, cioè si ha*

$$(\forall u_0 > 0)(\exists k > 0)(\forall t_0 \geq 0)(\forall t \geq t_0) \quad u(t, t_0, u_0) \leq k\,, \tag{15}$$

allora tutti i moti di S sono $\dot q$-uniformemente limitati, cioè la costante L, che compare nella definizione (14)*, è indipendente da t_0.*

Poiché l'esistenza globale in futuro dei moti di S è assicurata dal Corollario 1 del n.2, resta soltanto da dimostrare la $\dot{q}$-equilimitatezza. Assegnati a piacere $t_0(\geq 0)$ e $\rho(>0)$, si definisca $l = l(t_0, \rho)$ nel seguente modo

$$l := \max_{\|q_0\|+\|\dot{q}_0\|\leq\rho} \{T(q_0, \dot{q}_0) + |\Pi(t_0, q_0)|\}, \tag{16}$$

e si consideri la soluzione dell'equazione di confronto corrispondente alla condizione iniziale $u(t_0) = l$. Per la (ii), esiste una costante $k = k(t_0, \rho)$ (>0) tale che si abbia: $u(t, t_0, l) \leq k$, $\forall t \geq t_0$. Seguendo la dimostrazione del Teorema 1 si ottiene (cfr. la (6))

$$T(t) + \Pi(t) \leq k \qquad \forall t \geq t_0, \tag{17}$$

dove con $T(t) + \Pi(t)$ si è indicata l'energia totale di S, calcolata lungo una qualsiasi soluzione $q(t) := q(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)$ delle equazioni di Lagrange (1), per la quale sia $\|q_0\| + \|\dot{q}_0\| \leq \rho$. Tenuto conto delle condizioni (iii), (iv) e della disuguaglianza (4), dalla (17) si ottiene

$$\|\dot{q}(t)\| \leq \sqrt{\frac{k + \varphi(\|q(t)\|)}{\alpha(\|q(t)\|)}} \leq \sqrt{\frac{k}{\alpha_*} + \max\Big\{\frac{\varphi(R)}{\alpha_*}, C\Big\}} \qquad \forall t \geq t_0, \tag{18}$$

dove $\alpha_*(>0$, per la condizione (iv)) è l'estremo inferiore della funzione $\alpha(r)$ in $\mathbb{R}^+$. Dalla (18) si riconosce che la definizione (14) di $\dot{q}$-equilimitatezza risulta soddisfatta ponendo

$$L := \sqrt{\frac{k}{\alpha_*} + \max\Big\{\frac{\varphi(R)}{\alpha_*}, C\Big\}}. \tag{19}$$

Infine, se sono soddisfatte anche le ultime due condizioni (v) e (vi) del Teorema 2, si definisce $l_* = l_*(\rho)$ nel seguente modo

$$l_* := \max_{\|q_0\|+\|\dot{q}_0\|\leq\rho} \{T(q_0, \dot{q}_0) + |\Pi_*(q_0)|\}, \tag{20}$$

e si considera la soluzione dell'equazione di confronto corrispondente alla condizione iniziale $u(t_0) = l_*$, qualunque sia il valore dell'istante iniziale $t_0(\geq 0)$. Allora, per la condizione (vi), esiste una costante $k = k(l_*(\rho))(> 0)$, *indipendente da* t_0, tale che si abbia: $u(t, t_0, l_*) \leq k$, $\forall t_0 \geq 0$, $\forall t \geq t_0$. Sussiste quindi la (17), con $k = k(l_*(\rho))$, da cui si deduce la (18), e perciò i moti di S sono $\dot{q}$-*uniformemente* limitati, perché la costante L, definita dalla (19), *è indipendente da* t_0.

Sussiste inoltre il seguente teorema di limitatezza parziale, nel quale non si utilizzano le funzioni di classe K.

Teorema 3. *Se assieme alle condizioni* (i) *del Teorema 1 e* (ii) *del Teorema 2, sono soddisfatte le seguenti condizioni*

(iii) *esiste una costante* $H(> 0)$ *tale che si abbia*

$$\Pi(t, q) \geq -H\alpha(\|q\|) \qquad \forall (t, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \,,$$

dove $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *è la funzione che compare nella disuguaglianza* (4)*,*

(iv) *esiste una costante* $\alpha_*(> 0)$ *tale che si abbia*

$$\alpha(r) \geq \alpha_* \qquad \forall r \geq 0 \,,$$

allora tutti i moti del sistema S *esistono globalmente in futuro e sono* $\dot{q}$*-equilimitati.*

Se inoltre sono soddisfatte anche le ultime due condizioni (v) *e* (vi) *del Teorema 2, allora tutti i moti di* S *sono* $\dot{q}$*-uniformemente limitati.*

Seguendo la dimostrazione del precedente Teorema 2, si riconosce che la definizione (14) di $\dot{q}$-equilimitatezza risulta soddisfatta ponendo $L := \sqrt{k/\alpha_* + H}$.

Se ad esempio si ha: $Q^T \dot{q} \leq 0$, $\partial\Pi/\partial t \equiv 0$, $\Pi(q) \geq -\lambda\|q\|^2$ con $\lambda = \text{cost}\,. > 0$, $T(q, \dot{q}) \geq (1+\|q\|^2)\|\dot{q}\|^2$, si riconosce che tutte le condizioni sia del Teorema 2 sia del Teorema 3 risultano soddisfatte con: $g(t, u) \equiv 0$, $\varphi(r) \equiv \lambda r^2 \,, \alpha(r) \equiv 1 + r^2 \,, C = \lambda \,, H = \lambda$, e quindi tutti i moti di S esistono globalmente in futuro e sono inoltre $\dot{q}$-uniformemente limitati.

Esempio. Si supponga che la condizione (3) del n.1 risulti soddisfatta per uguaglianza, cioè che si abbia

$$\Pi(t,q) = -h(t)\varphi(\|q\|) \qquad \forall (t,q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\,, \tag{21}$$

dove $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sono due funzioni di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$, e φ è una funzione di classe K, e che le forze di componenti lagrangiane $Q_1, \dots, Q_n$, definite e continue in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, soddisfino alla seguente condizione

$$Q^T(t,q,\dot q)\dot q \le \frac{\dot h(t)}{h(t)} T(q,\dot q) \qquad \forall (t,q,\dot q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,, \tag{22}$$

(nel caso particolare in cui si ha: $\dot h(t) \le 0$, $\forall t \ge 0$, le forze di componenti lagrangiane $Q_1, \dots, Q_n$ sono *dissipative*).

Dalle (21) e (22) segue che

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(T+\Pi) = Q^T\dot q - \dot h(t)\varphi(\|q\|) = Q^T\dot q + \dfrac{\dot h(t)}{h(t)}\Pi \le \\[2ex] \qquad \le \dfrac{\dot h(t)}{h(t)}(T+\Pi) \quad \forall (t,q,\dot q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,. \end{cases} \tag{23}$$

Tutte le soluzioni $u(t,t_0,u_0) = (h(t)/h(t_0))u_0$ dell'equazione di confronto $\dot u = (\dot h(t)/h(t))u$ sono definite in $\mathbb{R}^+$, e perciò la condizione (i) del Teorema 1 risulta soddisfatta.

Si possono presentare i seguenti due casi:

I) $\int^\infty \sqrt{\alpha(r)/\varphi(r)}\,dr = \infty$, ed allora, per il Teorema 1, tutti i moti di S esistono globalmente in futuro,

II) $\varphi(r) = O(\alpha(r))$ per $r \to \infty$, ed inoltre la funzione $h = h(t)$ *è limitata in* $\mathbb{R}^+$. In tal caso, per il Teorema 2, tutti i moti di S esistono globalmente in futuro e sono inoltre $\dot q$-equilimitati. Se si aggiunge l'ulteriore condizione: $h(t) \ge h_* = \text{cost}. > 0$, $\forall t \ge 0$, allora i moti di S sono $\dot q$-uniformemente limitati.

REFERENCES

[1] G. Cantarelli: *Nuovi criteri per l'esistenza globale in futuro dei moti dei sistemi olonomi scleronomi*, Ann. Mat. Pura Appl., (IV), Vol. CLXIII (1993), 247-264.

[2] G. Cantarelli: *Sulla limitatezza parziale dei moti dei sistemi olonomi scleronomi*, Riv. Mat. Univ. Parma, (5) **3** (1994), 341-354.

[3] G. Cantarelli – C. Risito: *Criteri di esistenza globale e di limitatezza per i sistemi olonomi scleronomi*, Ann. Mat. Pura Appl., (IV), Vol. CLXII (1992), 383-394.

[4] R. Conti: *Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*, Boll. Un. Mat. Ital., **11** (1956), 510-514.

[5] W. Hahn: *Stability of motion*, Springer-Verlag (Band 138), Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[6] A.S. Oziraner: *On certain theorems of Liapunov's second method*, J.Appl. Math. Mech., **36** (1972), 373-381, (tradotto dalla Rivista russa P.M.M., **36** (1972), 396-404).

[7] P. Pucci – J. Serrin: *Continuation and limit behavior for damped quasi-variational systems,* in *Degenerate Diffusions*, IMA, **47**, in Math. Appl., Springer, W.-M.Ni, L.A. Peletier – J.L. Vazquez, Eds. (1993), 157-173.

[8] C. Risito: *Sull'esistenza globale e sulla limitatezza dei moti dei sistemi olonomi scleronomi*, Ann. Mat. Pura Appl., (IV), Vol. CXXXIX (1985), 341-348.

Lavoro pervenuto alla redazione il 2 febbraio 1994
ed accettato per la pubblicazione il 27 novembre 1995.
Bozze licenziate il 14 settembre 1996

Indirizzo degli Autori:

M. Belloni - C. Risito – Dipartimento di Matematica – Università di Parma – Via M. D'Azeglio 85/A – 43100 Parma – Italia.