



## 量子可解模型の相関関数と動力学

著者	有川 晃弘
発行年	2011
その他のタイトル	Correlation functions and dynamics in quantum integrable model
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2241/115271">http://hdl.handle.net/2241/115271</a>

機関番号：12102

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2009～2010

課題番号：21740281

研究課題名 (和文) 量子可解模型の相関関数と動力学

研究課題名 (英文) Correlation functions and dynamics in quantum integrable model

研究代表者

有川 晃弘 (ARIKAWA MITSUHIRO)

筑波大学・計算科学研究センター・研究員

研究者番号：60402814

研究成果の概要 (和文)：

ベータ仮説法を用いて、可解模型である1次元スピinlessフェルミオン模型とハイゼンベルグ模型についてストリング状態の解析から高エネルギー状態の動的性質を明らかにした。さらに長距離相互作用をもつ可解模型である Ruijsenaars-Schneider 模型の粒子伝搬関数の解析形を求め、分数統計による励起によって動的性質を明らかにした。これまでに知られている Gutzwiller 波動関数に対する密度行列の異なる表式の同等性を解析的に明らかにした。

研究成果の概要 (英文)：

Using Bethe ansatz method, we clarified the dynamical properties of the integrable model --- one dimensional spinless fermion model and Heisenberg model. In particular, the properties in the high-energy region are elucidated from the analysis of the string states. Further, we obtained the particle propagator of the Ruijsenaars-Schneider model and clarified the dynamical properties in terms of the excitations obeying fractional statistics. We show the mutual equivalence among the known several expressions of the density matrix for the Gutzwiller wave function exactly.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：相関関数, 素励起描像, ベータ仮説

## 1. 研究開始当初の背景

1次元量子系では、低エネルギーかつ長波長極限での動力学はボソン化法、共形場理論に

より十分に明らかにされた。量子ドット、量子細線などのナノテクノロジー、光学格子などの超低温技術の発展により低次元量子系が実現され、非弾性中性子散乱、角度分解型光電子分光などと比較する上で、理論的に動力学における一般的なエネルギー、温度スケールでの素励起描像の理解が不可欠である。この場合にはボソン化法、共形場理論などは適用出来ない。

可積分模型を用いることで非摂動的に動力学の解析的な知見を得る出発点にする。1次元量子系の中で Heisenberg 模型、Hubbard 模型、超対称  $t$ - $J$  模型といったベータ仮説法により解ける可積分模型が存在する。しかしながら、相関関数を得るのは模型が可積分とはいっても自明ではない。

これまで私は逆2乗型相互作用をもつ可積分模型 (Calogero-Sutherland 模型、Haldane-Shastry スピン鎖模型など) の絶対零度における動的相関関数の解析形の導出を行い分数統計に従う素励起が動的相関関数に寄与することを明らかにし、他の1次元量子系の動力学での素励起描像との関係を調べてきた。

本研究では未だ十分になされていない、可積分模型についての有限温度での動力学および高い自由度をもつ場合に拡張したときの動力学の研究を行なう。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、量子可積分模型の相関関数の解析形を導出し、非自明な動力学における素励起描像を明らかにすることにある。具体的には：

(1)有限温度での1次元可解模型の動的相関関数の導出: 1次元 Heisenberg 模型の場合、絶対零度における動的相関関数、有限温度での静的な相関関数については既に先行研究が存在する (F. Goehmann et al, "Integral representations for correlation functions of the XXZ chain at finite temperature" J. Phys. A37 7625 (2004).). 有限温度での動的な性質は十分調べられておらず、素励起描像がエネルギー依存性はどうなっているか、どのように温度に依存するか? ということは基本的な問題で、実験と比較する上でも自然な問題設定である。Fermi 面近傍での線形分散近似を行う共形場理論を超えた低温領域

での Heisenberg 模型の構造因子、NMR 緩和率の解析形を導出する。

(2)SU(3)内部自由度をもつ可積分模型の動力学: 通常のスピン自由度よりも自由度の大きく、最も単純な場合である SU(3) 自由度のある可解模型の動力学の研究を行う。この SU(3) 自由度を持つ系は冷却アルカリ原子などを用いた光学格子において様々なジオメトリの系が実現される可能性があり、スピン  $S=1$  の系の特別な場合とみなすことが出来る。(共形場理論で記述される) 低エネルギー領域での励起に共通の構造を有する逆2乗型相互作用をもつ (Haldane-Shastry 模型) 場合、SU(3) 内部自由度をもつ系 (図 1) では素励起はパラフェルミオンの励起により記述されることが知られている。本研究では最近接相互作用の場合についての動的構造因子の導出を行う。

(3) 1次元 超対称  $t$ - $J$  模型の動力学:

$t$ - $J$  模型は各サイトあたり電子の2重占有を禁止した、 $\uparrow$ ,  $\downarrow$ -スピン、ホールの3種類の自由度のある電子系の模型であり、系にホールのない場合は Heisenberg 模型に帰着する。本研究では可解模型である超対称  $t$ - $J$  模型に対して、系にホールが1つ存在した場合の動力学を中心に行う。超対称  $t$ - $J$  模型における1電子スペクトルの導出を行う (Mott 絶縁体の Heisenberg 模型で記述される状態から光によって電子を1つ抜いて励起した場合)。すでに1次元方向に強い異方性をもつ  $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$  などの銅酸化物や有機導体に対して光電子分光の実験が既に行われており、多くの数値計算による理論的な解析も行われている。さらにホール数が一般の場合について、これまで数値計算による予備的な研究により、どのような素励起が相関関数に寄与するかについて研究を行ってきた。一般の電子密度の場合について1電子スペクトルだけでなくスピン構造因子、電荷構造因子の導出も行なう。

## 3. 研究の方法

1次元 Heisenberg 模型の動力学の解析的な方法は主に2つあり、一つは無磁場の場合に適用可能な表現論によるアプローチと有限磁場下での Kitanine らによる Bethe

方程式を用いた定式化があり、両者を用いて解析を行う。

Jordan-Wigner 変換により Heisenberg 模型に写像可能な スピンレスフェルミオン模型 についても 同様の相関関数の定式化がなされている (K. Motegi, K. Sakai " Form factors and correlation functions of an interacting spinless fermion model" Nucl. Phys. B 793 451 (2008).)。数値的に十分大きな系に対する相関関数の解析を行う。具体的に素励起描像を得るためには、大きな系における Bethe 方程式を数値的に計算し、スペクトル強度を評価する必要がある。有限系の入れ子構造をもつ Bethe 方程式の解法の高速度も必要となる (予備計算では有限系の入れ子構造の方程式の数値計算はサイト数  $N \sim 10^2$  まで行っているが (研究目的: 図 2 では  $N = 50$ )、スペクトル強度の評価には少なくとも  $N \sim 10^3$  程度の計算が望ましい)。この系についても有限温度 (低温領域) でのグリーン関数の表式を与える。内部自由度のある系について Kitanine らの手法の拡張を行う。

#### 4. 研究成果

(1) 1次元スピンレスフェルミオン系の1粒子スペクトル関数をBethe 仮説法を用いて十分大きい系での精度の良い結果を得た。Jordan-Wigner 変換によりHeisenberg模型と同じ熱力学性質を持つフェルミオン・ボソンの統計性の違いにより、密度相関関数とは異なり、1粒子スペクトル関数に違いが現れることを具体的に示した。低エネルギー領域では朝永-Luttinger流体の性質からスペクトル強度は連続的な構造をもつと期待されるが、デルタ関数ではないが、それに近い、鋭い1粒子(ホール)的なスペクトル強度を持つことを示した。さらに高エネルギー領域での束縛状態の寄与が大きいことを直接確かめた。本研究で得られた1粒子スペクトル関数は角度分解(逆)光電子分光により観測される物理量である。

(2) 逆2乗に比例する相互作用を持つ可解である、Sutherland 模型では動力学における素励起が分数統計に従う自由粒子で表されることが知られている。この模型の「相対論」的な拡張である Ruijsenaars- Schneider

模型の1粒子付加スペクトル関数の解析形をMacdonald対称多項式に関する数学公式を用いることで、共形場理論で記述される低エネルギー極限を超えて、全エネルギー領域で得られた。未だ熱力学極限での一般式は得られていないが、一般の有限系での表式から「相対論」的な拡張された場合でも素励起が分数統計に従う自由粒子で表されることを示した。

(3) イジング異方性のあるハイゼンベルグ模型の動的スピン構造因子をベータ仮説法を用いて十分大きな系で、かつ精度の良い結果を得た。1次元量子系では、低エネルギーかつ長波長極限での動的な性質はボソン化法、共形場理論などの場の理論の手法により十分に明らかになっているが、ベータ仮説法を用いることで場の理論の手法では得られない、高エネルギー領域での束縛状態(ストリング状態)の動的スピン構造因子の寄与の評価を行うことが可能となった。さらに素励起であるスピノン励起が分数統計に従う自由粒子として振る舞う、 $S=1/2$  Haldane-Shastry スピン鎖模型の動的性質との比較を行った。本研究で得られた動的構造因子は非弾性中性子散乱により観測される物理量である。

(4) 変分波動関数としてよく用いられる、Gutzwiller 波動関数は長距離相互作用をもつ可解模型の超対称  $t$ - $J$  模型の厳密な基底状態であることが知られ、この模型の素励起であるスピノン、ホロン励起などは分数統計に従う自由粒子として振る舞う。このGutzwiller 波動関数には3つの相異なる密度行列の解析形が得られている。それぞれの3つの相異なる密度行列の解析形の間関係は非自明であった。本研究で、これらの密度行列の解析形の間同等性を解析的に示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① M. Kohno, M. Arikawa, J. Sato and K. Sakai, "Spectral properties of Interacting One-Dimensional Fermions" Journal of the Physical Society of Japan 79 (2010) 043707 (1-4). (査読有)

[学会発表] (計 5 件)

- ① M. Arikawa “Equivalence of different expressions on the density matrix of Gutzwiller wave function ” XXIV IUPAP International Conference on Statistical Physics (2010. 7. 20) Convention Centre, Cairns, Queensland, Australia
- ② J. Sato, M. Arikawa, Y. Saiga “Dynamics of the S=1/2 spin chains with Ising anisotropy” XXIV IUPAP International Conference on Statistical Physics (2010. 7. 23) Convention Centre, Cairns, Queensland, Australia
- ③ 有川晃弘 ” Particle propagator of trigonometric Ruijsenaars -Schneider model II” 日本物理学会 第 65 回年次大会 (2010. 3. 21) 岡山大学
- ④ 有川晃弘, 佐藤純, 河野昌仙, 塚和光, 「1 次元スピinlessフェルミオン系のスペクトル関数」 日本物理学会 秋季大会 (2009. 9. 28) 熊本大学
- ⑤ M. Arikawa, “Spectral function of one dimensional spinless fermion system” Infinite Analysis 09 (2009. 7. 29) 京都大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

有川 晃弘 (ARIKAWA MITSUHIRO)  
筑波大学・計算科学研究センター・研究員  
研究者番号：60402814