多変数代数方程式のべき級数根解法の研究

著者	照井 章
発行年	2010-05-31
その他のタイトル	Study on Calculating Power-series Roots of Multivariate Algebraic Equations
URL	http://hdl.handle.net/2241/105239

様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　４月　１日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９７０００４
研究課題名（和文）　多変数代数方程式のべき級数根解法の研究

研究課題名（英文）　Study on Calculating Power-series Roots of Multivariate Algebraic Equations

研究代表者
照井　章（TERUI AKIRA）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・助教
研究者番号：８０３２３２６０

研究成果の概要（和文）：

本研究では、計算代数（数式処理）において、多変数代数方程式のべき級数根を求める記号的 Newton 法を取り上げ、まず、すべてのべき級数根を同時に計算する、より収束次数の高い反復公式を構築した。次に、記号的 Newton 法を計算する際の初期因子に現われることのある（近似）重複因子を除去するために、係数に微小な摂動を加えることによって近似共通因子を実用的な精度と効率で計算する算法の研究を行い、非線形最適化法の一つである勾配射影法に基づいて、1 変数多項式の近似最大公約子(GCD)を安定かつ効率的に求める算法を構築した。

研究成果の概要（英文）：

This research has been focused on so-called symbolic Newton method for calculating power-series roots, with respect to a pre-defined main variable, of multivariate polynomials. First, we have developed iteration formulae for calculating all the power-series roots simultaneously. Then, we have investigated for methods for eliminating multiple or closed factors which may appear in the initial factors of the symbolic Newton method. We have developed an iterative method for calculating an approximate greatest common divisor (GCD) of univariate polynomials based on the gradient projection method, with much stability and efficiency.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,300,000	0	1,300,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	800,000	240,000	1,040,000
総　計	2,900,000	480,000	3,380,000

研究分野：計算代数、数式・数値融合計算
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：計算代数, 数式処理, 数式・数値融合計算, 記号的 Newton 法, 近似 GCD, 数値最適化, 勾配射影法

１．研究開始当初の背景

記号的 Newton 法は、多変数代数方程式 $F(x, y, \ldots, z)=0$ を主変数 x について解き、根を $x=\varphi(y, \ldots, z)$, ここで $\varphi(y, \ldots, z)$は従変数 $y, \ldots, z$ に関するべき級数として、任意の次数まで求める反復算法である。

工学などに現われる諸問題においては、代数方程式の根を厳密な形で表現することが不可能であるか、表現できたとしてもその表現が複雑で、実用上利用が困難な場合が多い。このような場合、根を必要な有限項で打ち切ったべき級数（打ち切りべき級数）で表すことにより、種々の計算への活用が可能になる。記号的 Newton 法は、そのようなべき級数根の計算に有用な算法である。

本研究は、当初、以下の背景の下に研究課題を設定した。

(1) すべてのべき級数根を同時に計算する反復公式の構築

与えられた代数方程式 $F(x, y, \ldots, z)=0$ の主変数 x に関する次数が n で、かつ、$F(x, y, \ldots, z)$が重複因子をもつようなことがなければ、一般に x に関するべき級数根は n 個存在する。しかし、記号的 Newton 法の算法として、これまで提案されているものの大半は、1 個のべき級数根のみを求める反復公式であるため、仮にすべてのべき級数根を求めようとすると、記号的 Newton 法の反復計算をべき級数根の個数だけ繰り返す必要がある。

一方、記号的 Newton 法は、数値計算における 1 変数代数方程式の数値解法の類比(analogy)といえる。1 変数代数方程式の数値解法には、単独の根を求める解法と、すべての根を同時に求める解法があるが、数値計算においては、両方の解法で、Padé 近似や有理関数近似を用いることにより、任意の収束次数をもつ算法へのさまざま拡張と一般化が行われている。

よって、数値計算における反復公式やその性質を記号的 Newton 法に応用することにより、記号的 Newton 法においても、すべてのべき級数根を同時に計算する反復公式の導出が期待された。

(2) 係数演算に浮動小数演算を用いた場合の記号的 Newton 法の誤差解析

記号的 Newton 法は、従来、係数演算に有理数などの厳密演算を用いていたが、理工学等の諸問題においては、解くべき方程式の係数が、浮動小数等、誤差をもつ数で与えられることがしばしば起きる。

方程式の係数が浮動小数で与えられるような場合は、係数演算に浮動小数演算を用いることになる。この場合、浮動小数演算による係数の誤差を評価し、べき級数根の各係数の精度を保証する必要がある。佐々木建昭（筑波大学）らは、浮動小数演算を用いた記号的 Newton 法において、特異点付近でのべき級数根の計算では桁落ち誤差が重大であることを示し、その仕組みを明らかにしている。

この桁落ち誤差解析は、最も単純な 1 次収束の反復公式の解析であるが、浮動小数演算を用いた記号的 Newton 法を行う際に係数の誤差解析と精度保証は必要不可欠である。

２．研究の目的

本研究では、当初、以下の通り、研究目的を設定した。

(1) 記号的 Newton 法において、数値解法と同様に反復公式の拡張と一般化を行い、べき級数根のより効率的な算法の開発と応用を目指す。

(2) 本研究で新たに開発する算法において、係数に浮動小数演算を適用した場合の誤差解析と精度保証を行い、計算精度を保証しつつ効率化を行うための指針を確立することにより、本研究で開発する算法の適用範囲を広げる。

３．研究の方法

本研究では、上記の研究目的に対して、以下の通り研究を進行させた。

(1) 上記の研究目的(1)を達成するために、記号的 Newton 法において、数値計算における 1 変数代数方程式の同時反復公式として、1) Aberth の反復公式、および 2) Padé 近似を用いた任意の収束次数をもつ反復公式、の 2 つを適用させた反復公式の構成を行った。

(2) 上記の研究目的(2)を達成するための、研究に入るところで、新たな研究課題が生じた。すなわち、記号的 Newton 法の初期因子を計算する際に、初期因子が重複、もしくは近接している際に、これら（近似）重複因子を除去する問題である。

初期因子を決定する多項式は、与えられた

多項式 F(x, y, … , z)の従変数 y, … , z に、ある定数を代入した 1 変数多項式であり、この重複因子の除去は、無平方分解、すなわち、最大公約子(GCD)の繰り返し計算に帰着される。厳密な重複因子は、本来の計算代数における厳密な無平方分解で除去可能である。しかし、与えられた多項式の係数がもつ誤差等に起因する近似重複因子は、厳密な無平方分解（GCD 計算）では除去できない場合がある。このような場合の算法として、近似 GCD を計算するためのさまざまな算法が提案されている。

そこで、研究目的(2)のための研究の前段階として、与えられた 2 つの 1 変数多項式（一方の多項式がもう一方の多項式の導関数でないようなもの）に対し、それぞれの多項式の係数に摂動を加えることにより、互いに共通因子をもつようにし、近似 GCD を求める算法の研究を行った。具体的な研究方法として、与えられた近似 GCD の問題を、非線形の制約つき最適化問題に帰着させ、これを解くアプローチで研究を行った。

４．研究成果

本研究では、上記の研究方法に対して、以下の研究成果を得た。

(1) 記号的 Newton 法の同時反復公式として、以下の反復公式を導出した。

①Aberth による 3 次収束の同時反復公式を用いることにより、記号的 Newton 法における 3 次収束の同時反復公式を与えた。

②櫻井鉄也（筑波大学）らによる、Padé 近似を用いた任意の収束次数をもつ同時反復公式を用いることにより、記号的 Newton 法の意味で等しい次数の収束次数をもつ同時反復公式を与えた。

なお、②任意の収束次数をもつ同時反復公式については、①3 次の同時反復公式を含む。

(2) 1 変数多項式の近似 GCD 算法の構築については、非線形最適化法の一つである勾配射影法に基づき、安定かつ効率的に近似 GCD を求める算法の構築に成功した。

算法は、実係数、もしくは複素係数の 2 つの入力多項式の近似 GCD を計算する算法を構築した。計算機実験により、両算法とも、同様に最適化法のアプローチをとる既存の方法と比較し、計算速度で最大約 30 倍の効率化が達成されることを示した。

上記の算法の実装（数式処理システム Maple 用）をインターネットで公開した。

本研究成果は、最適化法のアプローチをとる近似 GCD 算法の中でも、従来のものと比較して、精度を同等に保ちながら、簡便な工夫で大幅な効率化を行う可能性を示したものであり、計算代数・記号計算の分野で最も権威のある国際会議である ISSAC (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation) の 2009 年の会議にも採録され、国際的にも大きな注目を受けた。

今後は、算法の収束性の理論／実験両面からの解析、計算量の理論／実験両面からの解析およびより効率化を図るための工夫、3 つ以上の入力多項式に対する近似 GCD 算法への拡張などに焦点を当てて研究を進める予定である。

(3) 当初の研究目的の項目(2): 誤差解析と精度保証については、上記研究方法および研究成果の項目(2): 近似 GCD 算法の研究実施のため、本研究期間内に目的とする成果は得られなかったが、誤差解析と精度保証は、浮動小数係数の記号的 Newton 法の実用化には欠かせない理論であるため、今後も同分野の研究を継続する所存である。なお、上記項目(2): 近似 GCD 算法の構築は、誤差解析と精度保証の研究に代わる成果を挙げ、本研究課題全般としては十分な研究成果を挙げたと考えている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

1. A. Terui. “GPGCD, an Iterative Method for Calculating Approximate GCD of Univariate Polynomials, with the Complex Coefficients.” Proceedings of the Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009, COE Lecture Note Vol. 22. Faculty of Mathematics, Kyushu University, 2009, 212–221. 査読有. http://hdl.handle.net/2324/16844
2. A. Terui. “An Iterative Method for Calculating Approximate GCD of Univariate Polynomials.” Proceedings of 2009 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2009). ACM, 2009, 351–358. 査読有. doi:10.1145/1576702.1576750 http://hdl.handle.net/2241/103423
3. 照井章. 制約つき最適化に基づく 1 変数多項式の近似GCDの反復算法. 第 38 回数値解析シンポジウム講演予稿集,

2009, 95–98. 査読無.
http://hdl.handle.net/2241/103425
4. 照井章. 任意の収束次数をもつ記号的Newton法の同時反復公式. 数理解析研究所講究録 1572 "数式処理研究の新たな発展". 京都大学数理解析研究所, 2007, 82–93. 査読無.
http://hdl.handle.net/2433/81304

〔学会発表〕(計 7 件)

1. A. Terui. GPGCD, an Iterative Method for Calculating Approximate GCD of Univariate Polynomials, with the Complex Coefficients. The Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009, Fukuoka, Japan, December 14, 2009.
2. 照井章. 近似GCD算法GPGCDの複素係数多項式への拡張. 研究集会 "Computer Algebra — Design of Algorithms, Implementations and Applications", 京都大学数理解析研究所, 2009 年 11 月 5 日.
3. A. Terui. An Iterative Method for Calculating Approximate GCD of Univariate Polynomials (poster presentation). The 11th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2009), Kobe, Japan, September 13–17, 2009.
4. A. Terui. An Iterative Method for Calculating Approximate GCD of Univariate Polynomials. The 2009 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2009), Seoul, Republic of Korea, July 31, 2009.
5. 照井章. 制約つき最適化に基づく 1 変数多項式の近似GCDの反復算法. 第 38 回数値解析シンポジウム (NAS2009), 熱川ハイツ, 2009 年 6 月 17 日.
6. 照井章. 制約つき最適化に基づく 1 変数多項式の近似GCDの反復算法. 第 18 回日本数式処理学会大会, 龍谷大学瀬田キャンパス, 2009 年 6 月 12 日.
7. 照井章. 任意の収束次数をもつ記号的Newton法の同時反復公式. 共同研究 "数式処理研究の新たな発展", 京都大学数理解析研究所, 2007 年 7 月 5 日.

〔その他〕
ホームページ等

ソフトウェア公開・配布 web サイト
GPGCD: an approximate polynomial GCD library
http://gpgcd.googlecode.com/

６．研究組織

(1)研究代表者
照井　章 (TERUI AKIRA)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・助教
研究者番号：８０３２３２６０

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：