Geodetski list GLASILO GEODETSKIH SEKCIJA
SAVEZA DRUŠTAVA INŽENJERA I TEHNIČARA F. N. R. JUGOSLAVIJE

GODINA V. (28) — APRIL — SEPTEMBAR 1951. — BROJ 4-9

Ing. V. Andrejev' sveuč. decent — Zagreb

Izvod formule za redukciju dužine obješene niti na horinzotalu putem parabole umjesto lančanice

U geodetskoj literaturi se do sada redukcija dužine žice na horizontalu kod mjerenja bazisa priborom Jederina izvodila iz teorije lančanice. Taj je izvod prilično kompliciran, dugačak i nepregledan, a njegova teoretska strogost je samo uvjetna, jer se u njemu uzima srednja vrijednost napetosti žice, što geometrijski odgovara srednjoj vrijednosti kvadratnog korijena iz radiusa zakrivljenosti.

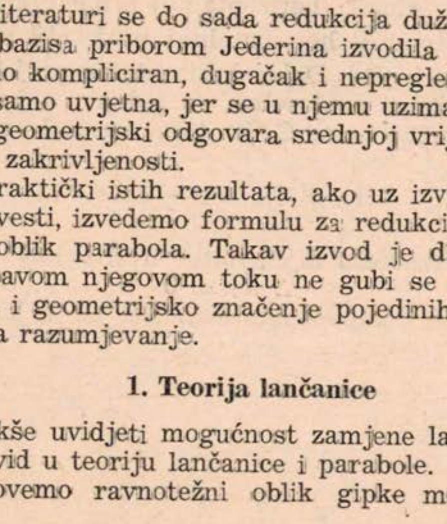
Dolazimo do praktički istih rezultata, ako uz izvjesne predpostavke, koje ćemo dalje navesti, izvedemo formulu za redukciju žice uzevši da je njezin ravnotežni oblik parabola. Takav izvod je daleko jednostavniji, pregledniji, a u čitavom njegovom toku ne gubi se fizikalna predstava pojedinih operacija i geometrijsko značenje pojedinih članova redukcije, što je vrlo važno za razumjevanje.

1. Teorija lančanice

Da se može lakše uvidjeti mogućnost zamjene lančanice parabolom, dat ćemo kratak uvid u teoriju lančanice i parabole.

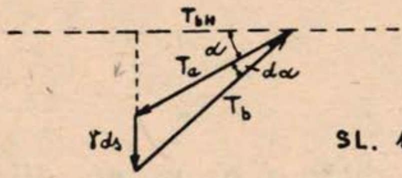
Lančanicom zovemo ravnotežni oblik gipke materijalne niti kon-

SL. 1.



stantne jedinične težine ($\gamma \frac{kg}{m'}$ = konst.), koja je obješena o dvije točke i nalazi se pod djelovanjem samo vlastite težine (slika 1.1)

Gipka nit može primati samo sile zatezanja i to samo u smjeru svoje tangente. Isječemo li elemenat niti ab = ds, nalazit će se on pod djelo-osi. Dakle u svakom presjeku niti sila zatezanja u njoj mora imati smjer vanjem sila zatezanja T_a i T_g i težine elementa ds, koja je jednaka γds, gdje je γ težina jedinice dužine niti.



SL. 1.2.

Te tri sile, koje djeluju na element ds, nalaze se u ravnini niti (lančanice), a budući da se nalaze u ravnoteži moraju zatvarati poligon sila, t. j. trokut sila (Slika 1.2).

U tom trokutu stranica, koja prikazuje težinu elementa γds mora biti vertikalna, a iz toga slijedi da su projekcije zatezanja T_a i T_b u točkama a i b na horizontalu međusobno jednake. Uzmemo li elemente a_1 a i b_1 b, istim ćemo putem doći do zaključka da je horizontalna projekcija sile zatezanja T_{a1} u a_1 jednaka horizontalnoj projekciji sile zatezanja T_a u točki a, pa prema tome u horizontalnoj projekciji sile zatezanja T_b u točki b i T_{b1} u točki b_1 itd. Dakle horizontalne projekcije sila zatezanja u svakoj točki lančanice međusobno su jednake i jednake su zatezanju H u najdonjoj točki lančanice C, jer tamo postoji samo ta horizontalna sila H, tj.

$$T_{ah} = T_{bh} = H = \text{konst.} \tag{1 · 1a}$$

Promatrajući ravnotežu dijela niti Cb (Sl. 1.3) iz uvjeta ravnoteže

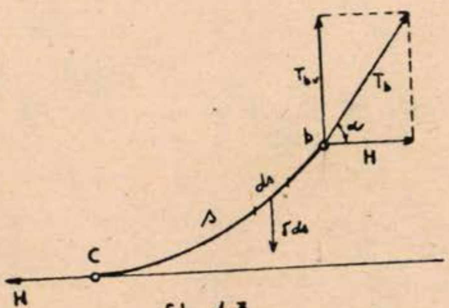
$$\Sigma \, Yi = 0$$

(tj. zbroj vertikalnih komponenata svih sila mora biti jednak nuli) nalazimo da je

$$T_{bv} - \gamma \int_{(s)} ds = 0$$

i odatle

$$T_{bv} = \gamma \int_{(s)} ds = \gamma \, s$$



SL. 1.3.

tj. vertikalna komponenta zatezanja u kojoj god točki lančanice jednaka je težini niti od najdolnje točke C do promatrane točke b.

Iz slike 1.2 se vidi da je

$$\text{tg} \, (\alpha + d\alpha) - \text{tg}\alpha = \frac{\gamma \, ds}{T_{bh}} = \frac{\gamma \, ds}{H}$$

a budući da je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

možemo lijevu stranu prednje jednadžbe ovako prikazati:

$$\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - \operatorname{tg}\alpha = d(\operatorname{tg}\alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

i dalje možemo napisati

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\gamma}{H} ds$$

odnosno

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\gamma}{H}\frac{ds}{dx} \qquad (1 \cdot 2)$$

Ovo je diferencijalna jednadžba lančanice. Ona se može dobiti i tako da iz sl. 1.3 možemo napisati

$$tg\, \alpha = \frac{T_{bv}}{H}$$

a u vezi sa 1,1b možemo napisati:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma s}{H} \qquad (1 \cdot 3$$

Deriviranjem te jednadžbe dobivamo 1 . 2.

Jednadžbu lančanice možemo dobiti integriranjem diferencijalne jednadžbe 1.2 što se vrši zamjenom

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$ds = \sqrt{1 + p^2}\, dx$$

i na kraju dobivamo

$$\boxed{y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}}{2} = a\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}} \qquad (1 \cdot 4)$$

gdje je

$$a = \frac{H}{\gamma} \qquad (1 \cdot 5)$$

Nije teško dokazati iz poznatog odnosa

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

da je

$$a = \varrho_0$$

tj. parametar a je radius zakrivljenosti lančanice u njezinom tjemenu.

U vezi sa 1.1a, 1.1b i 1.5 možemo napisati (v. sl. 1.1):

$$A^2 = A_h^2 + A_v^2 = H^2 + \gamma^2 s_a^2 = \gamma^2 a^2 + \gamma^2 s_a^2 = \gamma^2 (a^2 + s_a^2)$$

$$B^2 = B_h^2 + B_v^2 = H^2 + \gamma^2 s_b^2 = \gamma^2 a^2 + \gamma^2 s_b^2 = \gamma^2 (a^2 + s_b^2)$$

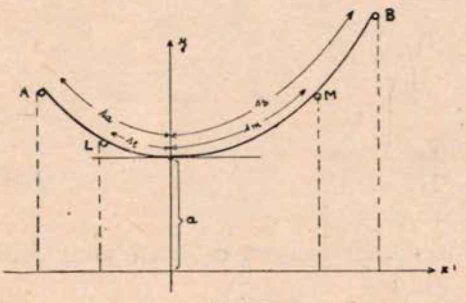
a odatle slijedi:

$$A = \gamma \sqrt{a^2 + s_a^2}$$
$$B = \gamma \sqrt{a^2 + s_b^2} \qquad (1 \cdot 6)$$

tj. sile zatezanja u objesištima jednake su težinama niti dužine $\sqrt{a^2 + s^2_a}$ odnosno $\sqrt{a^2 + s^2_b}$. To isto vrijedi za sve druge točke niti, na primjer za L i M (Sl. 1.4). U tim točkama dužine obješenih niti, koje bi svojom težinom stvarale potrebna zatezanja, jednaka zatezanjima u objesištima, bile bi

$$\sqrt{a^2 + s_l^2} \text{ i } \sqrt{a^2 + s_m^2}$$

Može se lako dokazati da funkcija odnosno krivulja



SL. 1.4.

$$y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}$$

ima to svojstvo da je

$$y^2 = a^2 + s^2 \qquad (1.7)$$

tj. sve dužine niti, koje su svojom težinom ekvivalentne silama zatezanja u pojedinim točkama lančanice, dosezali bi do osi x (Sl. 1.4). Dakle zatezanje u kojoj god točki je

$$T_a = \gamma y_a$$
$$T_b = \gamma y_b$$
$$T_l = \gamma y_l \qquad (1 \cdot 8)$$
$$T_m = \gamma y_m$$

Dokaz jednadžbe (1.7) slijedi iz ovih odnosa:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2, \; ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(a \operatorname{Ch}\frac{x}{a}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}}{2}\right) = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}}}{2} = \operatorname{Sh}\frac{x}{a}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\operatorname{Sh}\frac{x}{a}\right)^2} dx = \sqrt{\left(\operatorname{Ch}\frac{x}{a}\right)^2} dx = \operatorname{Ch}\frac{x}{a} \cdot dx$$

$$s = \int_0^x \mathrm{Ch}\frac{x}{a}\,dx = a\,\mathrm{Sh}\frac{x}{a}$$

$$a^2 + s^2 = a^2 + a^2\left(\mathrm{Sh}\frac{x}{a}\right)^2 = a^2\left[1 + \left(\mathrm{Sh}\frac{x}{a}\right)^2\right] = a^2\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{a}\right)^2 = y^2$$

Lančanica ima još jedno zanimljivo svojstvo, a to je veličina radiusa zakrivljenosti. Iz gornjih odnosa vidimo da je

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Ch}\frac{x}{a}$$

Uvrštavamo to u prije napisanu formulu za radius zakrivljenosti te dobivamo:

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\left[1 + \left(\mathrm{Sh}\frac{x}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a}\,\mathrm{Ch}\frac{x}{a}} = \frac{\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{a}\right)^3}{\frac{1}{a}\,\mathrm{Ch}\frac{x}{a}} = a\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{a}\right)^2$$

ili

$$\varrho = \frac{a^2\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{a}\right)^2}{a} = \frac{y^2}{a} \qquad (1 \cdot 9)$$

a odatle slijedi

$$y^2 = a\,\varrho = \frac{H\,\varrho}{\gamma} \qquad (1 \cdot 10)$$

$$y = \sqrt{a\,\varrho} = \sqrt{\frac{H\,\varrho}{\gamma}} \qquad (1 \cdot 11)$$

Prema tome, silu zatezanja u kojoj god točki lančanice možemo izraziti pomoću radiusa zakrivljenosti u toj točki. Dakle formule 1.8 možemo napisati i u ovom obliku:

$$T_a = \gamma\sqrt{\frac{H\,\varrho_a}{\gamma}} = \gamma\sqrt{a\,\varrho_a}$$

$$T_b = \gamma\sqrt{a\,\varrho_b}$$

$$T_l = \gamma\sqrt{a\,\varrho_l}$$

$$T_m = \gamma\sqrt{a\,\varrho_m}$$

Dakle u izvodima formule za redukciju, u kojima se operira sa srednjom vrijednošću napetosti lančanice, zapravo se operira sa srednjom vrijednošću korijena kvadratnog iz radiusa zakrivljenosti. Važno je ovdje to konstatirati, jer ćemo se kasnije kod parabole služiti srednjim radiusom zakrivljenosti.

2. Parabola

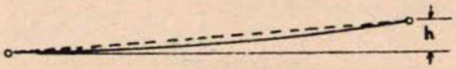
Ako u diferencijalnoj jednadžbi 1.2 stavimo da je

$$ds \doteq dx \tag{2.1}$$

dobivamo
$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\gamma}{H} = \frac{1}{a} \tag{2.2}$$

Razumije se da gornju predpostavku možemo učiniti samo u onom slučaju, gdje je nit jako zategnuta i njezina tetiva ima mali nagib prema horizontali. Možemo se zapitati da li taj slučaj nastaje kod žice Jederinovog pribora prilikom mjerenja bazisa?

Obično se smatra da trasu bazisa treba polagati tako da visinska razlika između stativa, na kojima se vrši očitanje na skalama žice od 24 m dužine, ne bude veća od h = 2 m (Sl. 2.1). Redukcija takve žice kao krivulje na horizont iznosi okruglo 8 cm.



Sl. 2.1.

Kako vidimo razlika je toliko mala da s pravom možemo očekivati da će tu parabola biti vrlo dobra aproksimacija za lančanicu.

Kako smo već prije vidjeli parabola nastaje iz diferencijalne jednadžbe lančanice, ako u njoj stavimo ds = dx (v, 2.1), a u smislu opterećenja zategnute žice treba to razumjeti tako, da tu zamjenu možemo učiniti, ako je težina elementa γds vrlo blizu težini projekcije tog elementa γdx. Ako uzmemo maksimalnu redukciju žice od 24 m (kod h = 2,0 m) od cca 8 cm, onda u težini između lančanice i njezine horizontalne projekcije nastaje razlika

$$0{,}08 \times 0{,}0173 = 0{,}00138 \text{ kg},$$

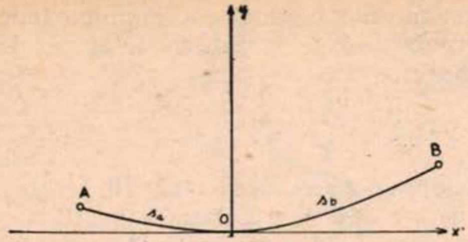
tj. na 24 m žice nastaje razlika nešto manja od 1,5 grama. Skoro toliko može biti i ne biti za vrijeme mjerenja prašine na žici. Dakle razlika toliko minimalna da opet ulijeva nadu da će parabola u svemu nadomjestiti lančanicu.

Integriranjem jednadžbe 2.2 dobivamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} x + C_1$$

$$y = \frac{x^2}{2a} + C_1 x + C_2 \tag{2.3}$$

Ako ishodište koordinatnog sustava odaberemo u tjemenu parabole O (sl. 2.2) iz početnih uvjeta:



Sl. 2 · 2

Za $x = 0 \quad y = 0$ i $y' = 0$

dobivamo:

$$C_1 = 0 \text{ i } C_2 = 0$$

te prema tome je $y = \frac{1}{2a} x^2$ (2.4)

Lako je ustanoviti da se zatezanja u pojedinim presjecima niti ravnaju po istim zakonima, koji su bili ustanovljeni za lančanicu, tj. horizontalna komponenta zatezanja svuda je ista i jednaka je zatezanju u tjemenu, a vertikalna komponenta jednaka je težini žice od tjemena do promatrane točke. Na primjer:

$$\text{u A je } T_{Av} = s_a \cdot \gamma,$$
$$\text{u B je } T_{Bv} = s_b \cdot \gamma$$

Isto tako je lako ustanoviti da je

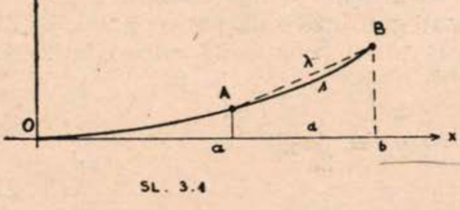
$$\frac{H}{\gamma} = a = \varrho_0,$$

gdje je ϱ_0 radius zakrivljenosti u tjemenu.

3. Redukcija zategnute žice na horizontalu

a) Kod lančanice

Zategnuta žica je u općem slučaju neki dio lančanice ili parabole, za koji dio neznamo točno gdje se on nalazi (sl. 3.1)



SL. 3.1

Žica se obično zateže na krajevima utezima od 10 kg. Kod idealnog stanja zatezanja u A i B ne mogu biti ista, jer vertikalna komponenta u B je

$$B_v > A_v$$

i to tako da je

$$B_v - A_v = \gamma s$$

(Promatramo žicu sa h = 2,0 m, dakle negdje udaljenu od tjemena, kako to prikazuje sl. 3.1)

Dakle tu se već vidi da pri stvarnom mjerenju i pod stvarnim okolnostima i kod lančanice odstupamo od strogog teoretskog stanja.

Polazeći od izraza 1.4 za lančanicu, nakon dugog i nepreglednog izvoda, koji se ovdje ispušta, jer se može naći u literaturi, dolazimo do formule za projekciju žice na horizontalu:

$$d = s - \frac{s^3}{24a^2} - \frac{h^2}{2s} - \frac{h^4}{\gamma s^3} - \frac{1}{k}\frac{h^2 s}{a^2} \qquad (3 \cdot 1)$$

pri čemu je faktor k u nazivniku zadnjeg člana kod različitih autora različit, na pr. pod prof. Abakumova je k = 16, kod Gigasa k = 12.

Redukciju za temperaturu i rastezanje ovdje, ne promatramo, jer one će biti iste i kod lančanice i kod parabole.

a je ovdje zatezanje izraženo u broju metara žice. Invarna žica je težine 0,01732 kg/m pa prema tome je

$$a = \frac{10}{0{,}01732} = 577{,}4 \text{ m}$$

Za s = 24 m dobivamo:

$$\frac{s^3}{24\,a^2} = \frac{24^3}{24 \times 577{,}4} = \frac{576}{333391} = 0{,}0017277 \text{ m} = 1{,}728 \text{ mm}$$

$$\frac{h^2}{2s} = \frac{4}{2 \times 24} = \frac{1}{12} = 0{,}083333 \text{ m} = 83{,}333 \text{ mm}$$

$$\frac{h^4}{8s^3} = \frac{16}{8 \times 24^3} = \frac{2}{13824} = 0{,}000144 \text{ m} = 0{,}144 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{16}\frac{h^2 s}{a^2} = \frac{1}{16}\frac{4 \times 24}{577{,}4^2} = \frac{6}{577{,}4^2} = 0{,}000018 \text{ m} = 0{,}018 \text{ mm}$$

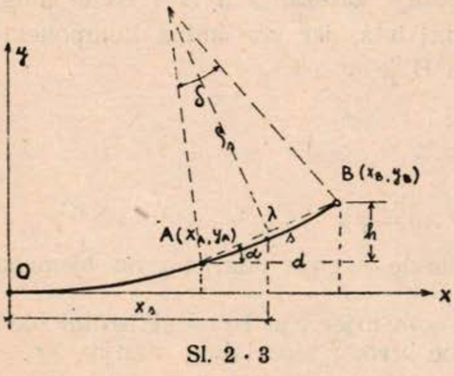
$$\Delta s = -(83{,}333 + 0{,}144 + 1{,}728) + 0{,}018 = -85{,}187 \text{ mm}$$

b) Kod parabole

Ako zategnutu žicu smatramo parabolom, a zato već imamo nekih prije izloženih preduvjeta, onda redukciju dužine žice na horizontalu možemo izvršiti jednostavnim računom, koji ćemo ovdje izložiti.

Predhodno ćemo odrediti položaj zategnute žice na paraboli (sl. 3.2)

Za početak žice A i za njezin kraj B možemo napisati jednadžbu 2.4:



Sl. 2 · 3

$$y_B = \frac{1}{2a}x_B^2$$
$$y_A = \frac{1}{2a}x_A^2 \qquad (3.2)$$

Diferencija tih jednadžbi daje:

$$y_B - y_A = \frac{1}{2a}\left(x_B^2 - x_A^2\right) \qquad (3.3)$$

i dalje imamo

$$y_B - y_A = h = \frac{1}{2a}(x_B + x_A)(x_B - x_A)$$

Stavimo

$$x_B + x_A = 2\,x_s$$
$$x_B - x_A = d$$

i uvrštavajući te zamjene u gornju jednadžbu dobivamo:

$$x_s = \frac{a \cdot h}{x} \tag{3.4}$$

Dakle za određivanje apscise sredine x_s trebalo bi već poznavati traženu dužinu d. Umjesto d možemo uvrstiti ili njezinu samo približnu veličinu s ili nešto bolju aproksimaciju

$$d' = s - \frac{h^2}{2\,s}$$

Treba imati u vidu da ni H ne znamo točno, jer je H sila zatezanja u tjemenu, a žica između A i B zategnuta je obično sa silom 10 kg. Dakle H mora biti horizontalna komponenta tog zatezanja.

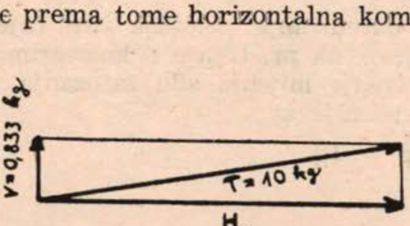
Ako promatramo ekstremni slučaj sa $h = 2{,}0$ m i $s = 24$ m, onda je približna vrijednost

$$x'_s = \frac{a \cdot h}{s} = \frac{10 \times 2{,}0}{0{,}01732 \times 24} = 48{,}11 \text{ m.}$$

Vertikalna komponenta zatezanja u sredini žice je

$$\gamma\, x'_s = 48{,}11 \times 0{,}01732 = 0{,}833 \text{ kg}$$

te prema tome horizontalna komponenta H_0 mora biti (sl. 3.3)



3.3.

$$H_0 = \sqrt{10^2 - 0{,}833^2} = 9{,}965 \text{ kg} \tag{3.5}$$

Za određivanje netočnosti srednje apscise x_s diferenciramo jednadžbu 3.4:

$$\triangle x_s = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\triangle H \cdot h \cdot s - \Delta s \cdot H \cdot h + \Delta h \cdot H \cdot s}{s^2} \tag{3.6}$$

Iz 3 · 6 vidimo da se pogreška u x_s koja nastaje od netočnosti ΔH i Δs

$$\Delta\, x'_s = \frac{h}{\gamma\, s^2}(\Delta H \cdot s - \Delta s \cdot H) \tag{3.6a}$$

zbog određenosti predznaka ΔH i Δs (njihovi predznaci su uvijek minus) formira se kao razlika veličina u zgradama. Za ΔH i Δs na temelju prije izloženog možemo napisati vrijednosti, koje će biti približne, ali dovoljno točne za određivanje Δx_s:

$$\Delta H = -[10 - \sqrt{10^2 - (\gamma x_s)^2}] = -\left[10 - \sqrt{10^2 - \left(\frac{\gamma a h}{s}\right)^2}\right]$$

$$\Delta s \doteq -\frac{h^2}{2s} - \frac{s^3}{24a^2}$$

Da vidimo u kojim će se granicama mijenjati Δx_s s promjerom h od 0 do h = 2,0 m i kod s = 24 m. Iz gornjih formula lako dobivamo:

h m	Δ H kg	Δ s m	Δx_s m
0	0	-0,0017	0
1	-0,0086	-0,0226	0,002
2	-0,0350	-0,0856	0,003

Netočnost u određivanju x_s koja potiče od netočnosti visinske razlike h je

$$\Delta x''_s = \pm \Delta h \frac{H}{\gamma s} \qquad (3.6b)$$

Za $\Delta h = \pm 1$ mm iznosi

$$\pm \frac{0{,}001 x 10}{0{,}01732 x 24} = \pm 0{,}024 \text{ m}$$

Dakle ta pogreška mnogo je veća od pogreške koja nastaje od netočnosti ΔH i Δs.

Treba imati u vidu da na točnost određivanja položaja žice (njezine sredine) imaju utjecaja i druge pojave, na pr. trenje u koloturima, preko kojih su prebačeni utezi. Takvo trenje mijenja silu zatezanja u žici, a iz 3.6a vidimo da je promjena zatezanja za

$$\Delta H = 0{,}001 \text{ kg} = 1\text{g}$$

dat će pogrešku u x_s'

$$\Delta x_s^{(1)} = \pm \frac{h}{\gamma s^2} \Delta H \cdot s = \pm h \frac{0{,}001 x 24}{0{,}01732 x 24^2} = \pm 0{,}0024 h$$

Prema Thomasovim istraživanjima, koje navodi Gigas u svojoj knjizi »Handbuch für die Verwendung von Invardräthen bei Grundlinien messungen« Berlin 1934., promjena zatezanja ΔH, koja nastaje zbog jednog zrna prašine promjera 0,001 u ležaju kolotura iznosi 15 g a u terenskim prilikama ta promjena može ići i do 40—65 g.

Poslije navedenog postaje iluzorno tražiti veću točnost u određivanju koordinate x_s u zavisnosti od faktora navedenih u 3.6a, kad drugi faktori koji se i ne mogu uzeti u obzir, u mnogo većoj mjeri poremećuju tu točnost.

Za izvod formule za redukciju žice na horizontalu upotrebit ćemo radius zakrivljenosti u sredini žice smatrajući je dijelom kružnice. Treba napomenuti da je ova predpostavka skoro identična s analognom predpostavkom kod izvoda formule za redukciju kod lančanice. Tamo se uzima srednja napetost žice, a napetost u žici, kako smo vidjeli, proporcionalna je kvadratnom korjenu iz radiusa.

Znamo da je zakrivljenost

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}}$$

Iz 2.4 nalazimo:

$$y' = \frac{1}{a} x \text{ i } y'' = \frac{1}{a}$$

a za sredinu žice je

$$y'_s = \frac{1}{a} x_s$$

Uvrštavajući za x_s vrijednost iz 3.4 nalazimo:

$$y'_s = \frac{h}{s}; \ (y'_s)^2 = \left(\frac{h}{s}\right)^2$$

Uvrštavamo te vrijednosti u izraz za zakrivljenost

$$\frac{1}{\varrho_s} = \frac{1}{a\left(1 + \frac{h^2}{s^2}\right)^{3/2}} \tag{3.7}$$

$$\varrho_s = a\left(1 + \frac{h^2}{s^2}\right)^{3/2}$$

Razvojem u red dobivamo:

$$\varrho_s = a\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h^2}{s^2} + \frac{3}{8}\frac{h^4}{s^4} + \cdots\right) \tag{3.8}$$

Iz slike 3.2 vidimo da je

$$\frac{\lambda}{2} = \varrho_s \sin\frac{\delta}{2}$$

gdje je

$$\delta = \frac{s}{\varrho_s}$$

Razvojem u red dobivamo:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} - \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^3}{6} \cdots = \frac{s}{2\varrho_s} - \frac{s^3}{48\varrho_s^3} \tag{3.9}$$

Dakle je

$$\lambda = 2\varrho_s \sin\frac{\delta}{2} = 2\varrho_s\left(\frac{s}{2\varrho_s} - \frac{s^3}{48\varrho_s^3}\right) = s - \frac{s^3}{24\varrho_s^2}$$

tj.

$$\lambda = s - \frac{s^3}{24\varrho_s^2} \tag{3.10}$$

Za ϱ_s uzimamo iz 3.8

$$\varrho_s = a\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h^2}{s^2}\right)$$

odnosno

$$\varrho_s^2 = a^2\left(1 + 2\frac{3}{2}\frac{h^2}{s^2} + \cdots\right)$$

Uvrštavamo to u drugi član izraza 3.10 i dobivamo konačni oblik izraza (3.10):

$$\lambda = s - \frac{s^3}{24a} + \frac{1}{8}\frac{h^2 s}{a^2} \tag{3.10a}$$

Sada ostaje još da tetivu λ reduciramo na horizontalu, odnosno da odredimo njezinu projekciju na horizontalu.

Iz sl. 3.2 vidimo da je:

$$d^2 = \lambda^2 - h^2$$

$$d = \lambda\sqrt{1 - \frac{h^2}{\lambda^2}} \tag{3.11}$$

a razvojem u red, zanemarujući članove viših potencija imamo:

$$d = \lambda - \frac{h^2}{2\lambda} - \frac{1}{8}\frac{h^4}{\lambda^3} \tag{3.12}$$

Uvrštavamo u (3.12) umjesto λ izraz (3.10a) i uzimajući aproksimacije po formuli:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{s(1+\delta)} = \frac{1}{s}(1-\delta); \quad \frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{s^3(1+\delta)^3} = \frac{1}{s^3}(1-3\delta)$$

nalazimo nakon množenja da je

$$d = s - \frac{s^3}{24a^2} - \frac{h^2}{2s} - \frac{1}{8}\frac{h^4}{s^3} + \frac{5}{48}\frac{h^2 s}{a^2} + \left[\frac{3h^4}{64sa^2} + \frac{3}{64}\frac{h^6}{s^3a^2}\right]$$

Dva zadnja člana (u zagradama) otpadaju, jer već prvi od njih za h = 2, o m daje 0,00008 mm t. j. 0,08 μ

Dakle konačno imamo:

$$d = s - \frac{s^3}{24a^2} - \frac{h^2}{2s} - \frac{h^4}{8s^3} + \frac{5}{48}\frac{h^2 s}{a^2} \tag{3.13}$$

Usporedimo li taj izraz sa 3.1 vidimo da je razlika samo u poslednjem članu i to umjesto $\frac{4}{48}$ kod Gigasa) ovdje se dobije $\frac{5}{48}$

Da vidimo koliko iznosi taj član?

$$\frac{5}{48}\frac{s}{a^2}h^2 = \frac{5}{48}\frac{24}{(577 \cdot 4)^2}h^2 = 0{,}0000075\,h^2$$

$$\frac{4}{48}\frac{s}{a^2} = 0{,}000006\,h^2$$

Za h = 2,0 m imamo 0,000030 m. odnosno 0,000024 m tj. za ekstremni slučaj dobije se razlika u iznosu 6μ dok kod h = 1,0 m i manje praktički razlika ne postoji.

Iz izloženog se vidi da su u području stvarnih mjerenja parabola $\frac{1}{2a}x^2$ i lančanica a $\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}$ toliko bliske, da se mogu zamijeniti. Ovdje ćemo izvod konačne formule za redukciju žice na horizontalu izvesti još jednim mješovitim putem. Kod parabole se vrlo lako i dosta točno određuje x tj. apscisa sredine položaja žice, a kod lančanice je vrlo jednostavna formula za radius zakrivljenosti. Dakle uzet ćemo iz 1.9:

$$\varrho = \frac{y^2}{a} = a\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{a}\right)^2$$

i iz 3.4 odnosno s malim obrazloženim odstupanjem od tog izraza uzimamo

$$x_s = \frac{ah}{s}$$

Iz 1.9 razvojem u red dobivamo:

$$\varrho = a\left(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^4}{24a^4} + \cdots\right)^2$$

$$\varrho = a\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{3a^4} + \cdots\right)$$

Za x_s imamo:

$$\varrho_s = a\left(1 + \frac{h^2}{s^2} + \frac{h^4}{3s^4} + \cdots\right)$$

$$\varrho_s^2 = a^2\left(1 + 2\frac{h^2}{s^2} + \frac{5}{3}\frac{h^4}{s^4} + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{\varrho_s} = \frac{1}{a^2}\left(1 - 2\frac{h^2}{s^2} - \frac{5}{3}\frac{h^4}{s^4} \cdots\right)$$

Uvrštavamo taj izraz samo na dva prva člana u jednadžbi 3.10, i ona će poprimiti ovaj oblik:

$$\lambda = s - \frac{s^3}{24a^2} + \frac{1}{12}\frac{sh^2}{a^2} \tag{3.10b}$$

Uvrstimo tu vrijednost u 3.12, i ako zanemarimo veličine viših potencija dobijamo konačni izraz:

$$d = s - \frac{s^3}{24a^2} - \frac{h^2}{2s} - \frac{h^4}{8s^3} + \frac{h^2s}{16a^2} \tag{3.13a}$$

Kako vidimo u izvodu po prvom načinu (3.13) tj. kod čiste parabole dobili smo faktor u zadnjem članu $\frac{5}{48}$, što je vrlo blizu vrijednosti tog faktora u Gigasovom izvodu, gdje je taj faktor jednak $\frac{1}{12}$ odnosno $\frac{4}{8}$ dok po drugom načinu dobivamo taj faktor sasvim isti kao kod izvoda prof. Abakumova.

Treba još primjetiti da taj član uopće otpada ako je visinska razlika manja od 0,5 m, a za h = 1 taj član u kojem god obliku praktički daje istu vrijednost. Samo za h = 2 m nastaje razlika između pojedinih njegovih oblika u iznosu 6 μ na jednu žicu, tj. na bazis od 4 km, mjeren neprekidno sa visinskom razlikom (između krajeva žice) h = 2 m nastala bi razlika od 1 mm.

Na kraju možemo zaključiti sa konstatacijom da formulu 3.1 možemo dakle izvesti na podlozi parabole ili služeći se elementima parabole i lančanice i da je takav izvod jednostavniji i pregledniji od izvoda na podlozi lančanice. Važno je pri tome to, što sve operacije i veličine u toku izvoda ne gube geometrijski i fizikalni smisao, a to je vrlo važno za razumjevanje i usvajanje čitavog postupka sa strane onih, koji ga uče.

Razumije se da zbog cjeline izvoda, osobito kad se on daje kao samostalni izvod, a ne kao komparacija s postojećim izvodom na podlozi lančanice, trebalo bi dokazati da daljnji članovi u redovima 3.8, 3.9 i 3.12 nisu potrebni, odnosno da je njihov utjecaj ispod granice točnosti koja se traži. Taj je dokaz sasvim jednostavan pa se zbog toga ovdje ne navodi. Svrha je izlaganja bila pokazati da je taj izvod moguć i jednako vrijedan sa drugim, koji su kompliciraniji od njega.

Ing. Vasilije Andrejev — Zagreb

DIE ABLEITUNG DER REDUKTIONSFORMEL DES MESSDRAHTES MITTELS DER PARABEL ANSTATT DER KETTENLINIE

In dem Artikel ist die Ableitung der Formel für die Reduktion auf die Horizontale des Messdrahtes bei Bazismessungen mittels der Parabel anstatt der Kettenkurve gegeben. Damit ist gezeigt, dass man auch auf diesem einfacheren Wege die entgültige Formel bekommt, die sich praktisch von den durch strenge Ableitungen erhaltenen Formeln nicht unterscheidet, sogar den strengen Formeln einigen Autoren gleichkommt.