Prijevodi iz strane stručne literature

Ocjena točnosti jednog nivelmana

prihvaćeno od nivelmanske sekcije međunarodne Asocijacije za Geodeziju 25. VIII. 1948,
a predloženo od komisije sastavljene od:
G. G. Braaten-a, Dore-a, Kukkamäki-a, Rune-a i Vignal-a
(Naslov originala: »Note sur l'évaluation de la précision d'un nivellement« Bulletin Géodèsique No 18 1950)

Uvod

Ocjena točnosti jednog nivelmana je težak problem. Složenost tog problema sadržana je u činjenici, da se pogreške nivelmana ne pokoravaju Gaussovom zakonu o razdiobi slučajnih pogrešaka. Njegovo rješenje je ipak vrlo važno za geodete, jer doista jedino ono daje točno numeričko sredstvo za uporeďivanje instrumenata i radnih postupaka, i prema tome njihovo poboljšanje.

Međunarodna Asocijacija za Geodeziju nije prestala voditi računa o ovom problemu. Da to riješi prihvatila je 1948. na Glavnom zasjedanju u Oslu, skupinu formula sadržanih u novom tekstu svojih Međunarodnih zaključaka, koji se odnose na precizni nivelman.

Međutim, obzirom na brzi razvoj ideja tokom zadnjih desetljeća, dokaz ovih formula je djelomičan i razbacan po raznim publikacijama, koje je teško sakupiti; upotrebljena je općenita terminologija i stare oznake, koje je teško tumačiti.

Nivelmanska sekcija Međunarodne Asocijacije za geodeziju vjeruje dakle da čini korisno djelo, ako spomenutim formulama daje jedan kratki i jasni dokaz. Ona koristi ovu priliku da ga dopuni za slučaj boljeg korištenja mnogobrojnih starijih ocjena točnosti nivelmana.

A) VRSTE POGREŠAKA NIVELMANA

Pregled posljedica slučajnih pogrešaka

VJEROJATNA VRIJEDNOST I SREDNJA KVADRATIČNA VRIJEDNOST. — Razmotrimo veliki broj malenih elemenata x, koji osciliraju oko nule, slijedeći Gaussov zakon o raspodjeli slučajnih pogrešaka. Takve bi bile pogreške mjerenja, nesuglasice između dvaju mjerenja jedne iste veličine, odstupanja u zatvorenoj figuri...

Prema definiciji vjerojatna vrijednost e ovih elemenata x je ona, koja bi imala istu vjerojatnost, ili isti odnos, elemenata manjih ili većih od e po apsolutnoj vrijednosti.

---

* Dozvolom redakcije Bulletin géodésique sa francuskog teksta preveo prof. Ing. M. Janković.

Njena srednja kvadratična vrijednost e_q je e_q^2 = sred x^2.

Može se dokazati da je $\frac{e}{e_q} = 0{,}6745\ldots$, tj. veoma blisko $^2/_3$.

Prema tome ćemo definirati vjerojatnu vrijednost da je jednaka $^2/_3$ srednje kvadratične vrijednosti.

VJEROJATNA POGREŠKA FUNKCIJE VIŠE NEZAVISNIH VELIČINA.

Neka je X funkcija više nezavisnih veličina $X_1, X_2, \ldots$

$$X = f(X_1, X_2 \ldots)$$

Predpostavimo da su veličine $X_1, X_2, \ldots$ podvrgnute pogreškama x_1 x_2 ... Svaka od njih slijedi zakon o raspodjeli slučajnih pogrešaka, i nezavisne su jedna od druge. Može se dokazati da rezultirajuća pogreška x, koja pripada funkciji X također slijedi zakon o raspodjeli slučajnih pogrešaka.

Nadalje, konačna vjerojatna pogreška e veličine X data je kao funkcija komponenata vjerojatnih pogrešaka e_1 $e_2 \ldots$ veličina X_1 $X_2 \ldots$ prema jednadžbi:

$$e^2 = \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial X_K}\right)^2 e_K^2$$

gdje je:

$$K = 1{,}2 \ldots$$

Prva primjena. Suma više veličina

Ako je:

$$X = \Sigma X_K$$

onda je:

$$e^2 = \Sigma e_K^2$$

gdje je:

$$K = 1{,}2 \ldots$$

Ako su veličine od kojih je funkcija sastavljena mjerene istom točnošću t. j. istom vjerojatnom pogreškom e_1, i ako je njihov broj n, onda je:

$$e = e_1 \sqrt{n}$$

Primjena na nivelmanu. — Visinska razlika X dobivena u jednom vlaku je suma visinskih razlika $X_1, X_2 \ldots$ dobivenih na svakom kilometru vlaka.

Predpostavimo da na nivelman djeluju samo slučajne pogreške. Neka je e_1 = u vjerojatna pogreška na 1 kilometar. Vjerojatna pogreška **e** u vlaku dužine L = n kilometara, će biti:

$$e = u\sqrt{L}$$

Druga primjena. Srednja vrijednost dvaju mjerenja iste veličine.

Ako je:

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

onda je:

$$e_2 = \frac{e_1^2 + e_2^2}{4}$$

Treća primjena. Odstupanja između dvaju mjerenja iste veličine.

Ako je: $X = X_1 - X_2$

onda je: $e^2 = e^2{}_1 + e^2{}_2$

Prema tome vjerojatna pogreška sredine $\frac{X_1 + X_2}{2}$ je polovina vjerojatne pogreške rzalike $X_1 - X_2$, ili vjerojatna nesuglasica.

Primjena na nivelmanu. — Predpostavimo da je nivelman, kako to često biva, sredina dvaju niveliranja tamo i natrag. Predpostavimo osim toga da su ova dva nivelmana potpuno nezavisna.

Dakle, prema ranijem, vjerojatna pogreškakonačne vrijednosti je polovina vjerojatne nesuglasice između niveliranja tamo i natrag.

Elementi ocjene točnosti nivelmana

Oznake. Mi ćemo nazvati:

R, udaljenost između dvaju susjednih repera;

L, dužina jednog od odsječaka, na koji se može rastaviti mreža.

Ovi se odsječci mogu praviti na razne načine, grupirajući ili dijeleći (članke, karike) koji spajaju dva čvora mreže. Jedan isti odsječak može sadržavati nekoliko odjeljenih elemenata na zemljištu, spojenih kod računanja.

F, opseg jednog zatvorenog poligona;

Zatvoreni poligoni mogu se praviti na razne načine, sastavljajući više pojedinačnih elementarnih zatvorenih poligona mreže.

R_m, L_m, F_m, srednje vrijednosti elemenata R, L, F,

n_R, n_L, n_F brojevi elemenata R, L, F;

ϱ, λ, nesuglasice između rezultata dvaju niveliranja tamo i natrag na udaljenostima R, L, ako je nivelman koji se razmatra sredina dvaju takovih nivelmana;

μ, razlika, za neprekinuti odsječak dužine L, između krajnjih ordinata srednjeg pravca povučenog kroz diagram ukupnih nesuglasica, a koji se od njega odklanja što je moguće manje, prema definiciji koju dajemo dalje,

φ, odstupanje u zatvorenom poligonu opsega F, poslije primjene korekture, koja su odnosi na neparalelnost zemaljskih nivoskih površina;

γ, korekcija na odsječku L izvedena iz racionalnog izjednačenja mreže;

Ovdje odsječak L treba da bude formiran jedino od elemenata koji pripadaju jednom istom dijelu (članku, karici) i uzet u istom smjeru uzduž tog dijela.

$\Sigma_R, \Sigma_L, \Sigma_F \ldots \Sigma\varrho^2, \Sigma\frac{\varrho^2}{R}, \ldots$ sume elemenata R, L, F... $\varrho^2, \frac{\varrho^2}{R}$

sred $\frac{\varrho^2}{R}$ sred $\frac{\lambda^2}{L}$ ... sredine elemenata $\frac{\varrho^2}{R}, \frac{\lambda^2}{L}$

$\text{sred}_{(1)}\frac{\varrho^2}{L}$, $\text{sred}_{(L)}\frac{\lambda^2}{L}$, ... spomenute sredine, računate obzirom na elemente $\frac{\varrho^2}{R}, \frac{\lambda^2}{L}$

s jednakim težinama, odnosno težinama 1, L . . . i t. d.

Jedinice veličina. — R, L, F izraženi su u kilometrima, dok ϱ, λ, μ, ϱ, γ u milimetrima.

Razne vjerojatne pogreške μ, η, ζ, τ, $_0$, koje će biti razmatrane kasnije bit će izražene u milimetrima po kilometru.

Računanje vjerojatne pogreške po kilometru smatrane kao isključivo slučajne

Kad u nivelmanu ne bi postojale nego samo čisto slučajne pogreške, koje slijede Gaussov zakon o raspodjeli slučajnih pogrešaka, njegova točnost bi se izrazila, kako smo pokazali, jednostavnim jedinstvenim koeficijentom, vjerojatnom slučajnom pogreškom po kilometru **u**, tako da bi vjerojatna pogreška na dužini L kilometra bila u $\sqrt{L}$.

Ovaj koeficijenat u mogao bi se izvesti, kako slijedi, od elemenata za ocjenu točnosti ϱ, λ, φ, γ.

RAČUNANJE NA OSNOVU NESUGLASICA ϱ IZMEĐU SUSJEDNIH REPERA, na udaljenosti R.

Vjerojatna vrijednost pogreške razlike visina između repera u rezultirajućem nivelmanu je u $\sqrt{R}$.

Vjerojatna vrijednost nesuglasice ϱ iz dva niveliranja tamo i natrag između dva repera, pod predpostavkom da su podpuno nezavisna, je dakle 2 u $\sqrt{R}$.

Srednja kvadratna vrijednost od ϱ je prema tome:

$$\frac{3}{2} \times 2\,u\sqrt{R} = 3\,u\sqrt{R}$$

Tako je **u** srednja kvadratična vrijednost količine $\frac{1}{3}\frac{\varrho}{\sqrt{R}}$ za skupinu intervala iste dužine R. Kako prema našoj predpostavci o čisto slučajnim pogreškama, **u** ne zavisi od R, ono je ipak isto za bilo koje dužine intervala R.

Dobit ćemo dakle za slijedeći izraz u_R:

$$\boxed{u_R^2 = \frac{1}{9}\,\text{sred}\,\frac{\varrho^2}{R}}$$

RAČUNANJE NA OSNOVU NESUGLASICA λ IZMEĐU KRAJNIH TOČAKA ODSJEČAKA, dužine L.

Isti zaključak kao ranije za **u** daje za dva potpuno nezavisna niveliranja tamo i natrag slijedeći izraz u_L:

$$\boxed{u_L^2 = \frac{1}{9}\,\text{sred}\,\frac{\lambda^2}{L}}$$

RAČUNANJE NA OSNOVU ODSTUPANJA U ZATVORENOM POLIGONU φ, opsega F.

Vjerojatna vrijednost φ odstupanja u zatvorenom poligonu opsega F je u $\sqrt{F}$.

Srednja kvadratična vrijednost od φ je dakle $\frac{3}{2}\, u\sqrt{F}$

Tako je **u** srednja kvadratična vrijednost količine $\frac{2}{3}\frac{\varphi}{\sqrt{F}}$ za skupinu poligona istog opsega F, a dosljedno dalje našoj predpostavci o čisto slučajnim pogreškama i za bilo koje opsege F, gdje je **u** neovisno od F.

Na taj način će se za **u** izvesti slijedeći izraz u_F:

$$\boxed{u_F^2 = \frac{4}{9}\,\text{sred}\,\frac{\varphi^2}{F}}$$

RAČUNANJE NA OSNOVU POPRAVAKA IZJEDNAČENJA γ NA ODSJEČCIMA dužine L.

Po našoj predpostavci o čisto slučajnim pogreškama, prema poznatoj osebini izjednačenja mreže, popravci izjednačenja γ dobiveni za svaki odsječak L od odstupanja u zatvorenom poligonu φ, povezani su niže navedenom formulom sa vjerojatnom slučajnom pogreškom po kilometru u, što daje na taj način jedan novi izraz $u_{F\gamma}$:

$$\boxed{u_{F\gamma}^2 = \frac{4}{9\,n_F}\,\frac{\gamma^2}{L}}$$

U ovoj formuli treba uvesti s v e odsječke L koji dolaze u obzir za izjednačenje, a n je ukupni broj pojedinačnih poligona tj. nezavisnih uslovnih jednadžbi.

Ali ovdje, čak i prema našoj predpostavci o čisto slučajnim pogreškama i suprotno elementima $\frac{\varrho^2}{R}, \frac{\lambda^2}{L}, \frac{\varphi^2}{F}$ koji su grupirani oko sredina nezavisnih od dužina R, L, F, elementi $\frac{\gamma^2}{L}$ se ne grupiraju oko jedne sredine nezavisne od dužine L. Sredina oko koje se grupiraju elementi $\frac{\gamma^2}{L}$ za istu dužinu L, raste proporcionalno sa L i zavisi od opsega F pojedinačnih poligona.

Na taj način za razliku od predhodnih triju formula, sa nesuglasicama ϱ i λ i sa nesuglasicama u zatvaranju poligona φ, formula koja koristi korekcije izjednačenja γ ne može se ni u kojem slučaju svesti na jednu srednju.

TEŽINE USVOJENE KOD RAČUNANJA SREDNJIH VRIJEDNOSTI.

Zadržimo još uvijek za sada našu pretpostavku o čisto slučajnim pogreškama.

Tri osnovne formule, između četiri naprijed navedene, u kojima se pojavljuju srednje vrijednosti, mogu se sračunati primjenjujući elemente, različitih težina $\frac{\varrho^2}{R}, \frac{\lambda^2}{L}, \frac{\varphi^2}{F}$, od kojih se uzima srednja, a njihove ćemo odgovarajuće prednosti sada ispitati, naime:

Težine mogu biti međusobno jednake, na pr. sve jednake jedinici;

Težine mogu biti jednake dužinama R, L, F, prema slučaju.

Svaka od osnovnih formula razdvaja se u dvije kako slijedi:

Osnovne formule	Težina 1	Težine R, L, F
$u_R^2 = \frac{1}{9}$ sred $\frac{\varrho^2}{R}$	$u'^2_R = \frac{1}{9n_R} \Sigma \frac{\varrho^2}{R}$	$u''^2_R = \frac{1}{9} \frac{\Sigma \varrho^2}{\Sigma R}$
$u_L^2 = \frac{1}{9}$ sred $\frac{\lambda^2}{R}$	$u'^2_L = \frac{1}{9n_L} \Sigma \frac{\lambda^2}{L}$	$u''^2_L = \frac{1}{9} \frac{\Sigma \lambda^2}{\Sigma L}$
$u_F^2 = \frac{4}{9}$ sred $\frac{\varphi^2}{F}$	$u'^2_F = \frac{4}{9n_F} \Sigma \frac{\varphi^2}{F}$	$u''^2_F = \frac{4}{9} \frac{\Sigma \varphi^2}{\Sigma F}$

$$u^2_{F\gamma} = \frac{4}{9n_F} \Sigma \frac{\gamma^2}{L}$$ ne dijeli se u dvoje.

Upotrebom formula u' postiže se teoretski samo malo bolje približenje, ali ako su elementi ocjenjivanja dosta brojni, praktički je dovoljno upotrijebiti formule u", koje su nešto jednostavnije za računanje.

Napomena uz formule u''_R. — Ako se uvedu svi intervali između repera mreže, onda je $\Sigma R = \Sigma L$, čitava dužina mreže, količina koja se nalazi također u jednadžbi u''_L, ako se uvedu svi odsječci mreže.

Napomena uz jednadžbu u''_F — Ako se računaju izrazi u'_F i u''_F uvodeći sve pojedinačne poligone mreže, uvodi se vrlo često također, logično, vanjski poligon, čije je odstupanje u zatvorenom poligonu φ_e a opseg F_e, u svrhu da bi se uveli dva puta periferni dijelovi kao unutrašnji.

Tada imamo:

$$u''^2_F = \frac{4}{9} \frac{\Sigma\varphi^2 + \varphi_e^2}{\Sigma F + F_e} = \frac{2}{9} \frac{\Sigma\varphi^2 + \varphi_e^2}{\Sigma L}$$

jer je $\Sigma F + F_e = 2 \Sigma L$ budući da je ΣL opet ukupna dužina mreže, izuzevši ovoga puta izolirane linije.

Često je φ_e^2 sadržano u φ^2, tako da se može pisati:

$$u''^2_F = \frac{2}{9} \frac{\Sigma\varphi^2}{\Sigma L}$$

Međutim ova se jednostavna formula u''_F ne preporuča, jer ona daje u vanjskom poligonu relativno suviše visoku težinu. Bolje je pisati:

$$u''^2_F = \frac{4}{9(n_F + 1)} \left(n_F \frac{\Sigma\varphi^2}{\Sigma F} + \frac{\varphi_e^2}{F_e} \right)$$

Eksperimentalni rezultati ozbirom na vjerojatnu pogrešku po kilometru, računatu pomoću predhodnih formula

JEDNAKOST RAZNIH IZRAZA ZA u" RAČUNATIH ZA ISTE DUŽINE.

Oblici u' i u". — Čak ako pogreške nivelmana i nisu čisto slučajnog karaktera, dva oblika u' i u" od svakog izraza u_R, u_L, u_F računatih za grupu elemenata R, L, F, međusobno jednakih dužina (ili dovoljno bliskih) očito daju dvije iste vrijednosti, budući da se međusobno zamjenjuju. Na taj ćemo ih način u buduće računati.

Izrazi u_R, u_L, u_F, $u_{F\gamma}$. — Između ostalog, čak ako pogreške nivelmana nisu podpuno slučajne, lako je vidjeti da za podpuno nezavisne nivelmane tamo i natrag, i kad su prihvaćene dužine za svaku grupu elemenata R, L, F, iste, dobiveni izrazi u_R, u_L, u_E, $u_{F\gamma}$, daju istu vrijednost, što je iskustvo potvrdilo.

Doista, razmotrimo najprije tri glavna izraza u_R, u_L, u_F. Za zajedničku dužinu svih korištenih elemenata R, L, F, sve ukupne pogreške svakog nivelmana tamo i natrag pokoravaju se nužno Gaussovom zakonu raspodjele za slučajne pogreške, čak i ako ove ukupne pogreške ne proizlaze iz potpuno slučajnih pogrešaka. Budući da se nivelmani tamo i natrag smatraju potpuno nezavisni imamo:
vjerojatna nesuglasica (ϱ ili λ) $= 2 \times$ vjerojatna rezultirajuća pogreška (φ) ili:

$$\text{sred } \varrho^2 = \text{sred } \lambda^2 = 4 \text{ sred } \varphi^2$$

ili na koncu, budući da su svi elementi R, L, F, jednaki:

$$u^2_R = u^2_L = u^2_F$$

Što se tiče izraza $u_{F\gamma}$, on zavisi ne od dužina L dijelova iz kojih se računa, nego samo od dužina F opsega pojedinih poligona upotrebljenih u izjednačenju, a koji odgovaraju nezavisnim uslovnim jednadžbama. Ako ove dužine F uzmemo da su međusobno jednake (ili dovoljno bliske) izraz $u_{F\gamma}$ imat će očito istu vrijednost kao izraz u_F, koji je izveden iz istih pojedinačnih elementarnih poligona (zato što se može bez mjenjanja $u_{F\gamma}$, L povećati do F).

Ako su svi elementi R, L, F jednaki, onda je:

$$u_R = u_L = u_F = u_{F\gamma}$$

što je trebalo dokazati.

Prema tome ćemo od sada radi pojednostavljenja označivati često jedinim slovom L zajedničku dužinu od svake grupe elemenata R, L, F, međusobno jednakih, koje su korištene za računanje izraza u_R, u_L u_F $u_{F\gamma}$; a jedinom oznakom u_L zajedničku dobivenu vrijednost, koja zavisi samo od L.

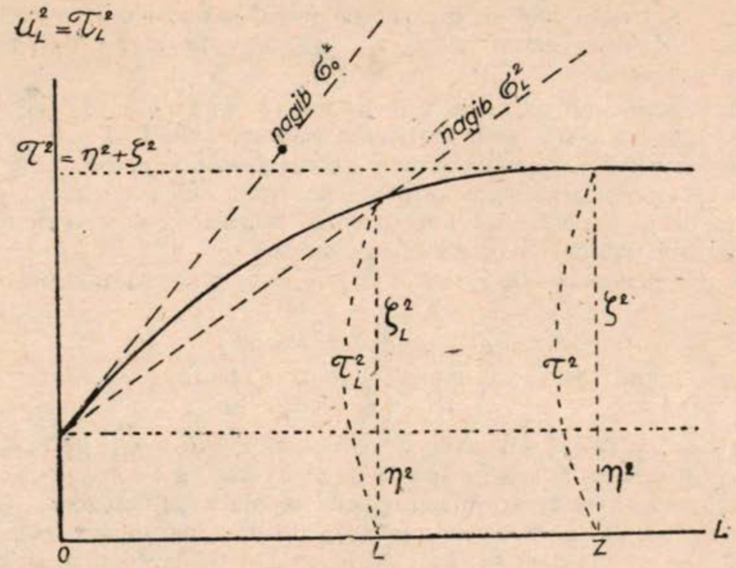
PROMJENE u_L SA DUŽINOM L.

Vrijednost u_L kako pokazuje iskustvo zavisi bitno od dužine L upotrebljenih elemenata (R, L, F). To pokazuje da pogreške niveliranja nisu čisto slučajnog karaktera.

Ako predstavimo promjene količine $u_L{}^2$ kao funkciju dužine L (izvedene za svaku vrijednost L iz dovoljno velikog broja mjerenja) dobit ćemo jednu krivulju koja ima izgled kako je niže pokazano.

Veličina $u_L{}^2$ raste sa L, od vrijednosti η^2 za L = O, do neke granice $\tau^2 = \eta^2 + \zeta^2$, koju dostiže kada dužina L pređe jednu prilično neodređenu granicu Z, reda veličina nekoliko desetaka kilometara. Krivulja je prema dolje konkavna i njen nagib ima u početku konačnu vrijednost $\sigma_o{}^2$. Jasno je, na krivulji, da ovaj nagib u početku $\sigma_o{}^2$ je veći od razmjera $\frac{\zeta^2}{L}$. Prema izgledu krivulje on je u pravilu dva ili tri puta veći od ovog razmjera tako da se kadkad postavlja:

$$\sigma_o^2 = K \frac{\zeta^2}{L}, \text{ sa } K = 2 \text{ ili } 3$$



Dvostruka kategorija pogrešaka u nivelmanu

SLUČAJNE I SISTEMATSKE POGREŠKE.

Da se objasni izgled pređašnje krivulje skoro je prihvaćeno, a Lallemand je definitivno precizirao ovu hipotezu, da u nivelmanu postoje dvije potpuno odvojene kategorije pogrešaka, koje nazivamo slučajne i sistematske, za koje se predpostavlja da su međusobno nezavisne:

Slučajne pogreške. — Njihova karakteristika je konstantni koeficijenat (stalnost tog koeficijenta prikazuje njihov čisto slučajni karakter):

η, to je vjerojatna slučajna pogreška po kilometru, tako da vjerojatna slučajna pogreška na udaljenosti L je $\eta \sqrt{L}$.

Sistematske pogreške. — Karakterizirane su promjenljivim koeficijentom (čija promjenljivost pokazuje da njihovo svojstvo nije čisto slučajno):

ζ, to je vjerojatna slučajna vrijednost sistematske pogreške po kilometru za dužinu L, koja raste sa L, počam od nule za L = O, tako da vjerojatna sistematska pogreška za dužinu L je $\zeta_L \sqrt{L}$

Ovaj koeficijent ima granicu, za $L \geq Z$:

ζ, to je vjerojatna slučajna vrijednost određena po kilometru sistematske pogreške, tako da vjerojatna sistematska pogreška na dužini $L \geq Z$ je $\zeta \sqrt{L}$

Stalnost ζ pokazuje da se za L $\geq$ Z sistematske pogreške ponašaju kao čisto slučajne.

T o t a l n a p o g r e š k a. — Ove pogreške, na udaljenosti L, prave zajedno jednu t o t a l n u p o g r e š k u, koja ima za vjerojatnu vrijednost $u_L \sqrt{L}$ koju ćemo označiti također u daljnjem izlaganju sa $\tau_L \sqrt{L}$. Ova totalna pogreška karakterizirana je jednim p r o m j e n l j i v i m koeficijentom:

τ_L(ili u_L) t o j e v j e r o j a t n a s l u č a j n a v r i j e d n o s t p o k i l o m e t r u t o t a l n e p o g r e š k e z a d u ž i n u L,

a koja raste sa L počam od η za L = O, tako da totalna vjerojatna pogreška za udaljenost L je $\tau_L\sqrt{L}$.

Ovaj koeficijenat ima granicu, za L $\geq$ Z:

τ, t o j e v j e r o j a t n a s l u č a j n a v r i j e d n o s t t o t a l n e p o g r e š k e o d r e đ e n e p o k i l o m e t r u, i l i v j e r o j a t n a t o t a l n a p o g r e š k a p o k i l o m e t r u, tako da vjerojatna totalna pogreška na udaljenost L $\geq$ Z je $\tau\sqrt{L}$

Stalnost τ pokazuje da se za L $\geq$ Z, totalna pogreška ponaša kao čisto slučajna.

Dobro se potvrđuje, da dok se slučajne i sistematske pogreške zbrajaju na stanoviti način nezavisno jedna od druge imamo na dužini L:

$$[\tau_L\sqrt{L} \text{ ili } u_L \sqrt{L}]^2 = (n \sqrt{L})^2 + (\zeta_L \sqrt{L})^2$$

ili:

$$\tau_L^2 = u_L^2 = \eta^2 + \zeta^2$$

i za L $\geq$ Z:

$$\tau^2 = \eta^2 + \zeta^2$$

KARAKTERISTIČNI KOEFICIJENTI ZA PRECIZNOST NIVELMANA.

Prema tome preciznost jednog nivelmana može biti karakterizirana numerički slijedećim koeficijentima:

G l a v n i k o e f i c i j e n t i.

τ, t o j e v j e r o j a t n a s l u č a j n a v r i j e d n o s t t o t a l n e p o g r e š k e o d r e đ e n e p o k i l o m e t r u,
ili t o t a l n a v j e r o j a t n a p o g r e š k a o d r e đ e n a p o k i l o m e t r u.
Za velike udaljenosti L (veće od Z) ovaj je koeficijenat sam dovoljan da označi preciznost nivelmana: totalna vjerojatna pogreška je $\tau \sqrt{L}$

η, t o j e v j e r o j a t n a s l u č a j n a p o g r e š k a p o k i l o m e t r u.

ζ, t o j e v j e r o j a t n a s l u č a j n a v r i j e d n o s t s i s t e m a t s k e p o g r e š k e o d r e đ e n e p o k i l o m e t r u.

P o m o ć n i k o e f i c i j e n t i. — Slijedeća dva elementa pružaju jednako neku korist:

Z, određena udaljenost, od koje dalje se sistematske pogreške ponašaju kao čisto slučajne, (praktički nekoliko desetina kilometara).

σ_0, kvadratni korijen nagiba u početku predhodne krivulje, koja predstavlja $\tau_L{}^2$ (ili $u_L{}^2$) kao funkciju od L; mi ćemo naskoro nazvati ovu veličinu σ_0 v j e r o j a t n a s i s t e m a t s k a p o g r e š k a p o k i l o m e t r u z a k r a t k e u d a l j e n o s t i. Prema hodu krivulje, o kojoj se govori, postavlja se kadkad, kako smo to označili:

$$\sigma_0{}^2 = K \frac{\zeta^2}{L}, \text{ sa } K = 2 \text{ ili } 3$$

TOČNOST MODERNIH NIVELMANA.

Kod modernih veoma brižljivih radova koeficijenat η, koji karakterizira slučajne pogreške, može se sniziti do $^1/_3$ ili $^1/_4$ mm po kilometru.

Ali koeficijenat ζ, koji karakterizira sistematske pogreške ne može se smanjiti u istom obimu na velikim nivelmanima, usprkos već postignutog napretka.

Prema tome, kraj najpovoljnijih uslova, ukupni koeficijenat τ, koji označuje ukupnu pogrešku, postaje u biti koeficijenat ζ. Glavni nedostatak modernih nivelmana ostaju prema tome sistematske pogreške.

Karakter sistematskih pogrešaka

1) SVOJSTVA ČISTO SLUČAJNA ZA VELIKE UDALJENOSTI.

Stalnost koeficijenta ζ, za udaljenost $L \geq Z$, dokazuje kako smo već napomenuli, da se sistematske pogreške ponašaju kao čisto slučajne.

2) PROPORCIONALNOST VJEROJATNIH SISTEMATSKIH POGREŠAKA SA UDALJENOŠĆU, NA KRATKOJ UDALJENOSTI.

Na udaljenosti L vjerojatna sistematska pogreška je $\zeta \sqrt{L}$; razmotrimo njegov količnik prema udaljenosti:

σ_L, je vjerojatna sistematska pogreška po kilometru za udaljenost L.

Imamo:

$$\sigma_L = \frac{1}{L} \zeta_L \sqrt{L} = \frac{\zeta_L}{\sqrt{L}} = \sqrt{\frac{\zeta_L^2}{L}}$$

Tako je na krivulji koja predstavlja $\tau_L{}^2$ (ili $u_L{}^2$) kao funkciju od L, kvadrat $\sigma_L{}^2$ nagib pravca, koji spaja početak krivulje sa točkom krivulje apscise L.

Na kratkim udaljenostima prema izgledu krivulje, σ_L se malo mijenja sa L, što pokazuje utvrđenu proporcijalnost. Koeficijent proporcialnosti je vrijednost σ_L u početku, a to je gore razmatrani koeficijent:

σ_0, t j vjerojatna sistematska pogreška po kilometru na kratkim udaljenostima.

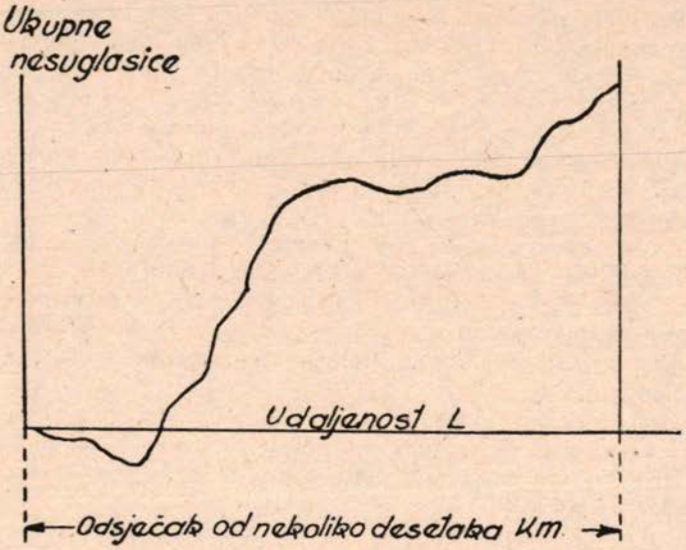
3) HOD DIAGRAMA UKUPNIH NESUGLASICA.

Obadva predhodna svojstva sistematskih pogrešaka potvrđuju se, na očigledan način, prema hodu dobro poznatog diagrama nagomilanih nesuglasica između rezultata dvaju niveliranja tamo i natrag, ako postoje dva ista nivelmana i ako su oni dovoljno nezavisni.

Način konstrukcije ovog uobičajenog diagrama je slijedeći: za bilo koji neprekinuti odsječak na terenu nanesu se, kao apscise, udaljenosti L repera počam od početka odsječka, a na ordinatama zbroj nesuglasica λ dvaju nivelmana tamo i natrag.

Ako bi se pogreške, i prema tome nesuglasice, pokoravale Gaussovom zakonu o raspodjeli čisto slučajnih pogrešaka, dobivena bi krivulja oscilirala nepravilno oko apscisne osi. Ona bi mijenjala nagib nasumce, od jednog do drugog intervala između repera, koliko god bi ovi intervali bili mali, često blizu kilometra ili dapače manji.

Sada općenito poprima krivulja na većim dužinama, reda nekoliko desetina kilometara, potpuno određeni sistematski hod, koji pokazuje prisutnost pogrešaka, koje nisu čisto slučajne. Za vrlo velike dužine rastući i padajući dijelovi krivulje su raspoređeni nasumce, jer se smjer svakog nivelmana tamo



i natrag bilo kako mijenja na veoma dugoj pruzi prema smjeru, koji se usvoji za dužinu odsječka.

Osim toga ustanovljeno je, da su dužine, na kojima je sistematski hod dijagrama o kojima je riječ stalan, istog reda veličina kao one Z, od kojih dalje se sistematske pogreške ponašaju kao čisto slučajne.

Uzroci sistematskih pogrešaka

Pogreške koje se odnose na smjer napredovanja.

Tri pređašnje osebine sistematskih pogrešaka objašnjavaju se sada, pripisujući ih pogreškama, koje se odnose na smjer hoda (niveliranja). Kilometrički iznos ovih pogrešaka mogao bi polagano i čak vrlo nepravilno varirati s vremenom, ali bi se malo mijenjao za cijelu seriju uzastopnih niveliranja.

Zapravo, veoma brojni napori izvršeni tokom zadnjeg stoljeća da se spriječe pogreške, koje leže u smjeruhoda, smanjili su osjetno početnu vrijednost koeficijenta ζ, koji označuje sistematske pogreške (vjerojatna slučajna vrijednost sistematske pogreške određene po kilometru). U Francuskoj zahvaljujući napretku, koji je postigao Lallemand na Bourdalonë, ovaj je koeficijent pao od 8 na 1,4 mm po kilometru.

Danas se izgleda može smatrati kao da su pogreške, koje se odnose na smjer hoda (niveliranja), eliminirane iz modernog nivelmana pomoću podrobnih mjera predostrožnosti, koje se zato poduzimlju, naročito periodičnim mijenjanjem smjera svakog nivelmana tamo i natrag na kratkim linijama.

Međutim kako smo napomenuli, moderni nivelmani ostaju opterećeni preostalim sistematskim pogreškama, koje čine njegovo glavno nesavršenstvo.

SEZONALNE OSCILACIJE ZEMALJSKE POVRŠINE.

Koji bi sada bio uzrok ovih preostalih sistematskih pogrešaka u modernom nivelmanu? Ako dozvolimo postojanje polaganih oscilacija oko srednjih položaja, neke vrste »disanja« zemljine površine, mogla bi se dokazati tri ranije nabrojena karaktera. Obzirom na svojstva koja im možemo pripisati, a koja ćemo precizirati, dogovoreno je da ih označimo imenom sezonalne oscilacije zemlje.

Ove sezonalne oscilacije zemljine površine, još kao hipotetične, potpuno bi se razlikovale od dvije slijedeće kategorije polaganih davno poznatih pokreta (kao što i od naglih pokreta prouzroučenih zemljotresom) i osim toga bi predpostavili:

na jednoj strani dnevne oscilacije vertikale, astronomskog porijekla, prouzročene privlačnom silom Mjeseca i Sunca, koja je bez sumnje često praćena dnevnim oscilacijama zemlje, termičkog porijekla;

na drugoj strani sekularni pomaci površine, dizanje i spuštanje, kontinuirano ili polukontinuirano, kao nastavak geoloških pokreta u nekim krajevima.

Veličina hipotetičkih sezonalnih oscilacija zemljine površine. U cilju da se količinski izlože preostale sistematske pogreške, o kojima je riječ, bit će hipotetične sezonalne oscilacije zemljine površine neophodno ovako poredane:

a) Ondulacije, zone koje su podpuno pod utjecajem jednog samog pokreta, bit će reda veličina nekoliko desetina kilometara, tj. onih udaljenosti Z, od kojih se dalje sistematske pogreške ponašaju kao čisto slučajne.

b) Vjerojatna vertikalna amplituda oscilacija bila bi reda veličina polucentimetarskih. (Da bi to utvrdili postavimo da je $\zeta = 1$ mm, a $Z = 25$ km, tada je $\zeta \sqrt{Z} = 5$ mm.). Dosljedno tome vjerojatna kutna amplituda oscilacija bila bi reda veličina desetine centezimalne sekunde (5 mm/25 km $= {}^1/_5 \cdot 10^6$).

c) Na koncu, trajanje oscilacija bilo bi značajno u odnosu na normalno vrijeme izvršenja nivelmana dužine Z, recimo manje od nekoliko tjedana ili nekoliko mjeseci, odakle se kvalifikacija »sezonalne« pripisuje oscilacijama o kojima je riječ.

Možda bi ove veoma male oscilacije bile samo jedna sezonalna pojava termičkog porijekla.

Metodska studija sezonalnih oscilacija zemljine površine.

Geodetski problem od velikog interesa, sastojao bi se u metodskom studiju mogućeg postojanja i svojstava ovih hipotetičnih sezonalnih oscilacija zemljine površine.

U tu svrhu moglo bi se prediodički obnoviti veoma precizni i brzi nivelmani, postavljani unakrst na raznim mjestima i na kratkim potezima od desetak kilometara. U više navrata (193, 1936, 1948,) međunarodna Asocijacija za geodeziju preporučila je ovakva istraživanja.

Eliminacija sistematskih pogrešaka, koje su u vezi sa sezonalnim oscilacijama zemljine površine. — Ako preostale sistematske pogreške modernog nivelmana proizlaze od ovakovih sezonalnih oscilacija zemljine površine, one bi se skoro potpuno eliminirale, izuzevši sekularne pokrete, koji predstavljaju jedan drugi problem, na osnovu slijedeće metode nazvane metoda niveliranja po dijelovima (nivellement fractionné):

Mreža za niveliranje bi se podijelila u veoma kratke intervale, najviše nekoliko kilometara, a to bi bili na pr. intervali između susjednih repera (600 do 700 m u Francuskoj). Program operacija bio bi takav, da bi se dodirni ili susjedni intervali, udaljeni manje od 20 do 30 kilometara, nivelirali u vremenu odijeljenom nekoliko tjedana ili nekoliko mjeseci. Nikakove preinake ne bi trebalo pravili u instrumentima i operativnoj tehnici, koja se upotrebljava kod najboljih modernih nivelmana.

Prema ovim uslovima utjecaj sezonalnih oscilacija zemljine površine postao bi čisto slučajan za veoma kratke izabrane intervale Z'. Jasno se vidi da bi se u prvom približenju karakteristični koeficijent ζ sistematskih pogrešaka proporcionalno smanjio sa $\sqrt{Z'}$ (jer je vjerojatna kutna amplituda oscilacija nepromijenjena, a ima vrijednost $\zeta\ \sqrt{Z'}/Z' = \zeta/\sqrt{Z'}$); on bi se reducirao u odnosu $\sqrt{Z'}/Z'$ i mogao bi dakle izgleda postati četiri ili pet puta manji. Radi toga, vodeći računa o međusobnom značenju slučajnih i sistematskih pogrešaka mogli bi se nadati da bi se postigla trostruka točnost, od one koja se danas općenito postiže.

B) OCJENA TOČNOSTI NIVELMANA

Potrebno je sada da se za određeni nivelman odrede karakteristični koeficijenti točnosti, na osnovu našeg pređašnjeg razmatranja.

Koeficijent τ

VJEROJATNA SLUČAJNA VRIJEDNOST TOTALNE POGREŠKE ODREĐENE PO KILOMETRU, ILI TOTALNA VJEROJATNA POGREŠKA PO KILOMETRU IZVEDENA OD NEGLASICA λ ILI OD ODSTUPANJA U ZATVORENOM POLIGONU φ (NEPOSREDNO ILI POMOĆU KOREKCIJA IZJEDNAČENJA γ).

Kako smo to pokazali, koeficijent τ je zajednička granica veličina (pravilno sračunatih) $u_L, u_F, u_{F\gamma}$ kada srednje dužine L_m ili F_m upotrebljenih elemenata L, F (uz predpostavku da su međusobno dovoljno bliski) narastu preko granice Z. Tada se može napisati:

$$\boxed{\tau = U}$$

sa $U = \lim u_L, u_F, u_{F\gamma}$, za $L_m\ F_m \geq Z$.

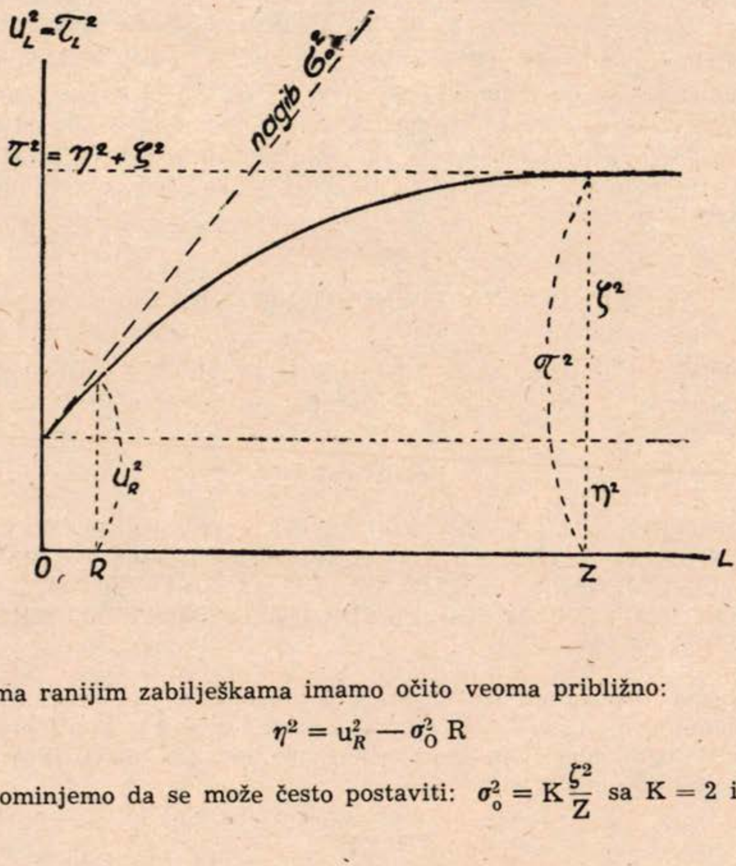
Možemo se uvjeriti da je granica Z dostignuta sa L_m ili F_m ako se provjeri da se na jedno približno razumno približenje $u_L, u_F, u_{F\gamma}$, ne mijenja kad se povećava L_m ili F_m (ako odsječke ili poligone grupiramo).

Ocjena granice Z. — Napominjemo da je na ovaj način postignuta ukupna ocjena granice Z, koja je za praktične potrebe dovoljna.

VJEROJATNA SLUČAJNA POGREŠKA PO KILOMETRU IZVEDENA OD NESUGLASICA ϱ IZMEĐU UZASTOPNIH REPERA.

Podsjetimo se kako se mijenja količina u_L, koja je jednaka svakoj od veličina u_R, u_L, u_F, $u_{F\gamma}$ za istu dužinu L elemenata R, L, F. Ona raste od η do τ, kada L raste od 0 do granice Z. Prema tome je ona blizu η za kratke elemente. To se događa za veličinu u_L, računatu za interval R između uzastopnih repera; ovi su elementi kratki, u Francuskoj unutar kilometra.

Prirodno je dakle da se η računa na osnovu veličina u_R, nakon što se odbije jedan korekcioni izraz.



Prema ranijim zabilješkama imamo očito veoma približno:

$$\eta^2 = u_R^2 - \sigma_0^2 \, R$$

Napominjemo da se može često postaviti: $\sigma_0^2 = K\frac{\zeta^2}{Z}$ sa K = 2 ili 3, tako

da je:

$$\eta^2 = u_R^2 - \zeta^2 \frac{K}{Z} R$$

Prema ovome za intervale istih dužina R imamo:

$$\eta^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\varrho^2}{R} - \zeta^2 \frac{K}{Z} \text{ sred } R$$

Ova jednadžba, čiji je prvi član nezavisan od R, ostaje valjan za nejednake intervale R pod uslovom, da se elementima dvaju sredina druge strane daju iste težine, težine jednake 1 ili R. Tako ćemo konačno imati:

$$\boxed{\eta^2 = u_R^2 - \zeta^2 j^2}$$

$$\text{za } u_R^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\varrho^2}{R} \quad \text{i} \quad j^2 = \frac{K}{Z} \text{ sred } R$$

i uzevši za u_R i j

u isto vrijeme:

$$\begin{cases} \text{ili } u_R'^2 = \dfrac{1}{9n_R} \Sigma \dfrac{\varrho^2}{R} & \text{i } j'^2 = \dfrac{K}{Z} R_m \\ \text{ili } u_R''^2 = \dfrac{1}{9} \dfrac{\Sigma \varrho^2}{\Sigma R} & \text{i } j''^2 = \dfrac{K}{Z} \dfrac{\Sigma R^2}{\Sigma R} \end{cases}$$

Približni karakter korekcionog člana. — U ovoj je formuli netočnost količina K i Z, koje dolaze u faktoru j^2, od male važnosti. Ono opterećuje samo korekcioni izraz, koji je veoma mali.

Koeficijenat ζ

VJEROJATNA SLUČAJNA VRIJEDNOST SISTEMATSKE POGREŠKE PO KILOMETRU,

IZVEDENA IZ NESUGLASICA λ IZMEĐU KRAJNIH TOČAKA ODSJEČKA ILI ODSTUPANJA U ZATVORENOM POLIGONU φ (NEPOSREDNO ILI POMOĆU KOREKCIJA IZJEDNAČENJA γ).

Imamo: $\zeta^2 = \tau^2 - \eta^2$, i na osnovu gornjeg izraza za τ^2:

$$\boxed{\zeta^2 = U^2 - \eta^2}$$

IZVEDENE FORMULE, KOJE DAJU KOEFICIJENTE η I ζ.

Dvije prethodne formule izražavaju $\begin{cases} \eta \text{ kao korekcioni izraz u } \zeta, \\ \zeta \text{ kao funkciju od } \eta. \end{cases}$

Na osnovu toga mogu se izvesti odmah slijedeće formule, koje daju neposredno η i ζ:

$$\boxed{\eta^2 = \frac{u_R^2 - j^2 U^2}{1 - j^2}} \quad , \quad \boxed{\zeta^2 = \frac{u^2 - u_R^2}{1 - j^2}}$$

Koeficijenat ζ

VJEROJATNA SLUČAJNA VRIJEDNOST SISTEMATSKE POGREŠKE PO KILOMETRU IZVEDENA IZ METODE SREDNJIH PRAVACA.

Pretpostavimo da je razmatrani nivelman sredina iz niveliranja tamo i natrag, i da su ovi nivelmani potpuno nezavisni. Tada se koeficijenat ζ, karakterističan za sistematske pogreške, nalazi na novi način u dijagramu ukupnih nesuglasica, koji je definiran ranije. Ovaj način, koji je poznat i korišten mnogo ranije (premda dugo vremena nepravilno), nosi ime postupak srednjih pravaca.

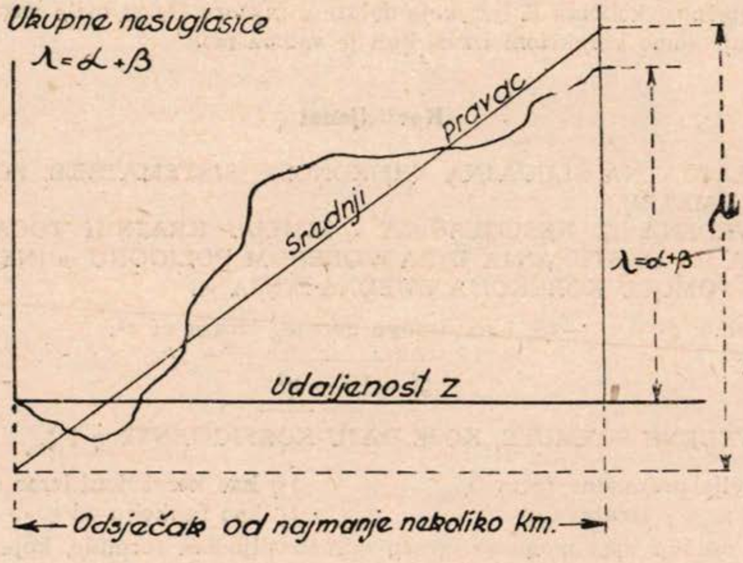
Oznake. — Razmotrimo jedan bilo koji odsječak dužine L, ali neprekidan na terenu. Povucimo kroz dijagram ukupnih nesuglasica, konstruiran za ovaj odsječak, srednji pravac, koji se što je moguće manje udaljuje od krivulje. Nazovimo sada sa:

α, ukupnu slučajnu nesuglasicu dvaju nivelmana tamo i natrag, uzetu na na krajevima odsječka;

β, njihovu ukupnu sistematsku nesuglasicu, uzetu na istim krajevima;

Prema tome je $\alpha + \beta = \lambda$ ukupna nesuglasica koja proizlazi iz dijagrama; α i β su nepoznate, ali λ je eksperimentalno poznata veličina.

μ, razlika krajnih ordinata srednjeg pravca, povučenog preko krivulje tako, da što manje od nje odstupa.



Izrazi za η i ζ_L, kao funkcije količina α i β. — Na osnovu navedenog je vjerojatno vrijednost slučajne totalne pogreške (ili totalne sistematske) između krajeva odsječka L prema definiciji koeficijenta η (ili ζ_L) : $\eta\sqrt{L}$ (ili $\zeta_L \sqrt{L}$).

Vjerojatna vrijednost slučajne totalne nesuglasice α (ili sistematske β) dvaju nivelmana tamo i natrag, pod pretpostavkom da su potpuno nezavisni, je dakle: $2\eta\sqrt{L}$ (ili $2\zeta_L \sqrt{L}$).

Srednja kvadratična vrijednost ove nesuglasice je sada:

$$3/2 \times 2\eta\sqrt{L} = 3\eta\sqrt{L} \text{ (ili } 3/2 \times 2\zeta_L \sqrt{L} = 3\,\zeta_L \sqrt{L}\text{)}.$$

Tako je η (ili ζ_L) srednja kvadratična vrijednost količina $\frac{1}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{L}}$ $\left(\text{ili } \frac{1}{3}\frac{\beta}{\sqrt{L}}\right)$, za skupinu odsječaka iste dužine L. Ovo vrijedi isto tako za η neovisno od L. i za nejednake odsječke. Imamo dakle:

$$\eta^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\alpha^2}{L} \quad \text{i } \zeta_L^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\beta^2}{L} \text{ za nejednake L.}$$

Izraz ζ_L kao funkcija razlika μ. — Razmotrimo ovaj izraz od ζ_L kao funkciju sistematskih nesuglasica β, koje su nepoznate. Prirodno će biti, da ih uporedimo prosječno, kako je to činio nekad Lallemand i brojni geodeti, sa poznatim razlikama μ, krajnih ordinata srednjih pravaca. Moglo bi se doista misliti da nagib srednjih pravaca dolazi bitno od sistematskih nesuglasica, i da će se njihovim odsustvom osjetno smanjiti. U tom bi slučaju bilo: sred β^2 = sred μ^2.

Ali ovaj zaključak, premda duže vremena prihvaćen, nije pravilan. Može se odmah ustvrditi napominjući da, čak u odsutnosti sistematskih pogrešaka ($\beta = 0$), nagib srednjih pravaca ne će biti općenito nula. Količina sred μ^2 razlikovala bi se od nule; ona će biti očevidno mnogo veća nego slučajno odstupanje α s time i sred α^2.

Točno računanje pokazuje da je

$$\text{sred } \beta^2 = \text{sred } \mu^2 - \frac{6}{5} \text{ sred } \alpha^2 \quad \text{za jednake L}$$

Za ζ je izveden slijedeći izraz:

$$\zeta_L^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\mu^2}{L} - \frac{6}{5}\eta^2 \quad \text{za jednake L.}$$

Konačni izraz za ζ kao funkcije razlika μ. — Ako dužina L odsječaka prekoračuje granicu Z, preko koje se sistematske pogreške ponašaju kao čisto slučajne, onda je poznato da je $\zeta_L^2 = \zeta^2$ neovisno od L. Tada za odsječke veće od Z, količina sred $\frac{\eta^2}{L}$ postaje neovisna od dužina odsječaka L, čak ako su dužine nejednake, i isto tako od težina (1 ili L) koje dolaze u elementima $\frac{\mu^2}{L}$, Tada ćemo konačno imati:

$$\boxed{\zeta^2 = V^2 - \frac{6}{5}\eta^2}$$

sa $V = \lim v_L$ za $L \geq Z$, postavljajući:

$v_L^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\mu^2}{L}$	pod dva oblika	$v_L'^2 = \frac{1}{9} \Sigma \frac{\mu^2}{L}$, $\quad v_L''^2 = \frac{1}{9} \frac{\Sigma\mu^2}{\Sigma L}$

IZVEDENE FORMULE, KOJE DAJU KOEFICIJENTE η i ζ.

Pridružimo ovoj formuli općenitu formulu koja daje η:

$$\eta^2 = u_R^2 - \zeta^2 j^2$$

Iz ove se formule odmah izvode slijedeće, koje daju neposredno η i ζ:

$$\boxed{\eta^2 = \frac{u_R^2 - j^2 V^2}{1 - \frac{6}{5} j^2}} \qquad \boxed{\zeta^2 = \frac{V^2 - \frac{6}{5} u_R^2}{1 - \frac{6}{5} j^2}}$$

IZVEDENE FORMULE, KOJE DAJU KOEFICIJENT τ, OZNAKU ZA TOTALNU POGREŠKU.

Podsjetimo se da je:

$$\tau^2 = \eta^2 + \zeta^2$$

Ako zamijenimo ζ^2, a zatim η^2 s njihovim gornjim vrijednostima, dobijamo 2 izraza:

$$\boxed{\tau^2 = V^2 - \frac{1}{5}\eta^2 = \frac{(1 - j^2) V^2 - \frac{1}{5} u_R^2}{1 - \frac{6}{5} j^2}}$$

Kratak pregled formula za ocjenu točnosti nivelmana

KOEFICIJENAT τ, VJEROJATNA SLUČAJNA VRIJEDNOST TOTALNE POGREŠKE PO KILOMETRU,

ILI VJEROJATNA TOTALNA POGREŠKA PO KILOMETRU.

$$\boxed{\begin{array}{c} \tau = U \\ \hline \tau^2 = V^2 - \frac{1}{5}\eta^2 \end{array}} \quad \text{sa} \begin{cases} U = \lim u_L, u_F, u_{F\gamma}, \text{ za } L_m, F_m \geq Z \\ V = \lim v_L \text{ za } L_m \geq Z \end{cases} \quad \text{postavljajući:}$$

$$u_L^2 = \frac{1}{9} \text{sred} \frac{\lambda^2}{L} \quad v_L^2 = \frac{1}{9} \text{sred} \frac{\mu^2}{L} \quad u_F^2 = \frac{4}{9} \text{sred} \frac{\varphi^2}{F} \quad u_{F\gamma}^2 = \frac{4}{9 n_F} \Sigma \frac{\gamma^2}{L}$$

Veličine u_L, v_L, u_F' mogu se pisati u slijedećoj formi:

$$\begin{cases} u'^2_L = \frac{1}{9 n_L} \sum \frac{\lambda^2}{L} \\ \text{ili} \\ u''^2_L = \frac{1}{9} \frac{\Sigma \lambda^2}{\Sigma L} \end{cases} \quad \begin{cases} v'^2_L = \frac{1}{9 n_L} \sum \frac{\mu^2}{L} \\ \text{ili} \\ v''^2_L = \frac{1}{9} \frac{\Sigma \mu^2}{\Sigma L} \end{cases} \quad \begin{cases} u'^2_F = \frac{4}{9 n_F} \sum \frac{\varphi^2}{F} \\ \text{ili} \\ u''^2_F = \frac{4}{9} \frac{\Sigma \varphi^2}{\Sigma F} \end{cases} \quad u_{F\gamma}^2 = \frac{4}{9 n_F} \sum \frac{\gamma^2}{L}$$

Granična vrijednost Z je postignuta kad se u, v, ne mijenjaju osjetno sa L_m, F_m. U tom se slučaju dakle postizava zadovoljavajuće približenje.

KOEFICIJENT η, VJEROJATNA SLUČAJNA POGREŠKA PO KILOMETRU.

$\boxed{\eta^2 = u_R^2 - \zeta^2 j^2}$ sa $u_R^2 = \frac{1}{9}$ sred $\frac{\varrho^2}{R}$ i $j^2 = \frac{K}{Z}$ sred R (za K = 2 ili 3)

postavljajući za u_R i j u isto vrijeme

$$\begin{cases} \text{bilo } u'^2_R = \dfrac{1}{9n_R} \sum \dfrac{\varrho^2}{R} \quad \text{i } j'^2 = \dfrac{K}{Z} R_m \\ \text{ili } u''^2_R = \dfrac{1}{9} \dfrac{\Sigma \varrho^2}{\Sigma R} \quad \text{i } j''^2 = \dfrac{K}{Z} \dfrac{\Sigma R^2}{\Sigma R} \end{cases}$$

KOEFICIJENT ζ, VJEROJATNA SLUČAJNA VRIJEDNOST SISTEMATSKE POGREŠKE PO KILOMETRU.

$$\boxed{\zeta^2 = U^2 - \eta^2 = V^2 - \frac{6}{5} \eta^2}$$

IZVEDENA FORMULA, KOJA DAJE τ, η, ζ.

$$\tau^2 = U^2 = \frac{(1 - j^2) V^2 - \frac{1}{5} u_R^2}{1 - \frac{6}{5} j^2} \quad \begin{cases} \eta^2 = \dfrac{u_R^2 - j^2 U^2}{1 - j^2} = \dfrac{u_R^2 - j^2 V_2}{1 - \frac{6}{5} j^2} \\ \zeta^2 = \dfrac{U^2 - u_R^2}{1 - j^2} = \dfrac{V^2 - \frac{6}{5} u_R^2}{1 - \frac{6}{5} j^2} \end{cases}$$

C) NEGDAŠNJA OCJENA TOČNOSTI NIVELMANA

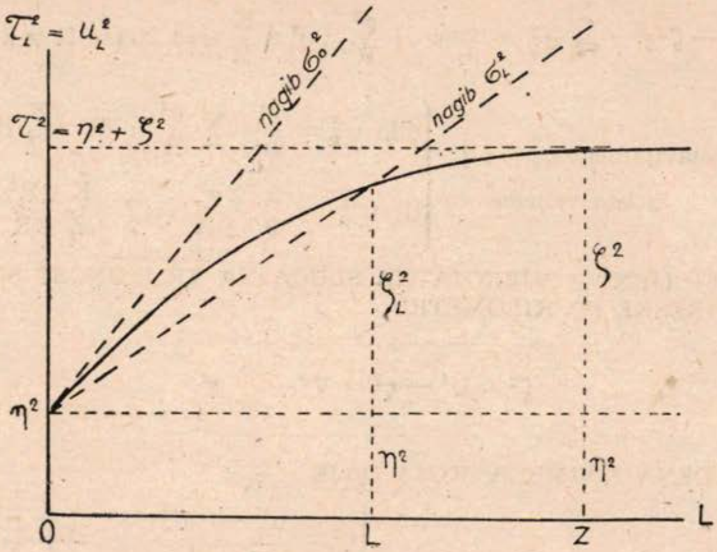
Da bi upotpunili gornje izlaganje, navest ćemo sada, s našim novim oznakama, tri formule za ocjenu točnosti nivelmana, koje je predložio Lallemand, a bile međunarodno prihvaćene od 1912. do 1936. One su dosta bile primijenjene u mnogim publikacijama, pa je korisno da se rezultati, koji su se s njima postigli, opet učine upotrebljivim, istražujući njihov odnos sa sadašnjim pravilnijim načinom internacionalne ocjene.

KOEFICIJENT σ_L VJEROJATNA SISTEMATSKA POGREŠKA PO KILOMETRU NA DUŽINI L.

Mi smo već definirali ovaj koeficijent: za udaljenost L, to je količnik od vjerojatne sistematske pogreške za tu udaljenost i L. On ima dakle vrijednost:

$$\sigma_L = \frac{1}{L} \zeta_L \sqrt{L} = \frac{\zeta_L}{\sqrt{L}} = \sqrt{\frac{\zeta_L^2}{L}}$$

Tako je na krivulji, koja prikazuje τ_L^2 (ili u_L^2) kao funkciju od L, kvadrat σ_L^2 nagib pravca koji spaja početak krivulje sa točkom na krivulji apsise L.



Prema izgledu navedene krivulje, koeficijent σ_L, opada ako L raste, njegove granične vrijednosti su slijedeće:

za $L = 0$, $\sigma_L = \sigma_O$ vjerojatna sistematska pogreška po kilometru na kratke udaljenosti;

za $L = \infty$, $\sigma_L = 0$.

Lallemand i s njime brojni geodeti smatrali su (pogrešno) da je ovaj koeficijent σ_L neovisan od L, pa su njegovu vrijednost σ izabrali kao koeficijenat karakterističan za sistematske pogreške.

Koeficijenat η, definiran kako smo to učinili, označuje i kod njih isto kao i kod nas slučajne pogreške.

Druga Lallemand-ova formula

Izraz $\sigma_{L\mu}$ iz σ_L izveden iz postupka srednjih pravaca

IZVOD FORMULE.

Prema ranijoj definiciji:

$$\sigma_L^2 = \frac{\zeta_L^2}{L}$$

Može se s druge strane vidjeti da je:

$$\zeta_L^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\beta^2}{L} \quad \text{za jednake L.}$$

tako da je

$$\sigma_L^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\beta^2}{L^2} \quad \text{za jednake L.}$$

Lallemand je u ovoj formuli (pogrešno) zamijenio β^2 sa μ^2 i proširio sredinu na nejednake odsječke L, dajući u elementima $\frac{\beta^2}{L^2}$ težine jednake L.

Tako je dobio za σ_L niže navedeni izraz $\sigma_{L\mu}$ koji čini drugu Lallemandovu formulu:

$$\sigma_{L\mu}^2 = \frac{1}{9} \text{sred}_{(L)} \frac{\mu_2}{L^2}$$

ili

$$\boxed{(\text{II}) \ \sigma_{L\mu}^2 = \frac{1}{9 \Sigma L} \sum \frac{\mu^2}{L}}$$

ODNOS IZMEĐU ζ I $\sigma_{L\mu}$

Ovaj se odnos piše:

$$\sigma_{L\mu}^2 = \frac{1}{L_m} \frac{1}{9 n_L} \sum \frac{\mu^2}{L} = \frac{1}{L_m} \frac{1}{9} \text{sred}_{(1)} \frac{\mu^2}{L}$$

Sada vidimo da je:

$$\zeta_L^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\mu^2}{L} - \frac{6}{5} \eta^2 \text{ za jednake L}$$

Dakle:

$$\boxed{(\text{II}^A) \ \text{sred}_{(1)} \zeta_L^2 = \sigma_{L\mu}^2 L_m - \frac{6}{5} \eta^2}$$

Ako je $L_m > Z$, imamo dakle ζ, poznavajući η, kao funkciju od $\sigma_{L\mu}$(i L_m,) jer je $\zeta^2 = \text{sred}_{(1)} \zeta_L^2$,)
Ako je $L_m < Z$, ne dobijemo ζ, nego srednju vrijednost ζ_L.

Treća Lallemandova formula
Izraz $\sigma_{L\varphi}$ od σ_L, izveden iz odstupanja u zatvorenoj figuri

IZVOD FORMULE.

Prema definiciji je σ_L:

$$\sigma_L^2 = \frac{\zeta_L^2}{L}$$

Vidjeli smo da je s druge strane:

$$\zeta_L^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\beta^2}{L} \text{ za jednake L}$$

tako da je kao u pređašnjem slučaju:

$$\sigma_L^2 = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\beta^2}{L} \text{ za jednake L}$$

Lallemand je proširio ovu sredinu na skupinu nejednakih odsječaka, na koje je mreža podijeljena (izuzevši izolirane linije) dajući elementima $\frac{\beta^2}{L^2}$ težine jednake L^2. Na taj način σ_L^2 poprima oblik:

$$\sigma_L^2 = \frac{1}{9} \text{ sred}_{(L^2)} \frac{\beta^2}{L^2} = \frac{1}{9} \frac{\Sigma \beta^2}{\Sigma L^2} = \frac{\Sigma L}{\Sigma L^2} \frac{1}{9} \frac{\Sigma \beta^2}{\Sigma L} = \frac{\Sigma L}{\Sigma L^2} \text{ sred}_{(L)} \zeta_L^2$$

Na osnovu toga, da bi koristio odstupanja u zatvaranju poligona φ, Lallemand je formulirao predpostavku, koja je sadržana u ovom izrazu:

$$\text{sred}_{(L)} \zeta_L^2 = \text{sred}_{(F)} \zeta_L^2 \quad \text{tako da je} \quad : \sigma_F^2 = \frac{\Sigma L}{\Sigma L^2} \text{ sred}_{(F)} \zeta_F^2$$

Kako znamo ova se predpostavka potvrđuje samo ako imamo da je $L_m > Z$ i $F_m > Z$ (ili drugačije ako je $L_m = F_m$)

Konačno da bi izrazio $\zeta^2{}_F$, Lallemand je upotrebio formulu izvedenu ranije:

$$\zeta_F^2 = u_F^2 - \eta^2 = \frac{4}{9} \text{ sred } \frac{\varphi^2}{F} - \eta^2 \text{ za jednake F.}$$

On je primijenio ovu formulu za grupu nejednakih osnovnih poligona, kojima je dodao iz gore navedenih razloga obuhvatni poligon, i dao je elementima $\frac{\varphi^2}{F}$ težine jednake F (oblik u''_F od u_F). Kako je $\Sigma F = 2 \Sigma L$, on je napisao:

$$\text{sred}_{(F)} \zeta_F^2 = \frac{2}{9} \frac{\Sigma \varphi^2}{\Sigma L} - \eta^2$$

Konačno je dobio za σ_L slijedeći izraz $\sigma_{L\varphi}$, koji čini treću Lallemandovu formulu:

$$\sigma_{L\varphi}^2 = \frac{\Sigma L}{\Sigma L^2} \left(\frac{2}{9} \frac{\Sigma \varphi^2}{\Sigma L} - \eta^2 \right)$$

ili

$$\boxed{\text{(III) } \sigma_{L\varphi}^2 = \frac{1}{\Sigma L^2} \left(\frac{2}{9} \Sigma \varphi^2 - \eta^2 \Sigma L \right)}$$

ODNOS IZMEĐU ζ I $\sigma_{L\varphi}$

Ovaj se izraz piše:

$$\sigma_{L\varphi}^2 = \frac{\Sigma L}{\Sigma L^2} \left(\frac{4}{9} \frac{\Sigma \varphi^2}{\Sigma F} - \eta^2 \right) = \frac{\Sigma L}{\Sigma L^2} \left(\frac{4}{9} \text{ sred}_{(F)} \frac{\varphi_2}{F} - \eta^2 \right)$$

Sada smo vidjeli da je $\zeta_F^2 = u_F^2 - \eta^2 = \frac{4}{9} \text{ sred } \frac{\varphi^2}{F} - \eta^2$

za jednako F.

Dakle:

$$\boxed{(\text{III}^A)\ \text{sred}_{(F)} \zeta_F^2 = \sigma_{L\varphi}^2 \frac{\Sigma L^2}{\Sigma L}}$$

Ako je $F_m > Z$, onda imamo ζ kao funkciju od $\sigma_{L\varphi}$(i od $\frac{\Sigma L^2}{\Sigma L}$) jer je $\zeta^2 = \text{sred}_{(F)}\, \zeta_F^2$

Ako je $F_m < Z$, onda se ne dobija ζ nego jedna srednja vrijednost ζ_F

Napomena. — Promjena koeficijenta $\sigma_{L\varphi}$ sa L_m. — Lako se može pojaviti, u samoj trećoj Lallemandovoj formuli, da koeficient $\sigma_{L\varphi}$ nije dobro definiran za datu mrežu. On doista varira sa dužinom L proizvoljno izabranom, i ne može se dakle smatrati kao karakteristika točnosti.

Ukratko množimo sa n broj odsječka na koje je mreža podijeljena, a taj je broj proizvoljan, dijeleći svaki odsječak na n jednakih djelova, tako da se L_m dijeli sa n.

Količina unutar zagrada na drurgoj strani treće Lallemandove formule se ne mijenja; količina Σ L^2 je podijeljena sa n, a na taj način je $\sigma_{L\varphi}^2$ pomnoženo sa n što je trebalo dokazati.

Prva Lallemandova formula

Izraz η_μ od η, izveden iz odstupanja između uzastopnih repera

IZVOD FORMULE.

Mi smo izveli formulu:

$$\eta^2 = u_R^2 - \sigma_0^2 R = \frac{1}{9} \text{ sred } \frac{\varrho^2}{R} - \sigma_0^2 R \text{ za jednake R}$$

Primijenimo je na realne nejednake intervale R. Ona ostaje pravilna uz uslove primjene istih težina, koje ćemo uzeti jednake R za dva člana druge strane formule. Dobijamo dakle izraz:

$$\eta^2 = \frac{1}{9} \frac{\Sigma \varrho^2}{\Sigma R} - \sigma_0^2 \frac{\Sigma R^2}{\Sigma R}$$

Lallemand je u korekcionom članu zamijenio koeficijent σ_O sa σ_L koji se od njega razlikuju, i upotrebio je za σ_L izraz $\sigma_{L\mu}$ svoje druge formule, koja nije točna. Konačno on je zamijenio Σ R sa ekvivalentnom dužinom Σ L. Dobio je tako za η slijedeći izraz η_μ koji čini prvu Lallemandovu formulu:

$$\eta_\mu^2 = \frac{1}{9}\frac{\Sigma\varrho^2}{\Sigma L} - \frac{1}{9\Sigma K}\sum\frac{\mu^2}{L}\frac{\Sigma R^2}{\Sigma L}, \text{ ili } \boxed{(I)\ \eta_\mu^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{\Sigma\varrho^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma R^2}{(\Sigma L)^2}\sum\frac{\mu^2}{L}\right]}$$

ODNOS IZMEĐU η I η_μ

Ova formula nije potpuno ispravna, ali pogreška je minimalna, jer se ona odnosi samo na korekcioni član. Na osnovu toga imamo:

$$\eta^2 - \eta_\mu^2 = \frac{\Sigma R^2}{\Sigma L}(\sigma_{L\mu}^2 - \sigma_0^2) \text{ ili sa našim oznakama Z, K:}$$

$$\boxed{(I^A)\ \eta^2 - \eta_\mu^2 = \frac{\Sigma R^2}{\Sigma L}\left(\sigma_{L\mu}^2 - \zeta^2\frac{K}{Z}\right)}$$

Imamo tako η, poznavajući jednu približnu vrijednost od ζ kao funkciju od η_μ, $\sigma_{L\mu}$ (i od ΣR^2, ΣL, isto tako kao i od približnih vrijednosti K, Z).

K o e f i c i j e n t i η i ζ i z v e d e n i i z k o e f i c i j e n a t a L a l l e m a n d o v i h η_μ i $\sigma_{L\mu}$. — Iz formula (II^A) i (I^A), koje smo mi spojili u Lallemand-ove formule (II) i (I), izvode se odmah, ako je $L_m > Z$, točni koeficijenti η i ζ, kao funkcija Lallemand-ovih koeficijenata η_μ i $\sigma_{L\mu}$ (i od ΣR^2, ΣL, L_m isto tako kao i od približne vrijednosti K, Z).