

## OTKLON TEŽIŠNICE I OBLIK GEOIDA U ITALIJI\*

Poznato je da rezultantu dviju sila, koje su nezavisne od vremena, a koje djeluju u nekoj točki P t. j. kao produkta zemljine mase i centrifugalne sile (kao posljedice dnevne rotacije), nazivamo silom gravitacije. Pravac u kome ona djeluje zove se vertikalna točka P.

Ako uzmemo u razmatranje više točaka P, moći ćemo dobiti za svaku od njih odgovarajuću vertikalnu. Ako sada na svakoj od ovih vertikala usvojimo jednu točku P' blizu točke P, to vertikalne točke P' ne će biti identične sa onima u točki P. Među njima će se pojaviti jedan vrlo mali kut. Analogno razmatranje možemo učiniti za mnoge druge točke P'' uzete na vertikalama točka P' u blizini točke P'. Svežnjevi vertikalna točaka P, P', P'' ..... formiraju linije koje nazivamo linijama sile. Postoji mnoštvo površina unutar zemlje i na samoj njenoj kori, koje su okomite na sve bezbrojne linije sile koje se mogu konstruirati. Takove površine nemaju zajedničkih točaka, glatke su, kontinuirane, bez pojedinačnih točaka, zatvorene u blizini Zemlje, otvorene na jednoj stanovitaj udaljenosti od nje i u njenoj blizini su ovalnog oblika. One se zovu nivo plohe ili s obzirom na gravitaciju ekvipotencijalne površine.

Za jednu takovu površinu mogla bi se uzeti slobodna površina mora koja bi bila povezana međusobno odgovarajućom mrežom širokih kanala, koji bi išli ispod kontinenata i pokrivali veliki dio zemlje. Sve to uz pretpostavku da nema djelovanja drugih nebeskih tijela, a naročito privlačne snage sunca i mjeseca; da nema razlika u pritisku, temperaturi i gustoći i da nema drugih fizičkih faktora koji su uzročnici zračnim i morskim strujama, koje poremećuju u isto vrijeme ravnotežu morske površine.

Nivo plohu, koja prolazi srednjom visinom mora, geodeti, služeći se uobičajenim nazivima Gaussa i Bessela, zovu matematskom površinom zemlje, koja s obzirom na jedan troosni kartezijanski pra-

\* Predavanje održano 28. maja 1957. g. na geodetskom odjelu univerziteta u Zagrebu.

Con benevolenza e concessione del autore ha tradoto il ing. V. Petković.  
Dozvolom autora sa talijanskog preveo ing. Petković Veljko (Zavod za Višu geodeziju Zagreb).

vokutni koordinatni sistem sa ishodištem u centru ravnine i sa osi  $z$  identičnom sa osovinom rotacije, je predstavljena jednačbom:

$$(1) \quad F(xyz) = \varepsilon \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{const}$$

gdje  $\varepsilon$  označava konstantu privlačne sile, a  $\omega$  kutnu brzinu.

$$r = \{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}^{1/2}$$

$a, b, c$  su koordinate elementa mase  $dm$ .

Takvoj površini 1878. Listing je dao ime geoid. To je najprirodnija površina, na koju se odnose geodetske operacije.

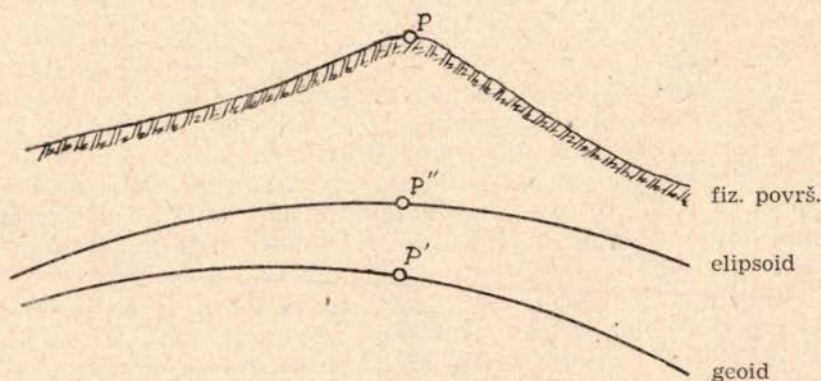
Geoid u svom općem obliku veoma je sličan rotacionom elipsoidu sploštenom na polovima; dimenzije ovog elipsoida su približno slijedeće: poluos ekvatora  $a = 6.377$  km, polarna poluos  $b = 6.357$  km.

Jednačba elipsoida je slijedeća:

$$(2) \quad F(xyz) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

Ovu su površinu prihvatili geodeti ne samo kao površinu na koju se odnose mjerenja stvarno učinjena na fizičkoj površini zemlje, već i kao površinu na kojoj se vrše sva geodetska računanja, kao: riješavanje trokuta, izjednačenje trigonometrijskih mreža i lanaca, transformacija geografskih koordinata, i t. d., te svi problemi, u kojima se koriste vrijednosti glavnih krivina elipsoida u posmatranim tačkama.

Imamo tako za svaku tačku  $P$  izabranu na fizičkoj površini zemlje, tačku  $P'$  na geoidu (položaj  $P$  se odnosi na nivo mora) i jednu drugu tačku  $P''$  na rotacionom elipsoidu. (Sl. 1).

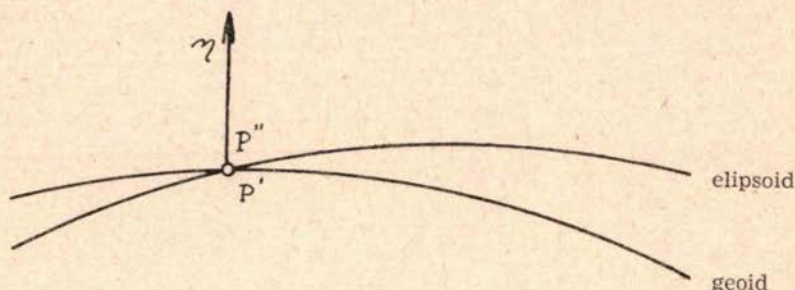


Slika 1

Geodetske ustanove raznih država koriste za svoja računanja jedan elipsoid nazvan **lokalni elipsoid**, koji je tako izabran da je njegova nor-

mala u jednoj od svojih točaka  $P''$  identična sa vertikalom koja prolazi točkom  $P'$ , i k tome da  $P''$  koincidira sa  $P'$ . (Sl. 2).

To se postizava uzimajući za geografske koordinate: širinu, dužinu i elipsoidni azimut, vrijednosti jednake onima, koje su određene astronomskim putem na fizičkoj površini zemlje i reducirane na geoid. Točka koja ima ove osobine zove se ishodište ili ishodišna točka. Ona se redovito uzima u okolini baricentra prostiranja dotične zemlje.



Slika 2.

Proizlazi stoga da lokalni elipsoidi dviju susjednih država, koje su usvojile jedan te isti referenc elipsoid t. j. jednakih dimenzija, mogu biti predstavljeni sa dva zasebna elipsoida. Oni su jednaki ali im osovine nisu identične, niti im površine međusobno koincidiraju, što više one se presjecaju. Zato da bi se prešlo sa jednoga na drugi potrebno je voditi računa o diskontinuitetu glavnih zakrivljenosti.

Ipak, uzimajući jedan lokalni elipsoid, te ako se razvije na stanovitoj površini oko ishodišta triangulaciona mreža mjereći jednu ili više osnovica, te sve kuteve i izjednačivši sve izmjerene veličine, možemo pomoću geografskih koordinata ishodišta izračunati koordinate raznih točaka  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ... dobivajući na taj način elipsoidne koordinate širinu  $\varphi$  i dužinu  $\lambda$ .

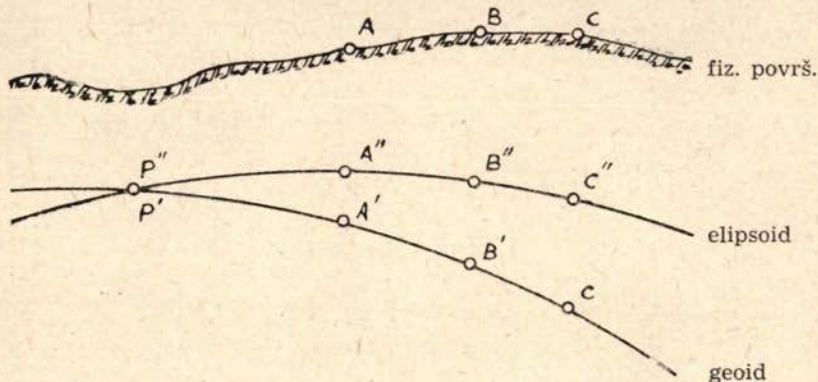
Ako usvojimo na površini zemlje točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ... koje su odredile mjesto točkama na elipsoidu  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,... i na njima su, kako uči geodetska astronomija, izvršena mjerenja širine  $\varphi$  i dužine  $\lambda$ , moći ćemo ove opažane vrijednosti reducirati na geoid i dobiti vrijednosti u odgovarajućim točkama  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,... (Sl. 3).

Pošto su nam tako poznate geografske koordinate  $\varphi$  i  $\lambda$  jedne točke na površini  $\Sigma$  cosinusi smjera normale na površini definirana su sa:

$$L = \cos \varphi \cos \lambda \quad M = \cos \varphi \sin \lambda \quad N = \sin \varphi$$

Iz ovoga proizlazi da ako poznamo geografske koordinate odgovarajućih točaka na elipsoidu i na geoidu, moguće je odrediti odgovarajuće normale od kojih se one na geoidu određuju s obzirom na pravce poznate i utvrđene na nebeskoj sferi.

Te normale redovito ne će koincidirati, već će se među njima javiti mali kut nazvan, od nekih, lokalno skretanje i koji se mora smatrati kao otklon težišnice. Pomoću toga kuta mogu se odrediti kutni pomaci između geoida i referenc elipsoida.



Slika 3

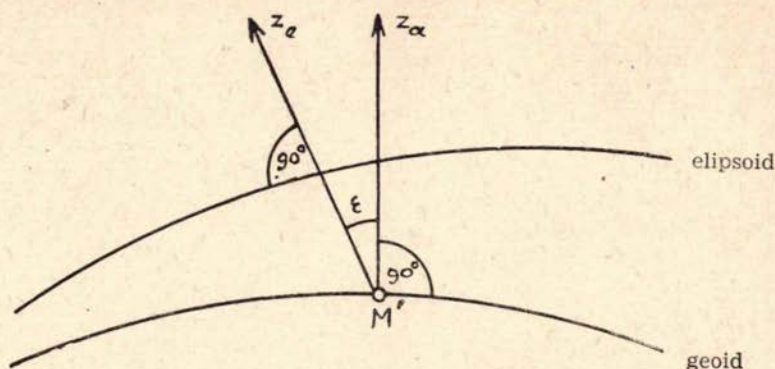
Geografske koordinate, opažane astronomskim putem, određuju pravac vertikale, koji predstavlja pravac sile teže u stajališnoj točki. Ovaj pravac se mijenja sa promjenom rasporeda gustoće podzemnih slojeva, za koje znamo da nisu homogene niti konstantne debljine. Međutim dok elipsoidne geografske koordinate dobijene računanjem, zavise samo od astronomskih mjerenja u ishodištu i o onim mjerenjima praktične geodezije, koja su se izvršila zbog određivanja točaka na elipsoidu (mjerenja baze i kuteva), te još i o geometrijskim karakteristikama u posmatranim točkama (glavni pravci zakrivljenosti), dotle geoidne geografske koordinate, koje proizlaze iz opažanja, zavise o privlačnoj sili ili vidljivih ili nevidljivih masa u okolini stajališta (mora i brda odnosno rasporeda teških i laganih materijala u unutrašnjosti zemlje).

Dalje, budući da se fizička površina Zemlje ne podudara sa geoidom i budući da postoje u nutrinji zemlje, kako je rečeno, rasporedi razne gustoće, to se geoid diže u odnosu na elipsoid ispod brda, a spušta se duž oceana imajući u srednjim točkama ovih udubljenja otklone nula, a maksimalne otklone uz obalu.

Geoid dakle, koji mora biti okomit na smjer vertikala po cijeloj svojoj površini, u jednom svom području prikazuje talasanje, nazvano geoidne ondulacije, čije pojedinačno prikazivanje i određivanje njihovih visina predstavlja osnovni cilj sadašnjih istraživanja matematske geodezije kojima se bavi peta komisija Geodetske Asocijacije i Međunarodne Geodetske i Geofizičke Unije (UGGI) koja upravo ima za cilj da koordinira sva mjerenja i studije koja se vrše u tom pravcu u pojedinim zemljama članicama U. G. G. I.

Iz ovog izlaganja dakle proizlazi da normale koje su povučene od neke točke  $M'$  na geoidu u odnosu na površinu geoida i na površinu elipsoida uopće ne koincidiraju.

Prva će imati pravac astronomskog zenita ( $z_a$ ), a druga elipsoidnog zenita ( $z_e$ ). (Sl. 4).



Slika 4

Kut  $\epsilon$  između dviju vertikala predstavlja otklon (totalni) vertikala u  $M'$ . Ako uzmemo sferu jediničnog polumjera sa centrom u  $M'$  i na ovu sferu dva pravca na dva zenita, obilježiti će dvije točke  $z_a$  i  $z_e$ ; (ako se kroz  $M'$  povuče paralela zemaljskoj polarnoj osi, ova paralela pogađa sferu u točki P.

Kut  $P Z_e Z_a$  zove se azimut ravnine otklona i obično ga označavamo sa  $\gamma$ .

Uzemnimo li za:

$$(3) \quad \Delta\varphi = \varphi - \Phi \quad \Delta\lambda = \lambda - \Lambda$$

to će prije spomenuta razlika između totalnog otklona  $\epsilon$  kuta  $\gamma$  biti vezana jednačbama:

$$(4) \quad \Delta\varphi = \epsilon \cos\varphi \quad \Delta\lambda = \epsilon \sin\varphi \sec\Phi$$

odakle dobijamo:

$$(5) \quad \epsilon = \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\lambda \cos\Phi)^2}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta\lambda \cos\Phi}{\Delta\varphi}$$

Ako označimo sa  $\alpha$  i  $A$  odgovarajući azimut elipsoidni i geoidni jednog pravca  $M' B'$  i stavivši po analogiji

$$(6) \quad \Delta\alpha = \alpha - A$$

dobija se

$$(7) \quad \Delta\alpha = \epsilon \operatorname{tang}\varphi \sin\gamma$$

što ne zavisi o parametrima koji određuju točku  $B'$  tako da se može zaključiti da otklon vertikala u  $M'$  ima isti utjecaj na bilo koji azimut izmjeren u  $M'$ .

Ako zamjenimo  $\varphi$  sa  $\Phi$  u drugom izrazu jednačbi (4) i eliminiravši iz ove tako dobijene i iz (7)  $\varepsilon \sin \gamma$  dobija se:

$$(8) \quad \Delta\alpha = \Delta\lambda \sin \varphi$$

i još

$$\alpha - A = (\lambda - \Lambda) \sin \varphi = \lambda \sin \varphi - \Lambda \sin \Phi$$

pa dalje

$$(9) \quad (\alpha - \lambda \sin \varphi)_{el} = (A - \Lambda \sin \Phi)_{geoid}$$

Jednačbe (8) služe za vezivanje odklona po azimutu sa onim po dužini, a jednačbe (9) povezuju mjerenja izvršena na elipsoidu sa onim astronomskim.

Jednačbe (9) često upotrebljavaju geodeti kao kontrolu rezultata eventualnih astronomskih mjerenja azimuta i dužine na trigonometrijskim tačkama (Laplaceove tačke) kadgod eventualne razlike između dva člana jednačbe (9) pokazuju eventualne distorzije trigonometrijske mreže koja je nastala nakon izjednačenja, kako sam pokazao u jednom članku Lincea.<sup>1</sup> Ta razlika je tim veća ukoliko je udaljenija Laplaceova tačka od ishodišne tačke. Razlika je proporcionalna  $1/n$ , gdje je  $n$  broj strana uzetih prilikom prenosa koordinata iz ishodišta do Laplaceove tačke.

### Primjena na području Italije

Kad smo ovako spomenuli nekoliko teoretskih postavki, nužnih za razumjevanje daljeg izlaganja, pređimo na primjenu u koliko se to odnosi na područje Italije. Napominjemo — uz naslov članka — da su kompletne studije o odklonu težišnice izvršene za Švicarsku, USA, Indiju, Japan. U drugim zemljama (na pr. Holandija i Egipat) izvršene su samo komparativne studije, određujući odklone u odnosu na dva različita referenc elipsoida geodetskim mjerenjima (Bessel — internacionalni, Helmert — internacionalni).

Koliko se odnosi na Italiju izvršen je do sada (od 1872 do naših dana) veliki broj opažanja (225 stanica za širinu, dužinu i azimut). 1940. uzet je u ispitivanje cijeli ovaj materijal sakupljen u cca 200 naučnih radova, za koje se može reći da pripadaju svim geodetima i svim astronomima koji su imali priliku raditi u spomenutom periodu. Rezultati tog dugog rada koji je trajao neprekidno 5 godina nalaze se detaljno obrađeni u jednoj velikoj dokumentiranoj Monografiji pod naslovom »Otklon težišnice u Italiji« izdate od Italijanskog geofizičkog instituta (Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 12) sa 87 strana teksta i 100 strana tabela i bilježaka.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> O interpretaciji ostatka u Laplaceovoj jednadžbi geodetske linije (Rend. Acc. Naz. Lincei, Vol. VI, 1949).

<sup>2</sup> Boaga: La deviazione della verticale in Italia — Monografie di geofisica e di geochimica — Milano.

U izlaganju raznih elemenata usvojiti ćemo za geodetska mjerenja tri elipsoida i to:

- a) elipsoid Bessela, orijentiran na Genovu;
- b) elipsoid Bessela, orijentiran na Rim (M<sup>te</sup> Mario);
- c) internacionalni elipsoid orijentiran na Rim M<sup>te</sup> Mario.

Za svaki od ovih usvojenih elipsoida, koji su uzeti sa ciljem da se dobiju korisna upoređenja, učinjene su mnoge studije odakle će se dobiti oblik ondulacija geoida unutar granica geodetske mreže Italije. Uz do-datak naknadnih astronomskih radova, posebno onih u nekim predjelima južne Italije, rezultati do kojih smo došli nedvojbeno će pretrpjeti iz-vjesne izmjene, ali u cjelini stvoreni zaključci će sačuvati obilježja koja su istaknuta u studiji, a koja sadrži:

1. odklon meridijana  $\Delta\varphi = \varphi - \Phi = \xi$ ;
2. odklon ortodrome  $\Delta\lambda \cdot \cos \varphi = \eta$ ;
3. odklon azimuta  $\Delta\alpha$ ;
4. Laplaceove jednačbe;
5. totalni odklon;
6. eventualne odnose između komponenata totalnog otklona, totalnog otklona i opažane gravitacije, a također i gravimetrijske anomalije;
7. ponašanje površine geoida u odnosu na prije spomenute referenc elipsoide;
8. postavljanje geoidnih profila uzduž meridijana i paralela i za-ključci geofizičke naravi;
9. određivanje dimenzija lokalnog talijanskog elipsoida;
10. određivanje formula za računanje normalnih otklona meridijana i ortodrome, sa odgovarajućim računom anomalija komponenata vertikalna.

Cjelokupni broj od 225 astronomskih mjerenja odnose se na ukupno 114 stanica ovako raspoređenih:

56 stanica na točkama I. reda osnovna mreže

3 " " " II. "

18 " " " III. "

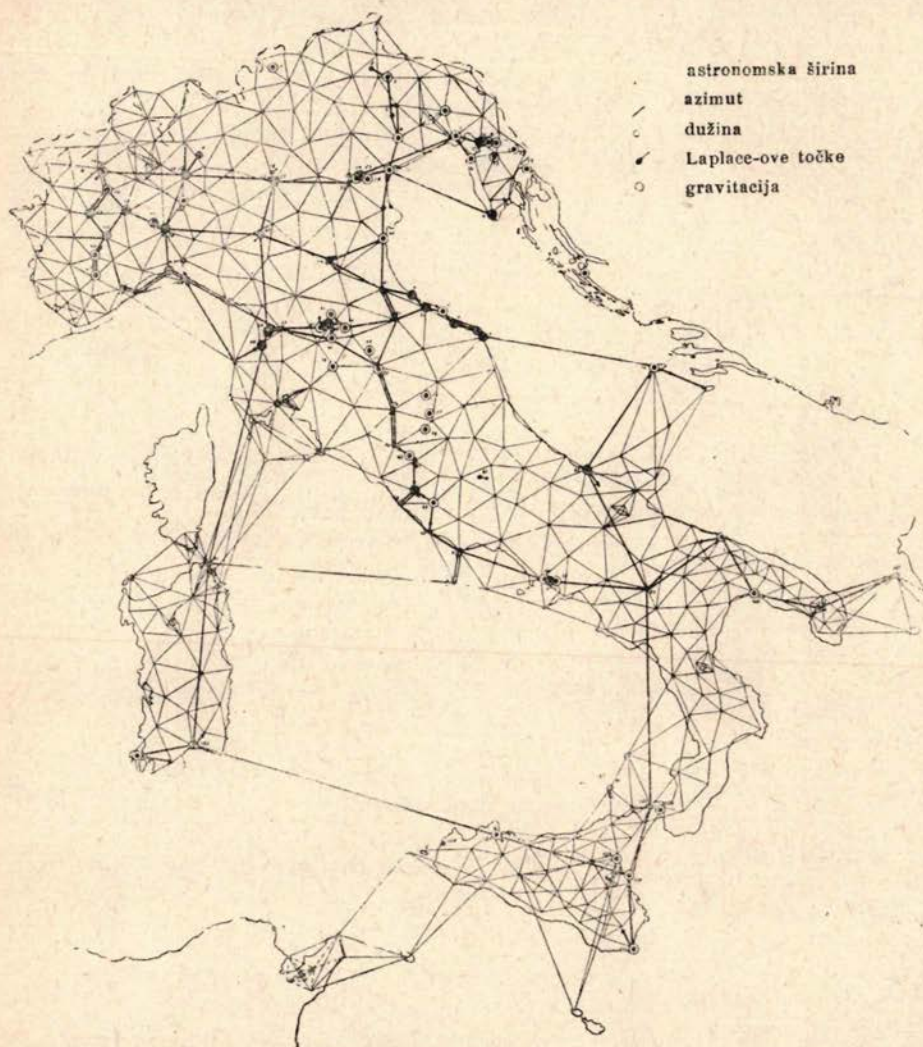
6 " " " IV. "

19 stanica otpada na astronomske opservacije ili geodetske institute koji ne pripadaju geodetskoj državnoj mreži, ali su na nju vezani.

12 stanica koje nisu direktno vezane za državnu triangulaciju i čije su geografske koordinate dobijene pomoću planova 1:25.000 i iz drugih kartografskih dokumenata oslonjenih na državnu triangu-laciju.

U toku ovih radova na 77 točaka postojala su gravimetrijska mjerenja sa njihalom, a 17 stanica su određene kao Laplaceove točke u smislu kako je prije spomenuto.

Na crtežu (Sl. 5) data je šema italijanske triangulacije kakova je bila 1940. g. Na njoj su date stanice: širine (obilježena jednom točkom) dužine (jednim kružićem), azimut (jednom strijelicom), Laplaceove točke (sa točkom i strelicom), gravitacija (sa kružićem većeg dijametra od onog



Slika 5 — Raspored otklona težišnice u Italiji

upotrebljenog za označenje dužine). Označeni su također pravci duž luka meridijana, paralela i transverzale duž kojih su određeni profili, odakle će se razjasniti tok ondulacija geoida, na što ćemo se naknadno osvrnuti.

Među stanicama, koje su uzete u razmatranje svakako su obuhvaćene one najvažnije, koje su opažali Reine i Barbieri duž meridijana Rima i



Mondovi, zatim Loperfido duž srednje doline Arna, te Silva duž Jadranske obale.

Koordinate, koje karakteriziraju točke ishodišta za tri spomenuta referenc elipsoida su:

a) Elipsoid Bessela — orijentiran na Genovu:

$$\varphi = 44^{\circ}25'08'',24$$

$$\lambda = 0.00.00,00$$

$$\alpha \text{ (Genova — M. te del Telegrafo) } = 117^{\circ}31'08'',91$$

b) Elipsoid Bessela — orijentiran na Rim, M.te Mario:

$$\varphi = 41^{\circ}55'24'',40$$

$$\lambda = 3.31.51.13$$

$$\alpha \text{ (M.te Mario — M.te Soratte) } = 6^{\circ}35'04'',96$$

c) Elipsoid internacionalni, orijentiran na Rim, M.te Mario:

$$\varphi = 41^{\circ}55'25'',51 \pm 0'',027$$

$$\lambda = 0.00.00,00$$

$$\alpha \text{ (M.te Mario — M.te Soratte) } = 6^{\circ}35'00'',88 \pm 0'',12$$

Ovo zadnje ishodište službeno su prihvatili 1941. g. svi geodetsko-kartografski uredi u Italiji, nakon odluke talijanske geodetske komisije donesene na svojoj XL plenarnoj sjednici.

Prostudirat će se odgovarajuće diferencijalne formule odakle će se odrediti za svaku točku korekcije za dobijanje širine, dužine i azimuta na elipsoidu, računata sa jednim određenim elipsoidom i sa jednim određenim ishodištem. Tada će se one svesti na drugi elipsoid bilo putem promjene ishodišta, bilo putem promjene dimenzije elipsoida, na bazi veličine elipsoida prije spomenutih. Na taj način mimoilazimo prenos koordinata iz ishodišta na odgovarajuće točke koristeći za ovu svrhu poznate Legendrove formule prema Dalamberovoj formi.

### Mjerenja astronomskih širina i njihove redukcije

Mjerenjima širine (opažane poslije 1898) dodat će se i redukcije na srednji pol, služeći se poznatom formulom:

$$(10) \quad \varphi - \varphi_0 = x \sin \lambda + y \cos \lambda + z$$

Za konstante  $x$ ,  $y$ , pola koji je odgovarao dobu opažanja korištene su vrijednosti, koje nam je pribavio Ch.mo Prof. Carnera tada direktor Internacionalne službe širine.

Kod redukcije nije uzet u obzir Kimurin izraz ( $z$ ) koji se javlja u gornjoj formuli, jer njegovo postojanje je još prilično nesigurno. U njemu se inače može gledati samo gomilanje raznih pogrešaka sistematskog karaktera još nedovoljno jasnih. Taj izraz je u ostalom manji ili najviše jednak srednjoj pogreški astronomskih mjerenja širine varirajući između  $-0''.06$  i  $+0''.06$ .

Redukcije  $\varphi - \varphi^0$  na srednji pol, za sve širine uzete u obzir, su obuhvaćene intervalom  $-0'',28; +0'',18$  i stoga općenito su puno veće od srednjih pogrešaka opažanja.

Astronomska opažanja izvršena ekscentrično reducirana su na centar koristeći formulu:

$$(11) \quad \Delta\varphi = \frac{e \cos(\alpha - y)}{\rho \operatorname{arc} 1''}$$

gdje je  $e$  excentritet stanice,  $y$  njegova orijentacija,  $\alpha$  azimut cilja,  $\rho$  polumjer meridijana računat sa širinom  $\varphi$ .

Za razliku od mnogih autora, uzete su u obzir i redukcije na nivoeu ploh u mora, računajući formulom:

$$(12) \quad r_H = \frac{H}{\rho \operatorname{arc} 1''} \cdot \frac{1}{g} \frac{\Delta g}{\Delta\varphi} = -1094'' \frac{H}{a} \sin 2\varphi$$

koja predstavlja promjenu vektora gravitacije u pravcu meridijana. Sa  $H$  je označena ortometrijska kota stanice, i sa  $a$  ekvatorijalna poluos referenc elipsoida.

Znak o kojem je bilo manje govora u zadnjem članu prethodne jednačbe označava povećanje širine sa visinom. To potvrđuju oblici linija sile, koje su konkavne prema polu, jer normale i nivo plohe nisu međusobno paralelne.

Ove tri korekcije zajedno dale su veličine obuhvaćene između  $-0'',69 + 0'',13$ .

Položaj zvijezda izvađen je u glavnom iz kataloga Boss-Lewis. Za neka od njih uzete su u obzir korekcije Auwers-a.

Za ova tri elipsoida određene su serije meridijanskih komponenata  $\xi$  i dobijene su sa srednjom pogreškom  $\pm 0'',14$ . Za iste dobijene su odgovarajuće vrijednosti:

a) $\Sigma \xi = + 162'',30 \pm 1'',47$	$\Sigma \xi^2 = 13511 \pm 32$
b) $= + 40,81 \pm 1,47$	$9530 \pm 32$
c) $= + 126,09 \pm 1,47$	$9215 \pm 32$

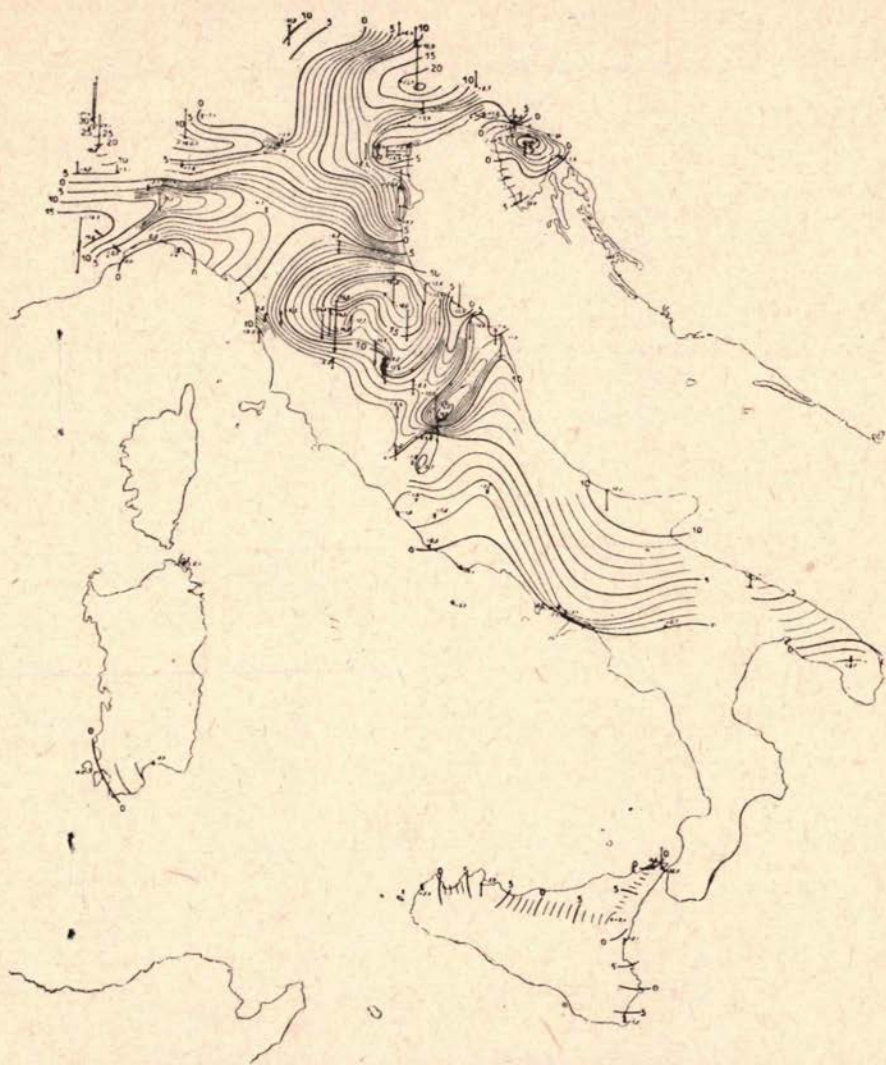
Na temelju ovoga možemo zaključiti, da ako damo talijanskoj geodetskoj mreži pomak u širinu od  $-1''49, 0''39, -1''1$  suma meridijanskih komponenata svih opažanih otklona biti će jednaka nuli za sva tri sferoida koja su uzeta u obzir. Prema dobijenim rezultatima, orijentacija b) izgleda da najbolje zadovoljava praktičnim geodetskim radovima. Otkloni meridijana za sva tri sferoida su obuhvaćeni u intervalu  $-30'' + 19''$ .

Za susjedne zemlje Italije imamo na pr. intervale:

zemlja:	broj opažanja:	interval:
Francuska	8	$-46''; + 19$
Jugoslavija	8	$- 7 ; + 3$
Švicarska	54	$- 20 ; + 23$

## Meridijanske komponente

Na crtežu (Sl. 6) prikazani su vektorima intenziteti komponenata meridijana, nacrtani na jednoj Merkatovoj karti i linije iste vrijednosti —  $\xi = \text{konstanta}$  za sferoid 3.



Slika 6 — Otkloni težišnice meridijanske komponente

Možemo promatrati hod krivulje  $\xi = 0$  koja ide podno Apenina Ligure, prolazi Genovom i na zapadu tiče vrh Noli.

Istočna strana krivulje ide od Genove na sjever prema brdu Telegraf, a zatim prema moru. Javlja se više na jug k brdu Pisarello u ravnini Agro

Pontino, prelazi sjeverno od brda Circeo te paralelno obalom Tirenskog mora i Apenina blizu Napulja, zatim među ovim i Apenina Lukano na visini brda Foi Picerna, duž južnih granica Murge, prelazeći na poluotok Salentina između Bari-a i Taranta. Pojavljuje se ponovo na otocima Sicilije i Sardinije.

Možemo reći da ova linija kad bi je svu spojili obuhvaća gornji i donji Tiren.

Druga linija  $\xi = 0$  ide Padskom dolinom prvo duž toka rijeke Po, zatim paralelno sa hrptom Toskanskih Apenina i vjerovatno je da se ona veže sa krivuljom  $\xi = 0$  koja se javlja u Istri, ili da pripada djelu krivulje  $\xi = 0$  koja ide oko brda Luro. Drugi dio krivulje  $\xi = 0$  javlja se sjeverno rubom brdovitih masiva koji obuhvataju Bernina, Adamello, Ortler, i t. d. U glavnom pozitivni i negativni otkloni pojavljuju se u skladu sa nepravilnostima koje postoje u fizičkoj površini zemlje u okolini pojedinih stanica.

### Mjerenja astronomskih duljina. Ortodromske komponente

Za ortodromske komponente  $\eta$  koje se dobiju iz jednačbe

$$(13) \quad \eta = \Delta \lambda \cos \varphi$$

korišteni su podaci sa 37 stanica; od ovih 26 pripada točkama I. reda državne mreže, 2 točkama II. reda, 1 točki III. reda, a ostale astronomskim opservatorijama.

Ove diferencije nisu reducirane na niveau mora, jer u formuli koja služi za ovu redukciju

$$(14) \quad r_H'' = \frac{H}{N \cos^2 \varphi \text{ arc } 1''} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta \lambda}$$

član  $\frac{\Delta g}{\Delta \lambda}$  uvijek je jednak nuli u koliko je gravitacija funkcija same širine.

Redukcija na srednji pol određena sa

$$(15) \quad \lambda - \lambda_0 = (x \sin \lambda - \gamma \cos \lambda) \tan \varphi$$

uvijek je dala manje rezultate od srednje pogreške, pa stoga nije uzimana u obzir.

Za tri sferoida, koja su uzeta u obzir, vrijednosti za  $\eta$  nalaze se unutar intervala  $-3'$  do  $+2''$ .

### Mjerenje azimuta i njihove redukcije

Druge vrijednosti za  $\eta$  njih 79 dobijene su iz opažanja azimuta, nakon što su se uzele u obzir popravke za dnevnu aberaciju, računane prema formuli:

$$(16) \quad \Delta \alpha = \pm 0'',321 \cos \varphi \operatorname{cosec} z \begin{cases} + \text{gor. kulm.} \\ - \text{donja kulm} \end{cases}$$

gdje je sa z označena zenitna daljina, te redukcije na srednji pol trigonometrijskog centra geodetske linije na nivaeu plovu mora.

Redukcija na srednji pol dobija se formulom

$$(17) \quad \alpha - \alpha_0 = (-x \sin \lambda + y \cos \lambda) \sec \varphi$$

i određene su vrijednosti sadržane između  $-0'',31$  i  $0'',36$ .

Redukcija na centar dobija se putem formule:

$$(18) \quad \Delta \alpha = \frac{e}{\text{arc}1''} \left\{ \frac{\sin y}{s} + \frac{\sin(\alpha + y) \tan \varphi}{N} \right\}$$

gdje je značenje simbola već poznato, i gdje se vodi računa i o konvergenciji meridijana među stanicama, čija je veličina data drugim adendom drugog člana gornje formule.

Redukcija na kut normalnih presjeka na geodetske linije računa se formulom

$$(19) \quad \varepsilon'' = - \frac{e^2 s^3 \cos^2 \varphi \sin 2\alpha}{12 a^2 \text{arc}1''}$$

u kojoj je sa  $e^2$  označen elipsoidni excentritet, s je udaljenost od stanice do vizurne točke,  $\varphi$  širina stanice,  $\alpha$  opažani azimut, a polumjer na ekvatoru elipsoida.

Jedan ili dva stota dijela seksagezimalne sekunde dobijene su samo za dvije putanje duge 56 i 116 km.

Redukcija na nivaeu plovu mora računata je pomoću formule:

$$(20) \quad r_H = \frac{e^2 \cos \varphi \sin 2\alpha}{2a \text{arc}1''} H_c + 0,00529 \frac{\sin 2\varphi \sin \alpha}{\text{s.a. arc}1''} H_s (H_s - H_c) + \\ + 0,00529 \frac{\sin 2\varphi \sin \alpha}{2a^2 \text{arc}1''} s \cdot H_s$$

u kojoj prvi član ima najveći udio, te dovodi do činjenice da dvije normale na elipsoid nisu u istoj ravnini. Stoga, ako se vizurna točka C nalazi na visini  $H_c$  elipsoida, normalna se ravnina za stanicu S ne će podudarati sa ravinom također normalnom na S (kote  $H_s$ ) prolazeći podnožjem vertikale vizurne točke C, što je zapravo ono što nas zanima. Prvi član predhodne jednačbe uzima u obzir ove okolnosti.

Druga dva člana jednadžbe proizlaze iz činjenice, da linija sile u stajalištu nije pravolinijska nego pokazuje infleksiju, što prouzrokuje infleksiju vertikale i izaziva efekat koji se može usporediti pogrešci vertikalnosti glavne osi instrumenta, a prvenstveno utječe ako vizurna točka C i stajalište S nisu na istoj visini, pa redukcija kuteva na horizont zavisi od same kote  $H_s$ .

Numerički koeficijent upotrebljen u gornjoj jednadžbi dobijamo iz:

$$(21) \quad \frac{1}{g} \frac{\Delta g}{\Delta \varphi} = 0,00529 \sin 2\varphi$$

uzimajući u obzir Helmertovu formulu, koja izražava normalnu gravitaciju na zemaljskom elipsoidu.

Veličine nađene za ovaj popravak (ukupno) za sve stanice obuhvaćeni su u intervalu  $-0''.06$  i  $+0''.07$ .

Uz poznate ravne koordinate točaka, koje se računaju jedna za drugom u ravnoj konformnoj Gaussovoj projekciji s obzirom na usvojena tri elipsoida, određeni su geodetski azimuti, nakon računanja redukcije kuteva  $\varepsilon_{2,1}$  i  $\varepsilon_{1,2}$  pomoću jednadžbe:

$$(22) \quad \varepsilon_{12} = (x_1 - x_2) y_2 \frac{1}{6 \varrho N \text{arc} 1''}; \quad \varepsilon_{21} = (x_2 - x_1) 2 y_2 \frac{1}{6 \varrho N \text{arc} 1''}$$

odakle je  $2 \varepsilon_{1,2} = -\varepsilon_{2,1}$

azimuta  $\Theta$  ravnog lanca, definiranog formulom:

$$(23) \quad \text{tang} \Theta = \frac{\gamma_2}{x_2 - x_1}$$

jer se u ovim računima naročita pažnja posvećivala uvijek prvoj točki na centralnoj osovini Gaussove (zone) ( $y_1 = 0$ ), konvergencije meridijana  $\gamma_2$  u točki 2 (ukoliko je postavljeni uslov  $\gamma_1 = 0$  stalno održavan), koja je određena iz formule:

$$(24) \quad \gamma_2 = \lambda_2 \text{sil} \varphi_2 \left\{ n + \frac{1}{3} \lambda_2^2 (1 + 3\varepsilon^2 + 2\eta^4) \right\}$$

sa

$$\eta^2 = \frac{\varrho^2}{1 - \varrho^2} \cos^2 \varphi$$

Takovi geodetski azimuti kako je poznato izraženi su pomoću

$$\alpha_{12} = \Theta + \varepsilon_{12}$$

$$\alpha_{21} = 180^\circ + \gamma_2 + \Theta - \varepsilon_{21}$$

Srednja pogreška astronomske određivanja azimuta jednaka je  $\pm 0'',32$ .

Nakon određivanja razlika  $\alpha_e - \alpha_g$  računaju se  $\eta$  sa formulom  $\eta = (\alpha_e - \alpha_g) \cdot \text{ctg} \varphi$  i rezultati za stanice, gdje je bila opažana i dužina, međusobno se uspoređuju, a nakon toga računa srednja vrijednost. Ove vrijednosti zajedno sa drugima, koje odgovaraju točkama na kojima nije bila određena dužina, omogućile su da za tri izabrana sferoida odredimo 58, 58 i 72 veličine za  $\eta$ .

U odnosu na izloženo za varijacije meridijana, sakupili smo u slijedećoj tabeli sume:

Sferoid	$\Sigma \eta$	$\Sigma \eta^2$
a)	$+ 72'',46 \pm 2'',56$	$7267 \pm 51$
b)	$+ 271,73 \pm 2,29$	$6351 \pm 48$
c)	$+ 262,30 \pm 2,29$	$5922 \pm 48$

odakle možemo zaključiti da bi geodetska mreža morala pretrpiti redom ortodromski pomak s obzirom na tri sferoida od  $-0'',98$ ,  $-4'',68$ ,  $-4'',52$ , a odatle i u dužini oko  $-1'',3$ ,  $-6'',5$ ,  $-6'',3$ .

Interval u kome se mijenjaju vrijednosti za  $\eta$  za sva tri sferoida jednak je: cca  $-19''$ ; 30.



Slika 7 — Otkloni težišnice ortodromske komponente

Za Francusku i Jugoslaviju imamo prema gornjem ( $-36''$ ;  $+63''$ ) i ( $-28''$ ;  $+1''$ ).

Na crtežu slika 7 su označeni sa strelicama ortodromski otkloni i data je slika krivulje  $-\eta = \text{konst.}$

Iz ovog grafikona napose se može uočiti hod krivulje  $\eta = 0$ .

U Padskoj nizini sve krivulje skupa ocrtavaju poznatu geodetsku anomaliju.

### Totalni otkloni

Razmatrajući u svjetlosti teorije pogrešaka iznose koje prikazuju Laplaceove jednadžbe, koji se dobivaju iz izvršenih mjerenja, može se zaključiti da Laplaceove jednadžbe ne služe toliko za kontrolu točnosti astronomskih rezultata, koliko da se istaknu pogreške geodetskih veza, a odatle odredi stepen torzije mreže nakon izravnjanja. Osim toga se vidi da pogreška geodetskog azimuta raste sa povećanjem drugog korjena broja kuteva u mreži, upotrebljenih za određivanje samog azimuta.

S obzirom na formule (5) računati su svi totalni otkloni  $\epsilon$  i azimut  $\gamma$  gdje se sa  $\epsilon$ , podrazumjeva kutna udaljenost između astronomskog i geoidnog zenita, a pod  $\gamma$  azimut ravnine određene objema normalama geoidnom i elipsoidnom.

Uzimajući u obzir sve otklone kojima raspolažemo za tri elipsoida računata je suma prema

$$\frac{1}{n} (\Sigma \eta^2 + \Sigma \xi^2)$$

odakle su se dobili slijedeći rezultati:

$$217 \quad - \quad 193 \quad - \quad 183$$

koji nas vode do zaključka: za određena astronomska i geodetska opažanja je najpovoljniji sferoid za talijansku mrežu onaj pod C t. j. internacionalni elipsoid orijentiran na Rim Monte Mario; među onima sa Besselovim elipsoidom, podesniji je onaj sa ishodištem u Rimu, Monte Mario, od onog orijentiranog u Genovi.

Totalni otkloni su opterećeni pogreškama koje se nalaze u granicama  $\pm 0''14$  i  $\pm 0''30$ .

Uspoređivanjem pojedinih totalnih otklona koji se odnose na tri sferoida dobijamo:  $6''$  između onih Besselovih sa orjentacijom Genova i Rim Monte Mario i cca  $3''$  između onih Bessela i internacionalnog sa ishodištem u Monte Mario.

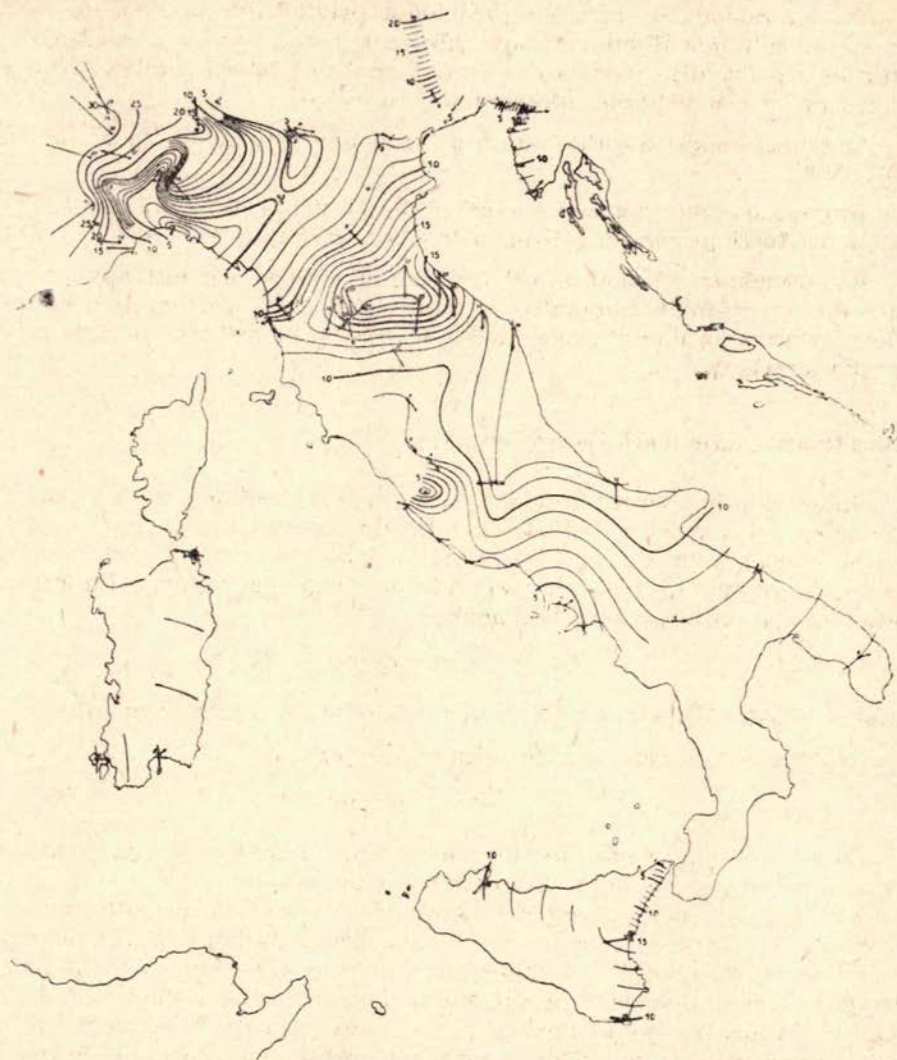
Ovakav način uspoređivanja koliko je poznato učinio je u Holandiji Prof. Huevelink za 15 stanica za internacionalni i Besselov referenc elipsoid sa zajedničkim ishodištem u Aucland-u, te u Egiptu duž dvaju lanaca koji su razvijeni između Kaira i Alameina i od Alameina do Matruka, upotrebivši Helmertov elipsoid i onaj internacionalni.

Uspoređenja su pokazala veoma male razlike, manje od  $1''$ .

U crtežu (slika 8) su označeni totalni otkloni sa njihovim azimutima uvećanim jednim kutem (na ravnini), kako bi se označilo privlačenje viska. Taj grafikon je upotpunjen krivuljama  $\epsilon = \text{konst}$ .



Ispitivajući grafikon vidimo da svi otkloni izuzev onaj Tortone imaju azimut u trećem i četvrtom kvadrantu, što ukazuje da između Tortone i drugih stanica postoji linija gdje je privlačna snaga jednaka nuli.



Slika 8 — Totalni otkloni

Otkloni južno od paralela Torina imaju simetrične smjerove s obzirom na one na sjeveru iste paralele. Na prve nedvojbenu utječu Alpe uz more i Liguriju, a na druge one od Graie i Pennine. Svi totalni otkloni reiona Italije, koji su do sada opažani, nalaze se u drugom i trećem kvadrantu. Izuzetak čine samo brdo Pisarello, otok Ponza, Napulj i Lecce. Otkloni opažani u Siciliji svi su upravljani prema unutrašnjosti otoka.

Totalni otkloni S. Egidio, brda Peglia, brda Cimino i brda Soratte su međusobno skoro paralelne i usmjerene su prema Apeninima Abruzza, gdje su ipak upravljene i one brda Luro, brda Conero i Torre Scapezano.

Prema Barbieriu smjerovi projekcija privlačenja za opažane stanice uzduž meridijana Mondove konvergiraju k jednom mjestu Aleksandrine, gdje bi u podzemlju morala postojati neznatna gustoća zemlje. U toj zoni se zatim ima sa velikom aproksimacijom  $\varepsilon = 0$ .

Iz crteža mogu se viditi putanje linija iste privlačne sile 5", 10", 20", 25" i 30".

Najveći do sada opaženi totalni otklon jest cca 31". Taj se otklon pojavio na točki prvog reda Eremo di Cherasco (kota 400 m).

Za utvrđivanje eventualnih uzajamnih odnosa između opažane gravitacije ili njihovih anomalija i totalnih otklona vertikalala, očekuje se objavljivanje gravimetrijske karte Italije, koju će uskoro izdati Italijanska komisija.

### Određivanje najpovoljnije orijentacije

Suvišno je napominjati da je totalni otklon vertikalala usko vezan kako za orijentaciju referenc elipsoida tako i njegove dimenzije. Sa raspoloživim podacima može se odrediti koja je orijentacija za određeno područje najbolja, ili bolje najprikladnija. Odgovor na ovaj interesantan problem dat je osnovnom jednadžbom

$$\Sigma \varepsilon^2 = \text{minimum}$$

gdje se  $\Sigma$  odnosi na sve točke područja, gdje postoje totalni otkloni.

Predhodna jednadžba može biti zamjenjena sa

$$\Sigma \xi^2 + \Sigma \eta^2 = \text{minimum}$$

Zamjenili smo geodetske vrijednosti koje ulaze u  $\xi$  i  $\eta$  vrijednostima koje se odnose na orijentaciju a) (Bessel-Genova) koji je predstavljen vrijednostima  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\alpha_0$  određene astronomski (vrijednosti koje su prije i spomenute) i korigirane odgovarajućim veličinama  $d\varphi_0$  i  $d\lambda_0$ . Sa ovom primjedbom komponente  $\xi$  i  $\eta$  postaju funkcije onih nepoznanica, čije se vrijednosti mogu odrediti predhodnom jednadžbom koristeći metodu najmanjih kvadrata, što je neovisno o zakonu raspodjele totalnih otklona, koji nemaju ništa zajedničko sa vrstama grešaka opažanja, ali su veličine koje se mogu računati sa jednom vjerojatnom pogreškom mnogo manjom od njihovih veličina.

$$(25) \quad \xi = \varphi_a - \varphi_g; \quad \eta_\lambda = (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi_g; \quad \eta_\alpha = (\alpha_a - \alpha_g) \cotg \varphi_g$$

koje odgovaraju jednoj stanici sa razlikom

$$(26) \quad \Delta \varphi = \varphi - \varphi_0 \quad \Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$$

iz točke ishodišta (Genova), transformiraju se u:

$$(27) \quad \begin{cases} p_1 \xi_0 + p_2 \eta_0 - (\varphi_a - \varphi_g) = \xi' \\ q_1 \xi_0 + q_2 \eta_0 - (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi_g = \eta'_\lambda \\ r_1 \xi_0 + r_2 \eta_0 - (\alpha_a - \alpha_g) \cotg \varphi_g = \eta'_\alpha \end{cases}$$

gdje je postavljeno  $\xi_0 \eta_0$  za  $d\varphi_0$  odnosno  $d\lambda_0$ .

Koeficijenti  $p_i, q_i, r_i$  imaju nešto složene oblike, ali oni se inače mogu naći u geodetskim udžbenicima (vidi na pr. one Pizetia i pisca članka).

Radi se o rješenju spomenutog sistema, protegnutog na sva izvršena mjerenja, metodom najmanjih kvadrata kao da bi  $\xi', \eta'_\lambda, \eta'_\alpha$  bile vrijednosti pravih pogrešaka preostalih iz opažanja, koje proizlaze iz jednog sistema izvedenih jednadžbi, jednakih težina, premda su — kako proizlazi iz dosada rečenog — to fizikalne veličine, koje se određuju sa dosta velikom, ali ne uvijek jednakom točnošću.

Tri jednadžbe napisane u onom obliku mogu se smatrati kao da su dobijene diferenciranjem serije Legendre-ovih jednadžbi, koje se odnose na transformaciju geografskih koordinata, a vrijede za područje u granicama širine i dužine  $\pm 10^\circ$ .

Uvođenjem u spomenuti sistem podataka, koji nam stoje na raspoloženju, a sastoje se od 111 jednadžbi za prvi tip jednadžbe, 36 za drugi i 45 a treći tip jednadžbe (27) dobili smo jedan sistem od 192 jednadžbe sa 2 nepoznanice  $\xi_0$  i  $\eta_0$ . Nakon rješenja, prethodno određivši za svaku nepoznanicu koeficijente  $p_i, q_i, r_i$ , dobili su se slijedeći rezultati:

$$\xi_0 = 1''35 \quad \eta_0 = 0''27$$

kojima odgovara veličina za totalni otklon

$$\varepsilon_0 = 1''38$$

i za azimut

$$\gamma_0 = 11^\circ 27'$$

Uvođenjem dobijenih vrijednosti za  $\xi_0 \eta_0$  u razne jednadžbe sistema mogu se odrediti prave veličine za  $\xi, \eta'_\lambda, \eta'_\alpha$

Dobijeno rješenje nam ukazuje, da se pravac vertikale u ishodištu (Genova) naginje prema sjeveru, a kao posljedica toga Besselov referenc elipsoid odstupa cca  $1''35$  od srednjeg talijanskog geoida. Dosljedno tome, ako se želi sačuvati referenc elipsoid, trebali bi geodetski elementi dobiti slijedeće redukcije:

za širinu ishodišta —  $1''35$  dok za dužinu ishodišta —  $0''38$ .

Računanje ne može dati mogućnost određivanja točke, u kojoj je  $\xi_0 = 0 \eta_0 = 0$ . U koliko ova točka ili ove točke postoje, mogu se dobiti iz karata za konstantno  $\xi = \text{konst}$  i  $\eta = \text{konst}$ , preklapanjem.

Prema našem mišljenju bilo je razborito, da se napusti Genova i usvoji za ishodište Monte Mario gdje u odnosu na Genovu imamo  $\xi = 1''08$ .

Analogna ispitivanja su učinjena u Indiji i Japanu, dobijeni su rezultati:

Zemlje	$\xi_0$	$\eta_0$
Indija	+ 0''31	— 2''89
Japan	— 9,46	+ 9,35

Raspoloživi materijal daje mogućnost rješenja jednog drugog problema ispitivanja najpovoljnijih dimenzija elipsoida, ako svi ostali elementi ostanu nepromjenjeni.

Označavajući sa **d e** i **d a** promjene koje moraju pretrpjeti excentritet i polumjer zemaljskog referenc elipsoida, dobit ćemo formule izvedene iz serije Legendre pomoću zgodnog diferenciranja:

$$(28) \quad p_3 \frac{d a}{a} + p_4 d e + \xi' = \xi$$

$$q_3 \frac{d a}{a} + q_4 d e + \eta'_\lambda = \eta_\lambda$$

$$r_3 \frac{d a}{a} + r_4 d e + \eta'_\alpha = \eta_\alpha$$

gdje su koeficijenti  $p_i$  i  $q_i$ ,  $r_i$  dati u citiranim radovima pa ih stoga ne doznosimo jer su i onako prilično složene.

Sa datim podacima računati su spomenuti koeficijenti za jedan sistem od 192 jednadžbe i dobijeno je 111 vrijednosti za koeficijente  $p_3$  i  $p_4$ , 36 vrijednosti za koeficijente  $q_3$  i  $q_4$ , 45 vrijednosti za ostale  $r_3$  i  $r_4$ .

Rješenjem sistema od 192 jednadžbe sa dvije nepoznanice **d a** i **d e**, metodom najmanjih kvadrata dobili smo:

$$d a = (1438,70 \pm 637,51) \text{ m}$$

$$d e = 0,00142225 \pm 0,00160192$$

odakle proizlazi da nesigurnost određivanja korekcije excentriteta je veća od same korekcije. To se moglo predvidjeti, jer srednje širine nisu prikladne za računanje vrijednosti korekcije excentriteta pola.

Na bazi dobijenih rezultata najpovoljnije dimenzije referenc elipsoida Italije su slijedeće:

$$a = (6378836 \pm 637,5) \text{ m}$$

$$e = 0,0831191 \pm 0,00160192$$

veće od ovih analognih dimenzija internacionalnog elipsoida:

$$a = 6378388 \text{ m}$$

$$e = 0,0819919$$

Razlike međutim ulaze u granice srednjih pogrešaka.

Imamo tako jednu sigurnu potvrdu da se lokalni elipsoid Italije više približava internacionalnom elipsoidu, nego Besselovom elipsoidu.

## Profil geoida

Tako nadopunjenim analitičkim ispitivanjem može se reći nešto o profilu geoida duž nekih niveliranih linija.

Postepeno spajajući vrhove  $P_1, P_2, P_3, \dots$  u kojima postoje komponente  $\xi_i, \eta_i$  otklona težišnice dobija se jedan poligon čiji vrhovi su utvrđeni vlastitim geografskim elipsoidnim koordinatama.

Označavajući sa  $\bar{\epsilon}_i$  otklon sa  $\gamma_i$  njegov azimut, komponenta  $\Gamma_i$  za  $\epsilon_i$  duž poteza  $P_i$  i  $P_{i+1}$  azimuta  $\alpha_i$  u  $P_i$  se određuje iz

$$(29) \quad \Gamma_i = \epsilon_i \cos(\gamma_i - \alpha_i) = \bar{\xi}_i \cos \alpha_i - \eta_i \sin \alpha_i$$

čime je geometrijski prikazana veličina kuta depresije tangente na nivo površinu koja odgovara površini elipsoida, u pravcu određenom azimutom  $\alpha_i$ .

U slučaju da je  $\alpha_i = 0$ ,  $\Gamma_i$  će biti jednako  $\bar{\xi}_i$  i odatle se vidi da je postavljanjem profila uz meridijan nepotrebno računanje  $\Gamma_i$ , to isto vrijedi i za  $\alpha = 90^\circ$ , u kojem se slučaju  $\Gamma_i$  identificiraju sa  $\eta_i$ . Dakle postavljanjem profila duž pravca meridijana suvišno je mjerenje dužina i azimuta, jer su dovoljna mjerenja širine, koja se uostalom sa lakoćom izvode.

Sa određenim komponentama u vrhovima  $P_1, P_2, P_3, \dots$  poligona i označenim dužinama strana  $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_4, \dots$  sa  $s_1, s_2, s_3, \dots$  mogu se na milimetarskom papiru na apsisi nanijeti točke  $P_1, P_2, \dots$  tako da razlike između njih budu jednake udaljenostima  $s_1, s_2, \dots$  a na ordinatama nanijeti veličine  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ . Spajajući kontinuiranom krivuljom krajeve komponenata dobija se grafički prikaz zakon promjenjivosti komponente  $\Gamma$ . Označimo li sada sa  $\Delta N$  normalni pomak nivoske površine u odnosu na elipsoid pri prelazu od  $P_i$  na  $P_{i+1}$  dobija se

$$(30) \quad \text{tang} \Gamma = - \frac{\Delta N}{\Delta s}$$

i dalje s obzirom da se radi o veoma malim kutevima

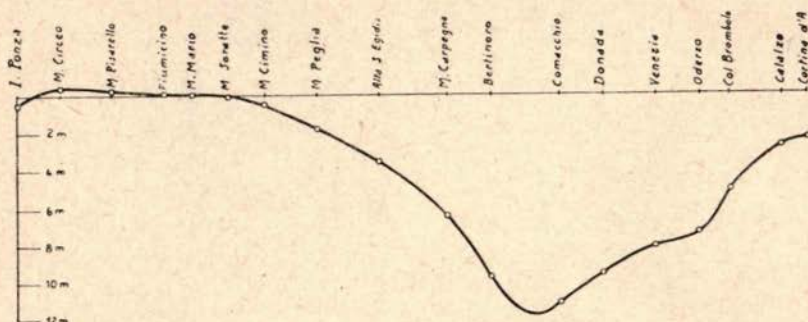
$$(31) \quad \Gamma'' = - \frac{\Delta N}{\Delta s \text{arc} 1''}$$

Integrirajući dobijamo

$$(32) \quad -\Delta N = \int_{P_1}^{P_i} \Gamma ds = \text{arc} 1'' \int_{P_1}^{P_i} \Gamma'' ds$$

a odatle mogućnost određivanja  $-\Delta N$  postepeno za sve vrhove poligona. Integriranje raznostranih trapeza može se izvesti mrežom ili mehanički pomoću planimetra.

U crtežu slika 9 prikazan je profil geoida duž meridijana Rima, sve do Cortine d'Ampezzo, polazeći sa otoka Ponza u ukupnoj dužini od preko 700 km, kojega je već uzimao u razmatranje Reina a i mi sami. Iz ovog profila se može vidjeti jedna osjetna deviacija u širini između Bertinoro i Comacchio (26" na dužini od 60 km) koja odgovara gradijentu od 0"74 na kilometar. Više na sjever, kod Calalzo u središtu dolomitskih Alpa, otklon izgleda mnogo blaži. Otklon se povećava od otoka Ponza do brda Carpegna u centru lanca Appenina čineći progresivnu depresiju geoida s obzirom na referenc elipsoid. Izuzetan je slučaj pojave na brdu Peglia i na Alta S. Egidio na jug Apenina gdje je otklon u smislu protivan onome koji bi se očekivao uslijed privlačne snage brda.



Slika 9 — Profil geoida uzduž meridijana Rima

Ova činjenica, već poznata, otkriva nepravilnosti u gustoći na velikim površinama zemaljske kore, regionalnog karaktera, i odlično se podudara sa geološkim konstatacijama.

Već samim pogledom na profil vidi se puna i jasna geoidna undulacija (val).

Konstruirani su i drugi profili, i to slijedeći:

- 1 — meridijan Pachino—Lissa, km 755
- 2 — " Genova—Milano, km 144
- 3 — " Mondovi—Colma, di Mombarone, km 174
- 4 — " Cagliari—Desenzano, km 710
- 5 — paralela Torino—Trieste, km 461
- 6 — " Livorno—Lissa, km 552
- 7 — " Guardia—Vecchia—Saseno, km 951
- 8 — " 45° da Torino a Pola, km 524
- 9 — transverzalni presjek: M. te Colma di Mombarone—Rimini, km 432
- 10 — " " : Torino—Alta S. Egidio, km 452
- 11 — " " : Carloforte—Palermo, km 389.

Rezultati ovih profila prikazani su u spomenutoj raspravi. Ovdje ćemo spomenuti, da profili duž paralela koji idu do istočnih strana jadranske obale, otkrivaju u tom rajonu povišenje geoida.

Nakon spomenutih računa za sve vrhove koji su uzeti u razmatranje dobijene su vrijednosti za svakoga od njih —  $\Delta N$  pošto se uzelo  $\Delta N = 0$  za ishodišnu točku Rim, Monte Mario. Tako dobijenim kotiranim planom konstruirane su izohipse i prikazane u posebnom grafikonu. Najveća depresija iznosi cca 17 m kod Sasena, a najveća elevacija cca 13 m kod Pavia. Može se uočiti označena depresija u dolini Pada i u centralnoj Italiji krivulja 5, koja zatvara brdoviti lanac Pratomagna. U cjelosti su jasne ondulacije koje se protežu na cijeli poluotok sa povišenjem u Calabrij. U Tortoni, gdje je zabilježena jaka geoidna depresija dobija se kao odgovarajuća jedna zona intenzivne negativne gravimetrijske anomalije. I kako se depresija umanjuje približavanjem granicama Francuske i Švicarske, tako i gravimetrijske anomalije postaju sve manje intenziteta prelazeći iz negativne u pozitivnu. Sa ovom pojavom koja se uostalom opetuje i u drugim mjestima, htjelo se sa jasnoćom brojeva potvrditi dvije činjenice: geodetska ondulacija i gravimetrijske anomalije imaju zajednički uzrok.

### Analički prikaz geoidnih ondulacija

Konačno pokušalo se dati jedan analitički prikaz geoidnih ondulacija i odatle konstrukciju normalnog polja komponenata otklona vertikalna.

Ove analize se sastoje u određivanju numeričkih vrijednosti jednog stanovitog broja koeficijenata odgovarajućih skraćenih serija, kao funkcija geografskih koordinata pojedinih vrhova, koje mogu da predstavljaju komponente  $\xi$  i  $\eta$ . Te serije služe da daju teoretske vrijednosti komponenata i određuju dotle normalna područja samih komponenata, na sličan način kako se određuje u gravimetriji za normalnu gravitaciju.

Označimo li sa  $\Delta\varphi''$  i  $\Delta\lambda''$  razlike u sekundama među širinom i dužinom točaka koje su uzete u razmatranje i one ishodišne točke, analitička forma, prikladna da prikaže geodetske ondulacije na parabolični način, može biti oblika:

$$(33) \quad \Delta N = (A_1 \Delta\varphi'' + B_1 \Delta\lambda'') \text{arc } 1'' + \\ + (A_2 \Delta\varphi''^2 + C_2 \Delta\varphi'' \Delta\lambda'' + B_2 \Delta\lambda''^2) \text{arc}^2 1'' + \\ + (A_3 \Delta\varphi''^3 + D_3 \Delta\varphi''^2 \Delta\lambda'' + E_3 \Delta\varphi'' \Delta\lambda''^2 + B_3 \Delta\lambda''^3) \text{arc}^3 1'' + \\ + \dots$$

sa  $A_1 \dots B_1 \dots$  označene su konstante koje treba odrediti vrijednostima  $\xi$  i  $\eta$ .

Ako označimo sa  $ds_m$  i  $ds_p$  linearne elemente elipsoidnih lukova meridijana i paralela imat ćemo:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d(\Delta N)}{ds_m} = -\frac{d(\Delta N)}{q d\varphi} = \xi \\ -\frac{d(\Delta N)}{ds_p} = -\frac{d(\Delta N)}{r dx} = \eta \end{array} \right.$$

te ako stavimo za  $\alpha = \varphi$ ,  $\cos \varphi = r$ , one se transformiraju u

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d(\Delta N)}{d\eta} = a \xi \\ -\frac{d(\Delta N)}{d\lambda} = a \cos \varphi \cdot \eta \end{array} \right.$$

Ako uvedemo u ove izraze vrijednost za  $\Delta N$ , prelaze u:

$$(36) \quad a \xi'' \text{arc} 1'' = A_1 + (2A_2 \Delta \varphi'' + C_2 \Delta \lambda'') \text{arc} 1'' + \\ + (3A_3 \Delta \varphi''^2 + 2D_3 \Delta \varphi'' \Delta \lambda' + E_3 \Delta \lambda''^2) \text{arc}^2 1'' \\ + \dots$$

$$(37) \quad a \cos \varphi \eta'' \text{arc} 1'' = B_1 + (2B_2 \Delta \lambda'' + C_2 \Delta \varphi'') \text{arc} 1'' + \\ + (3B_3 \Delta \lambda''^2 + 2E_3 \Delta \lambda'' \Delta \varphi'' + D_3 \Delta \varphi''^2) \text{arc}^2 1'' + \\ + \dots$$

koje zadovoljavaju klasičnu jednadžbu Villarceau:

$$(38) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = \frac{\partial(\eta \cos \varphi)}{\partial \eta}$$

i čiji se koeficijenti mogu odrediti metodom najmanjih kvadrata.

Numerička primjena je učinjena; dobijene su 142 jednadžbe i sa ovima su određene vrijednosti novih nepoznanica koje su u njima sadržane. Rezultati svih ovih računanja su prikazani u Monografiji spomenutoj već više puta. U toku je posljednja numerička obrada t. j. računanje normalnih vrijednosti pomaka  $\Delta N$  sa određenim koeficijentima: i sa jednadžbama (33). Nakon toga će biti uspoređeni sa onima experimentalnim putem na način koji je prije prikazan. Usporedbom će se odrediti geoidne anomalije, koje će biti uspoređene sa gravimetrijskim anomalijama. Upozoravam da ova analitička ispitivanja mogu biti više teoretskog karaktera nego praktičnog, u koliko zakon promjena pomaka elipsoida od geoida, koji zavisi u najvećoj mjeri o nepravilnostima zemljine kore, brdskih masiva, dolina, raspodjele teških ili lakih materijala u nutrinji zemlje i t. d. bude jako nesiguran i ne bude prikladan za potpune i jasne analitičke prikaze.

Možda bi najvrijedniji bili oni računi, koji su bazirani na komponentama  $\xi$  i  $\eta$  popravljani za izostaziju i za visinu kako smo mi napravili.

Može se tako doći do geofizičkih anomalija — koje još nisu uzete u obzir — a koje bi na polju geologije dozvolile — kao gravimetrijske anomalije — nagađanje o raspodjeli gustoće podzemnih slojeva. Izvršene studije mogu onda dati isključivo praktične vrijednosti i pridružiti se drugim metodama u pitanjima ispitivanja unutrašnjosti zemlje.