

# BALANÇA DE KIBBLE O DE WATT

Albert Garcia-Benadí

## 1. Propòsit

Fins al 2019, la definició de massa feia referència a un prototip (International Prototype of the Kilogram, IPK), que era el patró natural des del 1889 i del qual es van fer diverses rèpliques per a diferents països. Malgrat totes les accions de preservació, aquestes còpies del prototip han sofert variacions respecte de l'IPK, detectades entre 1989 i 1991 [1] en el tercer exercici de comparació, amb una diferència mitjana de 25 µg. Tenint en compte que la definició d'una magnitud ha de ser inalterable en el temps i reproducible, la comunitat metrològica va considerar que era necessari un canvi. El canvi natural consisteix a vincular la magnitud de massa a constants fonamentals i, per a fer-ho, s'utilitza la balança de Kibble.

La balança de Kibble, també anomenada *balança de Watt*, és un dispositiu que permet comparar dues magnituds físiques com la massa i el corrent elèctric. A causa dels avenços realitzats en la mesura en l'àrea elèctrica, que permeten conèixer una variable amb una incertesa molt petita, el dispositiu permet definir amb una alta precisió la unitat de massa. El concepte fonamental de la balança és igualar la força de la gravetat en objectes (el pes) amb una força d'origen electromagnètic (figura 1).

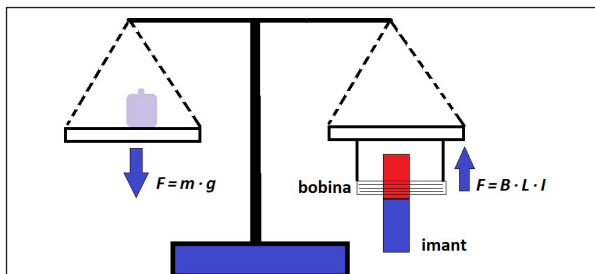


FIGURA 1. Esquema de funcionament de la balança de Kibble (font: elaboració pròpia).

Aquest fet queda palès en la decisió presa en la reunió del Comitè Consultiu per a la Massa (CCM) el 20 de maig de 2019, durant la qual es va redefinir la unitat de massa, el kilogram (kg), com: «Un kilogram es defineix fixant el valor numèric de la constant de Planck,  $h$ , com  $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ , quan s'expressa en la unitat J s, igual a  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ , en què el metre i el segon es defineixen en funció de  $c$  i de  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ »

## 2. Base teòrica

Tal com es detalla en la figura 1, l'objectiu és igualar la força gravitacional —platet esquerre— amb la força electromagnètica —platet dret— complint l'equació (1):

$$m \cdot g = B \cdot L \cdot I \quad (1)$$

on  $B$  és el camp magnètic permanent de l'imant,  $L$  és la longitud del conductor i  $I$  és la intensitat que injectem a la bobina. Com que el producte del camp magnètic per la longitud del conductor és un paràmetre complicat de calcular, s'utilitza la llei de Faraday [2], que ho relaciona amb una diferència de potencial, (2).

$$V = B \cdot L \cdot v \quad (2)$$

on  $V$  és la diferència de potencial generada pel moviment de la bobina dins del camp magnètic permanent i  $v$  és la velocitat de la bobina dins del camp magnètic.

Unificant (1) amb (2) i separant les magnituds mecàniques de les elèctriques, obtenim la relació entre la potència mecànica i l'elèctrica (3), que s'utilitza com a equació de treball:

$$m \cdot g \cdot v = V \cdot I \quad (3)$$

L'equació (3) unifica la magnitud elèctrica amb la mecànica, però a escala metrològica és necessari conèixer la relació amb les constants fonamentals. Aquesta relació es realitza basant-se en la relació dels paràmetres elèctrics, així la tensió obtinguda es desgrana amb les constants fonamentals mitjançant la tensió de Josephson, i la intensitat ho fa amb la resistència de l'efecte Hall quàntic mitjançant un pont de resistències. A continuació, es detallen aquestes relacions, que són dutes a terme en les institucions de metrologia nacionals (NMI).

### 2.1. Sistema de tensió Josephson

L'efecte Josephson [3] es produeix en dos superconductors que estan feblement acoblats —per exemple, separant-los amb una capa d'aïllant d'uns pocs nanòmetres de gruix— i que s'irradien amb una ona electromagnètica —per exemple, amb microones. En aquestes condicions,

entre els dos superconductors es crea una diferència de potencial que només depèn de constants fonamentals, del nombre d'acoblements i de la freqüència amb què s'irradia (4):

$$V = n_1 \cdot \frac{h}{2e} \cdot f = n_1 \cdot \frac{f}{K_J} \quad (4)$$

on  $f$  és la freqüència de les microones,  $n_1$  és el nombre d'unions o acoblements,  $h$  és la constant de Planck i  $e$  és la càrrega de l'electró.

En la realitat, la tensió que es crea és molt petita i necessitem un gran nombre d'unions,  $n_1$ , per a poder comparar-ho amb la tensió que genera la balança.

## 2.2. Resistència de l'efecte Hall quàntic

L'efecte Hall quàntic apareix amb sistemes d'electrons de dues dimensions quan estan sotmesos a un fort camp magnètic i a baixes temperatures. L'efecte consisteix en el fet que la conductivitat elèctrica, en aquestes condicions, pren valors quantificats. Per tant, si la conductivitat elèctrica està quantificada, també ho està la resistència elèctrica [4].

$$R = \frac{h}{e^2} \cdot r = R_K \cdot r \quad (5)$$

on  $r$  és el quocient propi del pont de resistències,  $h$  és la constant de Planck i  $e$  és la càrrega de l'electró. També es presenta el paràmetre  $R_K$ —en honor del seu descobridor, Klaus von Klitzing—, que ha anat prenent valors acordats en diferents reunions del Comitè Internacional per Pesos i Mesures (CIPM) i s'utilitza per al calibratge de les resistències elèctriques.

Gràcies a la llei d'Ohm [5], que determina la relació entre la intensitat, la resistència i la tensió, obtenim (6), en què les dues darreres magnituds depenen de constants fonamentals, tal com hem vist en els punts anteriors.

$$I = \frac{V}{R} \quad (6)$$

En aquest punt ja som capaços de determinar la potència elèctrica detallada en (3) amb les dependències de les constants fonamentals (4-6) per a obtenir (7):

$$V \cdot I = n_1 \cdot n_2 \cdot \frac{h}{4 \cdot r} \cdot f_1 \cdot f_2 \quad (7)$$

on apareixen dos valors d'acoblament — $n_1$  i  $n_2$ —, així com dues freqüències de la radiació que s'aplica — $f_1$  i  $f_2$ —, ja que es presenta de forma general.

Treballant les equacions (3) i (7), obtenim l'expressió en termes de constants fonamentals de la massa (8):

$$m = n_1 \cdot n_2 \cdot \frac{h}{4 \cdot r} \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \left( \frac{1}{g \cdot v} \right) \quad (8)$$

La taula 1 resumeix les unitats de cada una de les variables de (8):

TAULA 1. Descripció del paràmetre i la seva unitat associada de (8)

Paràmetre	Unitat
$n_i$	adimensional
$h$	J · s
$f_i$	Hz = s <sup>-1</sup>
$g$	m · s <sup>-2</sup>
$v$	m · s <sup>-1</sup>
$r$	adimensional

## 3. Propagació de la incertesa

Abans de realitzar la propagació dels errors pel càlcul de la incertesa associada, definim l'equació (9), que prové de (3), d'on hem aïllat la massa.

$$m = \frac{V \cdot I}{g \cdot v} \quad (9)$$

De la propagació de la incertesa de (9), obtenim l'equació de forma simplificada (10):

$$u(m)^2 = \left( \frac{m}{V} \cdot u(V) \right)^2 + \left( \frac{m}{I} \cdot u(I) \right)^2 + \left( \frac{m}{g} \cdot u(g) \right)^2 + \left( \frac{m}{v} \cdot u(v) \right)^2 = \Sigma \left( \frac{m}{x_i} \cdot u(x_i) \right)^2 \quad (10)$$

on  $u(x_i)$  és el quocient entre la incertesa eixamplada de la magnitud  $x_i$  i el seu factor de cobriment. La incertesa eixamplada de la magnitud s'ha obtingut tenint en compte els errors de tipus estadístic, la resolució de l'equip i qualsevol altra contribució que sigui rellevant.

Com que les principals contribucions de probabilitat segueixen una distribució normal o gaussiana [6], podem assegurar que el factor de cobriment,  $k$ , per a garantir el 95 % dels casos correspon al valor 2. Amb aquestes consideracions, la incertesa eixamplada és:

$$U = k \cdot u(m) \quad (11)$$

## 4. Cas teòric

Analitzem un cas teòric d'una balança de Kibble en què es disposa de diversos equips de mesura, com un multímetre i un amperímetre, que ens permeten obtenir els valors necessaris per al càlcul de la massa.

Suposem les següents mesures i aproximacions de les lectures (taula 2), per a una massa nominal de 200 g.

TAULA 2. Paràmetres dels equips de mesura (font: *Practical engineering*, [enllaç](#))

Acrònim	Paràmetre	Lectura/Valor	Unitat	Incertesa eixamplada ( $k=2$ )
$V$	tensió	0,24	V	0,01
$I$	corrent	0,008	A	0,001
$g$	gravetat	9,79	m · s <sup>-2</sup>	0,01
$v$	velocitat de la bobina	1	mm · s <sup>-1</sup>	0,05

Amb aquests valors, el valor de la massa és (12):

$$m = \frac{0,24 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{9,79 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 0,196 \text{ kg} \quad (12)$$

La seva incertesa associada —amb les diverses contribucions— es mostra en la taula 3, seguint (10):

TAULA 3. Paràmetres dels equips de mesura

Terme	Distribució de probabilitat	Coefficient de sensibilitat	Contribució a la incertesa
$u(V)/V$	normal	$4,167/2$	0,02
$u(I)/I$	normal	$125/2$	0,0125
$u(g)/g$	normal	$0,102/2$	0,0005
$u(v)/v$	rectangular	$1000/\sqrt{3}$	0,029
$u(m)$			0,038

Unificant els valors obtenim el valor de la massa sense la comparació amb un prototip.

$$m = 0,196 \pm 0,076 \text{ kg} \quad (14)$$

## 5. Conclusions

En aquest article es detalla una sistemàtica teòrica per a definir la unitat de massa en funció de les constants fonamentals (figura 2), es realitza el càlcul teòric de propagació de la incertesa en el cas pràctic i es detalla el valor de la massa per a un cas teòric. De l'anàlisi de les dades s'aprecia que les principals contribucions a la incertesa són la intensitat elèctrica i la velocitat de la bobina i, per tant, si es vol afinar més en la lectura, aquests són els paràmetres que cal millorar.

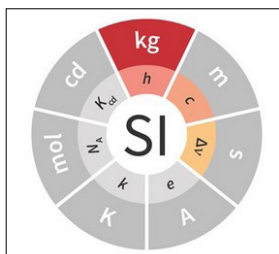


FIGURA 2. Esquema de relació entre la unitat —cercle extern— i les constants fonamentals —cercle interior— (font: BIPM, [enllaç](#)).

Avui en dia, la balança de Kibble és una realitat (figura 3) i ens permet determinar la massa amb un sistema molt robust i inalterable en el temps.

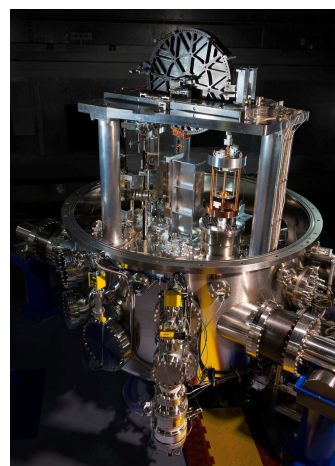


FIGURA 3. Imatge de la balança de Kibble del NIST: la NIST-4 (font: J. L. Lee / NIST, [enllaç](#)).

En l'actualitat, la Secció Catalana de Metrologia està construint la seva pròpia balança de Kibble.

## Referències

- [1] GIRARD, G. «The Third Periodic Verification of National Prototypes of the Kilogram (1988-1992)». *Metrologia*, vol. 31, núm. 4 (gener 1994), p. 317-336. DOI: 10.1088/0026-1394/31/4/007.
- [2] DAY, P. *The Philosopher's Tree: Michael Faraday's life and work in his own words*. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1999.
- [3] JOSEPHSON, B. D. «Possible new effects in superconductive tunnelling». *Phys. Lett.*, vol. 1, núm. 7 (juliol 1962), p. 251-253. DOI: 10.1016/0031-9163(62)91369-0.
- [4] TZALENCHUK, A. *et al.* «Towards a quantum resistance standard based on epitaxial graphene». *Nat. Nanotechnol.*, vol. 5, núm. 3 (març 2010), p. 186-189. DOI: 10.1038/nnano.2009.474.
- [5] SCHAGRIN, M. L. «Resistance to Ohm's Law». *Am. J. Phys.*, vol. 31, núm. 7 (juliol 1963), p. 536-547. DOI: 10.1119/1.1969620.
- [6] JCGM. «Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement». *Int. Organ. Stand. Geneva ISBN*, 2008.