

# **Modelle und Verfahren für die innerbetriebliche Versorgungslogistik von Bergwerken**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Wirtschaftswissenschaften

vorgelegt von

**Alexander Beckmann, M. Sc.**

aus Ingolstadt

genehmigt von der  
Fakultät für Energie- und Wirtschaftswissenschaften  
der Technischen Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung:

20. Juni 2022

Dekan: Prof. Dr. mont. Leonhard Ganzer

Vorsitzender der Promotionskommission: Prof. Dr. sc. pol. Roland Menges

Erster Gutachter: Prof. Dr. rer. pol. Jürgen Zimmermann

Weitere Gutachterin: Prof. Dr. rer. pol. Julia Rieck

Diese Arbeit wurde unter der CC-BY-NC-ND-Lizenz veröffentlicht  
und zur Verfügung gestellt.

# Zusammenfassung

Eine Vielzahl der Rohstoffe, die in unserer Zeit industriell verarbeitet werden, wird im Bergbau gewonnen. Die vorliegende Arbeit hat den Abbau von Kalisalz unter Tage vor Augen. Der Abbau von Salz in großen Mengen erfordert den Einsatz von Maschinen. Für deren Instandhaltung sowie die Versorgung mit Betriebsstoffen stehen unter Tage Werkstätten und Lager zur Verfügung. Zur Gewährleistung eines reibungslosen Abbaus sind zahlreiche Transporttätigkeiten erforderlich. Zu transportieren sind beispielsweise Maschinenöle, Baumaterialien, Ersatzteile, defekte Maschinenteile und Abfälle. Die möglichen Strecken zur Nutzung für Transporte sind durch das Grubengebäude vorgegeben. Das Grubengebäude wächst mit fortschreitendem Abbau der Lagerstätte, wobei im Wesentlichen die räumliche Ausdehnung der Lagerstätte die resultierende Gestalt des Grubengebäudes bestimmt. Das Streckennetz eines Grubengebäudes, das die verfügbaren Fahrwege für Fahrzeuge definiert, weist in der Regel wenig Redundanzen auf. Gründe dafür sind zum einen der Aufwand der Auffahrung von Strecken und zum anderen der Aufwand für die kontinuierliche Sicherung aller zugänglichen Bereiche des Grubengebäudes. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Bäume und die neu eingeführte Struktur des Brückengraphen, als eine verallgemeinerte Baumstruktur, zur Darstellung des Streckennetzes eines Bergwerks verwendet. Als Problemstellungen werden die kapazitierte Tourenplanung auf Bäumen und Brückengraphen, der Ein- und Mehr-Fahrzeug-Fall des Gabelstaplerproblems auf Bäumen und schließlich die Planungsaufgabe einer Transportabteilung, die Abrollcontainer zur Durchführung von Transportaufträgen nutzt, untersucht.

Für die kapazitierte Tourenplanung wird auf die Besonderheit der Problemstellung mit einer Baumstruktur eingegangen. Auf den Erkenntnissen basierend werden zwei mathematische Modelle für Brückengraphen als Streckennetz der Problemstellung vorgestellt. Zusätzlich wird ein zweistufiges Verfahren zur Näherung einer guten Lösung beschrieben. Die Anforderungen an das Gabelstaplerproblem auf Bäumen im Ein- und Mehr-Fahrzeugfall (MV)-TSCP werden beschrieben und auf dieser Grundlage mathematische Modelle formuliert. Weiter werden Möglichkeiten zur Komprimierung der Instanzen beschrieben. Während manche Instanzen des TSCP mit linearem Aufwand gelöst werden können, ist bei Vorliegen von Kurzzyklen aus Aufträgen im Allgemeinen die Lösung

eines Steinerbaumproblems erforderlich. Die betrachtete Planungsaufgabe einer Transportabteilung unterstellt fünf Basistypen von Aufträgen und ermöglicht durch deren Verknüpfung die Abbildung zahlreicher weiterer Transporttätigkeiten. Die Berücksichtigung heterogener Mitarbeiter und Fahrzeuge sowie von Kompatibilitäten zwischen Fahrzeugen, Mitarbeitern, Material- und Containertypen ermöglicht die Abbildung realer Situationen. Die Transporttätigkeiten werden als Aufträge verwaltet. Innerhalb der Planungsperiode können nicht alle Aufträge durchgeführt werden, sodass eine Auswahl zu treffen ist. Ein gemischt-ganzzahliges, lineares Modell wird für die Problemstellung formuliert. Im Anschluss wird eine Möglichkeit zur Integration einer Pausenregelung in das Modell erläutert und ein Vorgehen zur Einbeziehung einer Priorisierung bei der Bestimmung von Nutzenwerten vorgestellt. Ein deterministisches, heuristisches Lösungsverfahren wird beschrieben. Anschließend werden eine Verfahrensvariante und die Möglichkeiten zur Erweiterung der Verfahrensvarianten zu Multi-Start-Verfahren vorgestellt.

Die vorgestellten Modelle und Verfahren werden in Testläufen gegenübergestellt. Dafür kommt für mathematische Modelle kommerzielle Optimierungssoftware zum Einsatz. Die Resultate der Testläufe werden in der Arbeit beschrieben. Bezüglich der als Planungsaufgabe einer Transportabteilung untersuchten Problemstellung liefern alle Varianten des heuristischen Verfahrens gegenüber der kommerziellen Optimierungssoftware bessere Lösungen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Graphen und Digraphen . . . . .	8
2.2 Bäume . . . . .	12
2.3 Brückengraphen . . . . .	19
2.4 Handlungsreisendenproblem . . . . .	22
<b>3 Kapazitierte Tourenplanung</b>	<b>29</b>
3.1 Verwendung eines vollständigen Graphen als Streckennetz . . . . .	29
3.2 Verwendung eines Baumes als Streckennetz . . . . .	33
3.2.1 Literaturüberblick . . . . .	35
3.2.2 Mathematisches Modell . . . . .	38
3.2.3 Performanceanalyse . . . . .	40
3.3 Verwendung eines Brückengraphen als Streckennetz . . . . .	44
3.3.1 Erweiterung des Modells 2I-CVRP . . . . .	45
3.3.2 3-Index-Modell . . . . .	46
3.3.3 Ermittlung von Schranken für das BCVRP . . . . .	49
3.3.4 Performanceanalyse . . . . .	57
<b>4 Gabelstaplerprobleme</b>	<b>65</b>
4.1 Verwendung eines vollständigen Graphen als Streckennetz . . . . .	66
4.2 Verwendung eines Baumes als Streckennetz . . . . .	70
4.2.1 Ein-Fahrzeug-Fall . . . . .	71
4.2.2 Mehr-Fahrzeug-Fall . . . . .	79
4.2.3 Komprimierung des Baumes einer Instanz . . . . .	84
4.3 Steinerbaumproblem . . . . .	88
4.3.1 Steinerbaumproblem auf bewerteten Graphen . . . . .	89
4.3.2 Verbindung zu (MV)TSCP . . . . .	91
4.4 Performanceanalyse . . . . .	94
4.4.1 Erzeugung von Testdaten . . . . .	95
4.4.2 Auswertung von Testläufen . . . . .	97
4.5 Literaturübersicht . . . . .	101
<b>5 Tourenplanung mit Behältern in der Versorgung von Bergwerken</b>	<b>105</b>
5.1 Planungsaufgabe . . . . .	106
5.2 Literaturüberblick . . . . .	117

---

5.3	Modellierung der Problemstellung . . . . .	122
5.3.1	Mathematisches Modell . . . . .	123
5.3.2	Integration einer Pause . . . . .	130
5.3.3	Priorisierung von Aufträgen . . . . .	132
5.4	Konstruktionsverfahren . . . . .	134
5.4.1	Sequentielle Auswahl von Fahrzeug-Mitarbeiter-Kombinationen .	135
5.4.2	Einplanung von Ausführungsoptionen . . . . .	138
5.4.3	Bewertung der Einfügeoptionen von Einzelaufträgen . . . . .	144
5.4.4	Berücksichtigung von Auftragsketten . . . . .	147
5.4.5	Bestimmung einer bestbewerteten Einfügeoption . . . . .	160
5.4.6	Verfahrensvariante mit paralleler Planung von Touren . . . . .	161
5.4.7	Multi-Start-Erweiterung durch Randomisierung . . . . .	162
5.5	Performanceanalyse . . . . .	164
5.5.1	Erzeugung von Testdaten . . . . .	164
5.5.2	Auswertung von Testläufen . . . . .	167
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>173</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>179</b>



# Symbolverzeichnis

## Kapitel 2 / Allgemein

$\langle i, j \rangle$	Pfeil von Knoten $i$ zu Knoten $j$
$[i, j]$	Kante zwischen Knoten $i$ und Knoten $j$ mit $i < j$
$[i]$	Abschluss des Knotens $i$ nach oben
$[i]$	Abschluss des Knotens $i$ nach unten
$C_i$	Menge der Kindknoten von Knoten $i$
$d_{ij}$	Distanz von Knoten $i$ zu Knoten $j$
$d_i$	Länge der Elterkante $[p_i, i]$ von Knoten $i$
$p_i$	Elterknoten von Knoten $i$
$V_a$	Menge der Knoten des Untergraphen $G_a$
$V_a^I$	Innere Knoten des Untergraphen $G_a$
$V_a^R$	Randknoten des Untergraphen $G_a$

## Kapitel 3

$b_i$	Bedarfsmenge des Knotens $i$
$b_l$	Bedarfsmenge des Bedarfs $l$ (TCVRP)
$C$	Kapazität eines Fahrzeugs
$K$	Menge der Fahrzeuge
$L$	Menge der Bedarfe (TCVRP)
$n_l$	Knoten an dem Bedarf $l$ vorliegt (TCVRP)
$\pi_i$	Entscheidungsvariable, die die Position von Knoten $i$ in einer Tour angibt
$u_i$	Entscheidungsvariable, die angibt welche Menge nach Anfahrt des Kunden $i$ ausgeliefert wurde
$u_{ik}$	Entscheidungsvariable, die angibt welche Menge Fahrzeug $k$ nach Anfahrt des Kunden $i$ ausgeliefert hat
$V$	Menge der Knoten
$w_{ij}^a$	Variable zur Angabe in welche Richtung die Brücke $[p_a, a]$ auf der Fahrt von Knoten $i$ zu Knoten $j$ genutzt wird
$\check{W}_i$	Untere Schranke, wie häufig die Kante $[p_i, i]$ genutzt werden muss
$x_{ij}$	Entscheidungsvariable, die angibt ob von Knoten $i$ zu Knoten $j$ gefahren wird



$x_{ijk}$	Entscheidungsvariable, die angibt ob Fahrzeug $k$ von Kunde $i$ zu Kunde $j$ fährt
$x_{ik}$	Entscheidungsvariable, die angibt ob Fahrzeug $k$ die Elterkante von Knoten $i$ nutzt (TCVRP)
$y_{ik}$	Entscheidungsvariable, die angibt ob Knoten $i$ von Fahrzeug $k$ bedient wird
$y_{lk}$	Entscheidungsvariable, die angibt Bedarf $l$ von Fahrzeug $k$ bedient wird (TCVRP)

#### Kapitel 4

$\alpha_a$	Startknoten des Auftrags $a$
$A$	Menge der (Transport-) Aufträge
$\hat{D}$	Maximale Fahrstrecke einer Tour
$d_a^A$	Fahrstrecke des Auftrags $a$
$d_{ab}^A$	Distanz vom Zielknoten des Auftrags $a$ zum Startknoten des Auftrags $b$
$K$	Menge der verfügbaren Fahrzeuge
$\phi_a$	Entscheidungsvariable, die angibt welche Menge des fiktiven Gutes über Auftrag $a$ transportiert wird
$\phi_i^+$	Entscheidungsvariable, die angibt welche Menge des fiktiven Gutes auf Leerfahrten von Knoten $p_i$ zu Knoten $i$ transportiert wird
$\phi_i^-$	Entscheidungsvariable, die angibt welche Menge des fiktiven Gutes auf Leerfahrten von Knoten $i$ zu Knoten $p_i$ transportiert wird
$r_{ia}$	Richtung in der die Elterkante des Knotens $i$ zur Durchführung von Auftrag $a$ genutzt wird
$s_a$	Entscheidungsvariable, die angibt welche Strecke nach Durchführung des Auftrags $a$ mindestens vom ausführenden Fahrzeug zurückgelegt wurde
$V$	Menge der Knoten eines Graphen oder Digraphen
$\omega_a$	Zielknoten des Auftrags $a$
$x_i^+$	Entscheidungsvariable, die angibt wie viele Leerfahrten von Knoten $p_i$ zu Knoten $i$ stattfinden
$x_i^-$	Entscheidungsvariable, die angibt wie viele Leerfahrten von Knoten $i$ zu Knoten $p_i$ stattfinden
$x_{ij}$	Entscheidungsvariable, die angibt ob eine Fahrt von Knoten $i$ zu Knoten $j$ stattfindet
$\zeta_{ik}$	Entscheidungsvariable, die angibt ob Kante $[p_i, i]$ durch Fahrzeug $k$ befahren wird

#### Kapitel 5

$(a, b)$	Geordnetes Auftragspaar der Aufträge $a$ und $b$
$A$	Menge der Aufträge
$\alpha_a^A$	Startort des Auftrags $a$
$A_o^O$	Aufträge, die in Ausführungsoption $o$ enthalten sind
$\alpha_o^O$	Ort, an dem Ausführungsoption $o$ beginnt

---

$A^T$	Menge der Aufträge mit Termin
$\mathcal{B}$	Menge der Auftragspaare $(a, b)$ , bei denen die Wahl eines Behältertyps in Auftrag $a$ erfolgt und für Auftrag $b$ fortgeschrieben wird
$B$	Menge der Behältertypen
$B_a^A$	Menge der Behältertypen, die für Auftrag $a$ infrage kommen
$B_m^M$	Menge der Behältertypen, die für den Transport von Material $m$ infrage kommen
$b_o$	Behältertyp der Ausführungsoption $o$
$B_o^O$	Menge der Behältertypen, die für Ausführungsoption $o$ infrage kommen
$b_o^q$	Behälterquelle der Ausführungsoption $o$
$B^R$	Menge der bei Einplanung einer Ausführungsoption wählbaren Behältertypen
$B_\nu^V$	Menge der Behältertypen, die von Fahrzeug $\nu$ genutzt werden können
$D^B$	Menge der Behälterlieferungen
$d_{ij}$	Fahrstrecke von Ort $i$ zu Ort $j$
$D^M$	Menge der Materiallieferungen
$d_{oa}^{OA}$	Fahrstrecke bis zur Fertigstellung von Auftrag $a$ nach Beginn der Ausführungsoption $o$
$d_o^O$	Fahrstrecke der Ausführungsoption $o$
$d_{op}^O$	Fahrtstrecke von Ausführungsoption $o$ zu Ausführungsoption $p$
$\delta_a^t$	kritische Verschiebung eines Auftrags $a$ , ab der ein zunächst eingehaltener Termin verletzt wird
$e_a$	Termin des Auftrags $a$
$\hat{F}$	Maximale Anzahl zu planender Touren
$L_{ib}^B$	Anzahl leerer Behälter des Typs $b$ an Behälterquelle $i$
$L_{imb}^{MB}$	Anzahl mit Material $m$ beladener Behälter des Typs $b$ an Materialquelle $i$
$M$	Menge der Materialtypen
$m_a^A$	Material, das in Auftrag $a$ gehandhabt werden muss
$m_o$	Material, das in Ausführungsoption $o$ gehandhabt wird
$m_o^q$	Materialquelle der Ausführungsoption $o$
$M_w^W$	Menge der Materialtypen, die von Mitarbeiter $w$ gehandhabt werden dürfen
$N(o, t, \nu)$	Funktion zur Bestimmung der Nutzenbewertung der Ausführungsoption $o$ zum Startzeitpunkt $t$ mit Fahrzeug $\nu$
$n_a$	Nutzenwert des Auftrags $a$
$N_{\nu w}^P$	Nutzenpotential der Besetzung einer Tour mit Fahrzeug $\nu$ und Mitarbeiter $w$
$n_a^T$	Nutzenwert für Einhaltung des Termins von Auftrag $a$
$O$	Menge der Ausführungsoptionen sowie des Depots

$O_a$	Menge der Ausführungsoptionen des Auftrags $a$
$O_a^z$	Menge der Ausführungsoptionen, die entweder nur Auftrag $a$ betreffen oder diesen als ersten Auftrag beinhalten
$p_a$	Vorgängerauftrag des Auftrags $a$
$P^B$	Menge der Behälterabholungen
$\mathcal{P}$	Menge der Auftragspaare $(a, b)$ , für die eine Vorrangbeziehung existiert
$P^M$	Menge der Materialabholungen
$Q^B$	Menge der Behälterquellen
$Q^M$	Menge der Materialquellen
$r$	Rentabilität
$R_{a,(p,q),\nu}^{max}$	obere Schranke für die Rentabilität der Ausführungsoptionen von Auftrag $a$ an Einfügeposition $(p, q)$ mit Fahrzeug $\nu$
$S^B$	Menge der Behältersenzen
$S^M$	Menge der Materialsenzen
$s_a^{min}$	minimale Servicezeit aller Auftrag $a$ zugeordneter Ausführungsoptionen
$s_{oa}^{OA}$	Servicezeit bis zur Fertigstellung von Auftrag $a$ nach Beginn der Ausführungsoption $o$
$s_o^O$	Servicezeit der Ausführungsoption $o$
$T(o, t, \nu)$	Funktion zur Bestimmung der kritischen Verschiebungen einer auf Fahrzeug $\nu$ zu Startzeitpunkt $t$ einzuplanenden Ausführungsoption $o$
$t^+$	zusätzlicher zeitlicher Aufwand
$t^-$	entfallender zeitlicher Aufwand
$t_a^A$	Entscheidungsvariable, die angibt zu welchem Zeitpunkt Auftrags $a$ abgeschlossen ist
$T^B$	Menge der Behältertransporte
$\hat{T}$	maximale Dauer einer Tour
$t_o^O$	Entscheidungsvariable, die angibt zu welchem Startzeitpunkt Ausführungsoption $o$ startet
$\hat{t}_o^O$	Endzeitpunkt von Ausführungsoption $o$
$T^u(q, \Delta t)$	Funktion zur Aktualisierung der kritischen Verschiebungen der Ausführungsoption $q$ bei Verschiebung um $\Delta t$
$u_a$	Nachfolgauftrag des Auftrags $a$
$V$	Menge der Fahrzeuge
$v_\nu$	Geschwindigkeit des Fahrzeugs $\nu$
$V_w^W$	Menge der Fahrzeuge, die von Mitarbeiter $w$ genutzt werden dürfen
$W$	Menge der Mitarbeiter
$\omega_a^A$	Zielort des Auftrags $a$
$\omega_o^O$	Ort, an dem Ausführungsoption $o$ endet
$x_{op}$	Entscheidungsvariable, die angibt ob eine Fahrt von Ausführungsoption $o$ zu Ausführungsoption $p$ stattfindet

$y_a$	Entscheidungsvariable, die angibt ob Auftrag $a$ durchgeführt wird
$y_a^T$	Entscheidungsvariable, die angibt ob der Termin von Auftrag $a$ eingehalten wird
$z_{o\nu}^{OV}$	Entscheidungsvariable, die angibt ob Ausführungsoption $o$ Fahrzeug $\nu$ zugeordnet wird
$z_{w\nu}^{WV}$	Entscheidungsvariable, die angibt ob Mitarbeiter $w$ Fahrzeug $\nu$ zugeordnet wird

# Kapitel 1

## Einleitung

Eine Vielzahl der Rohstoffe, die in unserer Zeit industriell verarbeitet werden, wird im Bergbau gewonnen. Beispiele für derartige Rohstoffe sind Energieträger, Metallerze, Baustoffe und Grundstoffe für Düngemittel. Bei der Gewinnung von Rohstoffen im Bergbau kann zwischen dem Abbau über Tage im Tagebau und dem Abbau unter Tage in einer Grube unterschieden werden. Die vorliegende Arbeit hat den Abbau von Kalisalz unter Tage vor Augen. Zur Erschließung werthaltiger Schichten, der Lagerstätte des abzubauenden Materials, verfügt ein Bergwerk über einen Schacht. Dieser verbindet das übertägige Werksgelände mit der Lagerstätte. Die Gewinnung von Rohstoffen in großen Mengen erfordert den Einsatz von Maschinen und den Aufbau einer Infrastruktur. Neben Aufbereitungsanlagen über Tage sind unter Tage vor allem Anlagen zur Förderung des abgebauten Materials, Lager für Betriebsstoffe und Ersatzteile sowie Werkstätten notwendig. Letztlich existiert unter Tage ein eigenes Betriebsgelände, das sogenannte Grubengebäude. Zum Grubengebäude gehören alle geschaffenen Hohlräume. Das sind neben Werkstätten und Lagern insbesondere Fahrwege zur Erschließung der Lagerstätte und aus dem Abbau des Materials resultierende Hohlräume. Das Grubengebäude wächst mit fortschreitendem Abbau der Lagerstätte. Dabei legt im Wesentlichen die räumliche Ausdehnung der Lagerstätte die resultierende Gestalt des Grubengebäudes fest. Das Streckennetz eines Grubengebäudes, das die verfügbaren Fahrwege für Fahrzeuge definiert, weist in der Regel wenig Redundanzen, sieht man von parallelen Strecken zur Bewetterung ab, auf. Gründe dafür sind zum einen der Aufwand der Auffahrung von Strecken und zum anderen der Aufwand für die kontinuierliche Sicherung aller zugänglichen Bereiche des Grubengebäudes. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Bäume und Brückengraphen, als eine verallgemeinerte Baumstruktur, zur Darstellung des Streckennetzes eines Bergwerks verwendet.

Rund um den Abbauprozess und den Transport des gewonnenen Materials zur weite-

ren Aufbereitung sind zahlreiche begleitende Tätigkeiten erforderlich. Darunter fallen beispielsweise die Bereitstellung von Betriebsstoffen und der Transport von Ersatzteilen. Einzelne der erforderlichen Transporttätigkeiten lassen sich als aus der Literatur bekannte Tourenplanungsprobleme interpretieren. Beispiele sind die Auslieferung von Maschinenöl, das Einsammeln von Abfällen und die Umsetzung von Stromaggregaten. Das Streckennetz, das die Distanzen zwischen anzufahrenden Orten festlegt, wird in der Literatur in den meisten Fällen in Form einer Distanzmatrix abstrahiert. Die konkreten Fahrstrecken finden in der Regel keinen Eingang in die Problemstellung. Vereinzelt existieren Publikationen, die Problemstellungen aus dem Bereich der Tourenplanungsprobleme mit expliziten Strukturen von Streckennetzen untersuchen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das kapazitierte Tourenplanungsproblem mit einem Baum als Streckennetz aus der Literatur aufgegriffen, wobei das Streckennetz auf Brückengraphen erweitert wird. Die Problemstellung kann Auslieferungs- und Einsammeltätigkeiten beschreiben. Als weitere Problemstellung wird das Gabelstaplerproblem mit einem Baum als Streckennetz betrachtet und auf den Mehr-Fahrzeug-Fall erweitert. Das Gabelstaplerproblem stellt mit Transporten von Objekten, von ihrem Standort zu einem Zielort, und der Annahme, dass Fahrzeuge nur genau ein Objekt gleichzeitig transportieren können, eine Vorstufe der nachfolgend beschriebenen Planungsaufgabe dar. Die Untersuchung einer Problemstellung zur innerbetrieblichen Versorgung von Bergwerken steht im Zentrum dieser Arbeit. Dazu werden vielfältige Transporttätigkeiten und die Möglichkeiten zu deren Umsetzung erfasst. Als Transportmittel kommen in der Problemstellung Abrollcontainer zum Einsatz, von denen ein Fahrzeug jeweils genau einen zeitgleich transportieren kann. Die Transporttätigkeiten werden in Form von Aufträgen verwaltet. Zu den Transporten von Objekten aus dem Gabelstaplerproblem, kommen Aufträge zur Bereitstellung und Abholung leerer Container sowie Aufträge zur Lieferung und Abholung von Material unter Verwendung von Containern. Es wird angenommen, dass der betrachtete Planungshorizont und die verfügbaren Fahrzeuge und Mitarbeiter nicht ausreichen, um alle vorliegenden Aufträge durchzuführen. Es handelt sich daher um ein Tourenplanungsproblem ohne Erfüllungszusage. Der Aufbau der vorliegenden Arbeit wird im Folgenden beschrieben.

In Kapitel 2 werden grundlegende graphentheoretische Strukturen, die für die Beschreibung der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Problemstellungen benötigt werden und für die Abbildung realer Streckennetze genutzt werden können, erläutert. Dabei wird insbesondere auf Bäume als kreisfreie Graphen eingegangen. Außerdem wird die Struktur des Brückengraphen, die eine Verallgemeinerung eines Baumes darstellt, eingeführt. Sowohl Bäume als auch Brückengraphen werden im Rahmen dieser Arbeit zur Abbildung

---

von Streckennetzen genutzt. Ihr hierarchischer Aufbau und die im Fall der Bäume kreisfreie Struktur können als Näherung von Streckennetzen unter Tage angesehen werden. Die explizite Betrachtung derartiger Streckennetze bei der Untersuchung von Tourenplanungsproblemen wird anhand des Handlungsreisendenproblems motiviert.

Das klassische kapazitierte Tourenplanungsproblem wird in Kapitel 3 untersucht. Zunächst wird die Problemstellung unter Verwendung einer Distanzmatrix, als Aggregation eines vorliegenden Streckennetzes, beschrieben. Anschließend wird die Problemstellung mit einem Baum als Streckennetz untersucht. Außerdem werden mathematische Modelle für die Problemstellung mit einem Brückengraphen als Streckennetz erarbeitet und auf Möglichkeiten zur Bestimmung unterer und oberer Schranken für Instanzen der Problemstellung eingegangen. Alle beschriebenen Modelle werden im Rahmen einer Performanceanalyse in einer kommerziellen Optimierungssoftware implementiert und die Ergebnisse von Testläufen in einer Auswertung gegenübergestellt.

Kapitel 4 ist dem Gabelstaplerproblem gewidmet. Die Aufgabe der Problemstellung besteht in der streckenminimalen Umsetzung von Objekten durch ein beziehungsweise mehrere Fahrzeuge, die zeitgleich nur ein Objekt transportieren können. Im Gegensatz zur kapazitierten Tourenplanung in Kapitel 3 wird das Gabelstaplerproblem sowohl mit einem Fahrzeug als auch mit einer Flotte homogener Fahrzeuge untersucht. Nach Erläuterung der Problemstellung in ihrer klassischen Form mit Verwendung einer Distanzmatrix zwischen den Start- und Zielorten der Umsetzungen, wird die Problemstellung mit einem Baum als Streckennetz beschrieben. Dabei wird insbesondere auf Möglichkeiten zur Komprimierung von Instanzen und das im Allgemeinen zu lösende Steinerbaumproblem eingegangen. Wie in Kapitel 3 werden die vorgestellten Modelle im Rahmen einer Performanceanalyse verglichen.

In Kapitel 5 wird die Planungsaufgabe einer Transportabteilung in einem Bergwerk, die Abrollcontainer für den Transport von Waren und Gütern verwendet, vorgestellt. Verallgemeinernd wird im Rahmen dieser Arbeit anstelle von Abrollcontainern von Behältern gesprochen. Aufgabe der Transportabteilung ist die Gewährleistung der innerbetrieblichen Versorgung durch Transporte. Im Rahmen der Modellierung werden zahlreiche unterschiedliche Transporttätigkeiten erfasst und Lagerorte für Behälter und Material einbezogen. Darüber hinaus werden heterogene Fahrzeuge und Mitarbeiter in der Problembeschreibung erfasst. Die durchzuführenden Transporttätigkeiten werden als Aufträge erfasst, wobei die Auftragslast innerhalb der Planungsperiode nicht komplett erfüllt werden kann. Die beschriebene Problemstellung wird in Form eines mathematischen Modells formalisiert. Anschließend wird ein deterministisches heuristisches Lösungsverfahren zur Konstruktion zulässiger Lösungen beschrieben. Dieses Verfahren wird zu einem

Multi-Start-Verfahren erweitert. Das Kapitel schließt mit einer Performanceanalyse.

Kapitel 6 fasst die Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick zu weiteren Forschungsfragen, die sich aus der Arbeit ergeben.

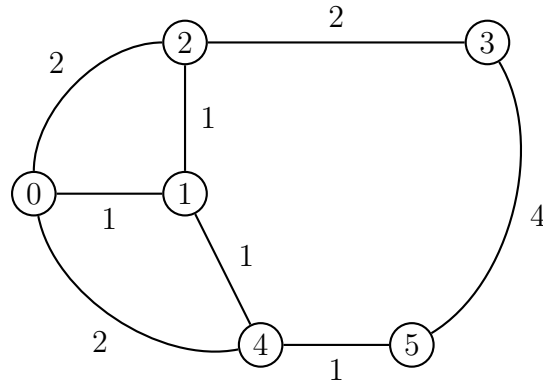


# Kapitel 2

## Grundlagen

Waren- und Personentransporte sind in unserer Gesellschaft allgegenwärtig. Jeden Tag werden Millionen Pakete zugestellt, werden Geschäfte mit Waren beliefert und fahren Menschen zur Arbeit. Realisiert werden der Transport von Waren und die Beförderung von Personen mit Transportmitteln, deren Bewegungsmöglichkeiten meist durch Streckennetze vorgegeben sind. Beispiele für Streckennetze sind das Straßennetz für Kraftfahrzeuge, das Schienennetz für Züge und die schiffbaren Flussläufe zusammen mit Kanälen für die Binnenschifffahrt. Betrachtet man innerbetriebliche Transporte, so bilden beispielsweise definierte Fahrwege für Gabelstapler das Streckennetz für das Transportmittel Gabelstapler. Welche Teile eines Streckennetzes für ein konkretes Transportmittel nutzbar sind kann durch Gewicht, Abmessungen oder Ladung eingeschränkt sein. Aus operativer Sicht ist ein Streckennetz eine gegebene Größe, die nicht kurzfristig verändert werden kann. Auf Basis eines Streckennetzes können Distanzen zwischen Orten ermittelt werden. Bei der Planung einer Tour, als Aneinanderreihung von Orten, entscheidet das Streckennetz über die zurückzulegende Distanz beziehungsweise in Verbindung mit einer angenommenen Geschwindigkeit über die aufzuwendende Fahrzeit. Es bildet somit die Grundlage für die Aufwandsbewertung einer Tour. Im Rahmen dieser Arbeit werden Streckennetze als ungerichtet betrachtet. Die Distanz zwischen zwei Orten  $i$  und  $j$  ist sowohl von  $i$  nach  $j$  als auch von  $j$  nach  $i$  zu überbrücken. Die Beschränkung auf ungerichtete Streckennetze dient lediglich der Vereinfachung grafischer und formaler Darstellungen im Rahmen dieser Arbeit. Die Vorgehensweisen sind prinzipiell auch auf gerichtete Streckennetze, mit resultierenden asymmetrischen Distanzen zwischen Orten, übertragbar. Ein Beispiel für ein Streckennetz mit sechs Orten ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Die Bewertungen auf den Verbindungslinien der Orte spiegeln Distanzen wider. Eine Tour  $5 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 5$  besitzt auf diesem Streckennetz die Länge 8.

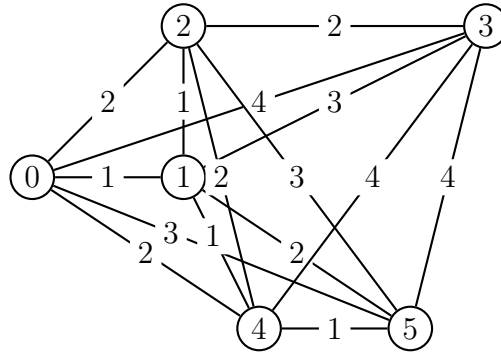
Reale Streckennetze besitzen in der Regel keine direkten Verbindungen zwischen allen



**Abbildung 2.1:** Streckennetz

Orten. Die vollständige direkte Vernetzung aller Orte wäre in der Regel zu teuer und aufgrund der räumlichen Ausmaße einer Strecke, als direkte Verbindung zweier Orte, häufig nicht sinnvoll umsetzbar. Betrachtet man beispielsweise das öffentliche Straßennetz des Landes Niedersachsen, erfolgt die Verbindung zweier Orte im Allgemeinen über Straßen verschiedener Ebenen, beispielsweise Landstraßen und Autobahnen. Straßen einer übergeordneten Ebene bieten in der Regel eine höhere Fortbewegungsgeschwindigkeit, was bei vergleichbaren Distanzen zu einer kürzeren Fahrzeit führt. In der Realität existieren meist mehrere Möglichkeiten, um von einem Ort zu einem anderen zu kommen. Aus der Perspektive des Zusammenhangs eines Streckennetzes handelt es sich bei alternativen Verbindungen um Redundanzen. Sie erweitern die möglichen Fahrwege, sind jedoch für die wechselseitige Erreichbarkeit zweier Orte nicht notwendig. Motiviert sind zusätzliche Strecken zum einen als Absicherung, um die Erreichbarkeit eines Ortes bei Ausfall einer anderen Verbindung aufrechtzuerhalten, und zum anderen zur Reduktion von Fahrstrecken beziehungsweise -zeiten. Der Grad der Vernetzung eines Streckennetzes und damit die Menge an Redundanzen hängt vom Aufwand für die Errichtung und dem Unterhalt von Strecken sowie deren Nutzen ab. Übersteigt der Nutzen einer zusätzlichen Verbindung ihre Kosten, ist eine Errichtung effizient. In der Praxis ist die Bewertung der Kosten sowie des Nutzens einer konkreten Verbindung nicht einfach. Neben den reinen Kosten für die Errichtung und den Unterhalt einer Strecke fallen Kosten beispielsweise in Form von versiegelten Flächen sowie Schadstoff- und Lärmeintrag in die Umwelt an. Auf Seiten des Nutzens sind kürzere Fahrzeiten, die Vernetzung von Wirtschaftsräumen und die Reduktion von Lärmeintrag bei Umgehungsstraßen zu nennen. Als Multiplikator der Effekte ist eine Abschätzung des Verkehrsaufkommens einzubeziehen. Nicht zuletzt spielen politische Erwägungen eine Rolle. Sind die verursachten Kosten von Strecken gegenüber ihrem Nutzen hoch, enthält ein Streckennetz tendenziell weniger Redundanzen. Beispiele hierfür sind Wasserstraßen in der Binnenschifffahrt, Streckennetze unter Tage und Straßennetze in Gebirgsregionen und anderen schwer zugänglichen Gebieten. In Ab-

bildung 2.1 können die Verbindungen  $[0, 2]$ ,  $[0, 4]$  und  $[2, 3]$  als zusätzliche Verbindungen gesehen werden. Im Fall der Verbindungen  $[0, 2]$  und  $[0, 4]$  handelt es sich um Redundanzen Ort 0 erreichen zu können, da sich durch Hinzunahme dieser Verbindungen für kein Ortspaar eine geringere Distanz ergibt. Im Gegensatz dazu verkürzt die Verbindung  $[2, 3]$  die Distanzen zwischen Ort 3 und den Orten 0, 1, 2 und 4.

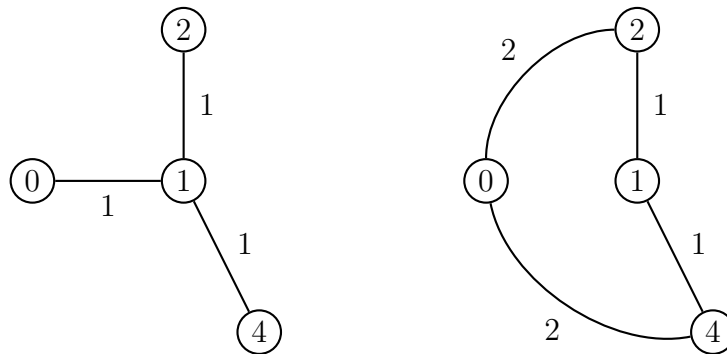


**Abbildung 2.2:** Distanzen zwischen den Orten des Streckennetzes aus Abbildung 2.1

Bei der Planung von Touren tritt gewöhnlich das konkrete Streckennetz, auf dem die verfügbaren Verkehrsmittel sich bewegen können, in den Hintergrund. Vielmehr wird mit abgeleiteten Informationen gearbeitet. Von Interesse sind dabei Distanzbewertungen zwischen anzufahrenden Orten. Die Menge der anzufahrenden Orte kann sich beispielsweise aus vorhandenen Depots, zu beliefernden Tankstellen oder Abhol- und Zieladressen für Warentransporte zusammensetzen. Als gängige Distanzmaße werden Entfernungen, Fahrzeiten und -kosten verwendet. Die benötigten Informationen hängen von der konkreten Problemstellung ab. Ist lediglich die Wegstrecke einer Tour zu minimieren, genügen Entfernungen. Kommen zeitliche Betrachtungen, wie Zeitfenster oder eine maximale Tourdauer hinzu, sind Fahrzeiten relevant. Eine Bewertung in Form von Kosten ermöglicht die Kombination von zeitbezogenen und entfernungsabhängigen Kostenbestandteilen sowie die Verrechnung mit Erlösen. Auf Basis eines Streckennetzes werden Distanzbewertungen zwischen den anzufahrenden Orten berechnet. Dafür kann beispielsweise der Tripel-Algorithmus<sup>1</sup> verwendet werden. Das jeweilige Streckennetz wird schließlich nur benötigt, um die Route einer Tour zur Navigation zu beschreiben. Damit sind für eine Tourenplanung ausschließlich die effizienten Strecken eines Streckennetzes von Interesse. Geht man von einer eindimensionalen Bewertung in Form einer Entfernung oder Fahrzeit aus, sind lediglich Strecken eines Netzes relevant, die Teil kürzester beziehungsweise schnellster Verbindungen zwischen zwei anzufahrenden Orten sind. Alle übrigen Strecken könnten entfernt werden, ohne dass sich an der resultierenden Distanzbewertung der anzufahren-

<sup>1</sup> vgl. Neumann und Morlock (2002)

den Orte etwas ändern würde. Der relevante Teil eines Streckennetzes ist im Allgemeinen von den anzufahrenden Orten abhängig. Bei Existenz verschiedener Fahrstrecken gleicher Bewertung zwischen anzufahrenden Orten, ist der relevante Teil eines Streckennetzes im Allgemeinen nicht eindeutig. Abbildung 2.3 zeigt zwei Möglichkeiten einen Teil des Streckennetzes aus Abbildung 2.1, in dem die Distanzen zwischen den Orten 0, 2 und 4 denen im ursprünglichen Streckennetz entsprechen, auszuwählen.



**Abbildung 2.3:** Beispiele für die Wahl relevanter Teile des Streckennetzes aus Abbildung 2.1 für die Ortsmenge  $\{0, 2, 4\}$

In den folgenden Abschnitten werden Strukturen aus der Graphentheorie, die im Rahmen dieser Arbeit zur Darstellung von Tourenplanungsproblemen benötigt werden, vorgestellt. In Abschnitt 2.1 werden Graphen und Digraphen, in Abschnitt 2.2 Bäume und in Abschnitt 2.3 Brückengraphen eingeführt. Die Beschreibungen und Bezeichnungen orientieren sich an Diestel (2010). Schließlich wird in Abschnitt 2.4 anhand des Handlungsreisendenproblems, als einem der einfachsten Tourenplanungsprobleme, die Betrachtung von Bäumen und Brückengraphen motiviert.

## 2.1 Graphen und Digraphen

Zur Darstellung von Streckennetzen können bewertete Graphen verwendet werden. Graphen bestehen aus einer Menge von Knoten und einer Menge von Kanten. Die **Knotenmenge** eines Graphen wird mit  $V$  und die **Kantenmenge** mit  $E$  bezeichnet. Ein Graph kann als Tupel dieser beiden Mengen  $G = (V, E)$  notiert werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Knoten eines Graphen von 0 bis  $|V| - 1$  nummeriert. Eine Kante zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  mit  $i < j$  wird als  $[i, j]$  notiert. Zusätzlich sind Schlingen, Kanten  $[i, i]$  von einem Knoten  $i$  zu sich selbst, möglich. Kanten besitzen keine Orientierung. Die Knoten einer Kante sind ihre Endknoten. Diese sind mit der Kante **inzident**. Zwei **benachbarte** Knoten sind mit der gleichen Kante inzident, sie

sind **Nachbarn**. Existiert zu einem Graphen eine Abbildung  $d : E \rightarrow \mathbb{R}^i, i \geq 1$ , die jeder Kante eine Bewertung zuordnet, wird das Tupel  $G = (V, E, d)$  als bewerteter Graph bezeichnet. Bei der Abstraktion eines Streckennetzes können die Orte als Knoten und die Verbindungen der Orte als Kanten eines Graphen interpretiert werden. Die Zahlenwerte an den Verbindungen entsprechen den Werten der Bewertungsfunktion  $d$ . Abbildung 2.1 kann somit als visualisierte Darstellung eines bewerteten Graphen verstanden werden. Die eingekreisten Elemente entsprechen den Knoten und die durchgezogenen Verbindungslinien den Kanten des Graphen. Die Darstellung der Bewertungsfunktion erfolgt als Zahlenwerte auf den Kanten. Ein Graph wird **vollständig** genannt, wenn für seine Kantenmenge  $E = \{[i, j] \in V^2 | i < j\}$  gilt. Ein vollständiger Graph besitzt somit zwischen jedem Paar von Knoten eine Kante. Ein Beispiel eines vollständigen Graphen zeigt Abbildung 2.2. Ein Graph  $G' = (V', E')$ , der sich aus einer Teilmenge der Knoten  $V' \subseteq V$  und Kanten  $E' \subseteq E$  eines Graphen  $G = (V, E)$  zusammensetzt, ist ein **Teilgraph** von  $G$ . Gilt für die Kantenmenge eines Teilgraphen zusätzlich  $E' = \{[i, j] \in E | i, j \in V'\}$ , das heißt der Teilgraph enthält alle Kanten des Graphen  $G$  zwischen den Knoten seiner Knotenmenge  $V'$ , ist  $G'$  ein **Untergraph** von  $G$ . Zwei Teilgraphen eines Graphen heißen **disjunkt**, wenn ihre Knoten- und Kantenmenge keine gemeinsamen Elemente aufweisen. Die Graphen  $G^1 = (\{0, 1, 4\}, \{[0, 1], [1, 4]\})$  und  $G^2 = (\{1, 2, 3\}, \{[1, 2], [2, 3]\})$  sind Teilgraphen des abgebildeten Graphen aus Abbildung 2.1. Graph  $G^2$  ist darüber hinaus ein Untergraph des Graphen, da seine Kantenmenge alle Kanten des Graphen zwischen den Knoten seiner Knotenmenge beinhaltet. Dagegen fehlt in  $G^1$  die Kante  $[0, 4]$  zum Untergraphen. Da mit Knoten 1 ein Knoten in den Knotenmengen beider Teilgraphen enthalten ist, sind die Graphen  $G^1$  und  $G^2$  nicht disjunkt. Ein Graph, bestehend aus der Knotenmenge  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  mit paarweise ungleichen  $x_i$  und der Kantenmenge  $E = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k]\}$ , wird als **Weg** bezeichnet. Die Endknoten  $x_0$  und  $x_k$  werden durch einen Weg **verbunden**. Verkürzt kann ein Weg als Folge seiner Knoten  $W = [x_0, x_1, \dots, x_k]$  notiert werden. Sofern eine Kantenbewertung vorliegt, gibt die Summe der Kantenbewertungen eines Weges dessen **Länge** an. Der Teilgraph  $W = (\{0, 4, 5\}, \{[0, 4], [4, 5]\})$  des Graphen aus Abbildung 2.1 stellt einen Weg zwischen den Knoten 0 und 5 mit Länge 3 dar. In der verkürzten Notation lautet der Weg  $W = [0, 4, 5]$ . Existiert in einem Graphen ein Weg zwischen zwei Knoten  $i$  und  $j$ , so ist Knoten  $i$  von Knoten  $j$  und umgekehrt Knoten  $j$  von Knoten  $i$  erreichbar. Ein Graph  $G$  wird **zusammenhängend** genannt, sofern in  $G$  zwischen allen Knoten Wege existieren. In einem Streckennetz dessen Graph zusammenhängend ist, sind alle Orte untereinander erreichbar. Ein Untergraph  $G'$  eines Graphen  $G$ , der alle mit Knoten seiner Knotenmenge  $V'$  inzidenten Kanten von  $G$  und deren Endknoten enthält, das heißt es gilt  $E' = \{[i, j] \in E | i \in V' \vee j \in V'\}$ , wird als **Komponente** bezeichnet. Zwischen

verschiedenen Komponenten eines Graphen existieren keine Wege. Ein zusammenhängender Graph besitzt genau eine Komponente. Ein zusammenhängender Teilgraph eines Graphen  $G$ , der alle Knoten von  $G$  enthält und eine minimale Kantenmenge, das heißt es gilt  $|E'| = |V'| - 1$ , besitzt, heißt **Spannbaum** von  $G$ . Ein Spannbaum ist ein minimaler Spannbaum eines Graphen, wenn er unter allen Spannbaum des Graphen die minimale Summe der Kantenbewertungen aufweist. Kanten eines Graphen, deren Entfernen den Graphen in zwei Komponenten zerfallen lässt, heißen **Brücken** des Graphen. Vergleichbar wird ein Knoten als **Artikulation** bezeichnet, sofern das Entfernen des Knotens sowie seiner inzidenten Kanten einen zusammenhängenden Graphen in zwei Komponenten teilt. Ein **Kreis** setzt sich aus einem Weg und einer zusätzlichen Kante, die nicht bereits Teil des Weges ist, zwischen den Endknoten des Weges zusammen. Die Notation kann analog zu Wegen verkürzt als Folge von Knoten erfolgen. Die Länge eines Kreises entspricht der Summe seiner Kantenbewertungen. In Abbildung 2.1 stellt  $K = [1, 4, 5, 3, 2, 1]$  einen Kreis der Länge 9 dar. Als Erweiterung von Graphen werden in der Literatur **Multigraphen** eingeführt. In einem Multigraphen sind mehrere Kanten zwischen zwei Knoten möglich. Liegen mehrere Kanten zwischen zwei Knoten vor, werden diese als **parallel** bezeichnet. Abbildung 2.4 stellt ein Beispiel für einen bewerteten Multigraphen dar. Das Beispiel enthält zwei parallele Kanten zwischen den Knoten 1 und 2, sowie eine Schlinge an Knoten 0. Darüber hinaus stellt Knoten 1 eine Artikulation und die Kante  $[0, 1]$  eine Brücke des Multigraphen dar.

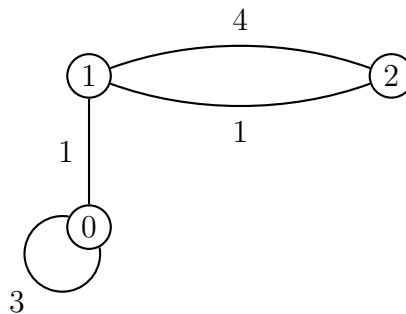
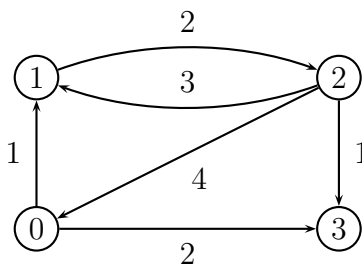


Abbildung 2.4: Multigraph

Ein gerichteter Graph liegt vor, wenn den Kanten eines Graphen eine Orientierung zugeordnet ist. Die Orientierung einer Kante wird durch die Zuweisung eines **Anfangs- und eines Endknotens** erreicht. Eine Kante, der eine Orientierung zugeordnet ist, wird als **Pfeil** bezeichnet. Die Notation für einen Pfeil von einem Knoten  $i$  zu einem Knoten  $j$  lautet  $\langle i, j \rangle$ . Pfeile von einem Knoten  $i$  zu sich selbst,  $\langle i, i \rangle$ , werden wie im ungerichteten Fall als Schlingen bezeichnet. Nach Neumann und Morlock (2002) wird ein gerichteter Graph als **Digraph** bezeichnet. Die Pfeilmenge eines Digraphen wird als  $A$  notiert. Ein Digraph lässt sich kompakt als  $G = (V, A)$  schreiben. Ein Digraph mit

einer Knotenmenge  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  mit paarweise ungleichen  $x_i$  und der Pfeilmenge  $A = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{k-1}, x_k \rangle\}$  wird als **gerichteter Weg** bezeichnet. In einem solchen Digraphen stellt  $x_0$  den Startknoten und  $x_k$  den Zielknoten dar. Der gerichtete Weg verläuft von  $x_0$  zu  $x_k$ . Verkürzt kann ein gerichteter Weg als Folge seiner Knoten  $W = \langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle$  notiert werden. Existiert in einem Digraphen ein gerichteter Weg mit dem Startknoten  $i$  und dem Zielknoten  $j$ , so ist Knoten  $j$  von Knoten  $i$  aus **erreichbar**. Die Menge der von einem Knoten  $i$  aus erreichbaren Knoten wird mit  $R(i)$  bezeichnet. Sind den Pfeilen eines Digraphen Bewertungen zugeordnet, vergleichbar den Kantenbewertungen eines Graphen, handelt es sich um einen **bewerteten Digraphen**. Die Länge eines gerichteten Weges in einem bewerteten Digraphen entspricht der Summe seiner Pfeilbewertungen. Analog zur Definition von Kreisen in Graphen ist ein **Zyklus** in einem Digraphen als die Kombination eines gerichteten Weges und eines Pfeils vom Zielknoten zum Startknoten des gerichteten Weges definiert. Die Länge eines Zyklus entspricht der Summe seiner Pfeilbewertungen. Abbildung 2.5 zeigt einen Digraphen mit vier Knoten und sechs Pfeilen. Ein gerichteter Weg von Knoten 1 zu Knoten 3 lautet  $W = \langle 1, 2, 3 \rangle$  mit der Länge 3. Die von Knoten 0 erreichbare Knotenmenge ist die gesamte Knotenmenge des Digraphen  $R(0) = V = \{0, 1, 2, 3\}$ . Dagegen ist  $R(3)$  leer, da kein Pfeil mit Knoten 3 als Anfangsknoten existiert. Einen Zyklus stellt die Pfeilmenge  $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle\}$  in Verbindungen mit den zu den Pfeilen inzidenten Knoten dar. Die Länge des Zyklus beträgt 7. Analog zu Multigraphen können **Multidigraphen** parallele Pfeile besitzen. Zwei Pfeile sind parallel, sofern sie den gleichen Anfangs- und Endknoten besitzen.



**Abbildung 2.5:** Digraph

Im Kontext von Tourenplanungsproblemen werden Distanzen zwischen Orten benötigt. In einem bewerteten Graphen, der die verfügbaren Orte und deren Verbindungen abbildet, wird die minimale Länge eines Weges zwischen zwei Knoten  $i$  und  $j$  als **Distanz**  $d_{ij}$  der beiden Knoten verstanden. Analog stellt in einem Digraphen die minimale Länge eines gerichteten Weges von einem Knoten  $i$  zu einem Knoten  $j$  die Distanz  $d_{ij}$  von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  dar. Die zugehörigen Wege der Distanzen werden als **kürzeste**

**Wege** bezeichnet. Zusätzlich zur Distanz zweier Knoten wird die Distanz zweier disjunkter Knotenmengen  $d_{IJ}$  als minimale Distanz zwischen einem Knoten der Menge  $I$  und einem Knoten der Menge  $J$ ,  $d_{IJ} = \min_{i \in I, j \in J} d_{ij}$ , festgelegt. Die folgende Beschreibung beschränkt sich begrifflich auf Graphen, ist jedoch auf Digraphen übertragbar. Sofern in einem Graphen weder Kreise negativer Länge noch Schlingen mit negativer Bewertung existieren, können die Distanzen zwischen allen Knoten mit dem von Floyd und Warshall entwickelten Tripel-Algorithmus ermittelt werden.<sup>2</sup> Das Ergebnis des Algorithmus besteht bei einem Graphen mit  $n$  Knoten aus zwei Matrizen der Dimension  $n^2$ . Eine Matrix enthält die Distanzen zwischen allen Knoten, die andere Matrix dokumentiert die Wege, die zu diesen Distanzen gehören. Da Wege in einem Graphen ungerichtet sind, ist die Matrix der Distanzen symmetrisch. Die Dokumentation eines Weges erfolgt als Folge von Knoten, die auf dem Weg von einem Knoten zu einem anderen Knoten zu besuchen sind. An jeder Position  $(ij)$  der Wegematrix wird derjenige Knoten hinterlegt, der als letzter Knoten vor Knoten  $j$  auf einem kürzesten Weg von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  liegt. Die Bestimmung kürzester Wege ist unter gleichen Voraussetzungen mit dem Tripel-Algorithmus auch für Multigraphen möglich. Bei Vorliegen paralleler Kanten, ist nur jene mit minimaler Bewertung zu berücksichtigen. Nutzt man das Ergebnis des Tripel-Algorithmus für einen Graphen  $G$  zur Konstruktion eines Graphen  $G'$ , indem man lediglich die Kanten von  $G$ , die mindestens zur Kantenmenge eines kürzesten Weges gehören, in  $G'$  aufnimmt, erhält man im Allgemeinen einen Teilgraphen von  $G$ . Dieser Teilgraph  $G'$  ist bezüglich der Distanzen zwischen den Knoten äquivalent zu  $G$ . Die Kanten von  $G$ , die nicht in  $G'$  enthalten sind, könnten entfernt werden, ohne dass sich an den Distanzen in  $G$  etwas ändert. Stellt  $G$  ein Streckennetz dar, so entspricht  $G'$  dem für kürzeste Wege relevanten Teil des Netzes, vergleichbar zu Abbildung 2.3 übertragen auf die gesamte Knotenmenge von  $G$ .

## 2.2 Bäume

In diesem Abschnitt werden Bäume und Bezeichner zu ihrer Beschreibung eingeführt. Weiter wird beschrieben, wie spezielle Strukturen in Graphen in Baumstrukturen überführt werden können, und die Komprimierung von Bäumen in Form des Teilbaumes einer Knotenmenge erläutert. Der Abschnitt schließt mit der Betrachtung von Charakteristika zur Beschreibung von Bäumen und der Erläuterung eines Vorgehens zur Generierung zufälliger Bäume.

---

<sup>2</sup> vgl. Neumann und Morlock (2002)



Bäume sind zusammenhängende Graphen ohne Kreise. Im Rahmen dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass die Kanten eines Baumes bewertet sind. Ein Baum mit  $n$  Knoten besitzt  $n - 1$  Kanten. Jede Kante eines Baumes ist für seinen Zusammenhang notwendig. Wird eine Kante eines Baumes entfernt, geht sein Zusammenhang verloren. Die Hinzunahme einer Kante führt zur Existenz eines Kreises. Ein Baum ist mit seinem Spannbaum identisch, da er zusammenhängend ist und die dafür notwendige minimale Kantenzahl aufweist. Aus dem Fehlen von Kreisen folgt die Eindeutigkeit von Wegen in Bäumen. Für jedes Knotenpaar existiert genau ein Weg, der die beiden Knoten miteinander verbindet. Alternative Wege existieren nicht. So muss beispielsweise im Baum aus Abbildung 2.6 von Knoten 1 immer über die Knoten 0 und 2 gegangen werden, um zu Knoten 4 zu gelangen. Der umgekehrte Weg von Knoten 4 zu Knoten 1 beinhaltet die gleichen Kanten, die jeweils in umgekehrter Richtung zu nutzen sind.

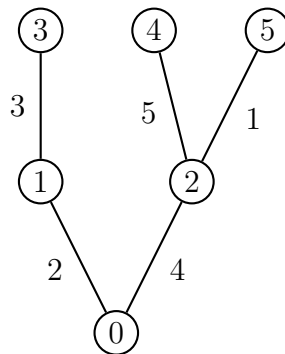


Abbildung 2.6: Wurzelbaum

Ein **Wurzelbaum** ist ein Baum, aus dessen Knotenmenge genau ein Knoten als **Wurzel**  $r$  gewählt wurde. Die Wahl einer Wurzel impliziert eine Hierarchie der Knoten des Baumes, die sich über die Erreichbarkeit der Wurzel ergibt. Ein Knoten  $i$  liegt in einem Baum **unter** einem Knoten  $j$ , falls Knoten  $i$  Teil des Weges von der Wurzel  $r$  zu Knoten  $j$  ist. Notiert wird dies als  $i < j$ . Als **Abschluss** eines Knotens  $i$  **nach unten** wird die Menge  $[i] = \{r, i\} \cup \{j \in V \mid j < i\}$  bezeichnet. Es handelt sich damit um alle Knoten, die Teil des Weges von der Wurzel zum jeweiligen Knoten sind. Umgekehrt beschreibt der **Abschluss** eines Knotens  $i$  **nach oben** die Knotenmenge  $[i] = \{i\} \cup \{j \in V \mid i < j\}$ , die nur über einen Weg der Knoten  $i$  enthält von der Wurzel aus erreicht werden kann. Im Baum aus Abbildung 2.6 sind beispielsweise  $[2] = \{2, 4, 5\}$  und  $[4] = \{0, 2, 4\}$ . Für benachbarte Knoten eines Wurzelbaumes werden die Begriffe **Elter(-knoten)** und **Kind(-knoten)** eingeführt. Die Begriffe sind an die Bezeichnungen Vater und Sohn(-knoten) in einem gerichteten Baum von Neumann und Morlock (2002) angelehnt. Im Rahmen dieser Arbeit wird über die geschlechtslosen Bezeichner Elter und Kind die Hierarchie zweier benachbarter Knoten mit Blick auf die gewählte Wurzel ausgedrückt. Die Kinder eines Knotens

$i$  sind seine Nachbarn, die Teil seines Abschlusses nach oben sind. Umgekehrt ist ein Knoten Elter seiner Kinder. Als Bezeichner werden  $C_i$  für die Kinder und  $p_i$  für den Elter eines Knotens  $i$  verwendet. Zusätzlich bezeichnet  $d_i$  die Bewertung der **Elterkante**  $[p_i, i]$ . Als Elter der Wurzel wird die Wurzel selbst, mit einer Kantenbewertung  $d_r = 0$  festgelegt. Die Kinder des Knotens 2 in Abbildung 2.6 sind  $C_2 = \{4, 5\}$  und der Elter von Knoten 4 ist Knoten 2. Die paarweise Rollenverteilung zweier benachbarter Knoten ist abhängig von der Wahl der Wurzel. Würde im vorliegenden Baum anstelle des Knotens 0 einer der Knoten 2, 4 oder 5 als Wurzel gewählt, drehte sich beispielsweise die Beziehung zwischen Knoten 0 und Knoten 2 um. Knoten 0 wäre dann Kind des Knotens 2 und Knoten 2 Elter für Knoten 0. Jeder Knoten  $i$ , mit Ausnahme des Wurzelknotens, besitzt genau einen Elter  $p_i \neq i$ . Die Anzahl der Kindknoten ist dagegen nicht beschränkt. Knoten, die keine Kinder besitzen, heißen **Blätter**. Alle übrigen Knoten werden als **innere Knoten** bezeichnet. Die Rolle eines Blattes in einem Wurzelbaum ändert sich mit einem Wechsel der Wurzel nicht, sofern das Blatt nicht selbst als Wurzel gewählt wird. Die Festlegung einer Wurzel hat keinen Einfluss auf die Baumstruktur als solche und kann beliebig erfolgen. Im Kontext der Tourenplanung existiert im Allgemeinen ein Depot als Ausgangs- und Zielort von Touren. Wenn das zugrundeliegende Streckennetz die Struktur eines Baumes besitzt, bietet es sich an, den das Depot repräsentierenden Knoten als Wurzel zu wählen.

Aus der Knotenanzahl eines Baumes kann direkt auf die Anzahl seiner Kanten geschlossen werden. Dies erlaubt eine kompakte Speicherung von Bäumen in Form einer modifizierten Forward-Star-Darstellung<sup>3</sup>. Für die Speicherung ist zunächst die Anzahl der Knoten eines Baumes  $n$  anzugeben. Die Kodierung der  $n - 1$  Kanten eines Baumes erfolgt in zwei Reihen. Auf Basis der Knotenhierarchie, durch Wahl eines beliebigen Knotens als Wurzel, können die Kanten durch die Angabe des Elter  $p_i$  jeden Knotens  $i$  beschrieben werden. Der Elter der gewählten Wurzel ist die Wurzel selbst. Die zweite Reihe beinhaltet die Bewertung der Kanten. Sofern die Adressierung eines Knotens anhand seiner Nummer, sowie die Bewertungen der Kanten jeweils in einem Speicherplatz gespeichert werden können, benötigen die beiden Reihen  $2n$  Speicherplätze. Die gesamte Darstellung, bestehend aus den beiden Reihen und der Angabe der Knotenanzahl, benötigt  $2n + 1$  Speicherplätze und ist abhängig von der gewählten Wurzel. Durch Wahl des „ersten“ Knotens als Wurzel, kann die Abbildung jedoch vereinheitlicht werden. Außerdem kann damit die Angabe des Elter der gewählten Wurzel entfallen und die Speicherung um einen Eintrag je Reihe reduziert werden. Der Speicherbedarf beträgt dann  $2(n - 1) + 1$  Einträge. Für den Baum aus Abbildung 2.6 sieht die Repräsentation wie folgt aus:

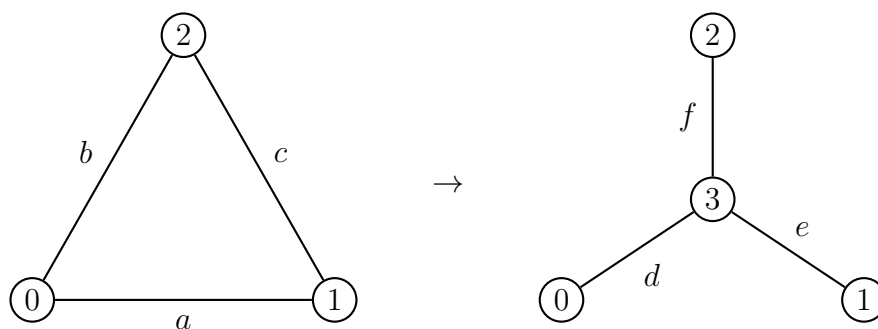
---

<sup>3</sup> vgl. Neumann und Morlock (2002)

Knotenanzahl:	6
Elter(-knoten):	0 0 1 2 2
Kantenbewertung:	2 4 3 5 1

In Abschnitt 2.4 zeigt sich, dass sich das Vorliegen einer Baumstruktur gegenüber einem Graphen vorteilhaft auf die Lösungsfindung für ein Tourenplanungsproblem auswirken kann. Im Allgemeinen besitzt ein Graph keinen Spannbaum, in dem die Distanzen zwischen allen Knoten denen im Graphen entsprechen. Wird ein Spannbaum eines Graphen verwendet, handelt es sich dabei mit Blick auf die Distanzen in der Regel lediglich um eine Näherung des Graphen. Im Folgenden werden zwei Fälle, in denen ein (Teil-) Graph in eine äquivalente Baumstruktur überführt werden kann, vorgestellt.

Der erste Fall sind Kreise eines Graphen, die aus genau drei Knoten bestehen. Dafür ist die Ergänzung eines Knotens erforderlich. Die drei Kanten der Dreiecksstruktur werden entfernt und die Knoten durch neue Kanten sternförmig mit dem ergänzten Knoten verbunden. Abbildung 2.7 zeigt die modifizierte Struktur mit dem zusätzlichen Knoten 3.



**Abbildung 2.7:** Überführung von dreielementigen Kreisen in eine kreisfreie Struktur

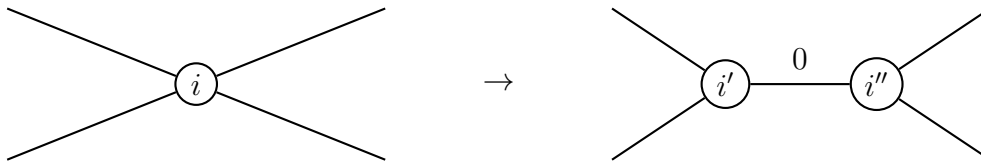
Durch geeignete Bewertung der neuen Kanten, bleiben die ursprünglichen Distanzen zwischen den Knoten erhalten. Die Kantenbewertungen der neuen Kanten sind dafür wie folgt zu wählen:

$$d = \frac{1}{2}(a + b - c) \quad e = \frac{1}{2}(a + c - b) \quad f = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

Die ursprünglichen Distanzen rekonstruieren sich aus:

$$a = d + e \quad b = d + f \quad c = e + f$$

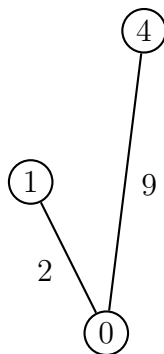
Als weitere Elemente in Graphen können Artikulationen in eine Baumstruktur überführt werden. Die Aufteilung einer Artikulation in zwei Knoten, die mittels einer mit 0 bewerteten Kante verbunden werden, ergibt eine Brücke. Die zu Knoten  $i$  inzidenten Kanten werden auf die beiden neuen Knoten aufgeteilt. Für die Aufteilung sind die disjunkten Knotenmengen der Teilgraphen zu betrachten, die bei Entfernen des Knotens  $i$  entstehen. Die zuvor mit Knoten  $i$  benachbarten Knoten werden je nach Zugehörigkeit zu einer der beiden Teilmengen entweder mit Knoten  $i'$  oder mit Knoten  $i''$  verbunden. Die Bewertungen der Kanten bleiben unverändert. Abbildung 2.8 veranschaulicht das Vorgehen.



**Abbildung 2.8:** Auflösung von Artikulationen durch Knotenteilung und Kantenanpassungen

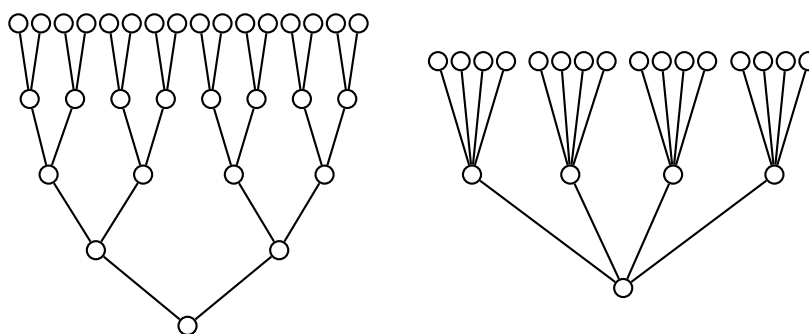
Liegt als Streckennetz bereits ein Baum vor, so kann dieser unter Umständen komprimiert werden, sofern nicht alle Knoten des Baumes im Rahmen eines Tourenplanungsproblems anzufahren sind. Wie bereits beschrieben, sind für die Planung von Touren lediglich Strecken, die bezüglich der gewählten Metrik zu bestbewerteten Wegen zwischen den anzufahrenden Orten gehören, relevant. Die Reduzierung auf diese Strecken lässt sich auf einer Baumstruktur ohne die Berechnung kürzester Wege durchführen, da stets nur ein Weg zwischen zwei Knoten existiert. Blätter und Knoten mit genau einem Kind, die nicht als Ort anzufahren sind, können entfernt werden. Im Fall von Knoten mit genau einem Kind muss die Anbindung des Kindes an den Baum wiederhergestellt werden. Hierfür wird eine neue Kante zwischen dem Kind und dem Elter des entfernten Knotens eingefügt. Die Bewertung der neuen Kante entspricht der Summe der Bewertungen der beiden entfallenden Kanten, die zu dem entfernten Knoten inzident waren. Wir bezeichnen einen modifizierten Baum, der für den Zusammenhang einer Knotenmenge  $A$  relevant ist, als Teilbaum der Knotenmenge  $A$ . Der Teilbaum der Knotenmenge  $A = \{0, 1, 4\}$  des Baumes in Abbildung 2.6 ist in Abbildung 2.9 dargestellt. Er beinhaltet lediglich die Knoten 0, 1 und 4. Die Knoten 3 und 5 können entfernt werden, da es sich bei ihnen um Blätter, die nicht in der Menge  $A$  enthalten sind, handelt. Knoten 2 besitzt nunmehr nur noch ein Kind. Da er selbst nicht Teil der Menge  $A$  ist, kann er ebenfalls entfernt werden. Die Anbindung seines Kindes 4 wird über die neue Kante  $[0, 4]$  mit der Bewertung 9 hergestellt. Die Bewertung dieser Kante ergibt sich aus der Summe der Bewertungen der beiden entfernten Kanten  $[0, 2]$  und  $[2, 4]$ . Diestel (2010) bezeichnet das Vorgehen zum Entfernen

des Knotens 2, einem Knoten mit genau zwei Nachbarn, als dessen Unterdrücken.



**Abbildung 2.9:** Teilbaum der Knotenmenge  $\{0, 1, 4\}$

Die Untersuchung von Lösungsverfahren für Problemstellungen auf Streckennetzen mit Baumstruktur erfordert die Generierung von Testdaten, inklusive Bäumen, die Streckennetze definieren. Bäume unterscheiden sich in der Anzahl ihrer Knoten, den Verzweigungen in jedem Knoten und der Länge ihrer Kanten. Insbesondere die Anzahl der Kinder eines Knotens kann zu sehr unterschiedlichen Bäumen führen. Bei gleicher Knotenanzahl führt eine große Anzahl an Kindern je Knoten zu einem breitgefächerten Baum, während eine niedrige Anzahl an Kindern je Knoten einen tiefen Baum ergibt. Abbildung 2.10 zeigt je ein Beispiel für einen tiefen und einen breiten Baum. Neben der Anzahl an Kindern je Knoten kann die Bewertung von Kanten als strukturelle Eigenschaft von Bäumen angesehen werden. Ein Beispiel eines Baumes mit heterogenen Kantenbewertungen, dargestellt durch unterschiedlich lange Kanten, zeigt Abbildung 2.11.



**Abbildung 2.10:** Tiefer und breiter Baum

Eine flexible zufallsgestützte Generierung von Bäumen kann neben der Vorgabe einer Knotenanzahl durch Wahl eines Verzweigungs- und eines Kantenbewertungsprofils umgesetzt werden. Ein Verzweigungsprofil  $Z^V$  ist eine diskrete Zufallsverteilung, die festlegt

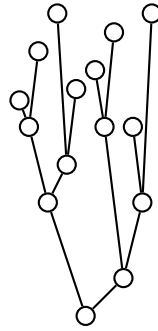


Abbildung 2.11: Baum mit heterogenen Kantenbewertungen

---

**Algorithmus 2.1:** Generierung zufälliger Bäume

---

**Input** Knotenanzahl  $N$ , Verzweigungsprofil  $Z^V$ , Kantenbewertungsprofil  $Z^D$

**Output** Baum

```

1  $d_0 := 0, p_0 := 0, n := 1, e := 0;$ 
2 while  $n < N$  do
3    $c := \min\{\text{random}(Z^V), N - n\};$ 
4   for  $j = 1$  to  $c$  do
5      $d_n := \text{random}(Z^D);$ 
6      $p_n := e;$ 
7      $n := n + 1;$ 
8    $e := e + 1;$ 

```

---

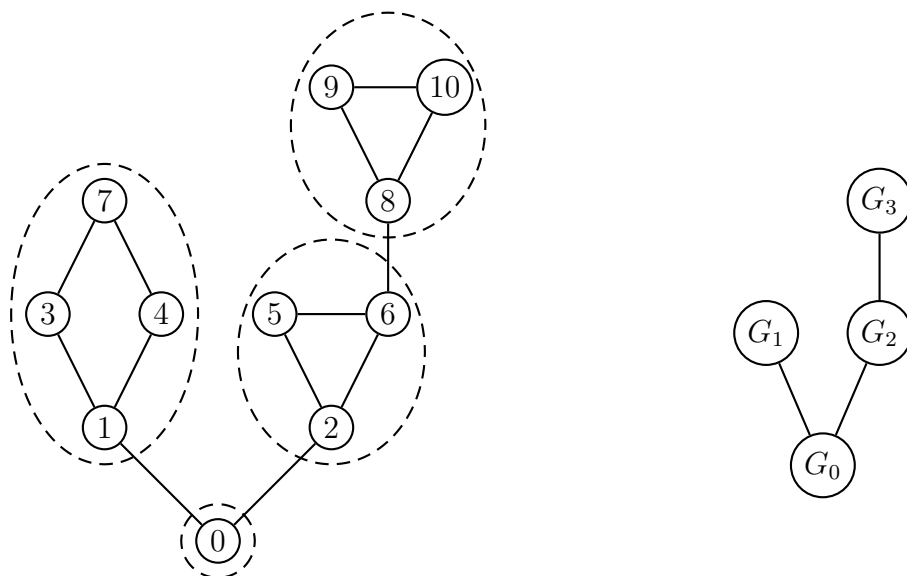
mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Knoten eine bestimmte Anzahl an Kindknoten besitzt. Sinnvolle Ausprägungen eines Verzweigungsprofils sind nicht-negative Werte. Bei einem Kantenbewertungsprofil  $Z^D$  handelt es sich um eine Zufallsverteilung zur Festlegung der Kantenbewertungen. Diese kann sowohl diskret als auch stetig sein. Sollen die Kantenbewertungen Entfernungen oder Fahrzeiten repräsentieren ist eine Beschränkung der möglichen Ausprägungen auf positive Werte sinnvoll. Durch Wahl unterschiedlicher Verteilungen können sowohl gleichmäßige als auch heterogene Bäume erzeugt werden. Algorithmus 2.1 beschreibt das verwendete Vorgehen zur zufallsbasierten Generierung von Bäumen auf Basis eines vollständig parametrisierten Verzweigungs- und Kantenbewertungsprofils. Die Funktion `random()` erwartet als Argument eine Zufallsverteilung und gibt bei Aufruf eine Zufallszahl, gemäß der übergebenen Verteilung, zurück. Das Vorgehen startet mit der Wurzel als Knoten 0, der sich selbst als Elter zugeordnet ist. Der Baum besitzt somit zunächst  $n = 1$  Knoten. In der Variable  $e$ , initialisiert mit Knoten 0, wird der Knoten gespeichert für den als nächstes Kinder hinzugefügt werden. Solange die vorgegebene Knotenanzahl  $N$  noch nicht erreicht wurde, wird die Anzahl zu erzeugender Kinder für Knoten  $e$  ermittelt. Die Anzahl wird als Minimum der nach dem

Verzweigungsprofil gezogenen Zufallszahl und der zum Erreichen der vorgegebenen Knotenzahl maximal hinzuzufügenden Knoten bestimmt. Für jedes Kind wird die Länge der Elterkante gemäß einer Zufallszahl nach dem Kantenbewertungsprofils ermittelt und Knoten  $e$  als Elterknoten festgelegt. Zudem wird der Zähler  $n$ , der bislang erzeugten Knoten, um eins erhöht. Wurden alle hinzuzufügenden Kinder des Knotens  $e$  erzeugt, wird  $e$  um eins erhöht und gegebenenfalls mit der Erzeugung von Kindknoten fortgefahren.

## 2.3 Brückengraphen

Als weitere spezielle Graphen werden Brückengraphen eingeführt. Ein zusammenhängender Graph ist ein Brückengraph, sofern er mindestens eine Brücke besitzt. Entfernt man die Brücken eines Brückengraphen resultiert ein unzusammenhängender Graph mit mehreren Komponenten. Sei  $B$  die Menge der Brücken eines Graphen, so resultieren bei deren Entfernen  $|B| + 1$  Komponenten. Jede dieser Komponenten stellt einen Untergraphen des Brückengraphen dar. Ein Brückengraph besteht somit aus einer Menge disjunkter Untergraphen, die über Brücken verbunden sind. Diese Untergraphen werden als **Untergraphen des Brückengraphen** bezeichnet. Untergraphen sind zusammenhängend. Darüber hinaus werden keine Anforderungen an die Anzahl der Kanten in einem Untergraphen gestellt, sodass auch vollständige Untergraphen zulässig sind. Ebenso sind einelementige Untergraphen möglich. Diese ergeben sich beispielsweise, wenn ein Baum als Brückengraph interpretiert wird. Jeder Knoten des Baumes entspricht dann einem eigenen Untergraphen. Ein Beispiel eines Brückengraphen zeigt Abbildung 2.12. Die Brücken des abgebildeten Brückengraphen sind die Kanten  $[0, 1]$ ,  $[0, 2]$  und  $[6, 8]$ . Die Struktur eines Brückengraphen kann in Form seines **Untergraphenbaumes** kompakt dargestellt werden. Im Untergraphenbaum entspricht jeder Untergraph des Brückengraphen einem Knoten. Die Verbindung der Knoten erfolgt über die Brücken des Brückengraphen. Im Brückengraphen aus Abbildung 2.12 existieren vier Untergraphen, darunter ein einelementiger Untergraph  $G_0$ . Die Brücke  $[0, 1]$  verbindet die Untergraphen  $G_0$  und  $G_1$ . Analog ergeben sich die Kanten zwischen den Untergraphen  $G_0$ ,  $G_2$  und  $G_3$  aus den übrigen Brücken.

Aus der Festlegung eines ausgewählten Untergraphen als **Wurzel eines Brückengraphen**, analog zur Wurzel eines Baumes, ergibt sich eine Hierarchie der Untergraphen. Diese Hierarchie basiert auf der Erreichbarkeit der Untergraphen von der Wurzel. In Abbildung 2.12 stellt beispielsweise Untergraph  $G_3$  ein Kind des Untergraphen  $G_2$  dar. Die Knoten jeder Brücke können mit Blick auf die Hierarchie der Untergraphen unterschieden werden. Wir bezeichnen den der Wurzel näher gelegenen Knoten einer Brücke als



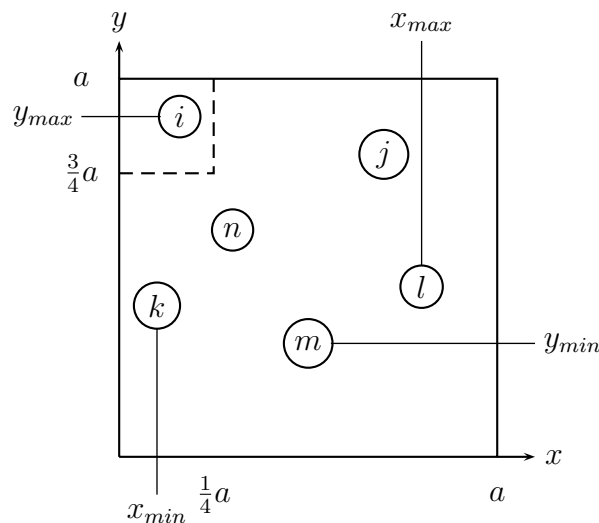
**Abbildung 2.12:** Brückengraph mit zugehörigem Untergraphenbaum

**Brückenkopf**, den anderen Knoten als **Anbindungsknoten**. Sofern eine Brücke mit Bewertung 0 vorliegt, wird derjenige Knoten der Brücke dem Depot als näher angesehen, dessen kürzester Weg zur Wurzel den anderen Knoten der Brücke nicht enthält. Abweichend von Abbildung 2.12 werden die Untergraphen im Weiteren Verlauf dieser Arbeit nach ihrem Anbindungsknoten benannt. In der Abbildung würde unter dieser Prämisse der Untergraph  $G_3$  als  $G_8$  bezeichnet. Mit Blick auf die Verbindung zu anderen Untergraphen werden der Anbindungsknoten  $a$  eines Untergraphen  $G_a$  und die im Untergraphen enthaltenen Brückenköpfe in der Menge  $V_a^R$  seiner Randknoten zusammengefasst. Alle übrigen Knoten eines Untergraphen, die keine Randknoten darstellen, werden als innere Knoten  $V_a^I$  bezeichnet. Im Brückengraph der Abbildung 2.12 sind die Knoten 0 und 6 Brückenköpfe, die Knoten 1, 2 und 8 Anbindungsknoten. Im Allgemeinen kann ein einzelner Knoten sowohl Brückenkopf als auch Anbindungsknoten sein. Dieser Fall ergibt sich beispielsweise, wenn in Abbildung 2.12 die Kante  $[6, 8]$  durch eine Kante  $[2, 8]$  ersetzt würde. Für die Brücke  $[0, 2]$  wäre Knoten 2 dann Anbindungsknoten und für die Brücke  $[2, 8]$  Brückenkopf. Die Anzahl möglicher Brückenköpfe in einem Untergraphen ist nur durch die Anzahl der Knoten des Untergraphen beschränkt, das heißt alle Knoten können als Brückenkopf fungieren. Ein Knoten kann Brückenkopf für mehrere Brücken sein. Schließlich stellen beispielweise für Untergraph  $G_2$  die Knoten 2 und 6 Randknoten und Knoten 5 einen inneren Knoten dar.

Die Erstellung des Abbilds eines Graphen als Brückengraph erfordert mehrere Schritte. Zunächst müssen die Brücken des Graphen identifiziert und je Brücke die entsprechenden



Knoten als Brückenkopf beziehungsweise Anbindungsknoten bestimmt werden. Anschließend können die disjunkten Untergraphen, die durch die Brücken verbunden werden, ermittelt werden. Während die Brückeneigenschaft einer Kante unabhängig von der Wahl einer Wurzel ist, erfordert die Unterscheidung der mit einer Brücke inzidenten Knoten in Brückenkopf und Anbindungsknoten die Festlegung einer Wurzel. Um eine einheitliche Struktur für Brückengraphen zu erhalten, wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Wurzel eines Brückengraphen ein einelementiger Untergraph ist. Liegt in einem Anwendungsfall ein Depot, das als Wurzel angesehen werden soll, in einem Untergraphen mit mehreren Knoten, kann es über eine künstliche Brücke mit Bewertung 0 in einen einelementigen Untergraphen überführt werden. An den Distanzen zwischen den Knoten eines Brückengraphen ändert sich dadurch nichts. Als weitere Anpassungen bei der Abbildung eines Graphen als Brückengraph bieten sich, zur Herausarbeitung der Brückengraphstruktur, der Austausch von Artikulationen durch Brücken und die Auflösung dreielementiger Zyklen gemäß den Erläuterungen in Abschnitt 2.2 an.



**Abbildung 2.13:** Erzeugung von Untergraphen

Die zufallsgestützte Generierung von Brückengraphen im Rahmen dieser Arbeit orientiert sich am Vorgehen zur zufallsgestützten Erzeugung von Bäumen. Konstruiert werden Brückengraphen mit Untergraphen einheitlicher Knotenanzahl. Zunächst wird ein Baum erzeugt, der als Untergraphenbaum des zu erzeugenden Brückengraphen dient. Das Vorgehen entspricht hierbei Algorithmus 2.1. In die Erstellung des Untergraphenbaumes gehen somit ein Verzweigungs- und ein Kantenbewertungsprofil ein. Die Knotenanzahl des Untergraphenbaumes ist abhängig von der Knotenanzahl des Brückengraphen, sowie der vorgegebenen Anzahl an Knoten je Untergraph. Die Erzeugung der Untergraphen basiert auf der zufälligen Platzierung von Punkten auf einer zweidimensionalen Ebene

mit quadratischer Begrenzung. Für die Kantenlänge  $a$  des begrenzenden Quadrats wird ein Verhältnis zur mittleren Brückenlänge, basierend auf dem Kantenbewertungsprofil, vorgegeben. Der erste Knoten eines Untergraphen wird durch zufällige Wahl seiner  $x$ -Koordinate zwischen  $0$  und  $a/4$  sowie seiner  $y$ -Koordinate zwischen  $3a/4$  und  $a$  in der linken oberen Ecke der Fläche platziert. Er wird als Anbindungsknoten des Untergraphen verwendet. Die übrigen Punkte können frei, durch zufällige Wahl ihrer  $x$ - und  $y$ -Koordinaten zwischen  $0$  und  $a$ , platziert werden. Die Knoten werden anschließend zu einem vollständigen Graphen vernetzt, wobei die euklidischen Distanzen zwischen den Knoten die Kantenbewertungen festlegen. Aus der Menge der Knoten werden schließlich Kandidaten für Brückenköpfe bestimmt. Als Kandidaten werden diejenigen Knoten eines Untergraphen in Betracht gezogen, die in mindestens einer Koordinate einen Extremalwert aufweisen und somit am Rand der Knotenmenge liegen. Da Extremalwerte der beiden Koordinaten in einem Punkt zusammenfallen können, ergeben sich zwei bis vier Kandidaten. Diese Kandidatenmenge stellt eine Vereinfachung der konvexen Hülle der Knotenmenge dar. Abhängig von der Anzahl der nachgelagerten Untergraphen wird eine Teilmenge der Kandidaten als Brückenköpfe bestimmt oder alle Kandidaten werden Brückenköpfe, unter Umständen für mehrere Untergraphen. In Abbildung 2.13 ist ein Untergraph mit sechs Knoten abgebildet. Knoten  $i$  wurde als erster Knoten in der Ecke platziert und stellt den Anbindungsknoten dieses Untergraphen dar. Die übrigen fünf Knoten wurden frei innerhalb der Begrenzung platziert. Die Untersuchung der Knoten auf minimale und maximale Werte in ihren Koordinaten führt zu der Menge  $\{i, k, l, m\}$  als Kandidatenmenge für Brückenköpfe zur Anbindung nachgelagerter Untergraphen.

## 2.4 Handlungsreisendenproblem

Eine elementare Aufgabenstellung bei der Planung von Touren ist die Festlegung einer Reihenfolge, in der die Orte einer Tour zu besuchen sind. Im einfachsten Fall steht ein Fahrzeug zur Verfügung, mit dem eine Menge von Orten angefahren werden soll. Ausgangspunkt einer Tour ist der Standort des Fahrzeugs, der zugleich den Abschluss einer Tour bildet. Jedem Paar von Orten ist eine Entfernung zugeordnet, sodass sich in Abhängigkeit der Reihenfolge der Orte unterschiedlich lange Touren ergeben. Von Interesse ist insbesondere eine Tour, die die minimale Fahrstrecke aufweist. Die Bestimmung einer solchen Tour wird als Handlungsreisendenproblem bezeichnet und stellt ein  $NP$ -schweres Problem dar.<sup>4</sup> Gemäß Neumann und Morlock (2002) entspricht das Handlungsreisendenproblem der Bestimmung eines hamiltonschen Kreises minimaler Länge

---

<sup>4</sup> Korte und Vygen (2008)

in einem bewerteten vollständigen Graphen. Das Handlungsreisendenproblem kann in Form eines linearen gemischt-ganzzahligen Modells formalisiert werden. Die nachstehende Modellierung ist Domschke und Scholl (2010) entnommen und kann sowohl symmetrische als auch asymmetrische Distanzen zwischen Orten verarbeiten. Wenngleich in dieser Arbeit von ungerichteten Streckennetzen und somit von symmetrischen Distanzen ausgegangen wird, eignet sich diese Formulierung als Ausgangspunkt für die weitere Betrachtung von ganz unterschiedlichen Tourenplanungsproblemen. Im Fall symmetrischer Distanzen kann eine Tour in beide Richtungen abgefahren werden, da die Fahrtrichtung keinen Einfluss auf die Länge einer Tour hat. Es genügt deshalb eine geeignete Menge an Verbindungen zwischen den anzufahrenden Orten auszuwählen, sodass eine Tour, die alle Orte beinhaltet, entsteht. Bei asymmetrischen Distanzen ist die Bewertung einer Tour im Allgemeinen von ihrer Orientierung abhängig. Zahlreiche erweiterte Problemstellungen, beispielsweise Tourenplanungsprobleme mit Zeitfenstern, erfordern eine Berücksichtigung der Tourorientierung, um zeitliche Anforderungen abbilden zu können. Die Festlegung der zu nutzenden Verbindungsstrecken zwischen Orten, wie sie im symmetrischen Fall genutzt werden können, genügt dabei nicht mehr. Die nachfolgende Formulierung basiert auf einem bewerteten vollständigen Digraphen. Die Knotenmenge  $V$  des Digraphen beinhaltet den Knoten 0, der den Standort des Fahrzeugs repräsentiert, und je einen Knoten für die anzufahrenden Orte. Als Bewertungen der Pfeile werden die Distanzen der jeweiligen Orten verwendet. Die Modellierung verwendet binäre  $x_{ij}$  und stetige  $\pi_i$  Variablen. Die Variable  $x_{ij}$  nimmt den Wert 1 an, sofern von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  gefahren wird. Fahrten von einem Knoten zu sich selbst werden ausgeschlossen, das heißt es gilt  $x_{ii} = 0$  für alle  $i \in V$ . In den Variablen  $\pi_i$  werden die Positionen der Knoten in einer Tour fortgeschrieben. Ein Knoten  $j$  liegt in einer Tour hinter Knoten  $i$ , sofern  $\pi_j > \pi_i$  gilt. Alternativen zur dargestellten Formulierung, auch für symmetrische Distanzen, finden sich ebenfalls in Domschke und Scholl (2010). Als weiterführende Literatur sei auf Applegate et al. (2011) und Gutin und Punnen (2006) verwiesen.

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i,j \in V} d_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad i \in V \quad (2.3)$$

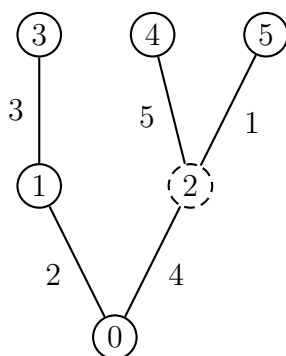
$$\pi_j \geq \pi_i + 1 - (1 - x_{ij}) \cdot M \quad i, j \in V \setminus \{0\} \mid i \neq j \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V \quad (2.5)$$

$$\pi_i \in \mathbb{R} \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (2.6)$$

Die Länge einer Tour ergibt sich aus der Summe der Distanzen der genutzten Pfeile und ist gemäß Formel (2.1) zu minimieren. Die Nebenbedingungen (2.2) und (2.3) gewährleisten, dass jeder Knoten genau einmal angefahren und verlassen wird. Um Kurzzyklen, das heißt Zyklen innerhalb einer echten Teilmenge der Knoten auszuschließen, werden über die Ungleichungen (2.4) Positionen innerhalb einer Tour fortgeschrieben. Folgt Knoten  $j$  auf Knoten  $i$  so ist seine Positionsvariable  $\pi_j$  um mindestens den Wert 1 größer als die des Knoten  $i$ . Ein Zyklus würde zu einem Widerspruch führen. Da es sich bei einer Tour durch alle Knoten ebenfalls um einen Zyklus handelt, muss ein beliebiger Knoten - hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit Knoten 0 - von den Nebenbedingungen ausgenommen werden.  $M$  ist ausreichend groß zu wählen, um die Bedingung für nicht aufeinanderfolgende Knoten außer Kraft zu setzen. Die Anzahl der anzufahrenden Knoten stellt einen geeigneten Wert für  $M$  dar. Schließlich werden die Variablen  $x_{ij}$  in Formel (2.5) als binär und die Variablen  $\pi_i$  in Formel (2.6) als reellwertig festgelegt.

Das Handlungsreisendenproblem besitzt in seiner klassischen Form als Eingangsgröße lediglich eine Distanzmatrix zwischen den anzufahrenden Orten. Das Streckennetz, als Grundlage für die Distanzmatrix, findet keine weitere Beachtung. Im Folgenden werden die zuvor vorgestellten Strukturen, Bäume und Brückengraphen, als Streckennetze eines Handlungsreisendenproblems unterstellt. Die Wurzel des jeweiligen Baumes beziehungsweise Brückengraphen stellt dabei das Depot beziehungsweise den Standort des Fahrzeugs dar, an dem die Tour beginnt und endet. Im Rahmen dieser Arbeit wird für eine einheitliche Darstellung davon ausgegangen, dass Knoten 0 die Wurzel eines Baumes beziehungsweise eines Brückengraphen darstellt. Es handelt sich dabei um keine inhaltliche Einschränkung. Der Fokus der Betrachtungen im weiteren Verlauf dieses Abschnitts liegt auf strukturellen Eigenschaften von Bäumen und Brückengraphen, die Vorteile bei der Ermittlung einer Lösung bieten.



**Abbildung 2.14:** Handlungsreisendenproblem auf einer Baumstruktur

Bei der Untersuchung von Tourenplanungsproblemen auf konkreten Streckennetzen sind

in der Regel neben den anzufahrenden Orten auch Zwischenstationen, die selbst nicht als Orte anzufahren sind, vorhanden. Dabei kann es sich beispielsweise um Kreuzungen handeln, die auf dem Weg von einem Ort zu einem anderen befahren werden. Für das Handlungsreisendenproblem auf einer Baumstruktur wird daher unterstellt, dass lediglich eine Teilmenge der Baumknoten als Orte angefahren werden muss. Abbildung 2.14 zeigt eine Instanz des Handlungsreisendenproblems auf einem Baum. Die Wurzel 0 stellt das Depot, in dem ein Fahrzeug zur Verfügung steht, dar. Die Knoten 1, 3, 4 und 5 sollen in einer streckenminimalen Tour vom Depot aus angefahren werden. Bei dem gestrichelt dargestellten Knoten 2 handelt es sich um eine Station, die genutzt werden kann, selbst aber nicht als Ort angefahren werden muss. Die Besonderheit von Bäumen als Streckennetzen liegt in ihrer Kreisfreiheit und der daraus resultierenden Eindeutigkeit der Wege zwischen ihren Knoten. Für jedes Knotenpaar existiert genau ein Weg, der die beiden Knoten des Paares wechselseitig miteinander verbindet. Wird beispielsweise die Kante  $[0, 2]$  in Richtung des Knoten 2 genutzt, ist eine Rückkehr zu Knoten 0 nur über die Nutzung derselben Kante in umgekehrter Richtung möglich. Allgemein folgt daraus, dass im Rahmen einer geschlossenen Tour jede genutzte Kante stets gleich häufig in beide Richtungen befahren werden muss. Jede Kantennutzung trägt zur Länge einer Tour bei. Von Interesse ist somit, ob und wie häufig jede Kante genutzt werden muss. Das mathematische Modell (2.7) - (2.10) formalisiert die Bestimmung einer minimal bewerteten Kantennutzung, die die Erreichbarkeit jedes anzufahrenden Knotens von der Wurzel gewährleistet. Die Knotenmenge des Baumes ist mit  $V$  bezeichnet. Anzufahren sind die Knoten der Teilmenge  $V' \subseteq V$ . Ob die Elterkante  $[p_i, i]$  des Knotens  $i$  genutzt wird, wobei eine Nutzung sowohl eine Fahrt in Richtung des Knotens  $i$  als auch eine Fahrt in Richtung des Knotens  $p_i$  beinhaltet, bildet die binäre Variable  $x_i$ , definiert in Formel (2.10), ab. Die Zielgröße des Modells ist die Summe der Bewertungen der genutzten Kanten. Aus der Befahrung jeder genutzten Kante in beide Richtungen resultiert der Faktor 2 in der Zielfunktion (2.7). Um einen anzufahrenden Knoten  $i$  vom Depot aus erreichen zu können, muss seine Elterkante genutzt werden. Andernfalls würde keine Verbindung zum Depot existieren und der Knoten könnte nicht angefahren werden. Diese Anforderung ist in den Ungleichungen (2.8) festgehalten. Die Hierarchie der Baumkanten ist in den Ungleichungen (2.9) berücksichtigt. Die Elterkante eines Knotens kann nur genutzt werden, sofern die Elterkante seines Elterknotens ebenfalls genutzt wird. Ausgenommen von dieser Anforderung sind der Wurzelknoten sowie seine Kinder, da der Wurzelknoten keine Elterkante besitzt.

$$\text{Minimiere } 2 \sum_{i \in V \setminus \{0\}} d_i x_i \quad (2.7)$$

$$x_i \geq 1 \qquad i \in V' \qquad (2.8)$$

$$x_i \leq x_{p_i} \qquad i \in V \setminus (\{0\} \cup C_0) \qquad (2.9)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \qquad i \in V \setminus \{0\} \qquad (2.10)$$

Eine optimale Lösung des angegebenen mathematischen Modells kann trivial bestimmt werden. Geht man davon aus, dass es sich bei einem vorliegenden Baum um den Teilbaum seiner anzufahrenden Knoten handelt, muss jede Kante des Baumes genutzt werden. Für die Elterkanten der anzufahrenden Knoten resultiert dies aus den Ungleichungen (2.8). Alle übrigen Kanten müssen ebenfalls genutzt werden, da sie Bestandteil mindestens eines Weges zwischen einem anzufahrenden Knoten und der Wurzel sind. Die doppelte Summe der Kantenbewertungen stellt somit eine untere Schranke für den Zielfunktionswert des Handlungsreisendenproblems auf einem Baum dar. Eine Tour, deren Länge diesem Schrankenwert entspricht, kann durch Durchlaufen der Baumknoten gemäß dem Prinzip last-in-first-out (LIFO) beginnend mit der Wurzel ermittelt werden. Eine mögliche Lösung dieses Vorgehens ist die Tour  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$  mit der Länge 30. Aufgrund unterschiedlicher Möglichkeiten die Kinder eines Knotens zu sortieren, lässt sich eine Menge gleich bewerteter Touren konstruieren. Jede nach diesem Vorgehen erzeugte Lösung besitzt als Länge den Wert der unteren Schranke und ist somit optimal. Die Bestimmung einer optimalen Lösung für das Handlungsreisendenproblem auf Bäumen ist demnach in polynomialer Zeit möglich. Gegenüber dem klassischen Handlungsreisendenproblem entfällt insbesondere die Notwendigkeit Kurzzyklen explizit zu vermeiden.

Wird ein Brückengraph als Streckennetz für ein Handlungsreisendenproblem betrachtet, können die Erkenntnisse über Handlungsreisendenprobleme auf Bäumen übertragen werden. Es wird davon ausgegangen, dass in jedem Untergraph des Brückengraphen mindestens ein Knoten anzufahren ist. Aus der komprimierten Darstellung eines Brückengraphen als Untergraphenbaum ist ersichtlich, dass in einer Lösung eines Handlungsreisendenproblems jede Brücke genau einmal in beide Richtungen genutzt werden muss. Eine Tour kann damit bereits in Form einer Untergraphenabfolge angegeben werden. Um zu einer Lösung für die gesamte Struktur zu kommen, müssen Touren innerhalb der Untergraphen ermittelt werden. Da die innere Struktur der Untergraphen eines Brückengraphen nicht näher spezifiziert ist, werden vollständige Graphen unterstellt. Innerhalb eines Untergraphen sind der Anbindungsknoten, die Brückenköpfe und die Knoten der anzufahrenden Orte des Untergraphen in eine Tour zu integrieren. Die Bestimmung einer kürzesten Tour durch diese Knoten entspricht dem klassischen Handlungsreisendenpro-

blem. Die Handlungsreisendenprobleme innerhalb der Untergraphen sind aufgrund ihrer im Vergleich zum gesamten Brückengraphen geringeren Knotenanzahl im Allgemeinen leichter zu lösen. Da die einzelnen Probleme unabhängig voneinander sind, ist die Parallelisierung eines Lösungsprozesses einfach möglich. Können für die einzelnen Untergraphen optimale Touren bestimmt werden, ergibt sich in Verbindung mit der einmaligen Brückennutzung in beide Richtungen eine optimale Lösung für den gesamten Brückengraphen.





# Kapitel 3

## Kapazitierte Tourenplanung

Waren und Produkte werden in Produktionsstätten hergestellt. Bevor ein Kunde ein Produkt nutzen kann, muss dieses den Weg zum Kunden finden. Umgekehrt existieren Aufgabenstellungen, die das Einsammeln von Material an mehreren Orten und den anschließenden Transport zu einer Sammelstelle erfordern. Derartige Problemstellungen können oftmals als Tourenplanungsproblem interpretiert werden. In diesem Kapitel wird das kapazitierte Tourenplanungsproblem, bei dem mehrere Fahrzeuge für den Transport zur Verfügung stehen, betrachtet. In Abschnitt 3.1 wird das kapazitierte Tourenplanungsproblem mit einem vollständigen Graphen als Streckennetz vorgestellt. Die Ausführungen sind an Toth und Vigo (2002) angelehnt und beschränken sich in der Beschreibung auf die Auslieferung von Gütern. Anschließend wird in den Abschnitten 3.2 und 3.3 die Verwendung von Bäumen beziehungsweise Brückengraphen als Streckennetze untersucht.

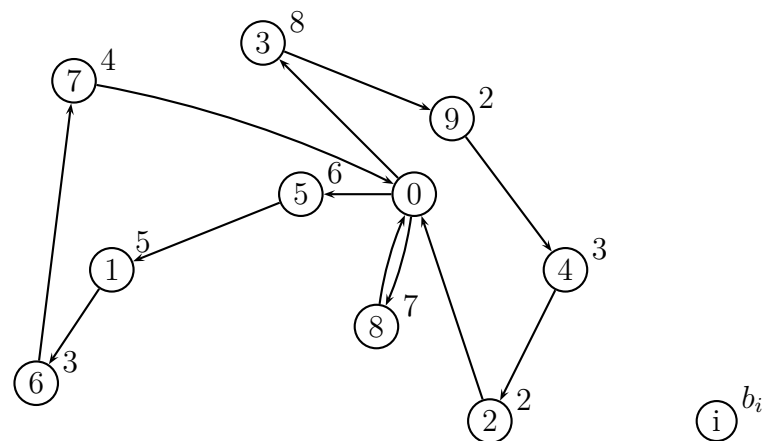
### 3.1 Verwendung eines vollständigen Graphen als Streckennetz

Das klassische kapazitierte Tourenplanungsproblem (capacitated vehicle routing problem - CVRP) betrachtet neben einem Depot, von dem aus Waren versandt werden, eine Menge von Kunden. Wie beim Handlungsreisendenproblem<sup>5</sup> wird davon ausgegangen, dass das Depot und die Kunden als Knoten eines bewerteten Graphen dargestellt werden. Die Menge der Kunden entspricht  $V \setminus \{0\}$ , der Knotenmenge des Graphen ohne den das Depot repräsentierenden Knoten 0. Jedem Kunden  $i$  ist ein Bedarf  $b_i$  zugeordnet. Die Bedienung dieser Bedarfe erfolgt ausgehend von dem Depot mit einer Menge  $K$  von Fahrzeugen. Unter den Kunden sowie zwischen den Kunden und dem Depot sind Distanzen

---

<sup>5</sup> vgl. Abschnitt 2.4

$d_{ij}$  bekannt. Die Fahrzeuge besitzen eine einheitliche Kapazität  $C$ , wodurch die zeitgleich transportierbare Menge beschränkt wird. Die Grundlage für die Ermittlung einer Kapazität können beispielsweise die räumlichen Abmessungen oder die maximale Zuladung eines Fahrzeugs sein. Es wird davon ausgegangen, dass die Fahrzeugkapazität für die Bedienung aller einzelner Bedarfe ausreicht und somit  $b_i \leq C$  für alle Kunden  $i$  gilt. Der Bedarf eines Kunden ist mit einer Anfahrt zu bedienen. Eine Aufteilung des Bedarfs eines Kunden auf mehrere Anfahrten ist nicht zulässig. Die Kundenbedarfe werden lediglich in Form ihrer Kapazitätsinanspruchnahme beschrieben. Wenngleich gegebenenfalls unterschiedliche Güter zu liefern sind, erfolgt im Rahmen der Betrachtung als CVRP keine Differenzierung der Bedarfe. Zielstellung der kapazitierten Tourenplanung ist die Ermittlung eines streckenminimalen Tourenplanes zur Bedienung aller Kunden. Die Aufgabenstellung setzt sich aus zwei Komponenten, dem Aufteilen der Kunden auf die verfügbaren Fahrzeuge sowie dem Bestimmen einer Reihenfolge der Kunden für jedes Fahrzeug, zusammen. Jedes Fahrzeug fährt genau einmal vom Depot los, sodass die Bedarfsmenge der einem Fahrzeug zugeordneten Kunden seine Kapazität nicht überschreiten darf. Die Kundenreihenfolgen aller Fahrzeuge ergeben einen Tourenplan. Abbildung 3.1 zeigt beispielhaft die Knoten einer Instanz des CVRP, deren Bedarfe sowie eine zulässige Lösung der Instanz. Das Beispiel enthält 9 Kunden, denen jeweils ein Bedarfswert zugeordnet ist. Die Bedarfe der Kunden sind an ihren Knoten notiert. Knoten 0 stellt das Depot, in dem drei Fahrzeuge mit einer Kapazität  $C = 20$  zur Bedienung der Kunden zur Verfügung stehen, dar.



**Abbildung 3.1:** Knoten und zulässige Lösung einer CVRP-Instanz

Aus der Literatur<sup>6</sup> stehen verschiedene mathematische Formulierungen zur Abbildung

<sup>6</sup> vgl. Toth und Vigo (2002)

eines kapazitierten Tourenplanungsproblems zur Verfügung. Zwei gängige Formulierungen, die auch asymmetrische Distanzen handhaben können, werden im Folgenden dargestellt und erläutert. Die erste Formulierung (3.1)-(3.7) wird im Rahmen dieser Arbeit als 2I-CVRP bezeichnet. Das Modell nutzt eine zweifachindizierte binäre Variable  $x_{ij}$  zur Kodierung der Fahrzeugbewegungen. Die Variable  $x_{ij}$  nimmt den Wert 1 an, sofern ein Fahrzeug von Kunde  $i$  zu Kunde  $j$  fährt. Andernfalls ist  $x_{ij}$  gleich null. Die Werte der Variablen  $x_{ii}$  werden für alle  $i$  auf den Wert null festgelegt, um unzulässige Fahrten von einem Knoten zu sich selbst zu unterbinden. Überschreitet der gemeinsame Bedarf zweier Kunden  $i$  und  $j$  die Fahrzeugkapazität, das heißt es gilt  $b_i + b_j > C$ , können die beiden Kunden nicht in einer Tour beliefert werden. Insbesondere ist eine Fahrt von Kunde  $i$  zu Kunde  $j$  unzulässig. Die zugehörigen Variablen  $x_{ij}$  werden deshalb ebenfalls auf den Wert null fixiert. Eine weitere Variable  $u_i$  gibt die nach Anfahrt des Kunden  $i$  ausgelieferte Bedarfsmenge an.

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i,j \in V} d_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \setminus \{0\} \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{0j} \leq |K| \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in V} (x_{ji} - x_{ij}) = 0 \quad i \in V \quad (3.4)$$

$$u_i - u_j + C x_{ij} \leq C - b_j \quad i, j \in V \setminus \{0\}, i \neq j \quad (3.5)$$

$$b_i \leq u_i \leq C \quad i \in V \quad (3.6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V \quad (3.7)$$

Zielfunktion (3.1), die Summe der gefahrenen Distanzen, ist zu minimieren. Jeder Kunde ist gemäß den Gleichungen (3.2) genau einmal anzufahren. Der Beginn einer Tour entspricht einer Fahrt vom Depot. Die Anzahl der Touren, beziehungsweise die Anzahl der vom Depot ausgehenden Fahrten, wird durch die Ungleichung (3.3) auf die Anzahl verfügbarer Fahrzeuge begrenzt. Der Einsatz jedes verfügbaren Fahrzeugs ist nicht vorgeschrieben. Sowohl für Kunden als auch für das Depot muss gemäß den Gleichungen (3.4) die Anzahl eingehender Fahrten der Anzahl ausgehender Fahrten entsprechen. Jeder angefahrene Kunde muss somit durch eine Fahrt zu einem anderen Kunden oder dem Depot wieder verlassen werden. Außerdem muss für jede Fahrt vom Depot eine Fahrt zurück zum Depot stattfinden. Die Vermeidung von Kurzzyklen, Zyklen ohne das Depot,

erfolgt in diesem Modell durch Fortschreibung der nach Abfahrt von einem Kunden  $i$  ausgelieferten Menge  $u_i$ . Die Ungleichungen (3.5) und (3.6) begrenzen die Werte der nach Kunden ausgelieferten Mengen. Für jeden einzelnen Kunden liegt der Wert gemäß den Ungleichungen (3.6) zwischen seinem Bedarf und der Fahrzeugkapazität. Das Fortschreiben der ausgelieferten Menge wird über die Ungleichungen (3.5) gewährleistet. Findet eine Fahrt von einem Kunden  $i$  zu einem Kunden  $j$  statt, reduziert sich die zugehörige Ungleichung zu  $u_j \geq u_i + b_j$ . Im Grenzfall kommt zu der nach Kunde  $i$  ausgelieferten Menge  $u_i$  bei direkter Fahrt von Kunde  $i$  zu Kunde  $j$  die Bedarfsmenge des Kunden  $j$  zu der nach Kunde  $j$  ausgelieferten Menge  $u_j$  hinzu. Findet keine direkte Fahrt statt, gewährleistet die Fahrzeugkapazität  $C$  auf den rechten Seiten der Ungleichungen deren Einhaltung. Die Festlegung der Variablen  $x_{ij}$  auf binäre Werte erfolgt in Formel (3.7)<sup>7</sup>.

Die zweite Formulierung (3.8)-(3.15) nutzt separate Variablen für Fahrten verschiedener Fahrzeuge. Für das kapazitierte Tourenplanungsproblem mit homogenen Fahrzeugen ist dies nicht erforderlich, jedoch ermöglicht diese Formulierung das einfache Erweitern um fahrzeugbezogene Restriktionen. Beispiele für derartige Einschränkungen sind unterschiedliche Fahrzeugkapazitäten und Inkompatibilitäten zwischen Fahrzeugen und Kunden. Die Formulierung basiert auf dreifachindizierten binären Variablen  $x_{ijk}$ , die angeben, ob ein Fahrzeug  $k$  von Kunde  $i$  zu Kunde  $j$  fährt. Die Annahmen des Modells 2I-CVRP, dass keine Fahrten von einem Knoten zu sich selbst und zwischen einem Paar von Knoten, deren gemeinsamer Bedarf die Kapazität der Fahrzeuge überschreitet, zulässig sind, werden übernommen. Das Modell wird im Folgenden als 3I-CVRP bezeichnet. Neben den Variablen  $x_{ijk}$  kommen ebenfalls binäre Variablen  $y_{ik}$  zum Einsatz, die eine Zuordnung von Kunden zu Fahrzeugen vornehmen. Schließlich werden analog zur Formulierung 2I-CVRP Variablen  $u_{ik}$  zur Abbildung der nach einem Kunden  $i$  von Fahrzeug  $k$  ausgelieferten Menge verwendet.

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i,j \in V} d_{ij} \sum_{k \in K} x_{ijk} \quad (3.8)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ik} = 1 \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (3.9)$$

$$\sum_{k \in K} y_{0k} \leq |K| \quad (3.10)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} = \sum_{j \in V} x_{jik} = y_{ik} \quad i \in V, k \in K \quad (3.11)$$

$$u_{ik} - u_{jk} + Cx_{ijk} \leq C - b_j \quad i, j \in V \setminus \{0\}, i \neq j, b_i + b_j \leq C, k \in K \quad (3.12)$$

<sup>7</sup>  $x_{ii} = 0 \forall i \in V$  und  $x_{ij} = 0 \forall i, j \in V \mid b_i + b_j > C$

$$b_i \leq u_{ik} \leq C \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (3.13)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad i \in V, k \in K \quad (3.14)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V, k \in K \quad (3.15)$$

Analog zum Modell 2I-CVRP ist die Summe der gefahrenen Strecken aller Fahrzeuge (3.8) zu minimieren. Gemäß den Gleichungen (3.9) ist jeder Kunde genau einem Fahrzeug zuzuordnen. Die Zuordnung von Fahrzeugen zum Depot wird durch die Ungleichung (3.10) auf die Anzahl verfügbarer Fahrzeuge begrenzt. Fahrzeuge, die nicht dem Depot zugeordnet sind, führen keine Tour durch. Ist ein Fahrzeug einem Ort  $i$ , einem Kunden oder dem Depot, zugeordnet, muss es von einem Ort  $j$  zu Ort  $i$  und ebenso von Ort  $i$  zu einem anderen Ort  $j$  fahren. Die Gleichungen (3.11) geben diese Anforderung wieder. Das Fortschreiben der nach einem Kunden durch ein Fahrzeug ausgelieferten Menge erfolgt über die Ungleichungen (3.12). In Verbindung mit den Ungleichungen (3.13) wird die Einhaltung der Fahrzeugkapazität in den Touren sichergestellt. Die Entscheidungsvariablen  $y_{ik}$  und  $x_{ijk}$ <sup>8</sup> werden in (3.14) und (3.15) definiert.

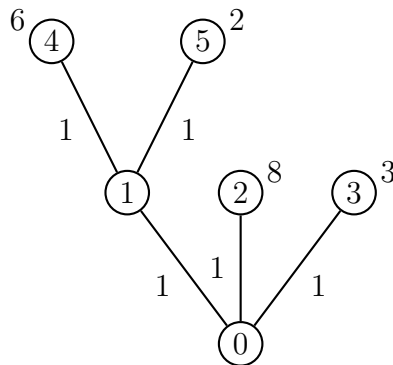
## 3.2 Verwendung eines Baumes als Streckennetz

Anhand des Handlungsreisendenproblems wurde in Abschnitt 2.4 eine vereinfachte Modellierung für Probleminstanzen mit einem Baum als Streckennetz vorgestellt. In diesem Abschnitt wird ein Baum als Streckennetz für das kapazitierte Tourenplanungsproblem unterstellt. Nach einer Beschreibung der als TCVRP (tree capacitated vehicle routing problem) abgekürzten Problemstellung folgt ein Literaturüberblick. Anschließend wird ein mathematisches Modell aus der Literatur vorgestellt. Der Abschnitt schließt mit einer Performanceanalyse, die das Lösungsverhalten der Modelle für vollständige Graphen und Bäume als Streckennetze mithilfe kommerzieller Optimierungssoftware untersucht.

Bei der expliziten Betrachtung von Streckennetzen in Tourenplanungsproblemen muss zwischen Bedarfsorten und Knoten des Streckennetzes unterschieden werden. Diese Unterscheidung ist bei dem CVRP hinfällig, da in die Problemstellung lediglich die Distanzen zwischen Bedarfsorten und nicht das Streckennetz auf dem die Distanzen basieren eingehen. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass der Knoten 0, als Wurzel des Baumes, das Depot darstellt. Für das TCVRP wird neben den Knoten  $V$  des Baumes eine Menge  $L$  von Bedarfen benötigt. Jedem Bedarf  $l \in L$  ist ein Knoten  $n_l$  des Baumes als Bedarfsort und eine Bedarfsmenge  $b_l$  zugeordnet. Die Betrachtung von Bedarfen, anstelle

<sup>8</sup>  $x_{iik} = 0 \forall i \in V, k \in K$  und  $x_{ijk} = 0 \forall i, j \in V, k \in K \mid b_i + b_j > C$

von Knoten denen ein Bedarf zugeordnet ist, ermöglicht die Abbildung mehrerer Bedarfe an einem Knoten. Diese Möglichkeit wird beispielsweise in Unterabschnitt 3.3.3 genutzt. Die Unteilbarkeit der Erfüllung von Bedarfen bezieht sich auf die Bedarfe, nicht jedoch die Knoten des Baumes. So müssen nicht alle Bedarfe, die dem gleichen Knoten zugeordnet sind, mit einer Anfahrt bedient werden. Sofern in einer Instanz jedem Knoten maximal ein Bedarf zugeordnet ist, werden die Bedarfe im Folgenden mit den Knoten identifiziert und als Bedarfsknoten bezeichnet. Abbildung 3.2 zeigt den Baum und die Bedarfe einer Instanz des TCVRP. In dem Beispiel existiert je Knoten  $i$  maximal ein Bedarf  $l$  mit  $n_l = i$ . Die Bedarfsknoten  $\cup_{l \in L} n_l$  der dargestellten Instanz sind die Knoten 2, 3, 4 und 5. Für Knoten 1 liegt kein Bedarf vor, er ist lediglich Teil des Streckennetzes und dient der Erreichbarkeit der Knoten 4 und 5. Zur Vervollständigung der Instanz ist eine Anzahl von verfügbaren Fahrzeugen und deren Kapazität anzugeben.



**Abbildung 3.2:** Baum und Bedarfe einer Instanz des TCVRP

Anhand des Beispiels lässt sich illustrieren, dass die Minimierung der Fahrstrecken nicht zugleich der Minimierung der Anzahl eingesetzter Fahrzeuge entspricht. Tabelle 3.1 enthält die optimalen Lösungen der Beispielinstantz bei einer Fahrzeugkapazität von 10 und zwei beziehungsweise drei verfügbaren Fahrzeugen. Angegeben sind jeweils die Knoten, deren zugeordneter Bedarf in einer Tour bedient wird, sowie die resultierende Kapazitätsinanspruchnahme der Fahrzeuge. Im Fall von zwei verfügbaren Fahrzeugen werden in einer Tour die Knoten 3 und 4 mit einem gemeinsamen Bedarf von 9 Einheiten und in einer anderen Tour die Knoten 2 und 5 mit einem Bedarf von 10 angefahren. Die Gesamtlänge der beiden Touren beträgt 12. In dieser Lösung muss der Knoten 1 von beiden Fahrzeugen angefahren werden, um eine zulässige Aufteilung der Bedarfsmengen zu erhalten. Sofern ein weiteres Fahrzeug zur Verfügung steht, ist dies nicht notwendig. In diesem Fall werden die Bedarfe an den Knoten 2 und 3 in eigenen Touren bedient, sodass eine Zusammenfassung der Bedarfe an den Knoten 4 und 5 in einer Tour möglich wird. Knoten 1 muss bei drei Fahrzeugen nur einmal angefahren werden, wodurch sich eine Länge der Touren von 10 ergibt. Da jede Instanz des TCVRP auch als Instanz des

# Fahrzeuge	zwei	drei
Touren mit Ladung	3 → 4 (9 ME)	4 → 5 (8 ME)
	2 → 5 (10 ME)	2 (8 ME)
		3 (3 ME)
Länge	$2 \cdot (3 + 3) = 12$	$2 \cdot (3 + 1 + 1) = 10$

**Tabelle 3.1:** Lösungen in Abhängigkeit der Anzahl verfügbarer Fahrzeuge

CVRP interpretiert werden kann, gilt auch für das CVRP, dass die Fahrstreckenminimierung im Allgemeinen nicht der Minimierung der eingesetzten Fahrzeuge entspricht.

### 3.2.1 Literaturüberblick

Das TCVRP wurde von Labbé et al. (1991) eingeführt. Abweichend von der obigen Problembeschreibung gehen die Autoren dieser und der im Folgenden zitierten Veröffentlichungen davon aus, dass jedem Knoten genau ein Bedarf zugeordnet ist. Sie verwenden zwei Schranken für das Behälterproblem, die von Martello und Toth (1990) vorgestellt wurden, zur Abschätzung wie oft die Kanten eines Baumes zur Bedienung der Bedarfe mindestens befahren werden müssen. Das Behälterproblem besteht gemäß den Autoren darin, die Bedarfe eines Teilbaumes auf eine möglichst geringe Anzahl von Behältern, deren Fassungsvermögen der Fahrzeugkapazität entspricht, aufzuteilen. Der Zielfunktionswert einer Lösung des Behälterproblems gibt die Anzahl der benötigten Behälter an. Übertragen auf das TCVRP entspricht der Zielfunktionswert einer optimalen Lösung des Behälterproblems der Anzahl an Fahrzeugen, die mindestens für die Bedienung der Bedarfe des jeweils betrachteten Teilbaumes benötigt werden und die deshalb die Elterkante der Wurzel des Teilbaumes befahren müssen. Bei den Schranken handelt es sich um die in Unterabschnitt 3.2.2 erläuterten Schranken  $\check{W}_i$  sowie eine Erweiterung, die berücksichtigt, dass jeder Bedarf  $b_i > c/2$  ein eigenes Fahrzeug zur Bedienung benötigt. Im Rahmen dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass die Fahrzeugkapazität für die Bedienung mehrerer Bedarfe ausreicht und insbesondere die einzelnen Bedarfe kleiner als die halbe Fahrzeugkapazität sind. Bei dementsprechend für die Performanceanalyse erstellten Instanzen wirkt sich die von den Autoren vorgeschlagene Erweiterung der Schranke nicht aus. Labbé et al. (1991) erweitern das Vorgehen von Martello und Toth (1990) und stellen eine vergleichbare Schranke für Bedarfe  $c/3 < b_i < c/2$  vor. Als Lösungsansatz stellen sie ein heuristisches Verfahren sowie ein Enumerationsverfahren für das TCVRP vor. Die Heuristik konstruiert Touren beginnend mit einem Blatt des Baumes. Der Bedarf eines Blattes wird mit dem Bedarf seines Elterknotens zusammengelegt, solange die Fahrzeugkapazität dies erlaubt. Überschreitet der gemeinsame Bedarf die Fahrzeugkapazität wird

eine neue Tour eröffnet. Das Enumerationsverfahren beginnt mit der Verteilung aller Bedarfe, die die halbe Fahrzeugkapazität überschreiten, auf einzelne Fahrzeuge. Die Verzweigungen im Suchbaum werden durch Zuordnung bislang nicht zugewiesener Bedarfe zu einer der bereits eröffneten Touren sowie zu einer neuen Tour erzeugt. Die Autoren geben an, mit dem Enumerationsverfahren innerhalb einer Rechenzeit von 100 Sekunden Instanzen mit bis zu 140 Knoten weitgehend und Instanzen mit bis zu 200 Knoten vereinzelt optimal lösen zu können. Basnet et al. (1999) präsentieren zwei Heuristiken für das TCVRP. Die erste Heuristik „H1“ ist an das Savings-Verfahren von Clarke und Wright (1964) angelehnt. Das Verfahren startet mit Pendeltouren für jeden Knoten. Im Verlauf des Algorithmus wird versucht, Touren, die einen möglichst weit vom Depot entfernten Knoten teilen, zu vereinen. Ist keine Kombination von Touren mehr zulässig, terminiert das Verfahren. Die zweite Heuristik „H2“ von Basnet et al. (1999) startet mit einer Tour, die alle Knoten beinhaltet. Die auf dieser Tour auszuliefernde Menge überschreitet im Allgemeinen die Fahrzeugkapazität. Solange unzulässige Touren existieren, werden diese an dem bedienten Bedarfsknoten, der dem Depot am nächsten gelegen ist, aufgeteilt. Der Knoten, der für die Aufteilung einer Tour bestimmt wurde, wird zunächst keiner der resultierenden Touren zugeordnet. Anschließend, da ausschließlich zulässige Touren vorliegen, werden die Knoten, die nicht Teil einer Tour sind, den Touren in Reihenfolge nicht wachsender Distanz zum Depot zugeordnet. Kann ein Knoten keiner Tour, die bereits über den Knoten verläuft, zugeordnet werden, wird eine neue Tour für den Knoten eröffnet. Chandran und Raghavan (2008) beschreiben das TCVRP in Form zweier mathematischer Modelle und stellen ein heuristisches Lösungsverfahren vor. Das erste Modell nutzt die Eigenschaft des Handlungsreisendenproblems auf Bäumen, dass für eine Menge von Knoten eine optimale Tour gemäß dem Vorgehen einer Tiefensuche ermittelt werden kann. Die Autoren gehen davon aus, dass die Knoten des Baumes gemäß einer Tour nach diesem Vorgehen nummeriert vorliegen. Die Variablen des Modells legen fest, ob ein Knoten am Beginn oder Ende einer Tour liegt, welche Knoten aufeinanderfolgen und ob zwei Knoten von einem Fahrzeug bedient werden. Variablen, die zwei Knoten  $i$  und  $j$  betreffen, werden nur für  $i < j$  definiert, da sich die streckenminimale Reihenfolge, in der zwei Knoten einer Tour angefahren werden, aus der Knotenummerierung ergibt. Das zweite Modell nutzt dagegen Variablen für die Zuordnung von Fahrzeugen und Knoten sowie für Angabe, ob eine Kante durch ein Fahrzeug genutzt wird. Das Modell erlaubt eine kompakte Darstellung des TCVRP und kommt mit einer Anzahl an Variablen, die linear mit dem Produkt aus Anzahl der Baumknoten und Anzahl der Fahrzeuge ansteigt, aus. Mit der Modifikation, dass nicht jedem Knoten ein Bedarf zugeordnet sein muss, wird das Modell in Unterabschnitt 3.2.2 vorgestellt. Das von den Autoren präsentierte Lösungsverfahren ist eine Kombination der Heuristik von Labbé et al. (1991) und



dem Verfahren „H1“ von Basnet et al. (1999). Abweichend von deren Vorgehensweisen, die jeweils nur die Kombination zweier Bedarfe analysieren, betrachten Chandran und Raghavan (2008) die Bündelung aller Bedarfe eines Elterknotens und seiner Kindknoten. Für die Bündelung werden ausschließlich Elterknoten herangezogen, deren Kinder alle Blätter sind.

Rennie (1995) verwendet das TCVRP zur Modellierung einer Problemstellung, der Bestimmung von Einsammeltouren von Milchtankern in der Region Northland auf Neuseeland. Abweichend von Labbé et al. (1991) unterstellt Rennie (1995) die Teilbarkeit von Bedarfen. Der Bedarf an einem Knoten kann somit auf verschiedene Fahrzeuge aufgeteilt werden. Zur Lösung stellt sie ein heuristisches Vorgehen vor. Dieses Verfahren beginnt die Konstruktion einer Tour mit dem am weitesten vom Depot entfernten Abschluss des Baumes, dessen Bedarfsmengen gerade noch von einem Fahrzeug aufgenommen werden können. Anschließend werden Erweiterungen der Tour durch Hinzunahme weiterer Abschlüsse, einzelner Knoten sowie Teilbedarfe einzelner Knoten betrachtet. Zur Auswahl einer Tourerweiterung werden der Aufwand zur Umsetzung der Erweiterungen ermittelt sowie eine Abschätzung von Fahrteinsparungen bei der Planung weiterer Touren vorgenommen. Die Erweiterung mit dem besten Verhältnis aus Einsparung und Aufwand wird realisiert. Ist die Kapazität einer Tour ausgeschöpft, wiederholt sich das Vorgehen mit den verbliebenen Bedarfen. Hamaguchi und Katoh (1998) präsentieren ein alternatives heuristisches Verfahren für das TCVRP mit teilbaren Bedarfen. Ihr Algorithmus wählt Abschlüsse des Baumes nach oben  $\lceil i \rceil$ , sodass die Bedarfssumme  $\sum_{j \in \lceil i \rceil} b_j$  die Kapazität eines Fahrzeugs überschreitet jedoch der Bedarf der Abschlüsse  $\lceil j \rceil$  der Kindknoten  $j \in C_i$  die Bedienung mit einem Fahrzeug ermöglicht. Dabei werden zwei Strategien, die die Bedarfe in einem gewählten Abschluss auf zwei Fahrzeuge verteilen beziehungsweise mit einer Teilmenge der Bedarfe ein Fahrzeug voll auslasten und die Betrachtung der übrigen Bedarfe in spätere Iterationen verschieben, betrachtet. Ein weiteres Verfahren für das TCVRP mit teilbaren Bedarfen stammt von Asano et al. (2001). Sie wenden ein zu Hamaguchi und Katoh (1998) vergleichbares Vorgehen an, dass jedoch Abschlüsse, deren Bedarf den Einsatz von zwei Fahrzeugen erforderlich macht, betrachtet. Je ausgewähltem Abschluss werden verschiedene Strategien zur Verteilung der Bedarfe auf Fahrzeuge bewertet und die beste realisiert.

Weitere Varianten der Tourenplanung auf Bäumen werden von Kumar et al. (2012), Mbaraga et al. (1999) und Vidyarthi und Shukla (2013) untersucht. Kumar et al. (2012) erweitern das TCVRP um Fahrzeuge unterschiedlicher Kapazitäten. Mbaraga et al. (1999) betrachten neben dem kapazitätsbeschränkten TCVRP eine Variante mit einer maximalen Tourlänge sowie eine Kombination aus Kapazitäts- und Tourlängenbegrenzung.

Schließlich werden von Vidyarthi und Shukla (2013) stochastische Bedarfe untersucht.

### 3.2.2 Mathematisches Modell

Eine Möglichkeit der Modellierung des TCVRP als gemischt-ganzzahliges lineares Programm stammt von Chandran und Raghavan (2008). Diese Modellierung verwendet zwei binäre Variablen. Die Variablen  $x_{ik}$  geben an, ob ein Fahrzeug  $k$  die Elterkante von Knoten  $i$  nutzt. Die Zuordnung der Bedarfe zu den Fahrzeugen erfolgt über die Variablen  $y_{lk}$ , die den Wert 1 annehmen, sofern Fahrzeug  $k$  den Bedarf  $l$  bedient.

$$\text{Minimiere} \quad 2 \sum_{i \in V, k \in K} d_i x_{ik} \quad (3.16)$$

$$\sum_{k \in K} y_{lk} = 1 \quad l \in L \quad (3.17)$$

$$\sum_{l \in L} b_l y_{lk} \leq C \quad k \in K \quad (3.18)$$

$$y_{lk} \leq x_{n_l k} \quad l \in L, k \in K \quad (3.19)$$

$$x_{ik} \leq x_{p_i k} \quad i \in V \setminus \{C_0 \cup \{0\}\}, k \in K \quad (3.20)$$

$$y_{lk} \in \{0, 1\} \quad l \in L, k \in K \quad (3.21)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad i \in V, k \in K \quad (3.22)$$

Die zu minimierende Zielfunktion (3.16) setzt sich aus den Kantenbewertungen der genutzten Kanten zusammen. Die Notwendigkeit eine genutzte Kante stets in beide Richtungen zu befahren, um zum Depot zurückkehren zu können, führt zum Faktor 2 in der Zielgröße. Für eine Optimierung spielt der konstante Faktor keine Rolle. Die Bedienung jeden Bedarfs wird über die Gleichungen (3.17) gefordert. Für jedes Fahrzeug darf die Summe der zugeordneten Bedarfe gemäß den Ungleichungen (3.18) die Fahrzeugkapazität nicht überschreiten. Die Nebenbedingungen (3.19) und (3.20) bilden die Baumstruktur ab und gewährleisten, dass ein Bedarf  $l$  nur durch ein Fahrzeug bedient werden kann, sofern das Fahrzeug den Bedarfsknoten  $n_l$  erreicht. Hierfür ist nach den Ungleichungen (3.19) die Nutzung der Elterkante des Bedarfsknotens durch das Fahrzeug notwendig. Die Nutzung einer Kante  $[p_i, i]$ , das heißt ein Wert  $x_i = 1$ , beinhaltet stets eine Fahrt von Knoten  $p_i$  zu Knoten  $i$  und eine Fahrt von Knoten  $i$  zu Knoten  $p_i$ . Die Hierarchie der Baumstruktur findet sich in den Ungleichungen (3.20) wieder. Ein Fahrzeug kann eine Kante nur nutzen, sofern die vorgelagerte Kante ebenfalls durch das Fahrzeug genutzt wird. Kindknoten der Wurzel und die Wurzel selbst sind hiervon ausgenommen,

da die Wurzel keine Elterkante besitzt. Die Zeilen (3.21) und (3.22) definieren die Variablen als binär. Eine Lösung des Modells (3.16) - (3.22), im Folgenden als M-TCVRP bezeichnet, beinhaltet eine Aufteilung der Bedarfe auf die verfügbaren Fahrzeuge, sowie eine Menge genutzter Kanten für jedes Fahrzeug. Die genutzte Kantenmenge eines jeden Fahrzeugs stellt zusammen mit den inzidenten Knoten der Kanten einen Baum, der die Wurzel beinhaltet, dar. Für diesen Teilbaum kann eine Tour ermittelt werden, deren Länge der doppelten Summe der Kantenbewertungen entspricht. Die Aufgabe entspricht dem Handlungsreisendenproblem mit einem Baum als Streckennetz. Aus den Touren aller Fahrzeuge ergibt sich ein Tourenplan als eine Lösung der Instanz.

Im Folgenden wird das Modell M-TCVRP um Ungleichungen, die eine minimale Anzahl an Nutzungen für die Kanten des Baumes fordern, erweitert. Zweck der Ergänzung ist die Verbesserung unterer Schranken bei dem Einsatz kommerzieller Optimierungssoftware. Die Idee der Erweiterung basiert auf einer unteren Schranke des Behälterproblems<sup>9</sup> und wurde bereits von Labbé et al. (1991) für das TCVRP aufgegriffen. Lässt man die räumliche Verteilung der Kunden außer Acht, verbleibt die Aufgabenstellung die Bedarfe unter Beachtung der Fahrzeugkapazität auf Fahrzeuge zu verteilen. Die Fahrzeuge können als Behälter mit Kapazität  $C$  und die Bedarfe als Gegenstände mit einer Kapazitätsinanspruchnahme in Höhe ihrer Bedarfsmenge  $b_l$  interpretiert werden. Die Lösung des resultierenden Behälterproblems gibt an, wie viele Fahrzeuge mindestens benötigt werden, um alle Bedarfe ohne Verletzung der Kapazitätsbeschränkung zuordnen zu können. Eine einfache untere Schranke für das Behälterproblem erhält man aus dem aufgerundeten Quotienten aus dem Gesamtbedarf und der Fahrzeugkapazität  $\lceil \sum_{l \in L} b_l / C \rceil$ . Für das TCVRP kann diese Schranke durch Anwendung auf Abschlüsse des jeweiligen Baumes genutzt werden. Werden die Bedarfsmengen des Abschlusses  $[i]$  eines Knotens  $i$  für die Bestimmung einer unteren Schranke des Behälterproblems verwendet, erhält man eine untere Schranke  $\check{W}_i = \lceil \sum_{l \in L | n_l \in [i]} b_l / C \rceil$  für die Anzahl der Fahrzeuge, die benötigt werden, um den Bedarf im Abschluss  $[i]$  zu bedienen. Da die Zufahrt zu den Knoten eines Abschlusses  $[i]$  ausschließlich über die Elterkante  $[p_i, i]$  des Knotens  $i$  erfolgen kann, ergibt sich aus der Anzahl für die Bedienung des Abschlusses benötigter Fahrzeuge durch Multiplikation mit der Länge der Elterkante  $d_i$  ein Mindestbeitrag des Abschlusses zur Zielfunktion. Die Ungleichungen (3.23) geben für jede Kante des Baumes einer Instanz eine Mindestanzahl an Nutzungen durch verschiedene Fahrzeuge vor. Das um die Ungleichungen (3.23) erweiterte Modell M-TCVRP wird im Folgenden als M-TCVRP+ bezeichnet.

---

<sup>9</sup> vgl. Martello und Toth (1990)

$$\sum_{k \in K} x_{ik} \geq \check{W}_i \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (3.23)$$

### 3.2.3 Performanceanalyse

In diesem Unterabschnitt wird auf die Konstruktion von Instanzen für das TCVRP eingegangen. Anschließend erfolgt eine Auswertung von Testläufen, bei denen die in vorhergehenden Abschnitten vorgestellten Modelle für das CVRP und das TCVRP mit kommerzieller Optimierungssoftware für die Lösung der erzeugten Testinstanzen eingesetzt werden. Für die CVRP-Modelle wird aus dem Baum einer TCVRP-Instanz eine Distanzmatrix zwischen den Bedarfen ermittelt.

Knotenanzahl	50, 100, 200, 400
Verzweigungsprofil	1: 85% ein Kind, 15% zwei Kinder 2: je 50% ein bzw. zwei Kind(er) 3: je 35% zwei bzw. drei Kinder, 30% vier Kinder
Kantenbewertungsprofil	(5,10)-gleichverteilt
Bedarfe	einer je Knoten
Bedarfsmittelwert $\bar{B}$	50, 100, 200
Bedarfsschwankungsbreite $B^s$	0,5, 1, 1,75
Fahrzeugkapazität	1000
Fahrzeugfaktor	1,1

**Tabelle 3.2:** Erzeugungsparameter TCVRP-Instanzen

Eine Instanz des TCVRP besteht aus einem Baum, Bedarfen sowie einer Fahrzeuganzahl und -kapazität. Tabelle 3.2 gibt einen Überblick über die verwendeten Parameter zur Erzeugung von Testinstanzen. Als Parameter zur Erzeugung von Bäumen nach Algorithmus 2.1 wurden die Knotenanzahl und das Verzweigungsprofil variiert. Das Verzweigungsprofil gibt Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Kinder eines Knotens, im Rahmen der Baumerstellung, an. Beispielsweise werden nach dem Verzweigungsprofil  $[0, 0.85, 0.15]$  für einen Knoten mit 85% Wahrscheinlichkeit ein Kindknoten und mit 15% Wahrscheinlichkeit zwei Kindknoten erzeugt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten nicht weiter verzweigt wird und somit ein Blatt des Baumes darstellt, ist in diesem Beispiel gleich null. Für das Kantenbewertungsprofil wurde für alle Instanzen eine Gleichverteilung zwischen den Werten 5 und 10 gewählt. In Vorversuchen wurde festgestellt, dass lediglich die Anzahl der Bedarfe, jedoch nicht die Anzahl der Knoten des Baumes, einen nennenswerten Einfluss auf das Lösungsverhalten des verwendeten Optimierungsprogramms Fico Xpress besitzt. Abgesehen von den Wurzeln, als Depots der jeweiligen Instanzen, wurde daher für jeden Knoten ein Bedarf erzeugt. Die Bedarfsmenge wurden basierend auf

einer Zufallsverteilung gezogen. Verwendet wurde eine diskrete Gleichverteilung, deren Mittelwert  $\bar{B}$  und Wertebereich variiert wurde. Als Mittelwerte der Bedarfsverteilung wurden drei verschiedene Werte verwendet. Die Festlegung der Wertebereiche erfolgte durch Angabe eines Vielfachen  $B^s$  des Mittelwertes. Die konkreten Bedarfsmengen werden  $((1 - \frac{B^s}{2})\bar{B}, (1 + \frac{B^s}{2})\bar{B})$ -gleichverteilt ermittelt. Sofern sich für die untere oder obere Grenze der diskreten Gleichverteilung nicht ganzzahlige Werte ergeben, wurden diese beziehungsweise aufgerundet. Aus den unterschiedlichen Bedarfsverteilungen und der einheitlichen Fahrzeugkapazität resultieren Instanzen mit einem unterschiedlichen Bedarf an Fahrzeugen. Die Mindestanzahl der benötigten Fahrzeugen kann analog zu den Ungleichungen (3.23) aus dem aufgerundeten Quotienten aus der gesamten Bedarfsmenge und der Kapazität eines einzelnen Fahrzeugs  $\lceil \sum_{i \in V} b_i / C \rceil$  nach unten abgeschätzt werden. Die Anzahl der verfügbaren Fahrzeuge einer Instanz wurde durch Multiplikation dieser unteren Schranke mit einem konstanten Faktor festgelegt. Für jede Parameterkombination wurden fünf Instanzen erzeugt. Die Testdaten bestehen somit aus 540 Instanzen. Jede der erzeugten Instanzen besitzt mindestens eine zulässige Lösung.

Mithilfe des kommerziellen Optimierungsprogramms Fico Xpress wurde die Lösungsdauer und -güte der Modelle 2I-, 3I-CVRP, M-TCVPR und M-TCVPR+ untersucht. Für die Modelle 2I- und 3I-CVRP wurden die Distanzen zwischen den Bedarfen, das heißt zwischen den den Bedarfen zugeordneten Knoten  $n_l$ , und die Distanzen der Bedarfe von und zum Depot ermittelt. Tabelle 3.3 gibt nach Modellen getrennt die Anzahl der Instanzen, für die innerhalb einer Laufzeit von 60 Sekunden mindestens eine zulässige Lösung ermittelt beziehungsweise die Optimalität einer zulässigen Lösung bewiesen werden konnte, an. Die Ergebnisse sind nach Anzahl der Bedarfe gruppiert. Jede Gruppe beinhaltet insgesamt 135 Instanzen. Tabelle 3.3 zeigt, dass nur mit den Modellen M-TCVPR und M-TCVPR+ für jede Instanz eine zulässige Lösung erzielt werden konnte. Lediglich für die Instanzen mit 50 Bedarfen ist dies ebenfalls für das Modell 2I-CVRP der Fall. Für große Instanzen mit 400 Bedarfen kann mit keinem der beiden Modelle 2I- und 3I-CVRP eine zulässige Lösung innerhalb der vorgegebenen Zeitbegrenzung ermittelt werden. Die Gegenüberstellung der Modelle 2I- und 3I-CVRP zeigt, dass mit dem Modell 2I-CVRP mehr zulässige Lösungen erzielt werden. Bezüglich der optimal gelösten Instanzen zeigen sich die Modelle für Bäume den allgemeinen Formulierungen überlegen. Weder das Modell 2I- noch das Modell 3I-CVRP können eine Instanz innerhalb des Zeitlimits optimal lösen. Dagegen erzielen die Modelle M-TCVPR und M-TCVPR+ optimale Lösungen für Instanzen mit 50 und 100 Bedarfen. Einzelne Instanzen mit 200 Bedarfen können nur mit dem Modell M-TCVPR+ optimal gelöst werden.

MIP-Solver, wie beispielsweise das verwendete Fico Xpress, liefern für Minimierungs-

# Bedarfe	2I-CVRP		3I-CVRP		M-TCVRP		M-TCVRP+	
	#zul.	# opt.	#zul.	# opt.	#zul.	# opt.	#zul.	# opt.
50	135	0	98	0	135	96	135	116
100	116	0	35	0	135	43	135	69
200	91	0	6	0	135	0	135	10
400	0	0	0	0	135	0	135	0

**Tabelle 3.3:** Anzahl zulässig und optimal gelöster Instanzen nach Bedarfsanzahl und Modell

probleme eine untere Schranke für den Zielfunktionswert einer zulässigen Lösung. Jeder Zielfunktionswert einer zulässigen Lösung stellt eine obere Schranke für den Zielfunktionswert einer optimalen Lösung dar. Stimmt der Zielfunktionswert einer zulässigen Lösung mit der unteren Schranke überein, handelt es sich um eine optimale Lösung der jeweiligen Instanz. Wird die Rechenzeit für das Lösen einer Instanz begrenzt, kann im Allgemeinen keine optimale Lösung erzielt werden. Die Verwendung eines MIP-Solvers wird in diesem Fall zu einer Heuristik. Im Folgenden wird angenommen, dass die Zielfunktionswerte zulässiger Lösungen einer Instanz auf Werte größer gleich null beschränkt sind. Zur Bewertung der Ergebnisse kann bei einer Begrenzung der Rechenzeit der sogenannte Gap, der die Differenz aus dem Zielfunktionswert der besten ermittelten Lösung  $f^*$  und der unteren Schranke  $LB$  zu dem Zielfunktionswert  $f^*$  ins Verhältnis setzt, verwendet werden. Der Gap berechnet sich als  $f^* - LB / f^*$  und kann Werte zwischen 0 und 1, das heißt 0% und 100%, annehmen. Definiert ist der Gap nur für Zielfunktionswerte größer null. Eine optimale Lösung liegt bei einem Gap von null vor. Bricht ein Lösungsprozess aufgrund einer begrenzten Rechenzeit vor Erzielen eines Gap von null ab, ist den Zielfunktion einer gegebenenfalls besten erhaltenen zulässigen Lösung bekannt, dass dieser maximal in Höhe des Gap von dem Zielfunktionswert einer optimalen Lösung abweicht. Es kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob tatsächlich eine besser bewertete Lösung existiert.

GAP in %	M-TCVRP			M-TCVRP+		
	Bedarfsmittelwert			Bedarfsmittelwert		
# Bedarfe	50	100	200	50	100	200
50	0,0	0,0	<b>3,3</b>	0,0	0,0	0,6
100	0,0	<b>4,7</b>	11,3	0,0	0,5	<b>4,4</b>
200	<b>6,2</b>	11,8	24,6	0,9	<b>4,6</b>	18,3
400	12,4	46,9	72,5	<b>5,9</b>	27,4	41,0

**Tabelle 3.4:** Mittlere Gap M-TCVRP(+) nach Bedarfsanzahl und -mittelwert

In Tabelle 3.4 werden die Ergebnisse der Modelle M-TCVRP und M-TCVRP+ als Gap gegenübergestellt. Die Aufstellung gruppiert die Instanzen nach Anzahl der Bedarfe und

dem Bedarfsmittelwert. Die angegebenen Werte sind Mittelwerte der jeweiligen Instanzen. Für beide Modelle steigt der Gap mit wachsender Bedarfsanzahl sowie mit steigendem Bedarfsmittelwert. Dies ist nachvollziehbar, da sich beide Größen auf die Anzahl der benötigten Fahrzeuge auswirken. In der Gegenüberstellung wird erkennbar, dass die Ergebnisse des Modells M-TCVRP+ über alle Bedarfsanzahlen und -mittelwerte hinweg die des Modells M-TCVRP dominieren. Betrachtet man einen Gap von 10% als Grenze für die Einsetzbarkeit in realen Anwendungen, können mit dem Modell M-TCVRP+ Instanzen mit etwa doppelter Bedarfsanzahl gegenüber dem Modell M-TCVRP gelöst werden. Die betreffenden Werte sind in der Tabelle fett hervorgehoben. Für die Bedarfsschwankungsbreite konnte kein nennenswerter Einfluss auf den Gap ermittelt werden.

# Bedarfe	Schranken $M\text{-TCVRP+}/M\text{-TCVRP}$			ZFW $M\text{-TCVRP+}/M\text{-TCVRP}$		
	Bedarfsmittelwert			Bedarfsmittelwert		
	50	100	200	50	100	200
50	1,000	1,000	1,031	1,000	1,000	0,998
100	1,000	1,044	1,086	1,000	0,995	1,000
200	1,052	1,085	1,169	0,984	0,988	1,076
400	1,075	1,404	3,168	0,985	0,911	1,202

**Tabelle 3.5:** Mittlere relative Schranken- und Zielfunktionswerte  $\frac{M\text{-TCVRP+}}{M\text{-TCVRP}}$

Wenn die Gaps zweier Modelle für eine Instanz verglichen werden, kann im Allgemeinen kein Verhältnis für die Zielfunktionswerte der jeweils besten Lösungen angegeben werden. Grund dafür ist die Bestimmung des Gap als relative Größe. Nimmt man als Ergebnisse zweier Modelle 1 und 2 für eine Instanz jeweils ein Gap von 0,5 an, kann beispielsweise für die zugehörigen Zielfunktionswerte  $f_1^* = 2f_2^*$  und für die unteren Schranken  $LB_1 = 2LB_2$  gelten. Gegenüber dem Modell 1 verdoppeln sich bei der Bestimmung des Gap in diesem Fall sowohl Zähler als auch Nenner des Quotienten, sodass der gleiche Gap-Wert resultiert. Bei direktem Vergleich der Zielfunktionswerte liefert Modell 2 ein deutlich besseres Ergebnis. Durch die vergleichsweise schlechte Schranke für das Modell 2 resultiert schließlich jedoch der gleiche Gap-Wert. In Tabelle 3.5 werden deshalb die mittleren Quotienten aus den Schranken und den Zielfunktionswerten der Modelle M-TCVRP+ und M-TCVRP dargestellt. Die Aufstellung unterteilt die Ergebnisse nach Anzahl der Bedarfe und den Bedarfsmittelwerten. Die Gegenüberstellung der Schranken zeigt, dass mit dem Modell M-TCVRP+ durchgehend bessere Schranken erzielt werden. Bei den Zielfunktionswerten ist das Bild nicht einheitlich. Für Instanzen mit 50 und 100 Bedarfen werden nahezu gleichwertige Lösungen erzielt. Die besseren Gaps des Modells M-TCVRP+ für diese Instanzgruppen liegen daher in den besseren Schrankenwerten begründet. Das mittlere Verhältnis der erzielten Zielfunktionswerte für große Instanzen ist für das Modell M-TCVRP+ nur für Bedarfsmittelwerte von 50 und 100 vorteilhaft. Für

Instanzen mit sehr vielen Fahrzeugen sind die Zielfunktionswerte des Modells M-TCVRP im Mittel besser.

GAP in %	M-TCVRP			M-TCVRP+		
	Verzweigungsprofil			Verzweigungsprofil		
# Bedarfe	1	2	3	1	2	3
50	0,6	0,9	1,9	0,1	0,1	0,4
100	3,5	5,6	7,0	1,3	1,7	1,9
200	7,4	16,5	18,7	3,6	10,1	10,2
400	27,7	46,9	57,3	17,6	27,8	28,9

**Tabelle 3.6:** Mittlere Gap M-TCVRP(+) nach Bedarfsanzahl und Verzweigungsprofil

Die Auswirkungen der Verzweigungsprofile auf den Gap der Modelle M-TCVRP und M-TCVRP+ sind in Tabelle 3.6 dargestellt. Aus den Verzweigungsprofilen resultieren unterschiedlich tiefe beziehungsweise breite Bäume. Während das Profil 1 eher tiefe Bäume erzeugt, werden mit dem Profil 3 eher breite Bäume generiert. Das Profil 2 ist zwischen den beiden anderen Profilen angesiedelt. Die Ergebnisse zeigen, dass für beide Modellvarianten bei Instanzen mit tieferen Bäumen bessere Gap erzielt werden konnten.

### 3.3 Verwendung eines Brückengraphen als Streckennetz

In diesem Abschnitt wird ein Brückengraph als Streckennetz einer Instanz des kapazitierten Tourenplanungsproblems unterstellt. Diese Problemstellung wird im Folgenden als kapazitiertes Tourenplanungsproblem auf Brückengraphen (BCVRP) bezeichnet. Für eine einfachere Darstellung wird davon ausgegangen, dass mit Ausnahme des Depots jedem Knoten des Brückengraphen genau ein Bedarf zugeordnet ist. Dies stellt inhaltlich keine Einschränkung dar. Das BCVRP erweitert das TCVRP, indem die Vorgabe eines Baumes durch die allgemeinere Struktur eines Brückengraphen erweitert wird. Wie in Abschnitt 2.3 erläutert, stellt ein Brückengraph einen Baum, dessen Knoten durch zusammenhängende Graphen ersetzt wurden, dar. Aus der Literatur ist dem Autor der vorliegenden Arbeit lediglich eine Publikation von Averbakh und Berman (1995) bekannt, die ein Tourenplanungsproblem auf einer vergleichbaren Struktur untersucht. Sie nennen die verwendete Struktur „Kaktus“ und bezeichnen damit einen Baum, in dem einzelne Knoten durch Kreise ersetzt wurden. Die Autoren betrachten das „Sales-Delivery Man Problem“. Die Problemstellung sieht die Bedienung einer Menge von Kunden vor, wobei als hierarchische Zielstellung die Minimierung der Fahrstrecke und die Minimierung der Summe aller Wartezeiten der Kunden verfolgt wird. Konkret ist unter allen strecken-



minimalen Touren jene, die zu der minimalen Summe der Kundenwartezeiten führt, zu bestimmen. Ein mathematisches Modell geben die Autoren nicht an.

Im Folgenden werden zwei mathematische Modelle für das BCVRP vorgestellt. Dabei handelt es sich zum einen um eine Erweiterung des Modells 2I-CVRP aus Abschnitt 3.1 und zum anderen um ein explizit für das BCVRP entwickeltes Modell. Anschließend werden Möglichkeiten zur Bestimmung unterer und oberer Schranken für den optimalen Zielfunktionswert einer Instanz des BCVRP erläutert. Der Abschnitt schließt mit einer Performanceanalyse, die das Lösungsverhalten der beschriebenen Modelle mit der kommerziellen Software Fico Xpress untersucht.

### 3.3.1 Erweiterung des Modells 2I-CVRP

Wesentliche Erkenntnisse über das TCVRP können auf das BCVRP übertragen werden. So muss beispielsweise jede Brücke von einem Fahrzeug stets gleich häufig in beide Richtungen befahren werden. Außerdem kann die Mindestanzahl der Befahrungen einer Brücke  $\check{W}_a$ <sup>10</sup> über die Bedarfe, die vom Depot ausschließlich über diese Brücke erreicht werden können, abgeschätzt werden. Die Abschätzung der Nutzungen einer Brücke nach unten ermöglicht eine Erweiterung des Modells 2I-CVRP um zusätzliche Nebenbedingungen. Dafür wird eine neue Variable  $w_{ij}^a$  eingeführt, die angibt, ob und in welche Richtung eine Brücke  $[p_a, a]$  genutzt wird, um von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  zu gelangen. Gleichung (3.24) definiert die möglichen Werte von  $w_{ij}^a$ .

$$w_{ij}^a = \begin{cases} -1 & \text{Nutzung in Richtung des Depots / der Wurzel} \\ 1 & \text{Nutzung aus Richtung des Depots / der Wurzel} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.24)$$

Die Menge der Paare zweier Knoten  $i$  und  $j$ , deren verbindender Weg eine Brücke  $[p_a, a]$  enthält und diese bei einer Fahrt von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  von Knoten  $p_a$  zu Knoten  $a$  zu nutzen ist, liefert in Kombination mit den Mindestnutzungen der Brücke die Ungleichungen (3.25). Die gleich häufige Nutzung einer Brücke in beide Richtungen resultiert aus der Notwendigkeit, dass jede Tour das Depot beinhalten muss. Das um die Ungleichungen (3.25) ergänzte Modell (3.1) - (3.7) wird im Folgenden 2I-BCVRP genannt.

$$\sum_{i,j \in V \mid w_{ij}^a < 0} x_{ij} \geq \check{W}_a \quad \forall a \in A \quad (3.25)$$

<sup>10</sup>  $\check{W}_i = \lceil \sum_{l \in L \mid n_l \in \{i\}} b_l / c \rceil$ , vgl. Unterabschnitt 3.2.2

### 3.3.2 3-Index-Modell

In diesem Abschnitt wird ein Modell für das kapazitierte Tourenplanungsproblem auf Brückengraphen beschrieben. Das Modell bildet die Fahrtmöglichkeiten der Fahrzeuge unter Berücksichtigung der Struktur eines Brückengraphen ab. Im Gegensatz zu den Modellen 2I- und 3I-CVRP werden nicht zwischen allen Knoten des Brückengraphen einer Instanz direkte Verbindungen, als Repräsentanten kürzester Wege, modelliert. Stattdessen werden ausschließlich Fahrten zwischen den Knoten der Untergraphen sowie auf den Brücken verwendet. Die Möglichkeit, dass insbesondere Brücken von mehreren Fahrzeugen genutzt werden können, erfordert für die Konstruktion der Touren aus den genutzten Fahrwegen deren Zuordnung zu den einzelnen Fahrzeugen. Die im Folgenden vorgestellte Formulierung ist deshalb an das Modell 3I-CVRP, welches fahrzeugspezifische Variablen  $x_{ijk}$  verwendet, angelehnt. Die Variablen  $x_{ijk}$  beschreiben weiterhin die Fahrt eines Fahrzeugs  $k$  von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$ . Gegenüber dem Modell 3I-CVRP wird jedoch lediglich eine Teilmenge der Variablen verwendet. Für eine einfachere Notation des Modells werden die Variablen für alle Knoten  $i$  und  $j$  sowie Fahrzeuge  $k$  definiert. Variablen für Knotenpaare, zwischen denen keine direkte Verbindung, das heißt die keine Nachbarn sind, besteht oder die lediglich einen Knoten beinhalten und somit eine Fahrt von einem Knoten zu sich selbst darstellen, werden gemäß Formel (3.39) auf den Wert null fixiert. Übrig bleiben nicht fixierte Variablen für die Fahrten zwischen unterschiedlichen Knoten eines Untergraphen und zwischen den inzidenten Knoten einer Brücke. Im Rahmen der Performanceanalyse in Unterabschnitt 3.3.4 wurden ausschließlich die nicht auf den Wert null fixierten Variablen erzeugt. Die Anbindungsknoten und Brückenköpfe des Brückengraphen einer Instanz können von mehreren Fahrzeugen angefahren werden. Die Anfahrt eines dieser Knoten kann daher nicht als Bedienung seines Bedarfs interpretiert werden. Die Festlegung, ob der Bedarf eines Anbindungsknotens oder Brückenkopfes  $i$  durch ein Fahrzeug  $k$  bedient wird, erfolgt über die binären Variablen  $y_{ik}$ . Diese nehmen bei Bedienung des Bedarfs eines Knotens  $i$  durch Fahrzeug  $k$  den Wert 1 an. Abschließend werden Variablen  $\pi_i$ , wie in Modell (2.1) - (2.6) für das Handlungsreisendenproblem, verwendet. Diese Variablen kommen bei der Vermeidung von Kurzzyklen zum Einsatz.

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i,j \in V, k \in K} d_{ij} x_{ijk} \quad (3.26)$$

$$\sum_{j \in V} (x_{jik} - x_{ijk}) = 0 \quad i \in V, k \in K \quad (3.27)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ik} = 1 \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (3.28)$$

$$\sum_{j \in V} x_{jik} = y_{ik} \quad i \in V \setminus (A \cup P \cup \{0\}), k \in K \quad (3.29)$$

$$y_{ik} \leq \sum_{j \in V} x_{jik} \quad i \in A \cup P, k \in K \quad (3.30)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{0\}} b_i y_{ik} \leq C \quad k \in K \quad (3.31)$$

$$x_{ap_ak} = x_{p_aka} \quad a \in A, k \in K \quad (3.32)$$

$$x_{p_aka} \leq \sum_{i \in V \setminus \{a\}} x_{ip_ak} \quad a \in A \mid p_a \neq 0, k \in K \quad (3.33)$$

$$\sum_{i, j \in V_a} x_{ijk} \leq |V_a| x_{p_aka} \quad a \in A, k \in K \quad (3.34)$$

$$\sum_{k \in K} x_{p_aka} \geq \check{W}_a \quad a \in A \quad (3.35)$$

$$1 - (|V_a| - 1) \left( 1 - \sum_{k \in K} x_{ijk} \right) \leq \pi_j - \pi_i \quad (i, j) \in \bigcup_{a \in A} (V_a \setminus \{a\})^2 \mid i \neq j \quad (3.36)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (3.37)$$

$$\pi_i \in \mathbb{R} \quad i \in V \quad (3.38)$$

$$x_{ijk} \begin{cases} \in \{0, 1\} & (i, j) \in \bigcup_{a \in A} V_a^2 \mid i \neq j \\ \in \{0, 1\} & \bigcup_{a \in A} \{(a, p_a), (p_a, a)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad k \in K \quad (3.39)$$

Als Zielstellung ist gemäß Formel (3.26) die Summe der Fahrstrecken aller Fahrzeuge zu minimieren. Die Gleichungen (3.27) fordern, dass die Anzahl der Anfahrten der Anzahl der Abfahrten eines Knoten entspricht. Die Bedienung jeden Bedarfs, das heißt die Zuordnung jedes Knotens zu einem Fahrzeug, erfolgt in den Gleichungen (3.28). Für innere Knoten, das heißt Knoten die weder Anbindungsknoten noch Brückenkopf sind, wird in den Gleichungen (3.29) die Anfahrt eines Knotens durch ein Fahrzeug mit der Bedienung seines Bedarfs durch das Fahrzeug gleichgesetzt. Innere Knoten werden somit genau einmal durch ein Fahrzeug angefahren. Dagegen ist die Anfahrt eines Anbindungsknotens oder Brückenkopfes durch ein Fahrzeug gemäß den Ungleichungen (3.30) notwendig aber nicht hinreichend für die Zuordnung seines Bedarfs zu dem jeweiligen Fahrzeug. Die Einhaltung der Fahrzeugkapazität wird durch die Ungleichungen (3.31), durch Beschränkung der zugeordneten Bedarfsmenge auf die Fahrzeugkapazität, gewährleistet. In den Un-/Gleichungen (3.32) - (3.34) werden Anforderungen an die Fahrten eines Fahrzeugs gestellt. Zur beispielhaften Erläuterung der Anforderungen an Fahrten wird der in Abbildung 3.3 dargestellte Brückengraph aus Unterabschnitt 3.3.3 verwendet. Die Befahrung der Brücken, sofern diese von einem Fahrzeug genutzt werden, in beide Richtungen wird

in den Gleichungen (3.32) vorgeschrieben. Im Beispiel gilt dies für die Kanten  $[0, 1]$  und  $[4, 5]$ . Fährt ein Fahrzeug beispielsweise auf der Kante  $[4, 5]$  von Knoten 4 zu Knoten 5, kann es nur über eine weitere Fahrt auf der gleichen Kante in umgekehrter Richtung, das heißt von Knoten 5 zu Knoten 4 zur Wurzel zurückkehren. Die Nutzung einer Brücke, mit Ausnahme der Brücken, die mit dem Wurzelknoten inzident sind, ist gemäß den Ungleichungen (3.33) nur möglich, sofern der Brückenkopf der Brücke von einem anderen Knoten als dem Anbindungsknoten der Brücke angefahren wird. Das bedeutet beispielsweise für die Kante  $[4, 5]$ , deren Brückenkopf Knoten 4 darstellt, dass eine Fahrt von Knoten 4 zu Knoten 5 nur stattfinden kann, wenn eine Fahrt von einem anderem als dem Anbindungsknoten der Brücke, Knoten 5, zu Knoten 4 stattfindet. Im Beispiel ist dafür eine Fahrt von einem der Knoten 1, 2 oder 3 notwendig. Handelt es sich bei einem Brückenkopf zugleich um den Anbindungsknoten eines Untergraphen, genügt eine Fahrt von dem Knoten, der für den Knoten die Funktion des Brückenkopfes übernimmt. Dies wäre beispielsweise der Fall, wenn im Beispiel die Kante  $[0, 1]$  durch eine Kante  $[0, 4]$  getauscht wird. Die Voraussetzung für eine Nutzung der Brücke  $[4, 5]$  schafft in diesem Fall eine Fahrt von Knoten 0 zu Knoten 4. Mit den Ungleichungen (3.34) wird sichergestellt, dass ein Fahrzeug ausschließlich Fahrten innerhalb eines Untergraphen  $V_a$  unternimmt, sofern die Brücke des zugehörigen Anbindungsknotens  $a$  durch das Fahrzeug genutzt wird. Bezogen auf das Beispiel können zwischen den Knoten 1, 2, 3 und 4 nur Fahrten stattfinden, wenn die Brücke  $[0, 1]$  befahren wird. Das gleiche gilt für Fahrten zwischen den Knoten 5, 6, 7 und 8, die an die Nutzung der Brücke  $[4, 5]$  gebunden sind. Die Ungleichungen (3.35) entsprechen den Ungleichungen (3.25) des Modells 2I-BCVRP und geben eine Mindestanzahl an Nutzungen für alle Brücken vor. Schließlich erfolgt über die Ungleichungen (3.36) die Vermeidung von Kurzzyklen. Die Zuweisung einheitlicher Positionswerte für die Knoten eines Teilgraphen für alle Fahrzeuge setzt symmetrische Distanzen zwischen den Knoten voraus. Ist diese Annahme nicht erfüllt, muss, um verschiedene Reihenfolgen der Knoten  $V_a^R$  in Touren unterschiedlicher Fahrzeuge zu ermöglichen, die Vermeidung von Kurzzyklen gemäß den Ungleichungen (3.40) je Fahrzeug erfolgen. In den Ungleichungen werden dafür anstelle der Variablen  $\pi_i$  Variablen  $\pi_{ik}$ , die die Position eines Knotens  $i$  in der Tour eines Fahrzeugs  $k$  darstellen, verwendet.

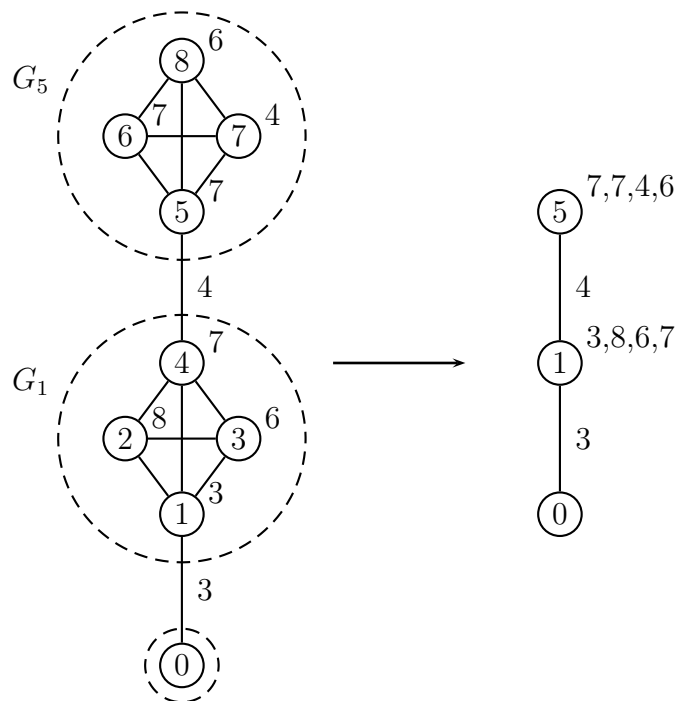
$$1 - (|V_a| - 1)(1 - x_{ijk}) \leq \pi_{jk} - \pi_{ik} \quad (i, j) \in \bigcup_{a \in A} (V_a \setminus \{a\})^2 \mid i \neq j, k \in K \quad (3.40)$$

Das Modell (3.26) - (3.39) wird im Folgenden als 3I-BCVRP bezeichnet. Im Gegensatz

zu den Modellen 2I- und 3I-CVRP genügt im Modell 3I-BCVRP die Vermeidung von Kurzzyklen innerhalb der Untergraphen. Letzteres gilt sowohl für symmetrische als auch für asymmetrische Distanzen.

### 3.3.3 Ermittlung von Schranken für das BCVRP

Eine Lösung einer Instanz des BCVRP lässt sich in zwei Komponenten, die Brückennutzungen der einzelnen Fahrzeuge und deren Touren innerhalb der angefahrenen Untergraphen, zerlegen. Die Brückennutzungen gehen über die Anzahl der Befahrungen und die Längen der Brücken in die Zielfunktion ein. Dazu kommen die Strecken die innerhalb der Untergraphen zur Bedienung der Bedarfe zurückzulegen sind. Für beide Komponenten kann die erforderliche Strecke nach unten abgeschätzt werden und damit für eine Instanz eine untere Schranke ihres Zielfunktionswertes angegeben werden. Das verwendete Vorgehen wird im Folgenden erläutert. Zur Veranschaulichung der einzelnen Schranken ist auf der linken Seite der Abbildung 3.3 ein Brückengraph mit einem Bedarf je Knoten dargestellt. Zur Vervollständigung der Instanz werden eine Fahrzeugkapazität von  $C = 10$  und Kantenbewertungen innerhalb der Untergraphen von eins angenommen.



**Abbildung 3.3:** Brückengraph einer BCVRP-Instanz mit Bedarfen und zugehörige TCVRP-Instanz zur Bestimmung von Schranken

Zur Abschätzung des Zielfunktionsbeitrags der Brückenfahrten einer Instanz des BCVRP kann eine Instanz des TCVRP konstruiert und deren optimaler Zielfunktionswert als

untere Schranke verwendet werden. Als Baum der TCVRP-Instanz dient der Untergraphenbaum des Brückengraphen, in dem jeder Untergraph einem Knoten entspricht. Die Untergraphen  $G_a$  werden anhand ihres Anbindungsknoten  $a$  identifiziert. Die Bedarfe an den Knoten der Untergraphen  $G_a$  für alle  $a \in A$  werden in der TCVRP-Instanz dem Knoten  $a$  zugeordnet. Das heißt es gilt für die TCVRP-Instanz  $n_l = a$  für alle  $\{l \in L | n_l \in G_a\}$  je Untergraph der BCVRP-Instanz. Die Anzahl der Fahrzeuge und deren Kapazität kann direkt übernommen werden. Eine Lösung der TCVRP-Instanz stellt eine zulässige Aufteilung der Bedarfe auf die verfügbaren Fahrzeuge dar. Darüber hinaus liefert eine optimale Lösung der TCVRP-Instanz die minimale Fahrstrecke auf den Brücken des Brückengraphen für eine zulässige Aufteilung der Bedarfe. Diese minimale Strecke wird als  $LB^B$  bezeichnet. Sollte die Ermittlung einer optimalen Lösung beziehungsweise der Beweis der Optimalität einer zulässigen Lösung der TCVRP-Instanz aufgrund einer begrenzten Rechenzeit nicht möglich sein, kann auf die Abschätzung der notwendigen Brückennutzungen gemäß der Ungleichungen (3.23) zurückgegriffen werden. Eine zulässige Aufteilung der Bedarfe liegt dann noch nicht vor und muss gegebenenfalls anderweitig bestimmt werden. In Abbildung 3.3 ist die TCVRP-Instanz zur Abschätzung der Fahrtstrecken auf Brücken auf der rechten Seite dargestellt. Die Bedarfe der Knoten 1, 2, 3 und 4 sind in der TCVRP-Instanz dem Knoten 1, die Bedarfe der Knoten 5, 6, 7 und 8 dem Knoten 5 zugeordnet. Zunächst wird im Folgenden die Näherung der Schranke  $LB^B$  über die Werte  $\check{W}_a$  beschrieben. Der Gesamtbedarf der Knoten, die ausschließlich über die Kante  $[1, 5]$  erreicht werden können, beträgt 24 Mengeneinheiten. Damit gilt  $\check{W}_5 = \lceil 24/10 \rceil = 3$ . Zu den bislang betrachteten Bedarfen kommen die Bedarfe an Knoten 1 von in Summe ebenfalls 24 Mengeneinheiten für die Bestimmung von  $\check{W}_1 = \lceil 48/10 \rceil = 5$  hinzu. In Verbindung mit den Kantenbewertungen ergibt sich für das Beispiel eine untere Schranke von  $3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 27$  für die auf Brücken zurückzulegenden Strecken. Berücksichtigt man, dass gemäß Martello und Toth (1990) für jeden Bedarf der die halbe Fahrzeugkapazität überschreitet mindestens ein Fahrzeug benötigt wird, kann die Schranke in diesem Beispiel verbessert werden. An Knoten 5 sind drei Bedarfe größer als  $C/2$ , sodass mindestens drei Fahrzeuge die Kante  $[1, 5]$  befahren müssen. Analog müssen mindestens sechs Fahrzeuge die Kante  $[0, 1]$  nutzen, da an Knoten 1 und Knoten 5 zusammen sechs Bedarfe die halbe Fahrzeugkapazität überschreiten. Der verbesserte Schrankenwert resultiert damit zu  $3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 30$ . Eine zulässige Aufteilung der Bedarfe, unter Verwendung der Knotennummern des Brückengraphen zur Identifizierung der Bedarfsmengen, lautet  $\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{7, 8\}\}$ . Diese Aufteilung nutzt die Kanten im Umfang der zuvor angegebenen Mindestnutzungen und stellt somit eine optimale Lösung der TCVRP-Instanz dar. Der Zielfunktionswert dieser Aufteilung und damit der Wert der Schranke  $LB^B$  beträgt 30.

Untere Schranken für die in einem Untergraphen zurückzulegende Strecke können aus Betrachtungen, wie häufig Knoten eines Untergraphen mindestens angefahren werden müssen und wie viele Fahrzeuge dafür mindestens notwendig sind, abgeleitet werden. Im Folgenden wird zunächst eine Schranke auf Grundlage des Handlungsreisendenproblems vorgestellt. Anschließend wird diese Schranke verbessert, indem die Anzahl der zur Bedienung der Bedarfe in einem Untergraphen benötigten Fahrzeuge einbezogen wird. Schließlich werden für Untergraphen, die innere Knoten des Untergraphenbaumes darstellen, notwendige mehrfache Anfahrten von Brückenköpfen betrachtet und daraus eine untere Schranke der notwendigen Fahrstrecke abgeleitet.

Eine untere Schranke für die in einem Untergraphen zu fahrende Strecke kann aus der Notwendigkeit, jeden Knoten des Untergraphen anfahren zu müssen, abgeleitet werden. Die Anfahrt einer Menge von Knoten in einer Tour entspricht einem Handlungsreisendenproblem. Der Anbindungsknoten  $a$  eines Untergraphen  $G_a$  kann dabei als Depot angesehen werden. Die Aufsummierung der Zielfunktionswerte der Handlungsreisendenprobleme, im Weiteren als  $LB_a^{TSP}$  bezeichnet, aller Untergraphen des Brückengraphen führt zu einer unteren Schranke  $LB^{TSP}$  für Fahrstrecken innerhalb der Untergraphen. Im Beispiel auf Abbildung 3.3 sind im Rahmen der Bestimmung der Schranke  $LB^{TSP}$  ausgehend von Knoten 1 die Knoten 2, 3 und 4 und von Knoten 5 die Knoten 6, 7 und 8 in einer Tour anzufahren. Aufgrund der einheitlichen Bewertung der Kanten innerhalb der Untergraphen mit dem Wert 1 führt jede Permutation der Knoten jeweils zu einer Tour der Länge 4. Somit gilt  $LB_1^{TSP} = LB_5^{TSP} = 4$  und in Summe  $LB^{TSP} = 8$ .

Sind mehrere Fahrzeuge für die Belieferung eines Untergraphen, der ein Blatt des Untergraphenbaumes darstellt, erforderlich, das heißt es gilt  $\sum_{i \in V_a \setminus \{a\}} b_i > C$ , kann die Schranke  $LB_a^{TSP}$  verbessert werden. Für die Bestimmung der Anzahl an Fahrzeugen, die Fahrten in einem Untergraphen durchführen müssen, kann der Bedarf des Anbindungsknotens vernachlässigt werden. Die Bedienung des Anbindungsknotens eines Untergraphen erfordert lediglich die Nutzung seiner vorgelagerten Brücke und verursacht somit keine Fahrt innerhalb des Untergraphen. Die untere Schranke  $LB_a^{VRP}$  wird aus der optimalen Lösung eines Tourenplanungsproblems ohne Kapazitätsrestriktion ermittelt. Das folgende mathematische Modell ist an das Modell 2I-CVRP angelehnt. Anstelle der direkten Berücksichtigung der Fahrzeugkapazität wird die Anzahl der Knoten, die in einer Tour angefahren werden können, derart begrenzt, dass die Anzahl der zu bildenden Touren mindestens der Anzahl für die Bedienung der inneren Knoten des Untergraphen benötigten Anzahl an Fahrzeugen entspricht. Die Variablen  $\pi_i$  geben die Positionierung eines Kunden  $i$  innerhalb einer Tour an und ersetzen die Variablen  $u_i$  des Modells 2I-CVRP, da keine Betrachtung von Lademengen erfolgt. Genügt ein Fahrzeug für die Bedienung

aller Bedarfe ist das angegebene Modell äquivalent zu dem in Abschnitt 2.4 präsentierten Modell des Handlungsreisendenproblems.

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i,j \in V_a} d_{ij} x_{ij} \quad (3.41)$$

$$\sum_{i \in V_a} x_{ij} = 1 \quad j \in V_a \setminus \{a\} \quad (3.42)$$

$$\sum_{i \in V_a} (x_{ij} - x_{ji}) = 0 \quad j \in V_a \quad (3.43)$$

$$\pi_i + 1 - \left( |V_a| - \left\lceil \frac{1}{C} \sum_{i \in V_a \setminus \{a\}} b_i \right\rceil \right) (1 - x_{ij}) \leq \pi_j \quad i, j \in V_a \setminus \{a\} | i \neq j \quad (3.44)$$

$$\left\lceil \frac{1}{C} \sum_{i \in V_a \setminus \{a\}} b_i \right\rceil = \sum_{j \in V_a \setminus \{a\}} x_{aj} \quad (3.45)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V_a \quad (3.46)$$

$$\pi_i \in \mathbb{R} \quad i \in V_a \quad (3.47)$$

Die Zielfunktion und die ersten beiden Nebenbedingungen (3.41) - (3.43) sind dem Modell 2I-CVRP entnommen. Die Ungleichungen (3.44) unterbinden Kurzzyklen innerhalb von Knotenmengen, die den Anbindungsknoten nicht enthalten. Folgt Knoten  $j$  auf Knoten  $i$ , muss der Wert der Positionsvariable  $\pi_j$  um mindestens den Wert 1 größer sein als  $\pi_i$ . Findet keine Fahrt von  $i$  nach  $j$  statt, ist also  $x_{ij} = 0$ , begrenzt der als BigM verwendete Term  $|V_a| - \left\lceil \frac{1}{C} \sum_{i \in V_a \setminus \{a\}} b_i \right\rceil$  den Wert der maximalen Differenz zweier Positionsvariablen auf  $\pi_i - \pi_j \leq |V_a| - \left\lceil \frac{1}{C} \sum_{i \in V_a \setminus \{a\}} b_i \right\rceil - 1$ . Damit wird die maximale Anzahl der Knoten innerhalb einer Tour begrenzt. Gibt der Wert  $\left\lceil \frac{1}{C} \sum_{i \in V_a \setminus \{a\}} b_i \right\rceil$  lediglich eine minimale zur Bedienung der Bedarfe benötigte Fahrzeuganzahl von 1 vor, resultiert ein BigM von  $|V_a| - 2$ . Damit können die Positionsvariablen aller Knoten, abgesehen von dem als Depot fungierenden Anbindungsknoten, in Schritten mit Wert 1 gemäß ihrer Reihenfolge durchnummeriert werden. Bei fünf Knoten  $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  können die Werte beispielsweise als  $\pi_2 = 1$ ,  $\pi_3 = 2$ ,  $\pi_4 = 3$  und  $\pi_5 = 4$  mit einer maximalen Differenz von  $\pi_5 - \pi_2 = 3 = |V_1| - 2$  gewählt werden. Sind zwei Fahrzeuge erforderlich, das heißt es gilt  $\left\lceil \frac{1}{C} \sum_{i \in V_a \setminus \{a\}} b_i \right\rceil = 2$ , wird diese Nummerierung unzulässig. Mindestens ein Knoten aus der für den Fall mit einem Fahrzeug zulässigen Tour muss in eine zweite Tour überführt werden, sodass die maximale Differenz eingehalten werden kann. Analog gilt dies für eine größere Fahrzeuganzahl. Die Gleichung (3.45) legt über die Anzahl der Fahrten vom Anbindungsknoten aus die Anzahl der Touren fest. Formel (3.46) definiert die



Variablen  $x_{ij}$  als binär<sup>11</sup>. Die Positionsvariablen werden in Formel (3.47) als reellwertig festgelegt. Der Zielfunktionswert einer optimalen Lösung dieses Modells wird als  $LB_a^{VRP}$  bezeichnet. Gegenüber der Schranke  $LB_a^{TSP}$  geht die Nutzung mehrerer Fahrzeuge für die Bedienung eines Untergraphen in die Schranke  $LB^{VRP}$  ein. Bezogen auf das Beispiel in Abbildung 3.3 sind zwei Schranken  $LB_1^{VRP}$  und  $LB_5^{VRP}$  zu bestimmen. Für den über Knoten 1 angebindenen Untergraphen beträgt die Summe der Bedarfe, exklusive des Anbindungsknotens selbst, 21 Mengeneinheiten. Gemäß der Ungleichung (3.45) müssen von Knoten 1 aus somit  $\lceil 21/10 \rceil = 3$  Fahrten ausgehen. Dies ist gleichbedeutend mit der Einschränkung der Ungleichungen (3.44), die die Anzahl vom Anbindungsknoten in einer Tour angefahrener Knoten auf 1 begrenzen. Eine optimale Lösung des Modells (3.41) - (3.46) stellen somit Pendelfahrten  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  und  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  dar. Der zugehörige Zielfunktionswert entspricht der Schranke  $LB_1^{VRP}$  und beträgt 6. In dem anderen Untergraphen ergibt sich aus den Bedarfen der Knoten 6, 7 und 8 eine Summe von 17 Mengeneinheiten. Von Knoten 5 müssen somit  $\lceil 17/10 \rceil = 2$  Fahrten ausgehen und in einer Tour dürfen maximal zwei Knoten beliefert werden. Die Fahrten  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 5$  und  $5 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 5$  stellen eine optimale Lösung des (3.41)-(3.46) dar. Da die konkreten Bedarfsmengen und die Fahrzeugkapazität für die Bildung der Touren nicht zu berücksichtigen sind, stellen beispielsweise auch die Fahrten  $5 \rightarrow 7 \rightarrow 5$  und  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 5$  eine optimale Lösung dar. Der zugehörige Zielfunktionswert beträgt 5 und somit gilt  $LB_5^{VRP} = 5$ . In Summe resultiert die Schranke  $LB^{VRP} = 6 + 5 = 11$ .

Für einen Untergraphen gilt im Allgemeinen, dass jeder Knoten, der weder Anbindungsknoten noch Brückenkopf ist, genau einmal angefahren werden muss. Dagegen kann für Brückenköpfe die Anfahrt durch mehrere Fahrzeuge notwendig sein. Das ist beispielsweise der Fall, wenn die über einen Brückenkopf erreichbaren Bedarfe nicht mit einem Fahrzeug bedient werden können. Die Einbeziehung solcher Mehrfachanfahrten liefert für Untergraphen, die innere Knoten des Untergraphenbaumes darstellen, einen weiteren Schrankenwertes  $LB_a^{VRP+}$ . Ein erweitertes Modell, das Mehrfachfahrten zwischen dem Anbindungsknoten und den Brückenköpfen sowie zwischen den Brückenköpfen erlaubt, wird im Folgenden vorgestellt. Das Modell verwendet binäre,  $x_{ij}$  und  $y_{ij}$ , und ganzzahlige Variablen  $x_{ij}^+$  zur Angabe ob beziehungsweise wie viele Fahrten von einem Knoten  $i$  zu einem Knoten  $j$  stattfinden. Zusätzlich kommen Positionsvariablen  $\pi_i$  bei der Vermeidung von Kurzzyklen zum Einsatz. Für Fahrten zwischen zwei Knoten  $i$  und  $j$ , von denen maximal ein Knoten zur Menge  $V_a^R$  gehört, werden die binären Variablen  $x_{ij}$  verwendet. In diesem Fall ist mindestens einer der beiden Knoten genau einmal für die Befriedigung seines Bedarfes anzufahren, sodass eine zweite Fahrt von beziehungsweise zu diesem Kno-

<sup>11</sup> Fahrten von einem Knoten zu sich selbst sind unzulässig und die zugehörigen Variablen entsprechend auf den Wert null fixiert:  $x_{ii} = 0 \quad \forall i \in V$

ten nicht zulässig ist. Der Wert  $x_{ij} = 1$  bedeutet, dass eine Fahrt von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  stattfindet. Andernfalls gilt  $x_{ij} = 0$ . Sind beide Knoten eines Paares  $(i, j)$  Teil der Menge  $V_a^R$ , das heißt es handelt sich bei den Knoten um den Anbindungsknoten oder einen Brückenkopf des Untergraphen, können mehrere Fahrten zwischen den Knoten notwendig sein und es werden ganzzahlige Variablen  $x_{ij}^+$  und binäre Variablen  $y_{ij}$  definiert. Die Variablen  $y_{ij}$  nehmen den Wert 1, sofern mindestens eine Fahrt von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  stattfindet, an und kommen bei der Vermeidung von Kurzzyklen zum Einsatz. Die Anzahl der Fahrten von  $i$  nach  $j$  wird dann durch  $x_{ij}^+$  festgehalten. Fahrten von einem Knoten zu sich selbst sind ausgeschlossen, sodass  $x_{ii} = 0$  und  $x_{ii}^+ = y_{ii} = 0$  gelten. Schließlich wird jedem Knoten, mit Ausnahme des Anbindungsknotens, eine Positionsvariable  $\pi_i$  zugeordnet.

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i,j \in V_a} d_{ij}(x_{ij} + x_{ij}^+) \quad (3.48)$$

$$\sum_{i \in V_a} x_{ij} = 1 \quad j \in V_a^I \quad (3.49)$$

$$\sum_{i \in V_a^I} (x_{ij} - x_{ji}) = 0 \quad j \in V_a^I \quad (3.50)$$

$$\sum_{i \in V_a^I} (x_{ij} - x_{ji}) + \sum_{i \in V_a^R} (x_{ij}^+ - x_{ji}^+) = 0 \quad j \in V_a^R \quad (3.51)$$

$$\sum_{i \in V_a} x_{ij} + \sum_{i \in V_a^R} x_{ij}^+ = LB_j^{\text{Anfahrt}} \quad j \in V_a^R \setminus \{a\} \quad (3.52)$$

$$LB_j^{\text{Anfahrt}} y_{ij} \geq x_{ij}^+ \quad i, j \in V_a^R \quad (3.53)$$

$$\pi_i + 1 - (1 - y_{ij}) |V_a| \leq \pi_j \quad i, j \in V_a^R \quad (3.54)$$

$$\pi_i + 1 - (1 - x_{ij}) |V_a| \leq \pi_j \quad i, j \in V_a \setminus \{a\}, |\{i, j\} \cap V_a^R| \leq 1 \quad (3.55)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V_a \setminus \{a\}, |\{i, j\} \cap V_a^R| \leq 1 \quad (3.56)$$

$$x_{ij}^+ \in \mathbb{N}_0 \quad i, j \in V_a^R \quad (3.57)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V_a^R \quad (3.58)$$

Als Zielfunktion (3.48) werden die Distanzen der genutzten Knotenverbindungen minimiert. Die Verbindungen zwischen dem Anbindungsknoten und den Brückenköpfen eines Untergraphen können mehrfach genutzt werden und ihre Distanz als Vielfaches in die Zielfunktion eingehen. Die Gleichungen (3.49) fordern genau eine Anfahrt jedes inneren Knotens des Untergraphen. Für alle Knoten gilt gemäß den Gleichungen (3.51) und (3.50), dass die Anzahl der eingehenden der Anzahl der ausgehenden Fahrten entsprechen muss. Die Anfahrt der Brückenköpfe muss der unteren Schranke der notwendigen Anfahrt

ten  $LB_j^{Anfahrt}$  entsprechen. Zwar handelt es sich bei  $LB_j^{Anfahrt}$  um eine untere Schranke, es existiert jedoch aufgrund der Dreiecksungleichung stets eine optimale Lösung in der die Gleichheit erfüllt ist. Im Gegensatz zur Abschätzung der Brückennutzungen kann für die Schranke  $LB_j^{Anfahrt}$  neben den Bedarfen der nachgelagerten Untergraphen auch der Bedarf des Knotens  $b_j$  berücksichtigt werden. Gemäß den Gleichungen (3.52) setzen sich die Anfahrten eines Brückenkopfes aus den Fahrten von inneren Knoten sowie gegebenenfalls mehrfachen Fahrten von Randknoten zusammen. Die Nutzung von Strecken zwischen Randknoten wird durch die Ungleichungen (3.53) und (3.54) auf eine Richtung begrenzt. Die Nutzung einer Strecke  $i \rightarrow j$ , abgebildet durch die binäre Variable  $y_{ij}$ , begrenzt die Anzahl der durchgeführten Fahrten auf dieser Strecke  $x_{ij}^+$  gemäß den Ungleichungen (3.53). Eine Nutzung in beide Richtungen, das heißt  $y_{ij} = y_{ji} = 1$ , führt zu einem Konflikt in den Ungleichungen (3.54). Außerdem unterbinden die Ungleichungen (3.54) Kurzyklen unter den Randknoten des Untergraphen. Die Begrenzung auf eine Fahrtrichtung stellt aufgrund symmetrischer Distanzen keine Einschränkung des erreichbaren Zielfunktionswertes dar. Für die inneren Knoten des Untergraphen werden Kurzyklen über die Ungleichungen (3.55) ausgeschlossen. Schließlich erfolgt in (3.56) - (3.58) die Definition der Variablen. Der optimale Zielfunktionswert des Modells wird als  $LB_a^{VRP+}$  bezeichnet. Die Summe der optimalen Zielfunktionswerte dieses Modells aller inneren Untergraphen zuzüglich der Schrankenwerte  $LB_a^{VRP}$  von Untergraphen, die Blätter des Untergraphenbaumes darstellen, wird im Folgenden als  $LB^{VRP+}$  bezeichnet. Im Beispiel aus Abbildung 3.3 stellt nur der Untergraph mit Anbindungsknoten 1 einen inneren Knoten des Untergraphenbaumes dar. Die Anzahl der Anfahrten des einzigen Brückenkopfes des Untergraphen, Knoten 4, wird über die untere Schranke  $LB_4^{Anfahrt}$  abgeschätzt. Für die Schranke sind der Bedarf des Brückenkopfes sowie alle Bedarfe, die ausschließlich über den Brückenkopf erreicht werden können, einzubeziehen. Dabei handelt es sich neben dem Bedarf des Knotens 4 um die Bedarfe der Knoten 5, 6, 7 und 8, die in Summe 31 Mengeneinheiten betragen. Als Schranke resultiert  $LB_4^{Anfahrt} = \lceil 31/10 \rceil = 4$ . Aufgrund der einheitlichen Kantenbewertungen innerhalb der Untergraphen existieren auch hier mehrere optimale Lösungen für das Modell (3.41) - (3.58). Als Beispiel sei die Tour  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  in Verbindung mit drei Pendeltouren  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  mit einem Zielfunktionswert von  $10 = LB_1^{VRP+}$  genannt. Damit gilt für die Schranke  $LB^{VRP+} = LB_1^{VRP+} + LB_5^{VRP} = 10 + 5 = 15$ .

Die Schranke der auf Brücken zurückzulegenden Fahrstrecke  $LB^B$  ist von den Schranken für die Fahrstrecken innerhalb der Untergraphen  $LB^{TSP}$ ,  $LB^{VRP}$  und  $LB^{VRP+}$  unabhängig. Die für die Bestimmung von  $LB^{VRP+}$  verwendete Schranke  $LB_j^{Anfahrt}$  nutzt lediglich die Behälterabschätzung der nachgelagerten Bedarfsmengen, nicht jedoch eine konkrete Zuordnung der Bedarfe zu Fahrzeugen, wie sie für die Bestimmung von

$LB^B$  zum Einsatz kommt. Die Summen aus  $LB^B$  und einer der Schranken  $LB^{TSP}$ ,  $LB^{VRP}$  beziehungsweise  $LB^{VRP+}$  stellen daher eine untere Schranke für den Zielfunktionswert einer BCVRP-Instanz dar. Dabei gelten  $LB^B + LB^{VRP+} \geq LB^B + LB^{TSP}$  und  $LB^B + LB^{VRP} \geq LB^B + LB^{TSP}$ . Für die Schranken  $LB^{VRP}$  und  $LB^{VRP+}$  kann keine allgemeine Relation angegeben werden. Für das Beispiel aus Abbildung 3.3 resultiert eine untere Schranke für den Zielfunktionswert als  $LB^B + \max \{LB^{TSP}, LB^{VRP}, LB^{VRP+}\} = 30 + \max \{8, 11, 15\} = 30 + 15 = 45$ .

Basierend auf der Kundenzuordnung, die bei der Ermittlung der Schranke  $LB^B$  erhalten wird, kann eine Lösung der zugehörigen BCVRP-Instanz und somit eine obere Schranke für deren optimalen Zielfunktionswert ermittelt werden. Für jedes Fahrzeug und jeden von diesem angefahrenen Untergraphen ist ein Handlungsreisendenproblem zu lösen. Das Handlungsreisendenproblem umfasst sowohl die Knoten, deren Bedarf dem jeweiligen Fahrzeug zugeordnet ist, als auch durch das Fahrzeug angefahrne Brückenköpfe. Aus den Lösungen der Handlungsreisendenprobleme und den Brückennutzungen der Fahrzeuge kann ein zulässiger Tourenplan ermittelt werden. Dieses Vorgehen wird im Rahmen der Performanceanalyse in Abschnitt 3.3.4 als TCVRP<sup>B</sup>+R bezeichnet. Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung einer zulässigen Lösung für eine BCVRP-Instanz ist die Näherung über eine TCVRP-Instanz. Die TCVRP-Instanz verwendet als Baum einen Spannbaum des Brückengraphen der BCVRP-Instanz. Es kann ein beliebiger Spannbaum verwendet werden. In Abschnitt 3.3.4 wird ein minimaler Spannbaum verwendet. Bekannte Verfahren zur Bestimmung eines minimalen Spannbaums stammen von Prim beziehungsweise Kruskal.<sup>12</sup> Die Verwendung eines minimalen Spannbaums anstelle eines beliebigen Spannbaums zielt darauf ab, die räumliche Nähe von Bedarfen besser abzubilden. Im Allgemeinen garantiert die Verwendung eines minimalen Spannbaums gegenüber einem beliebigen Spannbaum aber kein besseres Ergebnis. Die Distanz zwischen zwei Knoten kann in einem Spannbaum des Brückengraphen länger als im Brückengraphen selbst sein. Nach Lösen der TCVRP-Instanz sollte daher die Distanzbewertung einer Lösung an die tatsächlichen Distanzen im Brückengraphen angepasst werden. Als zweistufiges Vorgehen, das im Rahmen der Performanceanalyse in Abschnitt 3.3.4 als TCVRP+R bezeichnet wird, kann schließlich nach der Bestimmung einer Lösung der TCVRP-Instanz je Untergraph ein Handlungsreisendenproblem für die von einem Fahrzeug anzufahrenden Knoten gelöst werden.

Knotenanzahl	20, 40, 60, 80, 100
Verzweigungsprofil	1: 85% ein Kind, 15% zwei Kinder 2: je 50% ein bzw. zwei Kind(er)
Untergraphenanzahl	2, 5, 10, 20
Brückenlängenprofil	Knotenanzahl je Untergraph zwischen 5 und 10 Faktoren 2 und 5 mit Variation um $\pm 75\%$
Bedarfsmittelwert $\bar{B}$	50, 100, 200
Bedarfsschwankungsbreite $B^s$	1,5
Fahrzeugkapazität	1000
Fahrzeugfaktor	1,1
Mindestfahrzeuganzahl	1,5

**Tabelle 3.7:** Erzeugungsparameter BCVRP-Instanzen

### 3.3.4 Performanceanalyse

Eine Instanz des BCVRP besteht aus einem Brückengraphen, Bedarfsmengen der Knoten des Brückengraphen sowie einer Fahrzeuganzahl und -kapazität. Tabelle 3.7 gibt einen Überblick über die verwendeten Parameter zur Erzeugung von Testinstanzen. Die Brückengraphen wurden gemäß dem in Abschnitt 2.3 beschriebenen Vorgehen erzeugt. Generiert wurden Brückengraphen mit unterschiedlicher Knotenanzahl. Zunächst wurde ein Untergraphenbaum unter Verwendung eines Verzweigungsprofils, einer vorgegebenen Anzahl an Untergraphen und einem Brückenlängenprofil erzeugt. Ein Verzweigungsprofil gibt Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Kinder eines Knotens an. Konstruiert wurden Brückengraphen mit einer vorgegebenen Anzahl an Untergraphen, das heißt einer vorgegebenen Anzahl an Knoten des Untergraphenbaumes. Die Anzahl der Knoten je Untergraphen wurde durch Division der Gesamtknotenanzahl des Brückengraphen und der vorgegebenen Anzahl an Untergraphen ermittelt. Konstruiert wurden lediglich Kombinationen der Werte, bei denen die Anzahl der Knoten in einem Untergraphen mindestens fünf und maximal zehn beträgt. Tabelle 3.8 gibt an, wie viele Instanzen für die Kombinationen erzeugt wurden. Einträge „-“ in der Tabelle geben an, dass für die jeweilige Kombination keine Instanz erzeugt wurde. Als Ausdehnung der Untergraphen wurde einheitlich der Wert 100 verwendet. Die Länge der Brücken, als Kanten des Untergraphenbaumes, wurde zu dieser Ausdehnung über das Brückenlängenprofil, bestehend aus einem Mittelwert und einer Variation, multiplikativ ins Verhältnis gesetzt. Für den Mittelwert 2 ergibt sich bei der Variation um  $\pm 75\%$  das Intervall von 0,5 bis 3,5 und analog für den Mittelwert 5 das Intervall von 1,25 bis 8,75. Die Länge einer Brücke kann somit beispielsweise bei Wahl des Mittelwertes 2 zwischen 50 und 350 liegen.

<sup>12</sup> vgl. Neumann und Morlock (2002)

# Bedarfe	5	6	8	10
20	-	-	-	40
40	-	-	60	-
60	-	60	-	-
80	-	-	60	-
100	60	-	-	60

**Tabelle 3.8:** Anzahl Instanzen nach Knotenanzahl und Anzahl Knoten je Untergraph

Jedem Knoten, mit Ausnahme der jeweiligen Wurzel als Depot, der erzeugten Brückengraphen wird ein Bedarf zugeordnet. Die Bedarfswerte wurden basierend auf einer Zufallsverteilung gezogen. Verwendet wurde eine diskrete Gleichverteilung, deren Mittelwert  $\bar{B}$  und Wertebereich variiert wurde. Als Mittelwerte der Bedarfsverteilung wurden drei verschiedene Werte verwendet. Die Festlegung der Wertebereiche erfolgte durch Angabe eines Vielfachen  $B^s$  des Mittelwertes. Die konkreten Bedarfswerte werden  $((1 - \frac{B^s}{2})\bar{B}, (1 + \frac{B^s}{2})\bar{B})$ -gleichverteilt ermittelt. Sofern sich für die untere oder obere Grenze der diskreten Gleichverteilung nicht ganzzahlige Werte ergeben, wurden diese beziehungsweise abgerundet. Basierend auf dem Summe der Bedarfswerte aller Knoten wurde die Anzahl der benötigten Fahrzeuge gemäß dem Vorgehen der Ungleichungen (3.23) ermittelt. Vor Aufrunden des Quotienten wurde der erhaltene Wert einheitlich für alle Instanzen mit dem Fahrzeugfaktor 1,1 multipliziert. Schließlich wurden nur Instanzen erzeugt, deren Fahrzeugbedarf basierend auf der Anzahl der Knoten, dem Bedarfsmittelwert und der Fahrzeugkapazität mindestens 1,5 Fahrzeuge entspricht. Instanzen mit 20 Knoten und einem Bedarfsmittelwert  $\bar{B} = 50$  wurden somit nicht erzeugt. Für jede Parameterkombination wurden fünf Instanzen erzeugt. Insgesamt wurden Testläufe mit 340 Instanzen durchgeführt.

Die Modelle 2I-CVRP, 2I-BCVRP und 3I-BCVRP sowie die Vorgehensweisen TCVRP+R und TCVRP<sup>B</sup>+R wurden in der Software Fico Xpress 8.11 umgesetzt und zur Lösung der erzeugten Instanzen verwendet. Zusätzlich wurde die Schranke  $LB^B + LB^{VRP+}$  für alle Instanzen ermittelt. Im Folgenden werden zunächst die Ergebnisse mit den Modellen 2I-CVRP, 2I-BCVRP und 3I-BCVRP dargestellt. Anschließend werden die Resultate der zweistufigen Verfahren TCVRP+R und TCVRP<sup>B</sup>+R verglichen. Schließlich folgt eine modellübergreifende Auswertung, bei der die erzielten besten Zielfunktionswerte der besten unteren Schranke aller Modelle beziehungsweise der Schranke  $LB^B + LB^{VRP+}$  gegenübergestellt werden. Dabei werden auch die Ergebnisse des Verfahrens TCVRP+R einbezogen. Als Rechenzeit wurden für die Modelle 2I-CVRP, 2I-BCVRP und 3I-BCVRP 60 Sekunden vorgegeben. Für das Verfahren TCVRP+R wurde die Rechenzeit für das Lösen der TCVRP-Instanz auf 30 Sekunden begrenzt. Die anschließende Lösung der

# Bed.	# Inst.	2I-CVRP		2I-BCVRP		3I-BCVRP	
		#zul.	# opt.	#zul.	# opt.	#zul.	# opt.
20	40	40	0	40	5	40	10
40	60	60	0	60	0	60	0
60	60	60	0	60	0	57	0
80	60	60	0	60	0	42	0
100	120	115	0	103	0	57	0

**Tabelle 3.9:** Anzahl zulässig und optimal gelöster Instanzen nach Bedarfsanzahl und Modell

Handlungsreisendenprobleme in den Untergraphen je Fahrzeug wurde zeitlich nicht begrenzt. Die gleiche Vorgehensweise wurde für das Verfahren  $\text{TCVRP}^B+\text{R}$  verfolgt. In Summe lag die verwendete Rechenzeit für die Verfahren  $\text{TCVRP}+\text{R}$  und  $\text{TCVRP}^B+\text{R}$  bis auf einzelne Instanzen unter 60 Sekunden.

Tabelle 3.9 gibt die Anzahl der Instanzen für die eine zulässige beziehungsweise optimale Lösung mit den Modellen 2I-CVRP, 2I-BCVRP und 3I-BCVRP erzielt wurde unterschieden nach Knotenanzahl der Instanzen an. In der zweiten Spalte ist zusätzlich die Anzahl der Instanzen mit der jeweiligen Knotenanzahl angegeben. Während mit den Modellen 2I-CVRP und 2I-BCVRP zulässige Lösungen für alle Instanzen mit einer Knotenanzahl bis zu 80 Knoten und für den Großteil der Instanzen mit 100 Knoten ermittelt wurden, konnte mit dem Modell 3I-BCVRP bereits ab 60 Knoten für einzelne Instanzen keine zulässige Lösung ermittelt werden. Bewiesen optimale Lösungen wurden ausschließlich für einen kleinen Teil der Instanzen mit 20 Knoten mit den Modellen 2I-BCVRP und 3I-BCVRP geliefert. Die sinkende Anzahl zulässig gelöster Instanzen mit 100 Bedarfen von Modell 2I-CVRP zu 2I-BCVRP ist überraschend und vermutlich auf die knappe maximale Rechenzeit zurückzuführen.<sup>13</sup>

# Bedarfe	2I-CVRP	2I-BCVRP	3I-BCVRP
20	66,4	8,5	8,4
40	81,8	12,1	11,5
60	86,9	18,6	14,4
80	88,9	23,2	29,3
100	91,5	29,2	30,7

**Tabelle 3.10:** Mittlere Gaps nach Modellen

Betrachtet man den Gap, angegeben in Tabelle 3.10, dominieren die Modelle 2I-BCVRP und 3I-BCVRP das Modell 2I-CVRP. In die Werte der Tabelle gehen nur Ergebnisse von

<sup>13</sup> Die Begrenzung der maximalen Rechenzeit auf 60 Sekunden ist durch die guten in dieser Zeit erhaltenen Resultate für die Modelle  $\text{M-TCVRP}(+)$  motiviert. Es zeigt sich, dass vergleichbar gute Ergebnisse für das BCVRP in diesem zeitlichen Rahmen nicht erzielt werden können.

Instanzen ein, für die mit dem jeweiligen Modell eine zulässige Lösung ermittelt wurde. Das Modell 2I-BCVRP erweitert das Modell 2I-CVRP um die Vorgabe einer unteren Schranke, wie viele Fahrten in einen Untergraph durchgeführt werden müssen. In noch konkreterer Form geht die Mindestanzahl der Fahrten in einen Untergraphen durch die Vorgabe einer Mindestanzahl von Befahrungen von Brücken in das Modell 3I-BCVRP ein. Die Modelle 2I-BCVRP und 3I-BCVRP liefern damit deutlich bessere untere Schranken für den Zielfunktionswert und beeinflussen damit den Gap. Mit zunehmender Knotenanzahl steigt der Gap für alle Modelle. Die Ergebnisse für das Modell 3I-BCVRP mit 100 Knoten sind aufgrund der vergleichsweise geringen Anzahl von Instanzen, für die eine zulässige Lösung ermittelt werden konnte, weniger belastbar. Tabelle 3.11 enthält die gemittelten Gap-Werte von Instanzen, für die mit allen drei Modellen eine zulässige Lösung ermittelt wurde. Die Instanzgruppen mit 20 und 40 Bedarfen sind ausgenommen, da die Werte denen in Tabelle 3.10 entsprechen. Gegenüber den Werten in Tabelle 3.10 weicht lediglich das Gap des Modells 3I-BCVRP bei Instanzen mit 100 Bedarfen nennenswert ab. Die Rangfolge der Modelle bleibt von der Beschränkung auf die von allen Modellen zulässig gelösten Instanzen unverändert.

# Bedarfe	2I-CVRP	2I-BCVRP	3I-BCVRP
60	86,6	18,8	14,4
80	88,4	24,3	29,3
100	90,8	30,8	36,3

**Tabelle 3.11:** Mittlere Gaps nach Modellen anhand von allen Modellen zulässig gelöster Instanzen

# Bed.	2I-CVRP		2I-BCVRP		3I-BCVRP	
	2	5	2	5	2	5
20	59,0	73,7	9,9	7,1	11,0	5,8
40	76,8	86,7	15,0	9,2	14,1	8,8
60	82,9	91,0	20,8	16,4	16,8	11,9
80	85,5	92,4	26,4	19,9	28,6	29,9
100	88,6	94,4	30,2	28,4	32,9	28,6

**Tabelle 3.12:** Mittlere Gap nach Brückenlängenverhältnis

In Tabelle 3.12 sind die Gaps neben der Knotenanzahl differenziert nach Mittelwert des Brückenlängenprofils angegeben. Instanzen mit 20 Knoten und einem Bedarfsmittelwert wurden nicht erzeugt. Die entsprechenden Zellen der Tabelle sind daher mit einem „-“ versehen. Mit dem Modell 2I-CVRP wurden durchgängig bessere Ergebnisse mit kürzeren Brücken erzielt. Dagegen resultieren mit den Modellen 2I- und 3I-BCVRP, mit Ausnahme von 80 Knoten mit dem Modell 3I-BCVRP, bessere Resultate bei längeren Brücken. Mit



# Bed.	2I-CVRP			2I-BCVRP			3I-BCVRP		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
20	-	59,6	73,1	-	7,0	10,0	-	4,2	12,5
40	74,4	80,8	89,8	11,0	12,9	12,4	5,9	11,3	17,2
60	81,4	87,0	92,4	21,8	17,9	16,1	7,3	11,6	25,9
80	84,3	88,7	93,8	29,1	23,0	17,4	16,4	44,0	36,3
100	87,9	91,3	94,7	42,3	27,5	23,5	20,9	45,1	40,0

Tabelle 3.13: Mittlere Gap nach Bedarfsmittelwert

wachsender Länge der Brücken steigt der Anteil des Zielfunktionswertes einer Lösung, der auf Fahrstrecken auf Brücken entfällt. Die Berücksichtigung der Brücken in den Modellen 2I- und 3I-BCVRP hat bei längeren Brücken größeren Einfluss.

Eine Differenzierung der Ergebnisse nach dem Bedarfsmittelwert  $\hat{B}$  und damit der Anzahl zur Bedienung der Bedarfe benötigter Fahrzeuge erfolgt in Tabelle 3.13. Bei gleicher Knotenanzahl bedeutet eine Verdoppelung des Bedarfsmittelwertes näherungsweise eine Verdoppelung der benötigten Fahrzeuge. Im Umkehrschluss werden je Fahrzeuge weniger Bedarfe bedient, da bereits durch eine geringere Menge an Bedarfen die Fahrzeugkapazität ausgeschöpft ist. Mit Blick auf die Struktur eines Brückengraphen bedeutet der Einsatz einer größeren Fahrzeugflotte, dass die Abschätzung wie häufig eine Brücke befahren werden muss, für eine größere Anzahl an Brücken den Mindestwert von eins überschreitet. Mit dem Modell 2I-CVRP steigt der Gap mit zunehmendem Bedarfsmittelwert. Dagegen führt ein zunehmender Bedarfsmittelwert mit dem Modell 2I-BCVRP bei Instanzen ab einer Knotenanzahl von 60 zu besseren Resultaten. Die Resultate des Modells 3I-BCVRP zeigen dagegen wiederum eine Verschlechterung bei wachsender Fahrzeuganzahl. Zwar kommt auch in diesem Modell, wie im Modell 2I-BCVRP, eine untere Schranke für die Anzahl der Nutzungen von Brücken zum Einsatz, das Modell wächst jedoch aufgrund der dreifachindizierten Variablen  $x_{ijk}$  mit wachsender Fahrzeuganzahl.

Die Unterscheidung der Ergebnisse nach dem Verzweigungsprofil liefert keine wesentlichen Unterschiede. Dies ist mit Blick auf die Ergebnisse für das TCVRP<sup>14</sup> stimmig, da diese für Bäume bis 100 Knoten ebenfalls nur einen geringen Einfluss des Verzweigungsprofils zeigen.

Es folgt die Gegenüberstellung der Ergebnisse der beiden Verfahren TCVRP+R und TCVRP<sup>B</sup>+R, die zweistufig zunächst eine Kundenzuordnung zu Fahrzeugen ermitteln und anschließend je befahrenem Teilgraphen ein Handlungsreisendenproblem lösen. Mit beiden Verfahren wurden zulässige Lösungen für alle Instanzen erzielt. Tabelle 3.14 ent-

<sup>14</sup> vgl. Tabelle 3.6

hält je Instanzgruppe die Anzahl der Instanzen für die mit dem Verfahren TCVRP+R beziehungsweise TCVRP<sup>B</sup>+R der bessere Zielfunktionswert erzielt wurde. Abgesehen von den Instanzen mit 20 Bedarfen, wurden mit dem Verfahren TCVRP<sup>B</sup>+R mehr bessere Zielfunktionswerte erzielt. Der Vorteil des Verfahrens TCVRP<sup>B</sup>+R bezüglich der besseren Zielfunktionswerte ist bei den Instanzen mit 40 und 60 Bedarfen am größten. Die letzte Spalte der Tabelle enthält die gemittelten relativen Zielfunktionswerten der beiden Verfahren. Bei Werten größer 100% sind im Mittel die Zielfunktionswerte des Verfahrens TCVRP+R besser als die des Verfahrens TCVRP<sup>B</sup>+R. Dies ist lediglich für die Instanzen mit 20 Bedarfen der Fall. Für die übrigen Instanzen mit mehr als 20 Bedarfen liefert das Verfahren TCVRP<sup>B</sup>+R im Mittel die besseren Zielfunktionswerte. Die Unterschiede liegen jedoch über alle Instanzgruppen bei maximal 2,5%.

# Bedarfe	TCVRP <sup>B</sup>	TCVRP+R	$TCVRP+R/TCVRP^B+R$
20	21	19	100,7%
40	9	51	97,5%
60	9	51	98,6%
80	15	45	98,7%
100	42	78	99,9%

**Tabelle 3.14:** Beste erzielte zulässige Lösungen und relative Zielfunktionswerte der Verfahren TCVRP+R und TCVRP<sup>B</sup>+R

Im Folgenden werden die mit einem Modell beziehungsweise dem Verfahren TCVRP+R, als dem zweistufigen Verfahren mit den gemäß Tabelle 3.14 besseren Resultate, erhaltenen Zielfunktionswerte der besten unteren Schranke aller Modelle beziehungsweise der Schranke  $LB^B + LB^{VRP+}$  gegenübergestellt. Der Quotient aus der Differenz von Zielfunktionswert und bester unterer Schranke im Zähler und der besten unteren Schranke im Nenner wird dabei als Gap\* bezeichnet. Durch die einheitliche Bezugsgröße, die beste untere Schranke, rücken die ermittelten Lösungen, beziehungsweise deren Zielfunktionswerte, in den Vordergrund. Die Struktur der Darstellung entspricht der für den Gap. Neben den Modellen 2I-CVRP, 2I-BCVRP und 3I-BCVRP ist auch das Verfahren TCVRP+R einbezogen.

# Bedarfe	2I-CVRP	2I-BCVRP	3I-BCVRP	TCVRP+R
20	5,4	4,8	5,1	5,6
40	8,5	7,5	7,7	5,0
60	12,6	13,9	11,1	3,5
80	16,2	19,5	26,4	5,1
100	23,0	26,7	28,1	5,3

**Tabelle 3.15:** Mittlere Gap\* nach Modellen

Die mittleren Gap\*-Werte sind unterschieden nach Knotenanzahl in Tabelle 3.15 angegeben. Die drei Modelle 2I-CVRP, 2I-BCVRP und 3I-BCVRP liefern für Instanzen bis 60 Knoten vergleichbare Resultate. Ab einer Knotenanzahl von 80 zeigen die Resultate die Rangfolge  $2I-CVRP > 2I-BCVRP > 3I-BCVRP$ . Mit dem Verfahren TCVRP+R werden für alle Knotenanzahlen Werte des Gap\* unter sechs Prozent erzielt. Die erhaltenen Lösungen weichen somit im Mittel maximal sechs Prozent von einer optimalen Lösung ab. Die Unterschiede in den Resultaten für verschiedene Anzahlen von Knoten sind vermutlich auf die unterschiedliche Anzahl an Knoten je Untergraph in den Instanzen unterschiedlicher Knotenanzahl<sup>15</sup> zurückzuführen. Je weniger Knoten je Untergraph vorhanden sind, umso mehr ähnelt ein Brückengraph einem Baum. Der Fehler aufgrund der Näherung als TCVRP fällt damit in der Regel geringer aus.

# Bed.	2I-CVRP		2I-BCVRP		3I-BCVRP		TCVRP+R	
	2	5	2	5	2	5	2	5
20	6,5	4,2	5,8	3,7	6,3	3,9	7,0	4,3
40	10,4	6,5	9,4	5,7	9,4	6,0	6,4	3,6
60	14,7	10,5	14,6	13,2	12,4	9,8	4,3	2,8
80	18,0	14,4	21,7	17,4	24,4	27,9	6,4	3,8
100	24,7	21,3	26,9	26,5	29,2	26,9	6,2	4,3

**Tabelle 3.16:** Mittlere Gap\* nach Brückenlängenverhältnis

In Tabelle 3.16 sind die Gap\*-Werte differenziert nach Brückenlängenverhältnis angegeben. Mit Ausnahme des Modells 3I-BCVRP bei 80 Knoten, liefern die Modelle beziehungsweise das Verfahren TCVRP+R bessere Ergebnisse für das größere Brückenlängenverhältnis. Während die Fahrstrecken innerhalb der Untergraphen über alle Brückenlängenverhältnisse in der Größenordnung gleich bleiben, steigen die Fahrstrecken auf Brücken mit größerem Brückenlängenverhältnis. Da die Längen der Brücken, direkt oder indirekt, in die Bewertung jeder zulässigen Lösung eingehen, steigt mit zunehmendem Brückenlängenverhältnis ihr Anteil am gesamten Zielfunktionswert einer Lösung. Kann die Länge der Brücken bei der Ermittlung einer unteren Schranke berücksichtigt werden, resultieren bei wachsenden Brückenlängen kleinere Gap-Werte.

Eine Differenzierung der Ergebnisse nach dem Bedarfsmittelwert erfolgt in Tabelle 3.17. Anders als die Gap-Werte sinken die Gap\*-Werte für das Modell 2I-CVRP mit wachsendem Bedarfsmittelwert und somit steigender Fahrzeuganzahl. Für die Modelle 2I-BCVRP und 3I-BCVRP bleiben die Tendenzen der Gap-Werte erhalten, wenngleich die Gap\*-Werte bis auf Ausnahmen absolut geringer ausfallen. Mit dem Verfahren TCVRP+R können Gap\*-Werte unter drei Prozent für den Bedarfsmittelwert 50, unter sechs Prozent für

<sup>15</sup> vgl. Tabelle 3.8

# Bed.	2I-CVRP			2I-BCVRP			3I-BCVRP			TCVRP+R		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200	50	100	200
20	-	1,7	9,0	-	1,2	8,4	-	1,2	8,9	-	2,2	9,7
40	6,9	7,7	10,9	3,8	8,0	10,7	2,4	6,9	13,8	2,4	5,5	7,1
60	15,7	11,3	10,8	14,1	13,0	14,6	2,7	8,4	24,3	2,1	3,4	5,2
80	20,7	14,9	13,0	22,7	19,5	16,4	11,9	42,0	34,9	2,7	4,8	7,9
100	35,2	20,7	14,8	37,9	24,2	22,7	17,5	43,3	38,7	2,4	4,5	8,9

**Tabelle 3.17:** Mittlere Gap\* nach Bedarfsmittelwert

den Bedarfsmittelwert 100 und schließlich unter zehn Prozent für den Bedarfsmittelwert 200 erzielt werden. Die Ergebnisse des Verfahrens TCVRP+R für die Bedarfsmittelwerte 50 und 100 weichen im Mittel somit maximal sechs Prozent von einer optimalen Lösung ab.

# Bedarfe	2I-CVRP	2I-BCVRP	3I-BCVRP	TCVRP+R
20	0,7	0,2	0,5	1,0
40	4,0	3,0	3,4	0,2
60	10,7	12,4	10,1	0,0
80	13,9	19,7	35,8	0,0
100	26,2	32,1	45,4	0,0

**Tabelle 3.18:** Mittlere relative Abweichung von der jeweils besten ermittelten Lösung

Abschließend werden in Tabelle 3.18 die ermittelten Zielfunktionswerte der Modelle beziehungsweise des Verfahrens TCVRP+R dem besten Zielfunktionswert einer für eine Instanz erhaltenen zulässigen Lösung gegenübergestellt. Je Instanz wurde der beste Zielfunktionswert der ermittelten Lösungen über alle Testläufe  $f_{best}$  ermittelt. Im Rahmen der Auswertung wird der Zielfunktionswert der mit einem Modell oder Verfahren erhaltenen Lösung  $f_H$  diesem besten Zielfunktionswert gegenübergestellt. Die Angabe erfolgt als relative Abweichung des Zielfunktionswertes des jeweiligen Verfahrens zum besten Zielfunktionswert aller Verfahren, das heißt  $(f_{best} - f_H) / f_{best}$ . Ein Wert 0 bedeutet, dass mit einem Verfahren der beste Zielfunktionswert aller Testläufe erzielt wurde. Mit dem Verfahren TCVRP+R wurde für alle Instanzen mit mindestens 60 Knoten die beste Lösung erzielt. Die Abweichungen von der besten ermittelten Lösung steigen für die Modelle mit wachsender Knotenanzahl. Während die mittlere Abweichung bis zu einer Knotenanzahl von 40 unter fünf Prozent bleibt, steigt sie ab 60 Knoten über zehn Prozent. Bei dem Verfahren TCVRP+R beträgt die mittlere Abweichung über alle Instanzen maximal ein Prozent.

# Kapitel 4

## Gabelstaplerprobleme

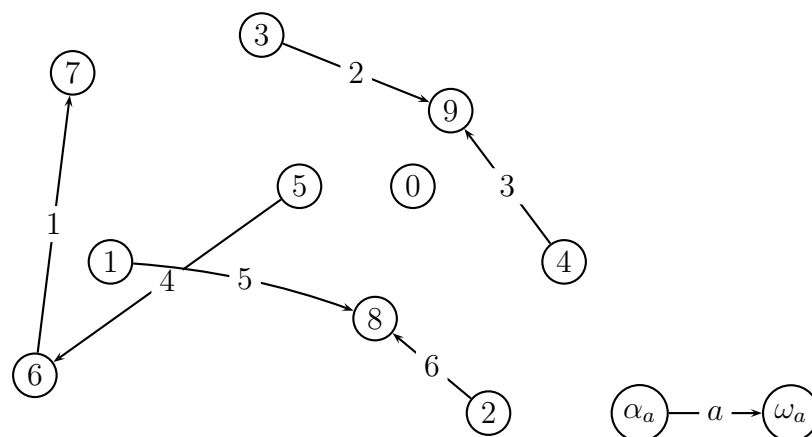
Ein Transport ist erforderlich, wenn Angebot und Nachfrage eines Gutes an unterschiedlichen Orten vorliegen. Das nachgefragte Gut muss vom Angebots- zum Nachfrageort transportiert werden, um dort verwendet werden zu können. In der in Kapitel 3 beschriebenen Planungsaufgabe, ist das Angebot an einem Ort, dem Depot, konzentriert. Diesem Angebot steht eine Menge von Nachfragen an verschiedenen Orten gegenüber. Der Transport der Waren erfolgt in Touren, die am Depot beginnen und enden. Jede Tour bedient eine Teilmenge der Nachfragen mit Waren, die am Depot geladen werden. Sind sowohl das Angebot als auch die Nachfrage nach einem oder verschiedenen Gütern auf mehrere Orte verteilt, kann eine Problemstellung als Tourenplanungsproblem mit Umsetzungen interpretiert werden. In diesem Kapitel wird das Gabelstaplerproblem (engl. stacker crane problem) als spezielles Tourenplanungsproblem mit Umsetzungen behandelt. Zunächst wird das Gabelstaplerproblem in Abschnitt 4.1 für ein und mehrere Fahrzeuge mit einem vollständigen Graphen als Streckennetz erläutert. Anschließend werden in Abschnitt 4.2 Modelle für das Gabelstaplerproblem mit einem Baum als Streckennetz vorgestellt. Dem Steinerbaumproblem, das ein Teilproblem des Gabelstaplerproblems auf Bäumen darstellt, ist Abschnitt 4.3 gewidmet. Weiter werden in Abschnitt 4.4 Ergebnisse von Testläufen, dem Einsatz der zuvor vorgestellten mathematischen Modelle für vollständige Graphen und Bäume als Streckennetze, präsentiert. Das Kapitel schließt in Abschnitt 4.5 mit einer Literaturübersicht zum Gabelstaplerproblem und verwandten Problemstellungen.

## 4.1 Verwendung eines vollständigen Graphen als Streckennetz

In diesem Abschnitt wird das Gabelstaplerproblem nach Frederickson et al. (1976) beschrieben. Die Autoren beschreiben die Problemstellung sowohl mit einem als auch mit mehreren Fahrzeugen. Als Streckennetz dient ein vollständiger Graph, dessen Kantenbewertungen die Distanz der inzidenten Knoten der jeweiligen Kante widerspiegeln. Gegebenenfalls kann ein nicht vollständiger Graph durch Modifikation von Kantenbewertungen und Hinzufügen entsprechender Kanten in einen vollständigen Graphen, der die Distanzen zwischen den Knoten als Kantenbewertungen besitzt, überführt werden. Frederickson et al. (1976) geben keine gemischt-ganzzahligen Modelle für die Problemstellungen an. Eine geeignete Parametrisierung eines Handlungsreisendenproblems zur Abbildung des Ein-Fahrzeug-Falls sowie ein gemischt-ganzzahliges Modell für die Problemstellung mit mehreren Fahrzeugen werden in diesem Abschnitt angegeben.

Das Gabelstaplerproblem ist ein spezielles Tourenplanungsproblem mit Umsetzungen. Frederickson et al. (1976) definieren die Problemstellung zunächst für ein Fahrzeug. Dieses steht an einem Depot für die Durchführung einer Menge  $A$  von Transportaufträgen, im Folgenden Aufträge genannt, zur Verfügung. Ein Auftrag  $a$  besteht aus einem Objekt, das von einem Startort  $\alpha_a$  zu einem Zielort  $\omega_a$  transportiert werden muss. Die Durchführung eines Auftrags entspricht der Umsetzung des Auftragsobjekts. Ein Ort  $i$  kann Start- und Zielort für mehrere Aufträge sein. Auch parallel verlaufende Aufträge, die den gleichen Start- und Zielort besitzen, sind möglich. Das verfügbare Fahrzeug kann zeitgleich nur ein Objekt transportieren. Ein zeitweises Abstellen eines Objektes zwischen Aufnahme am Startort und Abladen am Zielort ist nicht vorgesehen. Bevor das Objekt eines zweiten Auftrags aufgenommen werden kann, muss ein begonnener Auftrag zunächst abgeschlossen werden. Die Aufträge sind somit nicht unterbrechbar. Jedem Auftrag  $a$  ist eine Fahrstrecke  $d_a^A$  zugeordnet. Der Wert  $d_a^A$  ist nach unten durch die Distanz zwischen dem Start- und Zielort des Auftrags  $d_{\alpha_a\omega_a}$  begrenzt. Die Durchführung eines Auftrags ist somit mindestens mit dem Aufwand der Fahrt von seinem Start- zu seinem Zielort verbunden. Darüber hinaus können Nebentätigkeiten, die im Rahmen eines Auftrags anfallen, als zusätzliche fiktive Fahrstrecke modelliert werden. Dabei kann es sich beispielsweise um Ladetätigkeiten, die als zeitliche Größe durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit des Fahrzeugs in eine Distanz überführt werden können, handeln. Der Umfang der Nebentätigkeiten entspricht der Differenz  $d_a^A - d_{\alpha_a\omega_a}$ . Beschränkt sich der Aufwand eines Auftrags ausschließlich auf die Überbrückung der Distanz zwischen seinem Start- und seinem Zielort, gilt  $d_a^A = d_{\alpha_a\omega_a}$ . Der Umfang der Nebentätigkeiten eines Auftrags ist vorab

bekannt und planungsunabhängig. Die Aufgabenstellung besteht aus dem Finden einer Tour, die alle Aufträge vom Depot aus streckenminimal miteinander verknüpft. Ein Anwendungsfall des Gabelstaplerproblems ist der innerbetriebliche Transport von Paletten mit Gabelstaplern. Die Aufträge resultieren aus den Standorten der Paletten und deren Zielorten. Ebenfalls kann der Transport von Frachtcontainern mit Lastkraftwagen, ohne Anhänger, als Gabelstaplerproblem interpretiert werden. Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel des Gabelstaplerproblems. Knoten 0 stellt das Depot, an dem ein Fahrzeug zur Verfügung steht, dar. Die übrigen Knoten repräsentieren Orte, an denen Aufträge beginnen beziehungsweise enden, und zwischen denen Distanzen  $d_{ij}$  gegeben sind. Die Aufträge sind in der Abbildung als Pfeile dargestellt. Die Beschriftung der Pfeile benennt die Aufträge. Der Auftrag 1 entspricht beispielsweise dem Transport eines Objektes von Ort 6 zu Ort 7. Eine Lösung der Beispielinstantz als Folge anzufahrender Knoten lautet beispielsweise  $0 \rightarrow 4 \xrightarrow{3} 9 \rightarrow 5 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{1} 7 \rightarrow 3 \xrightarrow{2} 9 \rightarrow 2 \xrightarrow{6} 8 \rightarrow 1 \xrightarrow{5} 8 \rightarrow 0$ . In der Lösungsangabe repräsentieren beschriftete Pfeile eine Fahrt zur Durchführung eines Auftrags. Pfeile ohne Beschriftung stellen Fahrten ohne Auftragsdurchführung dar.



**Abbildung 4.1:** Depot und Aufträge einer Beispielinstantz

Eine Tour besteht aus den Fahrstrecken der Aufträge sowie Fahrten zu deren Verbindung untereinander und mit dem Depot. Die Distanzen der Aufträge sind eine Konstante der Problemstellung und können im Rahmen der Planung einer Tour nicht beeinflusst werden. Die Zielstellung, eine Tour mit minimaler Fahrstrecke zu ermitteln, entspricht der Auswahl in Summe minimal bewerteter Verbindungsfahrten zwischen dem Depot und den Aufträgen. Das Gabelstaplerproblem mit einem Fahrzeug kann als Handlungsreisendenproblem zwischen den Aufträgen und dem Depot interpretiert werden. Abgesehen vom Depot repräsentiert ein Knoten des Handlungsreisendenproblems einen Auftrag des

Gabelstaplerproblems. Das Handlungsreisendenproblem zur Instanz des Gabelstaplerproblems aus Abbildung 4.1 besteht aus sieben Knoten, dem Knoten 0 für das Depot und den Knoten 1-6 für die Aufträge. Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass zwischen den Orten des Gabelstaplerproblems, dem Depot sowie Start- und Zielorten von Aufträgen, symmetrische Distanzen vorliegen, das heißt es gilt  $d_{ij} = d_{ji}$ . Bei der Betrachtung als Handlungsreisendenproblem resultieren die Distanzen  $d_{ab}^A$  und  $d_{ba}^A$  zwischen den Auftragsknoten zweier Aufträge  $a$  und  $b$  aus den Distanzen der Ziel- und Startorte der Aufträge  $d_{\omega_a\alpha_b}$  und  $d_{\omega_b\alpha_a}$ . Sofern zwei Aufträge nicht den Start- und Zielort teilen, ergeben sich im Allgemeinen unterschiedliche Werte für  $d_{\omega_a\alpha_b}$  und  $d_{\omega_b\alpha_a}$  und somit auch für  $d_{ab}^A$  und  $d_{ba}^A$ . Die minimale Distanz  $d_{ab}^A = 0$  von einem Auftrag  $a$  zu einem anderen Auftrag  $b$  ergibt sich, wenn Auftrag  $b$  am Zielort des Auftrags  $a$  beginnt, das heißt  $\omega_a = \alpha_b$  gilt. In der abgebildeten Beispielinstantz ist das für die Distanz von Auftrag 4 zu Auftrag 1 der Fall. Auftrag 4 endet an Ort 6, an dem wiederum Auftrag 1 beginnt. Umgekehrt ist von Auftrag 1 zu Auftrag 4 die Distanz von Ort 7 zu Ort 5,  $d_{75}$ , zu überbrücken. Die Distanzen der Aufträge zu und vom Depot ergeben sich zu  $d_{0a}^A = d_{0\alpha_a}$  und  $d_{a0}^A = d_{\omega_a 0}$ . Wird ein Gabelstaplerproblem als Handlungsreisendenproblem interpretiert, werden die Distanzen  $d_{ab}^A$ , die gemäß der obigen Beschreibung im Allgemeinen asymmetrisch sind, verwendet. Als formale Beschreibung kann das Modell (2.1) - (2.6) mit den Distanzen  $d_{ab}^A$  verwendet werden. Im Rahmen der Performanceanalyse in Abschnitt 4.4 wird das Modell als M-SCP bezeichnet. Da lediglich die Distanzen zwischen Aufträgen in das Modell eingehen, müssen zur Angabe der Länge einer Tour die Fahrstrecken  $d_a^A$  auf den Zielfunktionswert addiert werden.

Ist die maximale Fahrstrecke einer Tour nach oben beschränkt, kann für die Bedienung aller Aufträge der Einsatz mehrerer Fahrzeuge erforderlich sein. Die Erweiterung des Gabelstaplerproblems um eine Tourbeschränkung und eine Menge  $K$  homogener Fahrzeuge zur Durchführung von Aufträgen wird in dieser Arbeit als Mehr-Fahrzeug-Gabelstaplerproblem bezeichnet. Frederickson et al. (1976) nennen diese Problemstellung „k Stacker Crane Problem (k-SCP)“. Die Existenz einer Beschränkung des Umfangs einer Tour, als maximale Fahrstrecke oder maximale Anzahl an Aufträgen je Fahrzeug, ist notwendig, damit der Einsatz von mehreren Fahrzeugen bezüglich der Zielstellung der Streckenminimierung sinnvoll ist. Ohne Beschränkung des Tourumfangs würde aufgrund der Dreiecksungleichung und der Annahme, dass ein Auftrag mindestens die Fahrstrecke von seinem Start- zu seinem Zielort beinhaltet, stets eine optimale Lösung, die genau ein Fahrzeug verwendet, existieren. Eine derartige Begrenzung der Touren kann in Anwendungen aus der begrenzten Arbeitszeit eines Fahrers abgeleitet sein. Im Folgenden begrenzt der Wert  $\hat{D}$  als maximale Fahrstrecke den Umfang einer Tour. Als gemischt-ganzzahliges lineares mathematisches Modell kann das



Mehr-Fahrzeug-Gabelstaplerproblem ähnlich dem kapazitierten Tourenplanungsproblem im Modell (3.1) - (3.7) formalisiert werden. Das im Folgenden beschriebene Modell ist an Toth und Vigo (2002) angelehnt. Jedem Auftrag sowie dem Depot ist ein Knoten zugeordnet. Es gilt  $V = A \cup \{0\}$ . Die Fahrten zwischen Knoten, Aufträgen und dem Depot, werden mit binären Variablen  $x_{ij}$  erfasst. Die Variable  $x_{ij}$  nimmt den Wert 1 an, wenn eine Fahrt von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  stattfindet. Fahrten von einem Knoten zu sich selbst sind nicht zulässig, weshalb für alle Knoten  $i$   $x_{ii} = 0$  unterstellt wird. Die Variablen  $s_i$  geben die Fahrstrecke innerhalb einer Tour bis zum Abschluss des Auftrags  $i$  an. Nach der Wegstrecke  $s_i$  befindet sich das Fahrzeug am Zielort  $\omega_i$  des Auftrags  $i$ .

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i,j \in V} d_{ij}^A x_{ij} \quad (4.1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \setminus \{0\} \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \in V} (x_{ij} - x_{ji}) = 0 \quad j \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in V} x_{0j} \leq |K| \quad (4.4)$$

$$s_i - s_j + \hat{D}x_{ij} \leq \hat{D} - d_j^A - d_{ij}^A \quad i, j \in V \setminus \{0\}, i \neq j \quad (4.5)$$

$$d_{0i}^A + d_i^A \leq s_i \leq \hat{D} - d_{i0}^A \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V \quad (4.7)$$

Zielfunktion (4.1) minimiert die zurückzulegenden Distanzen. Die Fahrstrecken der Aufträge  $d_i^A$  gehen nicht in die Zielfunktion ein, da ihre Summe konstant ist und somit durch die Gestaltung von Touren nicht beeinflusst werden kann. Für jeden Auftrag ist gemäß den Gleichungen (4.2) genau eine Anfahrt erforderlich. Die Gleichungen (4.3) fordern, dass jeder Knoten gleich häufig angefahren und verlassen wird. In Verbindung mit den Gleichungen (4.2) muss somit von jedem Auftragsknoten eine Fahrt ausgehen. Die Anzahl der Touren, als vom Depot ausgehende Fahrten, wird durch die Gleichungen (4.4) nach oben auf die Anzahl verfügbarer Fahrzeuge beschränkt. Die Begrenzung des Umfangs der Touren erfolgt über die Ungleichungen (4.5) und (4.6). Die Ungleichungen (4.6) beschränken den Wert der Variablen  $s_i$ . Für jeden Auftrag  $i$  muss gelten, dass die Fahrstrecke bis zum Zielort mindestens der Fahrt vom Depot zum Startort des Auftrags  $d_{0i}^A$  zuzüglich dem Fahraufwand des Auftrags  $d_i^A$  entspricht. Die Begrenzung des Tourumfangs erfolgt über die Beschränkung von  $s_i$  nach oben auf  $\hat{D}$  abzüglich der Fahrstrecke vom Zielort des Auftrags zurück zum Depot  $d_{i0}^A$ . Damit wird sichergestellt, dass die Variablen  $s_i$  nur zulässige Werte annehmen. Das Fortschreiben der Variablen  $s_i$  innerhalb einer Tour, erfolgt

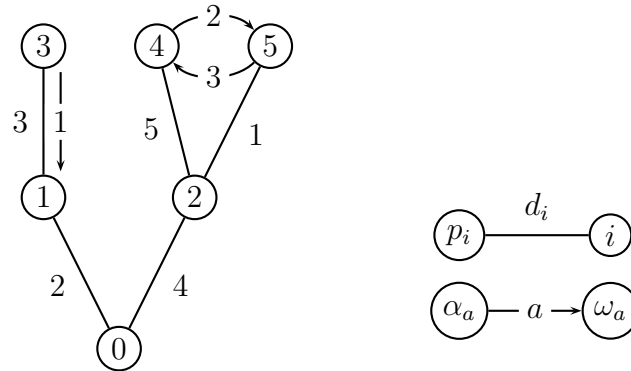
durch die Ungleichungen (4.5). Findet eine Fahrt von Auftrag  $i$  zu Auftrag  $j$  statt, so gilt  $s_j \geq s_i + d_{ij}^A + d_j^A$ . Die Fahrstrecke bis zur Fertigstellung des Auftrags  $j$  beträgt mindestens der Fahrstrecke bis zum Abschluss von Auftrag  $i$  zuzüglich der Fahrt vom Zielort des Auftrags  $i$  zum Startort des Auftrags  $j$  sowie dessen Fahraufwand  $d_j^A$ . Wenngleich die Werte der Variablen  $s_i$  als Fahrstrecke bis zur Fertigstellung eines Auftrags  $i$  interpretiert werden können, sind die Werte nicht auf die tatsächlichen Fahrstrecken fixiert. Die Werte  $s_i$  stellen lediglich eine obere Schranke der Fahrstrecke dar. Die tatsächlichen Fahrstrecken ergeben sich, wenn die Bedingungen für aufeinanderfolgende Aufträge  $i$  und  $j$  mit Gleichheit erfüllt sind. Weiter werden durch die Ungleichungen (4.5) Kurzzyklen, Touren, die das Depot nicht beinhalten, unterbunden. Schließlich erfolgt in (4.7) die Definition der binären Variablen  $x_{ij}$ . Das Modell (4.1) - (4.7) wird im Folgenden M-MVSCP genannt.

## 4.2 Verwendung eines Baumes als Streckennetz

In diesem Abschnitt wird ein Baum als Streckennetz für ein Gabelstaplerproblem unterstellt. Diese Problemstellung wird im Folgenden als Gabelstaplerproblem auf Bäumen (TSCP - tree stacker crane problem) bezeichnet. Das TSCP wurde erstmals von Frederickson und Guan (1993) unter der Bezeichnung „Nonpreemptive ensemble motion planning on a tree“ untersucht. In diesem Abschnitt wird zunächst eine Beispielinstantz des TSCP beschrieben. Anschließend werden in Anlehnung an Frederickson und Guan (1993) aus der Baumstruktur Folgerungen für Eigenschaften einer zulässigen Lösung gezogen. Die Erkenntnisse werden genutzt, um Modelle für das TSCP mit einem Fahrzeug und mit mehreren homogenen Fahrzeugen (MVTSCP) anzugeben. Schließlich werden Möglichkeiten aufgezeigt, den Baum einer Instanz unter bestimmten Bedingungen zu vereinfachen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im Folgenden davon ausgegangen, dass die Wurzel des Baumes, Knoten 0, das Depot darstellt.

In Abbildung 4.2 ist beispielhaft eine Instanz des TSCP dargestellt. Der Baum der Instanz besteht aus sechs Knoten, wobei Knoten 0, die Wurzel des Baumes, als Depot und somit Ausgangs- und Zielort der Tour angesehen wird. Die Instanz beinhaltet drei Aufträge, Transporte von Knoten 3 zu Knoten 1, von Knoten 4 zu Knoten 5 und von Knoten 5 zu Knoten 4. Die Aufträge sind in der Abbildung als Pfeile dargestellt. Die Nummern in der Pfeilmitte benennen die Aufträge. Die Fahrstrecke der Aufträge  $d_a^A$  wird als die zurückzulegende Distanz vom Start- zum Zielort des jeweiligen Auftrags  $a$  angenommen. Es gelten somit  $d_1^A = 3$  und  $d_2^A = d_3^A = 6$ . Die Aufträge stellen keine zusätzlichen Fahrwege zwischen den Knoten eines Baumes zur Verfügung. Beispielsweise ermöglicht

der Auftrag 2 keine direkte Fahrt von Knoten 4 zu Knoten 5. Stattdessen ist Auftrag 2 durch die Nutzung des Weges zwischen den Knoten 4 und 5, der die Kanten  $[2, 4]$  und  $[2, 5]$  enthält, in Richtung des Knoten 5 zu realisieren.

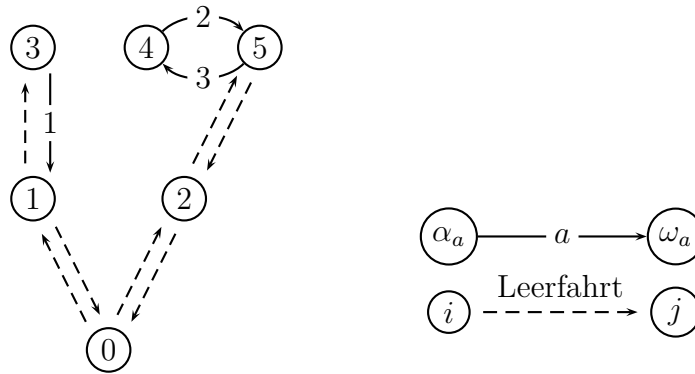


**Abbildung 4.2:** Beispielinstantz für das TSCP

Die Lösung einer Instanz des TSCP kann wiederum als Reihenfolge von Aufträgen beschrieben werden. Für die Beispielinstantz aus Abbildung 4.2 stellt die Auftragsreihenfolge  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  eine optimale Lösung dar. Die Länge der zugehörigen Tour beträgt 32 und ergibt sich aus den Distanzen  $d_{03}$ ,  $d_{15}$ ,  $d_{44}$  und  $d_{50}$  zwischen dem Depot und den Ziel- und Startorten der aufeinanderfolgenden Aufträge, sowie den Fahrstrecken der Aufträge  $d_a^A$ . Die in einer Lösung durchzuführenden Fahrten eines Fahrzeugs können in einem Multi-Digraphen, im Folgenden Fahrtendigraph genannt, dargestellt werden. Der Fahrtendigraph enthält die Pfeile der durchzuführenden Aufträge sowie zusätzliche Pfeile, die Leerfahrten, das heißt Fahrten ohne Durchführung eines Auftrags, repräsentieren. Leerfahrten werden im Weiteren als gestrichelte Pfeile dargestellt. Die Kanten des Baumes sind im Fahrtendigraphen nicht enthalten. Der Fahrtendigraph zur Auftragsreihenfolge  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Die zugehörige Tour kann als Pfeilfolge, das heißt einer Aneinanderreihung von Pfeilen die keinen Pfeil doppelt enthält, angegeben werden. Die Pfeilfolge der dargestellten Lösung lautet  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $\langle 1, 3 \rangle$ ,  $\langle 3, 1 \rangle$  (Auftrag 1),  $\langle 1, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, 5 \rangle$ ,  $\langle 5, 4 \rangle$  (Auftrag 3:  $\langle 5, 2 \rangle + \langle 2, 4 \rangle$ ),  $\langle 4, 5 \rangle$  (Auftrag 2:  $\langle 4, 2 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$ ),  $\langle 5, 2 \rangle$  und  $\langle 2, 0 \rangle$ .

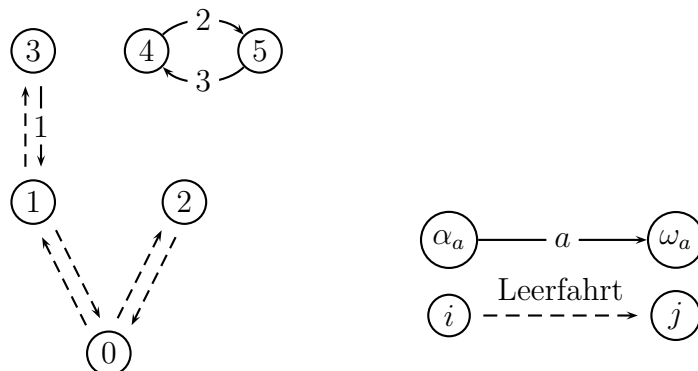
### 4.2.1 Ein-Fahrzeug-Fall

Zur Erstellung eines mathematischen Modells für das TSCP werden zunächst Eigenschaften jeder zulässigen Lösung, die sich aus der Baumstruktur ergeben, beschrieben. Eine vergleichbare Darstellung findet sich in Frederickson und Guan (1993). Dabei werden



**Abbildung 4.3:** Fahrtendigraph der Auftragsreihenfolge  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  in der Beispielinstantz aus Abbildung 4.2

insbesondere die durchzuführenden Fahrten innerhalb einer Lösung betrachtet. Die Fahrten lassen sich in Fahrten zur Durchführung von Aufträgen und Leerfahrten, als Fahrten zu, von oder zwischen Aufträgen, unterscheiden. Auf Leerfahrten werden keine Objekte bewegt und somit keine Aufträge durchgeführt. Eine Lösung des TSCP ist eine geschlossene Tour. Wird eine Kante des Baumes in eine Richtung befahren, muss sie ebenfalls in die umgekehrte Richtung genutzt werden. Andernfalls müsste die Fahrt an einem Knoten  $i \neq 0$  enden und es wäre keine Rückkehr zum Depot möglich. In der Beispielinstantz aus Abbildung 4.2 gleichen sich die Fahrten der Aufträge 2 und 3 auf den Kanten  $[2, 4]$  und  $[2, 5]$  aus. Die Durchführung des Auftrags 1 erfordert dagegen eine zusätzliche Fahrt auf der Kante  $[1, 3]$  in Richtung des Knotens 3. Als weitere Anforderung können Fahrten auf einer Kante  $[i, j]$  nur stattfinden, sofern es sich bei einem der inzidenten Knoten  $i$  und  $j$  um den Knoten 0 handelt oder die Elterkante  $[p_i, i]$  ebenfalls genutzt wird. Für das Beispiel bedeutet das, dass neben den Fahrten zur ausgeglichenen Nutzung der Kanten  $[1, 3]$ ,  $[2, 4]$  und  $[2, 5]$  in beide Richtungen ebenfalls Fahrten auf den Kanten  $[0, 1]$  und  $[0, 2]$  erforderlich sind.

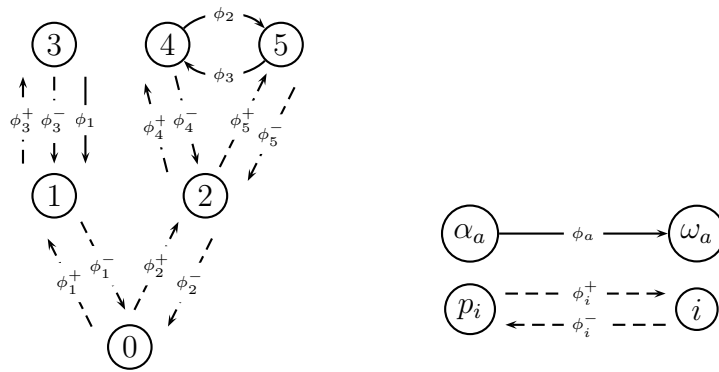


**Abbildung 4.4:** Fahrtendigraph der für eine ausgeglichene und hierarchische Nutzung der Kanten notwendigen Fahrten

Abbildung 4.4 zeigt den Fahrtendigraph, der die Aufträge sowie die zuvor erläuterten zusätzlichen Leerfahrten beinhaltet. Ein (Multi-) Digraph wird nach Neumann und Morlock (2002) als eulersch bezeichnet, wenn eine geschlossene Pfeilfolge existiert, die jeden Pfeil des (Multi-) Digraphen genau einmal beinhaltet. Ob ein (Multi-) Digraph eulersch ist, kann gemäß den Autoren anhand eines einfachen Kriteriums geprüft werden. Ein (Multi-) Digraph ist genau dann eulersch, wenn er schwach zusammenhängend und der Ein- und Ausgangsgrad jedes Knotens gleich ist. Für den schwachen Zusammenhang eines (Multi-) Digraphen genügt die Existenz einer Semi-Pfeilfolge, das heißt einer Folge von Pfeilen ohne Beachtung der Pfeilrichtung, zwischen je zwei Knoten des (Multi-) Digraphen. Der Fahrtendigraph in Abbildung 4.4 ist nicht eulersch. Jeder Knoten des Fahrtendigraphen besitzt zwar gleichen Eingangs- und Ausgangsgrad, jedoch existiert beispielsweise zwischen Knoten 0 und Knoten 4 keine Semi-Pfeilfolge. Die eingefügten Leerfahrten sind somit notwendig, jedoch nicht hinreichend, um zusammen mit den Fahrten der Aufträge eine geschlossene Tour bilden zu können. Um zu einem eulerschen (Multi-) Digraph und einer daraus ableitbaren zulässigen Lösung für die TSCP-Instanz zu kommen, bestehen in der Beispielinstantz zwei Möglichkeiten. Entweder muss die Kante  $[2, 4]$  oder die Kante  $[2, 5]$  zusätzlich genutzt werden. Da die Kanten gleichmäßig in beide Richtungen genutzt werden müssen, entspricht dies dem Hinzufügen zweier Pfeile  $\langle 2, 4 \rangle$  und  $\langle 4, 2 \rangle$  oder  $\langle 2, 5 \rangle$  und  $\langle 5, 2 \rangle$ . Beide Ergänzungsmöglichkeiten führen jeweils zu einer zulässigen Lösung. Für eine optimale Lösung muss die streckenminimale Ergänzung, das Fahrtenpaar auf Kante  $[2, 5]$ , gewählt werden. Der ergänzte Fahrtendigraph ist nunmehr eulersch und die im vorausgehenden Abschnitt notierte Pfeilfolge kann als Lösung ermittelt werden. Aus der Menge der Auftrags- und Leerfahrten sind so lange beliebige Zyklen zu bilden, bis jede Fahrt Teil eines Zyklus ist. Anschließend können die Zyklen in eine geschlossenen Pfeilfolge überführt werden.<sup>16</sup> Bei der Bestimmung einer Pfeilfolge und damit einer Reihenfolge der Aufträge können im Allgemeinen verschiedene gleichwertige Lösungen konstruiert werden. Die Anforderung, dass der Fahrtendigraph eulersch sein muss, kann für das TSCP auch wie folgt ausgedrückt werden: Alle Startknoten von Aufträgen, müssen durch Fahrten vom Depot, repräsentiert durch die Wurzel des Baumes, aus erreichbar sein.

Die Ermittlung einer Menge von Leerfahrten mit minimaler Strecke, die in Verbindung mit den Aufträgen einer Instanz die Konstruktion einer Tour ermöglicht, wird im Folgenden als gemischt-ganzzahliges lineares Modell formuliert. Zum Einsatz kommen ganzzahlige Variablen  $x_i^+$  und  $x_i^-$  und reellwertige Variablen  $\phi_i^+$ ,  $\phi_i^-$  und  $\phi_a$ . Der Wert der Variable  $x_i^+$  gibt an, wie häufig die Elterkante  $[p_i, i]$  des Knotens  $i$  von Knoten  $p_i$  zu Kno-

<sup>16</sup> vgl. Neumann und Morlock (2002)



**Abbildung 4.5:** Transportmöglichkeiten für das fiktive Gut in der Beispielinstantz aus Abbildung 4.2

ten  $i$  für Leerfahrten, das heißt Fahrten ohne geladenes Objekt, genutzt wird. Umgekehrt beschreibt die Variable  $x_i^-$  die Anzahl der Leerfahrten auf der Elterkante in Richtung des Knotens  $p_i$ . Um die Anforderung, jeden Startknoten eines Auftrags von der Wurzel aus erreichen zu können, zu erfüllen, wird der Transport eines fiktiven Gutes in das Modell integriert. Jedem Knoten wird ein Bedarf nach diesem Gut in Höhe der Anzahl an diesem Knoten startender Aufträge zugeordnet. Die Wurzel stellt als einziger Knoten Mengeneinheiten des fiktiven Gutes zur Verfügung. Der Transport von Mengeneinheiten des fiktiven Gutes ist auf jeder Fahrt, gleich ob Leerfahrt oder Durchführung eines Auftrags, möglich. Die nicht negativen Variablen  $\phi_i^+$  und  $\phi_i^-$  geben die Transportmenge von Elterknoten  $p_i$  zu Knoten  $i$  beziehungsweise in umgekehrter Richtung an. Die Transportmenge des fiktiven Gutes im Rahmen der Fahrt zur Durchführung des Auftrags  $a$  wird durch die ebenfalls nicht-negative Variable  $\phi_a$  angegeben. Der Transport einer Mengeneinheit des fiktiven Gutes ist an eine Fahrt gebunden, jedoch nicht mit dem Transport des Objektes eines Auftrags zu verwechseln. Die Möglichkeit eine Mengeneinheit des fiktiven Gutes zu dem Startknoten eines Auftrags zu transportieren entspricht der Erreichbarkeit des Startknotens von der Wurzel. In Abbildung 4.5 sind die Variablen  $\phi_i^+$ ,  $\phi_i^-$  und  $\phi_a$  für die Instanz aus Abbildung 4.2 dargestellt. Für jeden der drei Aufträge enthält die Darstellung eine Transportmöglichkeit für das fiktive Gut vom Start- zum Zielknoten des Auftrags. Je Kante des Baumes  $[p_i, i]$  ist zudem ein Paar  $\phi_i^+$  und  $\phi_i^-$  abgebildet.

Die Nutzung der Kanten des Baumes bei Durchführung eines Auftrages gehen als  $r_{ia}$  in das Modell ein. Die Werte  $r_{ia}$  geben an, ob und in welche Richtung ein Auftrag  $a$  die Elterkante des Knotens  $i$  nutzt. Die Zuordnung der Werte  $r_{ia}$  ist in Gleichung (4.8) dargestellt. Im Beispiel aus Abbildung 4.2 bedeutet das für Auftrag 1 einen Wert von  $r_{31} = -1$ , für Auftrag 2 Werte von  $r_{42} = -1$  und  $r_{52} = 1$  sowie für Auftrag 3 Werte von  $r_{43} = 1$  und  $r_{53} = -1$ . Bei den übrigen Kombinationen aus Kanten und Aufträgen findet keine Nutzung der entsprechenden Kante durch den jeweiligen Auftrag statt, sodass für

diese  $r_{ia} = 0$  gilt.

$$r_{ia} = \begin{cases} -1 & \text{Nutzung der Kante } [p_i, i] \text{ in Richtung des Knotens } p_i \text{ f\u00fcr Auftrag } a \\ +1 & \text{Nutzung der Kante } [p_i, i] \text{ in Richtung des Knotens } i \text{ f\u00fcr Auftrag } a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i \in V \setminus \{0\}} d_i(x_i^+ + x_i^-) \quad (4.9)$$

$$\sum_{a \in A} r_{ia} + x_i^+ - x_i^- = 0 \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \phi_i^+ - \phi_i^- + \sum_{j \in C_i} (\phi_j^- - \phi_j^+) + \\ \sum_{a \in \{A | \omega_a = i\}} \phi_a - \sum_{a \in \{A | \alpha_a = i\}} \phi_a = |\{a \in A | \alpha_a = i\}| \end{aligned} \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.11)$$

$$\phi_i^+ \leq x_i^+ \cdot |A| \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.12)$$

$$\phi_i^- \leq x_i^- \cdot |A| \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.13)$$

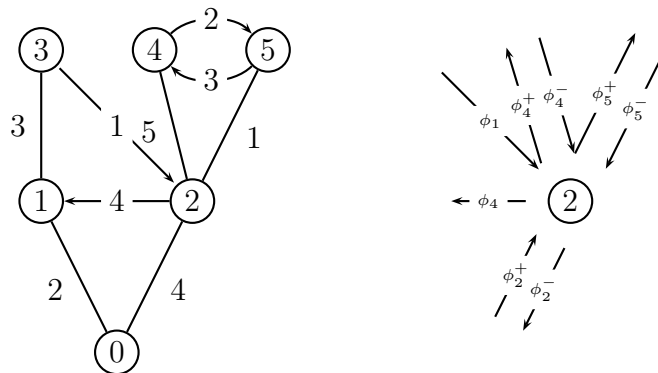
$$x_i^+, x_i^- \in \mathbb{N}_0 \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.14)$$

$$\phi_i^+, \phi_i^- \geq 0 \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.15)$$

$$\phi_a \geq 0 \quad a \in A \quad (4.16)$$

Zielfunktion (4.9) minimiert die Distanzen der durchgef\u00fchrten Leerfahrten. In die Bewertung gehen die Leerfahrten auf allen Kanten in beide Richtungen ein. Die Distanzen der Auftr\u00e4ge sind f\u00fcr die Zielgr\u00f6\u00dfe nicht relevant, da ihr Wert eine Konstante darstellt. Die ausgeglichene Nutzung jeder Kante wird \u00fcber die Gleichungen (4.10) gew\u00e4hrleistet. Die Nutzungen einer Kante  $[p_i, i]$  durch Auftr\u00e4ge muss in Summe mit den Leerfahrten auf der Kante in Richtung des Knotens  $i$  und abz\u00fcglich der Leerfahrten in Richtung des Knotens  $p_i$  den Wert Null ergeben. Die Nutzung einer gegebenenfalls vorhandenen Elterkante eines Knotens  $i$  bei Fahrten auf den Kanten zu den Kindern des Knotens sowie die Erreichbarkeit der Startknoten aller Auftr\u00e4ge vom Depot aus werden durch die Gleichungen (4.11) gew\u00e4hrleistet. Die an einem Knoten eingehenden Mengeneinheiten des fiktiven Gutes \u00fcber die Elterkante, die Kanten zu den Kindern des Knoten sowie am Knoten endende Auftr\u00e4ge werden den ausgehenden Mengeneinheiten \u00fcber am Knoten startende Auftr\u00e4ge sowie zum Elter- und den Kindknoten gegen\u00fcbergestellt. Die Erreichbarkeit der Startknoten von Auftr\u00e4gen wird gew\u00e4hrleistet, indem den Knoten je startendem Auftrag

der Verbrauch einer Mengeneinheit zugeordnet wird. Gleichungen (4.11) bilden diesen Verbrauch ab, indem sie die Differenz ein- und ausgehender Mengeneinheiten der Anzahl am Knoten startender Aufträge gleichsetzen. Der Knoten 0, als Depot, ist von den Gleichungen ausgenommen und kann somit als einziger Knoten Mengeneinheit zur Verfügung stellen. Die Erfüllung des Bedarfs eines Auftrags bedingt somit, dass ein gerichteter Weg, bestehend aus Auftragsfahrten beziehungsweise Leerfahrten, vom Depot zum Startort des jeweiligen Auftrags existiert. Für Knoten, an denen keine Aufträge starten, fordern die Gleichungen (4.11) die Mengenerhaltung. Abbildung 4.6 zeigt eine weitere Beispielinstantz des TSCP sowie die Variablen, die für die Gleichung (4.11) des Knotens 2 benötigt werden. In diesem Beispiel sind Variablen für alle Terme der Gleichung zu berücksichtigen. Dazu gehören die Transportmengen auf den mit Knoten 2 inzidenten Kanten in beide Richtungen. Die Kante  $[0, 2]$  verbindet Knoten 2 mit seinem Elterknoten 0 und ist über die Variablen  $\phi_2^+$  und  $\phi_2^-$  abgebildet. Die Kanten zu den Kindknoten 4 und 5 des Knotens 2 finden sich in den Variablen  $\phi_4^+$ ,  $\phi_4^-$ ,  $\phi_5^+$  und  $\phi_5^-$  wieder. Schließlich sind die Variablen  $\phi_1$  und  $\phi_4$  als Variablen für die Transportmengen über die an Knoten 2 startenden beziehungsweise endenden Aufträge 1 und 4 relevant. Der Bedarf des Knotens 2, als Startknoten für Auftrag 4, beträgt 1.



**Abbildung 4.6:** Beispiel für Transportnebenbedingungen

Die Transportmengen auf den Kanten des Baumes werden durch die Ungleichungen (4.12) und (4.13) beschränkt. Ein Transport ist auf einer Kante in eine der beiden Richtungen nur möglich, sofern mindestens eine Leerfahrt auf der Kante in diese Richtung stattfindet. Die Variablen  $x_i^+$  und  $x_i^-$  werden in (4.14) als nichtnegative ganze Zahlen festgelegt. Die Variablen der Transportmengen  $\phi_i^+$ ,  $\phi_i^-$  und  $\phi_a$  dürfen gemäß (4.15) und (4.16) keine negativen Werte annehmen. Das Modell (4.9) - (4.16) wird im Folgenden M-TSCP genannt.

Eine streckenminimale Menge von Leerfahrten, die die ausgeglichene Nutzung jeder Kante des Baumes und die Nutzung der Elterkante eines Knotens vor Nutzung einer Kante



zu einem Kindknoten gewährleistet, kann wie folgt ermittelt werden. Für jeden Auftrag ist der Weg von seinem Start- zu seinem Zielknoten zu bestimmen. Dieser entspricht in einem Baum dem kürzesten Weg zwischen den beiden Knoten, welcher gemäß Neumann und Morlock (2002) mit polynomialem Zeitaufwand ermittelt werden kann. Daraus resultieren Werte  $r_{ia}$  gemäß Formel (4.8). Ist eine Kante  $[p_i, i]$  Teil des Weges eines Auftrags  $a$  und folgt Knoten  $p_i$  auf Knoten  $i$  gilt  $r_{ia} = -1$  und im umgekehrten Fall  $r_{ia} = 1$ . Ist die Kante nicht Teil des Weges wird  $r_{ia} = 0$  gesetzt. Anschließend ist für jede Kante  $[p_i, i]$  die Summe ihrer Nutzungen im Rahmen der Aufträge  $\sum_{a \in A} r_{ia}$  zu berechnen. Ein Wert von null bedeutet, dass die Kante entweder durch Aufträge in beide Richtungen gleich häufig befahren werden muss oder kein Auftrag die Befahrung der Kante erfordert. Resultiert für die Summe ein Wert ungleich null, sind einer Lösung  $|\sum_{a \in A} r_{ia}|$  Leerfahrten von Knoten  $i$  zu Knoten  $p_i$  für positive Summenwerte beziehungsweise von Knoten  $p_i$  zu Knoten  $i$  für negative Summenwerte hinzuzufügen, um eine ausgeglichene Nutzung der Kante zu erhalten. Dies entspricht Variablenwerten von  $x_i^- = |\sum_{a \in A} r_{ia}|$  beziehungsweise  $x_i^+ = |\sum_{a \in A} r_{ia}|$ . Abschließend muss für befahrene Kanten  $[p_i, i]$ , das heißt Kanten für die  $|\sum_{a \in A} r_{ia}| \neq 0$  ist, die Nutzung der Elterkante  $[p_{p_i}, p_i]$  sichergestellt werden. Dafür werden alle Kanten des Baumes ausgehend von den Blättern betrachtet. Findet eine Nutzung der Elterkante eines Knotens statt, ohne dass die Elterkante seines Elterknotens genutzt wird, werden für diese zwei gegenläufige Leerfahrten, das heißt eine Leerfahrt von Knoten  $p_{p_i}$  zu Knoten  $p_i$  und umgekehrt von Knoten  $p_i$  zu Knoten  $p_{p_i}$ , ergänzt. Als Alternative zu der beschriebenen Vorgehensweise können streckenminimale Fahrten für eine ausgeglichene und hierarchische Kantennutzung durch Lösung des mathematischen Modells, bestehend aus (4.9), (4.10), (4.14) und (4.17), erhalten werden. Die Ungleichungen (4.17) entsprechen der Anforderung, dass eine Kante nur befahren werden kann sofern die vorgelagerte Kante ebenfalls genutzt wird. Die Wurzel und die Kindknoten der Wurzel sind mangels einer vorgelagerten Kante von den Ungleichungen ausgenommen. Die Nutzung einer Kante auf der linken Seite der Ungleichungen setzt sich aus Leerfahrten auf dieser Kante und der Summe der Beträge der Kantennutzungen durch Aufträge zusammen. Auf der rechten Seite der Ungleichungen stehen die Nutzungen der vorgelagerten Kante durch Aufträge sowie die Leerfahrten, in eine Richtung, auf der vorgelagerten Kante. Die Berücksichtigung von Leerfahrten auf der vorgelagerten Kante ist für die Ungleichungen (4.17) nur relevant, sofern die Kante von keinem Auftrag genutzt wird und somit  $\sum_{a \in A} |r_{p_i a}| = 0$  gilt. In diesem Fall muss für die Erreichbarkeit der Elterkante des Knotens  $i$  ein Paar gegenläufiger, um die ausgeglichene Kantennutzung zu gewährleisten, Leerfahrten auf der vorgelagerten Kante eingefügt werden. Da die Leerfahrten paarweise ergänzt werden, genügt für die Erfassung der Kantennutzung die Betrachtung einer der beiden Richtungen. Die Wahl der Richtung ist beliebig.  $M$  stellt einen ausreichend

großen Wert dar. Dieser kann beispielsweise als  $2|A|$  gewählt werden.

$$\sum_{a \in A} |r_{ia}| + x_i^+ + x_i^- \leq \left( \sum_{a \in A} |r_{p_i a}| + x_{p_i}^- \right) \cdot M \quad i \in V \setminus \{\{0\} \cup C_0\} \quad (4.17)$$

Sind nach Ausgleich der Fahrten auf den Baumkanten und der Nutzung vorgelagerter Kanten alle Knoten, an denen Aufträge starten oder enden, vom Depot aus über Leerfahrten oder andere Aufträge erreichbar, kann eine optimale Tour als Eulertour im Fahrtendiagraph gebildet werden. Andernfalls können die Fahrten auf mindestens zwei geschlossene Pfeilfolgen mit disjunkten Knotenmengen aufgeteilt werden. Eine dieser Pfeilfolgen enthält die Wurzel des Baumes und wäre als Tour realisierbar. Für die Zulässigkeit einer Lösung müssen jedoch alle Aufträge in eine Tour integriert werden. Um einen eulerschen (Multi-) Digraphen zu erhalten, müssen zusätzliche Fahrten bestimmt werden. Mit Blick auf die Zielstellung, die Fahrstrecke zu minimieren, müssen zusätzliche Fahrten mit minimaler Distanz ermittelt werden. Diese Aufgabenstellung stellt ein Steinerbaumproblem<sup>17</sup> dar und bildet den kombinatorischen Kern der Problemstellung. Eine detaillierte Beschreibung des Steinerbaumproblems sowie dessen Verwendung zur Bestimmung optimaler Fahrten zur Anbindung von Kurzyklen an die Pfeilfolge, die die Wurzel enthält, erfolgt in Abschnitt 4.3.

Im Modell M-TSCP können zu einer Menge zulässiger Werte für die Variablen  $x_i^+$  und  $x_i^-$  beliebig viele zulässige Werte der Variablen der Transportmengen  $\phi_i^+$ ,  $\phi_i^-$  und  $\phi_a$  angegeben werden. Ein Grund hierfür ist, dass Mengeneinheiten auf geschlossenen Pfeilfolgen im Kreis transportiert werden können. Ein Beispiel für eine geschlossene Pfeilfolge stellt eine in beide Richtungen für Leerfahrten genutzte Kante des Baumes dar. Für diese geschlossenen Pfeilfolgen, bestehend aus zwei Fahrten, kann der Transport von Mengeneinheiten auf eine Nutzungsrichtung der Kante beschränkt werden. Ein Transport in beide Richtungen bedeutet, dass mindestens eine Mengeneinheit mehr als nötig über die Elterkante zum jeweiligen Knoten transportiert wird. Die zusätzliche Mengeneinheit kann nicht für einen startenden Auftrag verbraucht werden und muss für die Einhaltung der Gleichungen (4.11) wieder zurück zur Wurzel transportiert werden. Auf die Zielfunktion hat der zusätzliche Transport, sofern eine Leerfahrt in die zweite Richtung nicht ausschließlich für den Transport ergänzt wird, keinen Einfluss. Die nicht linearen Gleichungen (4.18) formalisieren die Beschränkung den Transport von Mengeneinheiten über eine Kante auf maximal eine Richtung. Durch Ergänzung zusätzlicher binärer Variablen, die angeben, ob ein Transport in eine der beiden Richtungen stattfindet, und die Beschränkung der Summe der beiden Variablen auf Eins, können die Gleichungen linearisiert werden.

<sup>17</sup> vgl. Frederickson und Guan (1993)

$$\phi_i^+ \cdot \phi_i^- = 0 \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.18)$$

## 4.2.2 Mehr-Fahrzeug-Fall

Frederickson und Guan (1993) untersuchen das Gabelstaplerproblem mit einem Baum als Streckennetz lediglich mit einem Fahrzeug. Aus einer Instanz des TSCP wird durch die Vorgabe einer Menge  $K$  von Fahrzeugen und der Beschränkung der maximalen Distanz einer einzelnen Tour  $\hat{D}$  eine Instanz des MVTSCP. Im Mehr-Fahrzeug-Fall müssen die vorliegenden Aufträge auf Fahrzeuge verteilt und für jedes der Fahrzeuge eine optimale Reihenfolge der zugeordneten Aufträge ermittelt werden. Der Einsatz mehrerer Fahrzeuge kann notwendig sein, falls die maximale Tourlänge eine Durchführung aller Aufträge in einer Tour im Allgemeinen ausschließt. Die Anzahl der verfügbaren Fahrzeug begrenzt die Anzahl der Touren. Der Einsatz jedes verfügbaren Fahrzeuge ist nicht vorgegeben. Für die Touren der einzelnen Fahrzeuge gelten die gleichen Anforderungen wie für das einzelne Fahrzeug im TSCP. Das im Folgenden dargestellte mathematische Modell für das MVTSCP basiert auf dem Modell aus Unterabschnitt 4.2.1. Das Modell verwendet ganzzahlige Variablen  $x_{ik}^+$  und  $x_{ik}^-$ . Diese Variablen geben an, wie häufig ein Fahrzeug  $k$  die Elterkante des Knotens  $i$  aus Richtung des Knotens  $p_i$  beziehungsweise des Knotens  $i$ , ohne einen Auftrag auszuführen, befährt. Die Variablen  $\phi_{ik}^+$  und  $\phi_{ik}^-$  ordnen der Elterkante des Knotens  $i$  in beide Richtungen für jedes Fahrzeug  $k$  eine Transportmenge zu. Die Transportmenge eines Fahrzeugs  $k$  auf der zu Auftrag  $a$  gehörenden Fahrt wird in der Variablen  $\phi_{ak}$  festgehalten. Die Zuordnung der Aufträge zu den Fahrzeugen erfolgt über die binären Variablen  $z_{ak}$ . Diese nehmen den Wert 1 an, wenn Auftrag  $a$  dem Fahrzeug  $k$  zugeordnet ist.

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i \in V \setminus \{0\}} d_i \sum_{k \in K} (x_{ik}^+ + x_{ik}^-) \quad (4.19)$$

$$\sum_{a \in A} r_{ia} z_{ak} + x_{ik}^+ - x_{ik}^- = 0 \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (4.20)$$

$$\sum_{k \in K} z_{ak} = 1 \quad a \in A \quad (4.21)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{0\}} d_i (x_{ik}^+ + x_{ik}^-) + \sum_{a \in A} d_a^A z_{ak} \leq \hat{D} \quad k \in K \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & \phi_{ik}^+ - \phi_{ik}^- + \sum_{j \in C_i} (\phi_{jk}^- - \phi_{jk}^+) + \\ & \sum_{a \in \{A | \omega_a = i\}} \phi_{ak} - \sum_{a \in \{A | \alpha_a = i\}} \phi_{ak} = \sum_{a \in \{A | \alpha_a = i\}} z_{ak} \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\phi_{ik}^+ \leq x_{ik}^+ \cdot |A| \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (4.24)$$

$$\phi_{ik}^- \leq x_{ik}^- \cdot |A| \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (4.25)$$

$$\phi_{ak} \leq z_{ak} \cdot |A| \quad a \in A, k \in K \quad (4.26)$$

$$x_{ik}^+, x_{ik}^- \in \mathbb{N}_0 \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (4.27)$$

$$\phi_{ik}^+, \phi_{ik}^- \geq 0 \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (4.28)$$

$$\phi_{ak} \geq 0 \quad a \in A, k \in K \quad (4.29)$$

Zielstellung (4.19) verfolgt die Minimierung der Distanzen, die von allen Fahrzeugen als Leerfahrten zurückgelegt werden. Analog zum Modell M-TSCP spielen die Distanzen der Aufträge als Konstante keine Rolle für die Zielgröße. Jede Kante des Baumes muss von jedem Fahrzeug gleich häufig in beide Richtungen befahren werden. Die Gleichungen (4.20) formalisieren diese Anforderungen indem die Nutzungen einer Kante durch Aufträge, die einem Fahrzeug zugeordnet sind, mit den Leerfahrten des Fahrzeugs auf dieser Kante verrechnet werden. Alle Aufträge müssen gemäß den Gleichungen (4.21) genau einem Fahrzeug zugeordnet werden. Die Menge der Aufträge, die einem Fahrzeug zugeordnet werden kann, wird in den Ungleichungen (4.22) durch die maximale Fahrstrecke einer einzelnen Tour  $\hat{D}$  begrenzt. Die Fahrstrecke eines Fahrzeuges setzt sich aus seinen Leerfahrten und den Fahrstrecken der ihm zugeordneten Aufträge zusammen. Die Gleichungen (4.23) fordern mit Ausnahme der Wurzel für alle Knoten ohne startende Aufträge die Mengenerhaltung. Die Gleichungen werden für alle Fahrzeuge formuliert, sodass die Mengenerhaltung für jedes einzelne Fahrzeug erfüllt sein muss. Starten Aufträge an einem Knoten  $i$  und sind diese einem Fahrzeug  $k$  zugeordnet, wird für das Fahrzeug  $k$  je zugeordnetem Auftrag eine Mengeneinheit an diesem Knoten verbraucht. In die Betrachtung der Transporte an einem Knoten gehen die Transportmengen über startende und endende Aufträge sowie über die Elterkante und die Kanten zu den Kindknoten ein. Gleichungen (4.23) erzwingen die Nutzung vorgelagerter Kanten und stellen für die Aufträge die Erreichbarkeit ihrer Startknoten sicher. Die Transportmenge für ein Fahrzeug auf einer Kante in eine der beiden Richtungen ist gemäß den Ungleichungen (4.24) und (4.25) nur bei Durchführung einer entsprechenden Leerfahrt durch das Fahrzeug zulässig. Weiter ist ein Transport von Mengeneinheiten für ein Fahrzeug auf einem Auftrag nur möglich, wenn der Auftrag dem Fahrzeug zugeordnet ist. In Formel (4.27) werden die Variablen zur Erfassung der Leerfahrten der Fahrzeuge als nicht negative ganzzahlige Werte festgelegt. Abschließend erfolgt in (4.28) und (4.29) die Festlegung der Transportmengen der Fahrzeuge auf den Kanten und über Aufträge als nicht negativ. Im Folgenden wird das Modell (4.19) - (4.29) als M-MVTSCP bezeichnet.

Analog zum Modell für ein Fahrzeug können die Transportbedingungen durch Bedingun-

gen, die die Befahrung einer Kante an die Nutzung der vorgelagerten Kante knüpfen, aufgeweicht werden. Ein geeignetes Modell ergibt sich aus (4.19) - (4.22), (4.27) und den Ungleichungen (4.30). Fahrten auf der Elterkante eines Knotens  $i$  können gemäß den Ungleichungen (4.30) nur stattfinden, sofern die Elterkante des Elterknotens ebenfalls genutzt wird. Mangels einer vorgelagerten Kante sind die Wurzel und ihre Kindknoten von den Ungleichungen ausgenommen. Die Nutzungen einer Kante durch einen Auftrag gehen nur in die Ungleichungen ein, sofern der jeweilige Auftrag dem Fahrzeug, für das die Ungleichung notiert wird, zugeordnet wird. Auf der Elterkante des Elterknotens ist neben der Kantennutzung durch Aufträge lediglich die Berücksichtigung der Leerfahrten in eine der beiden Richtungen notwendig. Im Gegensatz zum Ein-Fahrzeug-Fall ist die Bestimmung einer ausgeglichenen und hierarchischen Kantennutzung im Mehr-Fahrzeug-Fall im Allgemeinen nicht in polynomialer Zeit möglich.

$$\sum_{a \in A} |r_{ia}| z_{ak} + x_{ik}^+ + x_{ik}^- \leq \left( \sum_{a \in A} |r_{p_i a}| z_{ak} + x_{p_i}^- \right) \cdot M \quad i \in V \setminus \{\{0\} \cup C_0\}, k \in K \quad (4.30)$$

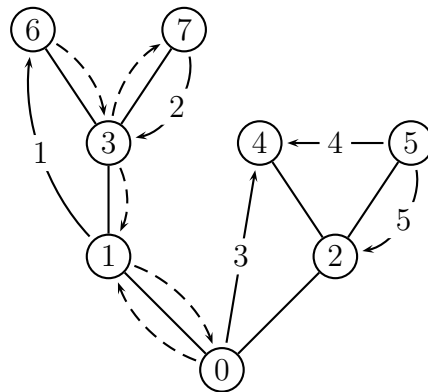
Sind die Fahrtendigraphen der Fahrzeuge ohne Erweiterung bereits eulersch, kann eine optimale Lösung des MVTSCP abgeleitet werden. Andernfalls ist im Gegensatz zum TSCP aufgrund der Distanzbegrenzung der Touren nicht garantiert, dass eine durch Lösen des Steinerbaumproblems für jedes Fahrzeug ermittelte Erweiterung der Fahrtendigraphen zu einer zulässigen Lösung des MVTSCP führt. Darüber hinaus kann keine Aussage über die Optimalität einer gegebenenfalls erhaltenen zulässigen Lösung getroffen werden, da die Bestimmung der besten Erweiterungen von der Verteilung der Aufträge auf die Fahrzeuge abhängt. So kann ein aufgrund größerer Fahrwege schlechterer Fahrtendigraph durch eine streckengünstigere optimale Erweiterung in einer insgesamt geringeren Fahrstrecke resultieren als ein zunächst besser erscheinender Fahrtendigraph mit geringerer Fahrstrecke.

Analog dem Modell M-TSCP kann das Modell M-MVTSCP um Gleichungen zur Begrenzung der Transportmengen auf einer Kante in eine Richtung ergänzt werden. Die Bedingungen sind für jedes Fahrzeug zu formulieren und in (4.31) dargestellt.

$$\phi_{ik}^+ \cdot \phi_{ik}^- = 0 \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (4.31)$$

Schließlich kann der zulässige Bereich des Modells M-MVTSCP durch Ungleichungen, die aus einer Analyse, wie viele Fahrzeuge für die Bedienung der Aufträge eines Abschlusses nach oben mindestens benötigt werden, abgeleitet werden können, präzisiert werden. Die

Begrenzung der maximalen Fahrstrecke einer Tour  $\hat{D}$  kann es erforderlich machen, dass mehrere Fahrzeuge die Elterkante eines Knotens  $i$  nutzen müssen, um die Aufträge des Abschlusses  $[i]$  durchführen zu können. Als Aufträge eines Abschlusses  $A^i$  werden im Rahmen dieser Arbeit diejenigen Aufträge bezeichnet, von deren Start- und Zielknoten mindestens einer ein Knoten des jeweiligen Abschlusses ist. Damit gehören sowohl Aufträge zur Menge  $A^i$  deren Fahrten ausschließlich im Abschluss  $[i]$  stattfinden als auch solche die an einem Knoten des Abschlusses starten und aus dem Abschluss herausführen sowie umgekehrt außerhalb des Abschlusses starten und an einem Knoten des Abschlusses enden. In der in Abbildung 4.7 dargestellten Instanz sind beispielsweise die Mengen der Aufträge der Abschlüsse  $[1]$  und  $[2]$   $A^1 = \{1, 2\}$  und  $A^2 = \{3, 4, 5\}$ . Die disjunkte Aufteilung der Aufträge auf die Abschlüsse der beiden Kinder des Wurzelknotens ist nicht allgemeingültig. So würde beispielsweise ein Auftrag  $\langle 3, 5 \rangle$  sowohl zur Menge  $A^1$  als auch zur Menge  $A^2$  gehören.



**Abbildung 4.7:** Beispielinstantz mit Leerfahrten für die Bedienung der Aufträge des Abschlusses  $[1]$

Für die Aufträge eines Abschlusses kann eine untere Schranke der zur Durchführung benötigten Fahrstrecke  $LB_i^{Dist}$  ermittelt werden. Dafür sind zunächst die Nutzungen der Kanten des Abschlusses  $[i]$  sowie der Elterkante des Knotens  $i$  durch die Aufträge  $A^i$  zu ermitteln. Anschließend können je Kante gegebenenfalls notwendige Leerfahrten für eine gleichmäßige Nutzung der Kante in beide Richtungen ergänzt werden. Werden vorgelagerte Kanten von befahrenen Kanten nicht genutzt, ist ein Paar gegenläufig gerichteter Leerfahrten auf der vorgelagerten Kante zu ergänzen. Die Ergänzung von Leerfahrten beschränkt sich auf die Kanten im betrachteten Abschluss, sowie die Elterkante des Wurzelknotens des Abschlusses. Weitere Kanten im Abschluss nach unten  $[i]$  können nicht mit einbezogen werden, da Aufträge ohne Bezug zum Abschluss  $A \setminus A^i$  die Notwendigkeit zusätzlicher Leerfahrten beeinflussen können. In Abbildung 4.7 sind die für die Bedienung der Auftragsmenge  $A^1$  zu ergänzenden Leerfahrten gestrichelt eingezeichnet. Die untere

Schranke für die benötigte Fahrstrecke zur Bedienung der Auftragsmenge  $A^i$  setzt sich aus den Fahrstrecken der Aufträge sowie den Leerfahrten zusammen. Die Fahrstrecken von Aufträgen, für die lediglich der Start- oder Zielknoten im Abschluss enthalten ist, können vollständig berücksichtigt werden. Überschreitet die ermittelte Mindestfahrstrecke die Distanzbegrenzung  $\hat{D}$  einer Tour, ist mehr als ein Fahrzeug zur Bedienung der Auftragsmenge erforderlich. Da die Bedienung eines Auftrages der Menge  $A^i$  die Nutzung der Kante  $[p_i, i]$ , im Rahmen der Durchführung eines Auftrages oder als Leerfahrt, erfordert, muss diese Kante ebenfalls von mehr als einem Fahrzeug befahren werden. Die Anzahl an Fahrzeugen, die die Elterkante eines Knoten  $i$  mindestens befahren muss  $LB_i^{Fzg}$ , ergibt sich aus der ermittelten unteren Schranke der notwendigen Fahrstrecke und der Distanzbegrenzung der Touren gemäß Formel (4.32). Von einem Knoten zu seinen Kindern wachsen die Werte  $LB_i^{Fzg}$  nicht an, da die Elterkante des Knoten  $i$  aus der Betrachtung herausfällt und gegebenenfalls am Knoten  $i$  startende oder endende Aufträge ohne Nutzung einer Kante des Abschlusses nicht in den Auftragsmengen der Abschlüsse der Kindknoten enthalten sind. Die Ermittlung des Schrankenwertes  $LB_i^{Fzg}$  wird deshalb mit den Kindknoten des Depots begonnen. Sofern der Schrankenwert  $LB_i^{Fzg}$  für einen Knoten  $i$  den Wert 1 überschreitet, ist eine Ermittlung des Wertes für seine Kindknoten sinnvoll.

$$LB_i^{Fzg} = \left\lceil \frac{LB_i^{Dist}}{\hat{D}} \right\rceil \quad (4.32)$$

In das Modell M-MVTSCP kann die Schranke  $LB_i^{Fzg}$  durch Ergänzung einer binären Variable  $\zeta_{ik}$ , die angibt, ob ein Fahrzeug  $k$  die Elterkante des Knoten  $i$  nutzt, sowie zusätzlicher Ungleichungen integriert werden. Die Nutzung der Elterkante wird durch den Wert  $\zeta_{ik} = 1$  beschrieben. Die Definition der Variablen  $\zeta_{ik}$  erfolgt in Formel (4.35). Die Ungleichungen (4.33) beschränken den Wert der Variablen  $\zeta_{ik}$  auf null, sofern kein Auftrag der Menge  $A^i$  dem Fahrzeug  $k$  zugeordnet wird. Umgekehrt kann eine Kantennutzung nur vorliegen, wenn das Fahrzeug mindestens einen der Aufträge ausführt. Die Schranke  $LB_i^{Fzg}$  wird schließlich über die Ungleichungen (4.34) eingebunden, indem die Anzahl der Fahrzeuge, die die Elterkante eines Knotens  $i$  nutzen, nach unten auf den Schrankenwert beschränkt wird. Zusammen sorgen die Ungleichungen (4.33) und (4.34) dafür, dass die Aufträge eines Abschlusses mindestens  $LB_i^{Fzg}$  Fahrzeugen zugeordnet werden. Die Definition der Variablen  $\zeta_{ik}$  und der Ungleichungen (4.33) und (4.34) kann auf die Knoten  $i$  mit einem Schrankenwert  $LB_i^{Fzg} > 1$  beschränkt werden. Das um die Formeln (4.33) - (4.35) ergänzte Modell M-MVTSCP wird im Folgenden als M-MVTSCP+ bezeichnet.

$$\zeta_{ik} \leq \sum_{a \in A^i} z_{ak} \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.33)$$

$$\sum_{k \in K} \zeta_{ik} \geq LB_i^{Fzg} \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (4.34)$$

$$\zeta_{ik} \in \{0, 1\} \quad i \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (4.35)$$

### 4.2.3 Komprimierung des Baumes einer Instanz

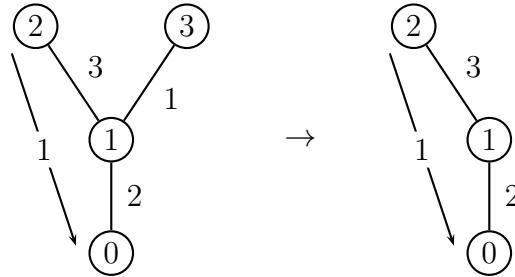
Die beiden Modelle M-TSCP und M-MVTSCP(+) nutzen Variablen zur Angabe der Anzahl durchzuführender Leerfahrten sowie zu transportierender Mengeneinheiten auf einer Kante des Baumes. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf den Ein-Fahrzeug-Fall sind jedoch ebenfalls im Mehr-Fahrzeug-Fall anwendbar. Die Anzahl der Variablen für Transportmengen  $\phi_a$ ,  $\phi_i^+$  und  $\phi_i^-$  hängt von der Anzahl von Aufträgen und der Anzahl der Knoten des Baumes ab. Letzteres bestimmt auch die Anzahl der Variablen für Leerfahrten  $x_i^+$  und  $x_i^-$ . In diesem Unterabschnitt werden Möglichkeiten zur Komprimierung des Baumes einer Instanz vorgestellt. Die Reduktion der Knoten und damit der Kanten des Baumes zielt auf die Verringerung der zu betrachtenden Kanten ab. Im Folgenden werden Blätter und innere Knoten mit genau einem Kindknoten ohne startende oder endende Aufträge, Kanten, die ausschließlich zur Durchführung eines einzelnen Auftrags befahren werden müssen, sowie Kanten, die durch Aufträge ausschließlich in eine Richtung genutzt werden, betrachtet. Blätter und innere Knoten mit genau einem Kindknoten ohne startende oder endende Aufträge entfernen auch Frederickson und Guan (1993) als vorbereitende Vereinfachungen einer Instanz, letztere mangels eines angegebenen mathematischen Modells jedoch ohne Gleichungen zur Erläuterung heranzuziehen.

Die erste Betrachtung zur Vereinfachung des Baumes einer Instanz betrifft seine Blätter. Die Blätter eines Baumes stellen übertragen auf ein Streckennetz das Ende einer Sackgasse, von dem aus keine anderen Straßen, außer die Sackgasse selbst, erreicht werden können, dar. Damit ein Blatt in einem Gabelstaplerproblem angefahren wird, muss an diesem ein Auftrag starten oder enden<sup>18</sup>. Andernfalls bestünde eine Nutzung der Elterkante des Blattes lediglich aus einer unproduktiven Leerfahrt in beide Richtungen, die der Zielstellung, die zu fahrende Strecke zu minimieren, entgegenläuft. Für eine Instanz des Gabelstaplerproblems auf Bäumen kann somit angenommen werden, dass an allen

<sup>18</sup> vgl. Frederickson und Guan (1993)



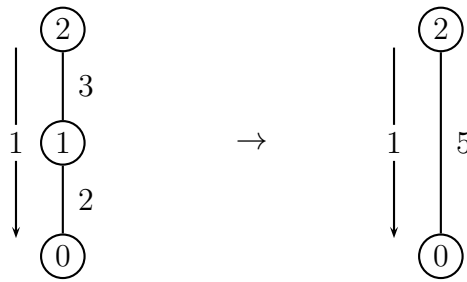
Blättern des Baumes mindestens ein Auftrag startet oder endet. Anderfalls können Blätter ohne startende oder endende Aufträge, wie der Knoten 3 in Abbildung 4.8, ohne weitere Anpassungen entfernt werden.



**Abbildung 4.8:** Entfernen von Blättern ohne startende oder endende Aufträge

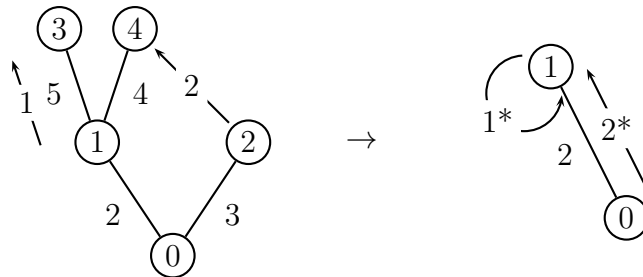
Die Gleichungen (4.11) und (4.23) der Modelle M-TSCP und M-MVTSCP beschränken den Transport von Mengeneinheiten auf für Leerfahrten genutzten Kanten und Fahrten für Aufträge. Betrachtet man die Gleichungen für einen Knoten mit genau einem Kindknoten und ohne startende oder endende Aufträge, wie Knoten 1 in Abbildung 4.9, verbleiben lediglich die Terme für die Transportmengen auf den beiden mit dem Knoten inzidenten Kanten. Für den Fall mit einem Fahrzeug lautet die verbleibende Gleichung am Beispiel des Knotens 1  $\phi_1^+ - \phi_1^- = \phi_2^+ - \phi_2^-$ . Unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.31), dass lediglich in einer der beiden Fahrtrichtungen auf einer Kante ein Transport stattfinden darf und die Variablen der Transportmengen ausschließlich nicht negative Werte annehmen dürfen, resultieren  $\phi_1^+ = \phi_2^+$  beziehungsweise  $\phi_1^- = \phi_2^-$ . Das bedeutet, dass, sofern Mengeneinheiten auf einer der beiden Kanten in eine Richtung transportiert werden, auf der anderen Kante in dieselbe Richtung Mengeneinheiten in gleichem Umfang transportiert werden. In Abbildung 4.9 beträgt ein zulässiger Wert für die Transportmengen  $\phi_1^+ = \phi_2^+ = 1$ . Die Gleichheit der Transportmengen und die ausschließliche Anbindung des einzigen Kindknotens des Knotens 1, erlaubt dessen Entfernung. Die beiden mit Knoten 1 inzidenten Kanten  $[0, 1]$  und  $[1, 2]$  werden durch eine neue Kante  $[0, 2]$  mit der Bewertung 5, als Summe der Bewertungen der beiden entfernten Kanten, ersetzt. Das Entfernen eines Knotens mit genau einem Kindknoten und ohne startende oder endende Aufträge ist unabhängig von der Nutzung der inzidenten Kanten durch Aufträge möglich. Im Beispiel wäre ein Entfernen des Knotens 1 somit auch ohne Existenz des Auftrags 1 oder unter Vorliegen weiterer Aufträge mit Start und Ziel an den Knoten 0 und 2 möglich.

Eine weitere Möglichkeit, Kanten des Baumes zu entfernen, besteht für Elterkanten von Blättern, die durch Aufträge ausschließlich in eine Richtung genutzt werden. Die Anzahl der Aufträge, die die Elterkante eines Blattes nutzen, ist dabei unerheblich, sofern für die



**Abbildung 4.9:** Entfernen von Knoten mit genau einem Kindknoten und ohne startende oder endende Aufträge

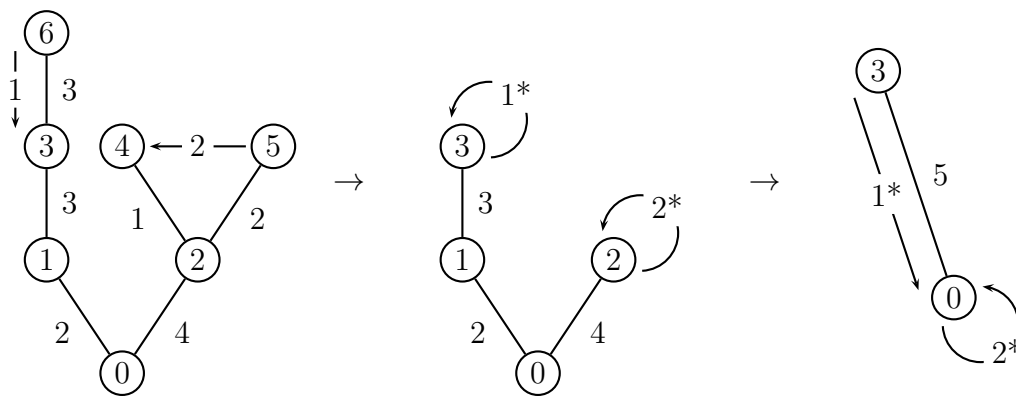
Durchführung aller Aufträge die Befahrung der Kante in die gleiche Richtung notwendig ist. Letzteres ist gleichbedeutend damit, dass alle die Kante nutzenden Aufträge das Blatt als Start- beziehungsweise Zielknoten teilen. In Abbildung 4.10 ist eine Beispielinstanz mit zwei Aufträgen dargestellt. Betrachtet man Auftrag 1, der eine Fahrt von Knoten 1 zu Knoten 3 erfordert, muss die Kante  $[1,3]$  neben der Auftragsfahrt von Knoten 1 zu Knoten 3 ebenfalls in Form einer Leerfahrt von Knoten 3 zu Knoten 1 genutzt werden. Da Knoten 3 ausschließlich Zielknoten eines Auftrags ist, kann die zwangsweise erforderliche Leerfahrt von Knoten 3 zu Knoten 1 in den Auftrag integriert werden. Die Fahrstrecke des Auftrags 1 muss dafür um die Länge der Kante  $[1,3]$  erhöht werden. Für den modifizierte Auftrag  $1^*$  gilt dann  $\alpha_{1^*} = \omega_{1^*} = 1$  und  $d_{1^*}^A := d_1^A + d_3$ . Der Knoten 3 stellt damit ein Blatt ohne startenden oder endenden Auftrag dar und kann entfernt werden.



**Abbildung 4.10:** Entfernen von Blättern die ausschließlich Start- oder Zielknoten von Aufträgen sind

Das gleiche Vorgehen ermöglicht die Entfernung der Knoten 2 und 4. Die Kante  $[1,4]$  wird ausschließlich von Auftrag 2 genutzt, um seinen Zielknoten 4 zu erreichen. Nach Erreichen des Zielknotens ist in jedem Fall eine Leerfahrt von Knoten 4 zu Knoten 1 notwendig. Die Kante  $[1,4]$  wird somit im Rahmen des Auftrags 2 sowohl von Knoten 1 in Richtung des Knotens 4 als auch von Knoten 4 in Richtung des Knotens 1 befahren. Durch Verlegen des Zielknotens von Auftrag 2 zu Knoten 1,  $\omega_{2^*} = 1$ , und Integration der zwingenden Leerfahrt auf der Kante  $[1,4]$  in die Fahrstrecke des Auftrags 2,  $d_{2^*}^A := d_2^A + d_4$ , verbleibt

der Knoten 4 als Blatt ohne startenden oder endenden Auftrag und kann entfallen. Analog kann der Start von Auftrag 2 von Knoten 2 zu Knoten 0 verlegt werden,  $\alpha_{2^*} = 0$ , da die Kante  $[0, 2]$  ausschließlich für das Erreichen des Startknotens von Auftrag 2 von Knoten 0 in Richtung des Knotens 2 und im Rahmen der Auftragsführung von Knoten 2 in Richtung des Knotens 0 befahren wird. Die Fahrstrecke des Auftrags 2 erhöht sich durch die Integration der notwendigen Leerfahrt um die Bewertung der Kante  $[0, 2]$  und resultiert zu  $d_{2^*}^A := d_2^A + d_2$ . Der modifizierte Auftrag  $2^*$  startet schließlich an Knoten 0 und endet an Knoten 1. Er besitzt eine Fahrstrecke  $d_{2^*}^A = d_2^A + d_2 + d_4$ . Der Baum des Beispiels aus Abbildung 4.10 besitzt nach Anpassung der Aufträge nur noch eine Kante.



**Abbildung 4.11:** Entfernen von Kanten, die ausschließlich Teil des Weges von der Wurzel zu dem Start- beziehungsweise Zielknoten eines Auftrags sind

Schließlich können Kanten  $[p_i, i]$  entfernt werden, die ausschließlich Teil von Wegen von der Wurzel zu den Start- und Zielknoten eines einzigen Auftrags sind. Im Beispiel der Abbildung 4.11 liegen zwei Aufträge vor. Auftrag 1 startet an Knoten 6 und endet an Knoten 3, wohingegen Auftrag 2 von Knoten 5 zu Knoten 4 führt. Um den Start- und Zielknoten des Auftrags 1 von der Wurzel 0 erreichen zu können, ist die Verwendung der Kanten  $[0, 1]$  und  $[1, 3]$  notwendig. Für Auftrag 2 sind die beiden Kanten nicht, weder für seine Durchführung noch für das Erreichen seines Start- beziehungsweise Zielknotens, relevant. Umgekehrt ist Kante  $[0, 2]$  ausschließlich für das Erreichen des Start- und Zielknotens des Auftrags 2 von Interesse. Bei Vorliegen einer derartigen Konstellation, dass eine Kante ausschließlich für das Erreichen der Start- und Zielknoten eines Auftrags relevant ist, kann der über eine solche Kante erreichbare Auftrag  $a$  nach den zuvor beschriebenen Vorgehensweisen derart modifiziert werden, dass sein Start- und Zielknoten in einem Knoten zusammenfallen. Diese Modifikation führt zur Darstellung in der Mitte der Abbildung. Für die betrachteten Kanten  $[p_i, i]$ , im Beispiel  $[0, 1]$ ,  $[1, 3]$  und  $[0, 2]$ , gilt nach diesem Schritt, dass Knoten  $i$  maximal einen Kindknoten aufweist. Besitzt Kno-

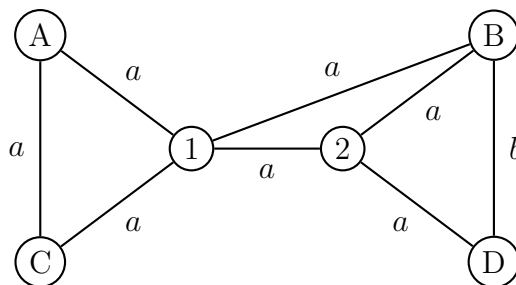
ten  $i$  keine Kinder, so ist er Start- und Zielknoten des Auftrags. Dies gilt im Beispiel für Knoten 3, der mit Kante  $[1, 3]$  inzident und Start- und Zielknoten des modifizierten Auftrags  $1^*$  ist, und für Knoten 2, der mit Kante  $[0, 2]$  inzident und Start- und Zielknoten des modifizierten Auftrags  $2^*$  ist. Der Fall eines Kindknotens trifft auf Knoten 1, als mit der Kante  $[0, 1]$  inzidentem Knoten zu. Mehr als ein Kindknoten ist nicht möglich, da andernfalls relevante Knoten für andere Aufträge über die Kante angebunden sein müssten und die Kante für eine Entfernung nicht in Frage käme. Für das Entfernen der Kante werden die Fälle mit keinem und einem Kindknoten unterschieden. Liegen Start und Ziel des Auftrags  $a$  an Knoten  $i$  der zu entfernenden Kante  $[p_i, i]$ , das heißt Knoten  $i$  besitzt keine Kinder, wird auf die Fahrstrecke des Auftrags die doppelte Länge der Kante  $d_i$  aufgeschlagen und sein Start und Ziel zu Knoten  $p_i$  verschoben. Andernfalls werden die Kanten  $[p_i, i]$  und  $[i, c]$ , mit  $c$  als einzigem Kind des Knotens  $i$ , durch eine Kante  $[p_i, c]$  mit Länge  $d_c + d_i$  ersetzt. Die beiden zuvor erläuterten Vorgehensweisen werden im Folgenden für die Kanten  $[0, 1]$  und  $[0, 2]$  beschrieben. Knoten 1 besitzt einen Kindknoten, sodass die Kanten  $[0, 1]$  und  $[1, 3]$  durch ein Kante  $[0, 3]$  der Länge 5 ersetzt werden. Knoten 2 besitzt als Start- und Zielknoten von Auftrag 2 keinen Kindknoten mehr. Die Fahrstrecke des Auftrags 2 wird daher um das Zweifache der Kantenlänge  $d_2$  erhöht und Knoten 0 als neuer Start- und Zielknoten des Auftrags 2 gesetzt. Die aus diesen beiden Anpassungen resultierende Instanz ist auf der rechten Seite von Abbildung 4.11 dargestellt. In einem weiteren Schritt kann Kante  $[0, 3]$  entfernt werden, da es sich bei Knoten 3 um ein Blatt, das ausschließlich als Startort für einen Auftrag dient, handelt. Letztlich starten und enden in diesem Beispiel beide Aufträge an Knoten 0. Dieser Schritt ist in der Abbildung nicht mehr dargestellt. Das Vorgehen entspricht dem Entfernen der Kante  $[1, 3]$  in Abbildung 4.10.

### 4.3 Steinerbaumproblem

An eine zulässige Lösung des TSCP und die Tour eines Fahrzeugs in einer Lösung des MVTSCP werden mehrere Anforderungen gestellt. Neben den in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 beschriebenen Anforderungen an die Nutzung der Kanten des Baumes, müssen die Fahrten eines Fahrzeugs eine geschlossene Pfeilfolge ergeben. Für Letzteres muss im Allgemeinen nach Erfüllung der anderen Anforderungen entschieden werden, welche Kanten zusätzlich in beide Richtungen zu befahren sind. Diese Aufgabenstellung kann als Steinerbaumproblem auf bewerteten Graphen interpretiert werden. Im Folgenden werden das Steinerbaumproblem auf bewerteten Graphen definiert und seine Beziehung zum TSCP beziehungsweise MVTSCP erläutert.

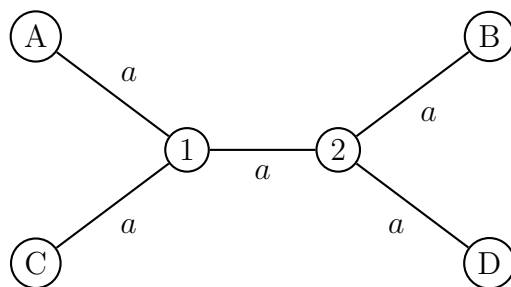
### 4.3.1 Steinerbaumproblem auf bewerteten Graphen

In diesem Abschnitt wird das Steinerbaumproblem auf bewerteten Graphen erläutert. Die Darstellungen sind an Prömel und Steger (2012) und Hwang et al. (1992) angelehnt. Das Steinerbaumproblem ist eine Verallgemeinerung der Ermittlung eines Spannbaumes für einen Graphen. Als Spannbaum eines Graphen  $G$  wird ein zusammenhängender Teilgraph von  $G$ , der alle Knoten von  $G$  enthält und minimale Kantenanzahl aufweist, bezeichnet. Ein Spannbaum eines Graphen mit  $n$  Knoten besteht aus den Knoten des Graphen sowie  $n - 1$  seiner Kanten und stellt einen Baum dar. Ist die Summe der Kantenbewertungen eines Spannbaumes minimal, so wird er als minimaler Spannbaum bezeichnet. Eine Instanz des Steinerbaumproblems besteht aus einem Graphen und einer Aufteilung seiner Knoten in zwei Mengen, die Terminale  $T$  und die Nicht-Terminale  $N$ . Die Vereinigungsmenge der Terminale und Nicht-Terminale entspricht der Knotenmenge des Graphen. Die Aufgabe besteht aus der Ermittlung eines Spannbaumes, der alle Terminale und eine Teilmenge der Nicht-Terminale enthält. Die leere Menge und die Menge aller Nicht-Terminale sind zulässige Teilmengen. Ein Spannbaum, der diese Anforderung erfüllt, wird als Steinerbaum bezeichnet. Analog zum minimalen Spannbaum stellt ein Steinerbaum einen minimalen Steinerbaum dar, wenn die Summe seiner Kantenbewertungen minimal ist. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Terminale eines Steinerbaumproblems mit Buchstaben und die Nicht-Terminale mit Ziffern benannt.



**Abbildung 4.12:** Beispielinstantz Steinerbaumproblem

In Abbildung 4.12 ist ein Beispiel für eine Instanz des Steinerbaumproblems auf bewerteten Graphen dargestellt. Die Menge der Terminale enthält die Knoten A, B, C und D. Zusätzlich sind zwei Nicht-Terminale, die Knoten 1 und 2, gegeben. Für den Wert  $a$  wird ein nicht negativer Wert unterstellt. Das Nicht-Terminal 1 ist Teil jedes Steinerbaumes des dargestellten Graphen, da ohne ihn kein zusammenhängender Spannbaum, der die Terminale enthält, erstellt werden kann. Ob Nicht-Terminal 2 für einen minimalen Steinerbaum benötigt wird, hängt von den Kantenbewertungen  $a$  und  $b$  ab. Gilt  $b < 2a$ , ist Knoten 2 im minimalen Steinerbaum nicht enthalten, da eine Anbindung der



**Abbildung 4.13:** Minimaler Steinerbaum für den Fall  $2a \leq b$

Knoten B und D über die Kanten  $[1, B]$  und  $[B, D]$  günstiger ist als über Knoten 2. Anderfalls ergibt sich der in Abbildung 4.13 dargestellte Baum als ein minimaler Steinerbaum. Im Allgemeinen ist ein minimaler Steinerbaum nicht eindeutig. Im vorliegenden Beispiel könnte beispielsweise die Kante  $[1, 2]$  durch die Kante  $[1, B]$  ausgetauscht werden. Auch die Teilmenge der Nicht-Terminale, die zu einem minimalen Steinerbaum gehört, ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Im Gegensatz zur Bestimmung eines (minimalen) Spannbaumes, ist die Knotenanzahl eines minimalen Steinerbaumes im Allgemeinen vorab nicht bekannt.

Die Ermittlung eines minimalen Spannbaumes ist mit den Verfahren von Prim beziehungsweise Kruskal<sup>19</sup> in polynomialer Zeit möglich. Diese Verfahren können ebenfalls verwendet werden, um den zu einer gegebenen Teilmenge der Nicht-Terminale gehörenden Steinerbaum zu ermitteln. Dazu ist ein minimaler Spannbaum für den Graphen, bestehend aus den Terminalen und den ausgewählten Nicht-Terminale sowie den Kanten, deren inzidente Knoten beide zu einer dieser beiden Mengen gehören, zu ermitteln. Ist die Ermittlung eines Spannbaumes nicht möglich, da der resultierende Graph nicht zusammenhängend ist, handelt es sich bei der gewählten Teilmenge der Nicht-Terminale um eine unzulässige Auswahl. Andernfalls stellt der ermittelte minimale Spannbaum den Steinerbaum mit minimaler Bewertung für die gewählte Teilmenge der Nicht-Terminale dar. Den minimalen Steinerbaum erhält man schließlich aus der Untersuchung aller Teilmengen der Nicht-Terminale und deren minimalen Spannbaumen. Nach Prömel und Steger (2012) gehört das Steinerbaumproblem auf Graphen zur Klasse der  $\mathcal{NP}$ -Probleme. Ist die Menge der Nicht-Terminale leer, das heißt das alle Knoten Terminale sind, entspricht der minimale Steinerbaum dem minimalen Spannbaum des Graphen. Einen Spezialfall stellen außerdem Instanzen mit genau zwei Terminalen dar. Der minimale Steinerbaum entspricht in diesem Fall dem kürzesten Weg zwischen den beiden Terminalen. Für exakte und heuristische Lösungsansätze sei auf Prömel und Steger (2012) und Hwang et al. (1992) verwiesen.

<sup>19</sup> vgl. Neumann und Morlock (2002)

### 4.3.2 Verbindung zu (MV)TSCP

Die Aufgabenstellung, einen minimalen Steinerbaum zu ermitteln, findet sich als Teilproblem in den Gabelstaplerproblemen mit einem und mehreren Fahrzeugen wieder.<sup>20</sup> Kann für ein Fahrzeug nach Bestimmung einer ausgeglichenen Kantennutzung und der Befahrung von vorgelagerten Kanten keine Tour als geschlossene Pfeilfolge ermittelt werden, existieren im Fahrtendigraph des jeweiligen Fahrzeugs mindestens zwei disjunkte Teildigraphen<sup>21</sup>. In jedem dieser Teildigraphen kann eine geschlossene Pfeilfolge, im Folgenden Kurzzyklus genannt, ermittelt werden. Nur einer der Kurzzyklen enthält die Wurzel des Baumes, an der alle Touren beginnen und enden müssen. Um je Fahrzeug genau eine Tour zu erhalten, müssen die Kurzzyklen miteinander verbunden werden. Da zusätzliche Fahrten eine Verlängerung der zu fahrenden Distanz bedeuten, hat die Verbindung der Kurzzyklen streckenminimal zu erfolgen. Abbildung 4.14 zeigt eine Instanz des TSCP, bestehend aus einem Baum und acht Aufträgen. Beispielsweise nutzt Auftrag 1 die Kante  $[1, 2]$  in Richtung des Knotens 1, die Kante  $[1, 5]$  in Richtung des Knotens 5 und schließlich die Kante  $[5, 6]$  in Richtung des Knotens 6. Insgesamt resultiert aus den Aufträgen die gleichmäßige Nutzung aller Kanten des Baumes in beide Richtungen, sodass mit Blick auf die Anforderungen der Kantennutzung keine Leerfahrten ergänzt werden müssen. Der Fahrtendigraph besteht somit zunächst ausschließlich aus den Pfeilen der acht Aufträge. Die Fahrten der Auftragspaare 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 sowie 7 und 8 bilden vier Kurzzyklen A, B, C und D. Lediglich Kurzzyklus B enthält die Wurzel des Baumes und kann ausgehend von der Wurzel durch das Fahrzeug abgefahren werden. Die Kurzzyklen A, C und D können ohne weitere Fahrten durch das Fahrzeug nicht erreicht werden.

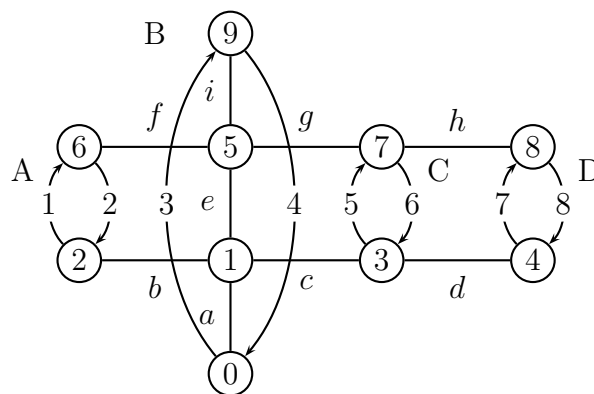
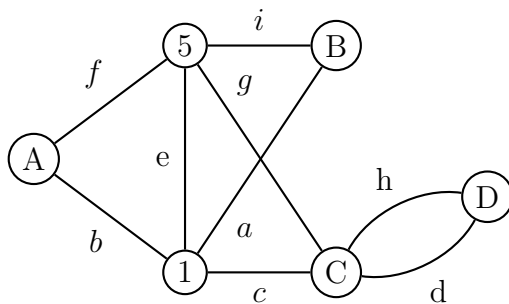


Abbildung 4.14: Bedarf zur Verbindung von Kurzzyklen

<sup>20</sup> vgl. Frederickson und Guan (1993)

<sup>21</sup> gegebenenfalls Multidigraphen

Die Aufgabe der Vernetzung von Kurzzyklen kann als Steinerbaumproblem interpretiert werden. Abbildung 4.15 zeigt den zur TSCP-Instanz aus Abbildung 4.14 gehörenden Graphen des Steinerbaumproblems. Die Erstellung des Graphen für das Steinerbaumproblem wird im Folgenden erläutert. Die Knoten des Graphen setzen sich aus einem Knoten je Kurzzyklus und den Knoten des Streckennetzes, die nicht Teil eines Kurzzyklus sind, zusammen. Die Knoten, die Kurzzyklen repräsentieren, sind die Terminale des Steinerbaumproblems. Die übrigen Knoten, die aus dem Streckennetz übernommen werden, stellen die Nicht-Terminale dar. Für das Beispiel aus Abbildung 4.14 enthält der Graph die Terminale A, B, C und D sowie die Nicht-Terminale 1 und 5. Die Kanten des Graphen resultieren aus den Kanten des Baumes, die Nicht-Terminale und Terminale untereinander und gegenseitig verbinden. Dies sind zunächst die Kanten des Baumes zwischen den Knoten der Nicht-Terminale. Im vorliegenden Beispiel handelt es sich hierbei ausschließlich um die Kante  $[1, 5]$  mit Länge  $e$ . Die Kanten zwischen Terminalen und Nicht-Terminals resultieren aus den Kanten des Baumes, die mit einem Nicht-Terminals sowie einem Knoten der von den Terminalen repräsentierten Kurzzyklen inzident sind. Für den Kurzzyklus A handelt es sich dabei um die Kanten  $[1, 2]$  und  $[5, 6]$  des Baumes die in den Kanten  $[1, A]$  und  $[5, A]$  des Graphen des Steinerbaumproblems resultieren. Schließlich sind die Kanten des Baumes zwischen Knoten verschiedener Kurzzyklen von Interesse. Im Beispiel ergeben sich die Kanten zwischen den Knoten C und D aus den Kanten  $[3, 4]$  und  $[7, 8]$  des Baumes, die die beiden Kurzzyklen miteinander verbinden.



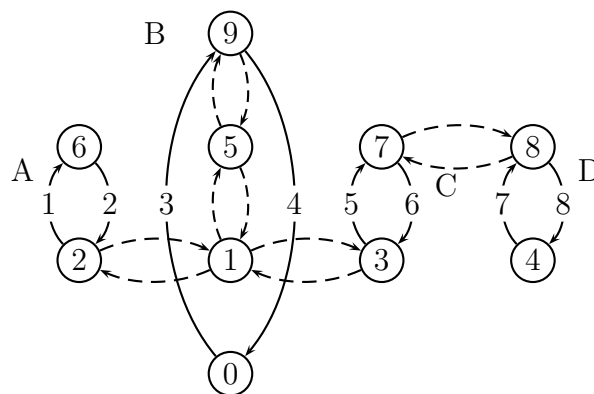
**Abbildung 4.15:** Steinerbaumproblem zur TSCP-Instanz aus Abbildung 4.14

Der erhaltene Graph ist im Allgemeinen nicht metrisch und kann parallele Kanten besitzen, sodass es sich um einen Multigraphen, in dem die Dreiecksungleichung  $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$  nicht erfüllt sein muss, handelt. Das vorliegende Beispiel aus Abbildung 4.15 beinhaltet parallele Kanten zwischen den Knoten C und D und ist beispielsweise unter der Annahme  $e > b + f$  nicht metrisch. Nach Hwang et al. (1992) ist eine Überführung in einen metrischen Graphen möglich. Dafür sind alle Kanten, die nicht Teil kürzester Wege zwischen zwei Knoten des Multigraphen sind, zu entfernen. Für parallele Kanten bedeutet



das beispielsweise, dass lediglich eine Kante minimaler Bewertung zwischen benachbarten Knoten verbleibt. Weiter können im Allgemeinen für Teile des Graphen Aussagen getroffen werden, ob sie in einem minimalen Steinerbaum enthalten sein müssen oder nicht enthalten sind. Im Folgenden wird hierfür eine Auswahl an Kriterien aus Hwang et al. (1992) vorgestellt. Terminale, die ausschließlich mit einer Kante inzident sind, erfordern, dass diese Kante in einem Steinerbaum enthalten ist. Dies gilt beispielsweise für die verbleibende Kante zwischen den Knoten C und D des Beispiels. Dagegen können Nicht-Terminale, die ausschließlich mit einem Knoten benachbart sind, aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Relevante Nicht-Terminale sind mit mindestens zwei Knoten, Terminalen oder Nicht-Terminalen, benachbart. In einem zusammenhängenden Teilgraphen, bestehend aus einer Teilmenge der Terminale und den Kanten zwischen den Knoten dieser Teilmenge, kann ein beliebiger minimaler Spannbaum bestimmt werden. Die Kanten dieses minimalen Spannbaumes sind nicht notwendigerweise Teil jedes minimalen Steinerbaumes, jedoch existiert mindestens ein minimaler Steinerbaum, der diese Kanten enthält.

Wurde ein minimaler Steinerbaum ermittelt, muss dieser in zusätzliche Leerfahrten übersetzt werden. Für jede Kante des minimalen Steinerbaumes wird der Fahrtendigraph um eine Leerfahrt in jede der beiden Richtungen auf der zugehörigen Kante des Baumes erweitert. Unter der Annahme, dass der minimale Steinerbaum die Kanten  $[1, A]$ ,  $[1, 5]$ ,  $[5, B]$ ,  $[1, C]$  und  $[C, D]$ , mit Bewertung  $h \leq d$  enthält, werden Leerfahrten, wie in Abbildung 4.16 dargestellt, ergänzt.



**Abbildung 4.16:** Ergänzung zusätzlicher Leerfahrten zur Verbindung von Kurzzyklen

Der abgebildete Fahrtendigraph ist zusammenhängend und eulersch, sodass mindestens eine Eulertour und eine zugehörige Auftragsreihenfolge ermittelt werden kann. Jede mögliche Tour beginnt mit Auftrag 3 und endet mit Auftrag 4, da diese als einzige an der Wurzel starten beziehungsweise dort enden. Weiter wird Auftrag 1 vor Auftrag 2 durch-

Knotenanzahl	250, 500, 1000
Verzweigungsprofil	1: je 50% 1 bzw. 2 Kind(er), 2: je 50% 2 bzw. 3 Kinder
Kantenbewertungsprofil	(5, 15)-gleichverteilt
Auftragsanzahl	50, 100, 200, 300, 400
Kurzzyklen	0, 25, 50, 75, 100, 150
Mindesttiefe für Abschlüsse	5
Mindesttiefe Teilbäume	5

**Tabelle 4.1:** Erzeugungsparameter TSCP-Instanzen

geführt. Die Aufträge der Kurzzyklen C und D sind in der Reihenfolge 5, 8, 7 und 6 durchzuführen. Insgesamt sind somit zwei Auftragsreihenfolgen, gleicher Tourlänge, möglich:

- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4$
- $3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

Im Fall des TSCP ermöglicht ein minimaler Steinerbaum die Angabe einer optimalen Lösung für das TSCP. Bei mehreren Fahrzeugen hängen die Existenz und die Gestalt der Kurzzyklen von der Verteilung der Aufträge auf die verfügbaren Fahrzeuge ab. Ein minimaler Steinerbaum für jedes Fahrzeug liefert zwar für eine gegebene Auftragsverteilung die besten Verknüpfungen der gegebenenfalls vorhandenen Kurzzyklen je Fahrzeug, allerdings kann eine andere Auftragsverteilung bei gegebenenfalls größerer Fahrstrecke aus der Untersuchung der Kantennutzung durch eine günstigere Verknüpfung von Kurzzyklen kompensiert werden. Schließlich kann die Ergänzung von Leerfahrten zu einer Tour zu einer Verletzung der maximalen Fahrstrecke einer Tour und damit zu einer unzulässigen Lösung führen.

## 4.4 Performanceanalyse

In diesem Abschnitt werden die für das (MV-)SCP und das (MV-)TSCP vorgestellten Modelle unter Verwendung des Programms Fico Xpress zur Lösung von Instanzen des (MV-)TSCP eingesetzt. Dafür wird zunächst die zufallsgestützte Generierung von Instanzen in Unterabschnitt 4.4.1 erläutert. Die Ergebnisse der Testläufe werden in Unterabschnitt 4.4.2 vorgestellt.

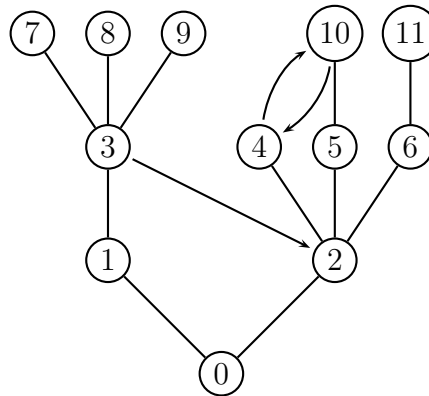


Abbildung 4.17: Generierung von Aufträgen

### 4.4.1 Erzeugung von Testdaten

Eine Instanz des TSCP besteht aus einem Baum sowie einer Menge von Aufträgen. Tabelle 4.1 gibt einen Überblick über die verwendeten Parameter zur Erzeugung von Testdaten. In der oberen Hälfte der Tabelle sind die Parameter für die Konstruktion von Bäumen, in der unteren Hälfte die Parameter für die Generierung von Aufträgen angegeben. Als Parameter zur Erzeugung von Bäumen nach Algorithmus 2.1 wird eine Anzahl von Knoten vorgegeben. Die Verzweigungsprofile, die für jede Anzahl an Kindern eines Knotens eine Wahrscheinlichkeit angeben, werden variiert. Dadurch werden sowohl tiefe als auch breite Bäume erzeugt. Für alle Instanzen wird ein einheitliches Kantenbewertungsprofil verwendet. Als Parameter für die Generierung von Aufträgen werden die Anzahl der Aufträge und die Anzahl von Auftragskurzyklen variiert. Die erzeugten Kurzyklen bestehen jeweils aus genau zwei Aufträgen, die in der Anzahl der Aufträge enthalten sind. Es werden nur Kombinationen der Parameter Knoten- und Auftragsanzahl betrachtet, bei denen die Auftragsanzahl maximal der Hälfte der Knotenanzahl entspricht. Für die Anzahl an Kurzyklen gilt, dass diese kleiner gleich der Hälfte der Auftragsanzahl sowie kleiner gleich einem Sechstel der Knotenanzahl sein muss. Die Erzeugung der Aufträge beginnt mit der Generierung von Kurzyklen, bestehend aus genau zwei Aufträgen. Dafür wird zunächst ein Knoten als Wurzel für einen Abschluss nach oben<sup>22</sup> bestimmt. Die Auswahl erfolgt zweistufig. Zunächst wird eine zufällige Tiefe des zu ermittelnden Abschlusses zwischen der vorgegebenen Mindestdiefe, sowie der Tiefe des gesamten Baumes bestimmt. Aus allen Abschlüssen nach oben, die diese Tiefe besitzen, wird anschließend zufällig einer ausgewählt. Für die Konstruktion eines Kurzyklus aus zwei Aufträgen sind weiter zwei Knoten in dem ausgewählten Abschluss als Start- beziehungsweise Zielknoten der Aufträge des Kurzyklus zu ermitteln. Um sicherzugehen, dass die Knoten des Kurzyklus nicht

<sup>22</sup> vgl. Abschnitt 2.2

bereits durch die Bedienung anderer Aufträge angefahren werden müssen, werden zwei Blätter  $a$  und  $b$  des Abschlusses gewählt. Den Aufträgen  $i$  und  $j$  des Kurzzyklus werden die Start- und Zielknoten  $\alpha_i = \omega_j = a$  beziehungsweise  $\alpha_j = \omega_i = b$  zugeordnet. Für die Erzeugung weiterer Aufträge werden die Blätter  $a$  und  $b$  nicht weiter verwendet. Damit wird sichergestellt, dass eine der Kanten  $[p_a, a]$  und  $[p_b, b]$  in einer Lösung zur Anbindung des Kurzzyklus genutzt werden muss. Existieren in einem gewählten Abschluss keine zwei bislang ungenutzten Blätter, wird die Auftragsgenerierung im gewählten Abschluss abgebrochen und ein neuer ermittelt. Unterstellt man eine Mindesttiefe für Abschlüsse von 2 kommen in Abbildung 4.17 Abschlüsse der Tiefe 2 und 3 infrage. Der Wert 3 ergibt sich aus der Tiefe des gesamten Baumes. Bei zwei möglichen Tiefen werden die Werte 2 und 3 mit jeweils einer Wahrscheinlichkeit von 50 Prozent gewählt. Im Fall des Wertes 3 kommt ausschließlich der Knoten 0 als Wurzel eines Abschlusses infrage. Im Folgenden wird die Wahl des Wertes 2 und des Knotens 2 aus der Kandidatenmenge  $\{1, 2\}$  unterstellt. Zwei der drei Blätter  $\{4, 10, 11\}$  werden als Auftragsknoten gewählt. Beispielsweise resultiert daraus ein Kurzzyklus bestehend aus den Aufträgen  $\langle 4, 10 \rangle$  und  $\langle 10, 4 \rangle$ . Den Knoten 4 und 10 dürfen in diesem Fall keine weiteren Aufträge zugeordnet werden.

Die Erzeugung der übrigen Aufträge startet ebenfalls mit der Wahl eines zufälligen Abschlusses nach oben, analog der Auswahl bei der Erzeugung von Kurzzyklen. Im Weiteren werden jedoch die als Start- und Zielknoten wählbaren Knoten des Abschlusses durch eine maximale Entfernung, als Kantenanzahl des Weges zwischen Knoten und Wurzel des Abschlusses, begrenzt. Eine zufällige Zahl, gewählt zwischen der vorgegebenen Mindesttiefe der Teilbäume sowie der Tiefe des Abschlusses, legt die maximale Entfernung der Knoten fest. Aus der resultierenden Knotenmenge werden anschließend zwei Knoten als Start- und Zielknoten des Auftrags gewählt. Wird in Abbildung 4.17 der Knoten 0 als Wurzel eines Abschlusses gewählt und eine Mindesttiefe von Teilbäumen von 2 unterstellt, wird jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 Prozent eine Teilbaumtiefe von 2 beziehungsweise 3 ermittelt. Während bei Ermittlung des Wertes 3 die Knotenmenge des ganzen Baumes, mit Ausnahme der von Kurzzyklen genutzten Knoten 4 und 10, zur Verfügung steht, beschränkt der Wert 2 die wählbare Knotenmenge auf  $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ . Beispielsweise kann daraus ein Auftrag  $\langle 3, 2 \rangle$  resultieren. Das beschriebene Vorgehen zur Auswahl einer Knotenmenge erlaubt sowohl die Erzeugung von regionalen Aufträgen, die sich auf einen kleinen Bereich des Baumes beschränken, als auch von Aufträgen mit weit entfernten Start- und Zielknoten. Mit Ausnahme der Blätter, an denen Aufträge von Kurzzyklen starten, erfolgt keine Beschränkung der an einem Knoten startenden beziehungsweise endenden Aufträge. Je Parameterkombination werden fünf Instanzen erzeugt, sodass insgesamt 350 Instanzen vorliegen.

Für das MVTSCP werden die TSCP-Instanzen um eine Fahrzeuganzahl  $f$  und eine Begrenzung der maximalen Länge einer Tour  $\hat{D}$  ergänzt. Als Fahrzeuganzahl wird für alle Instanzen der Wert  $f = 4$  festgelegt. Die Begrenzung der maximalen Distanz einer Tour erfolgt in Abhängigkeit der besten ermittelten Lösung für die zugehörige TSCP-Instanz  $UB^{TSCP}$  gemäß Formel (4.36).

$$\hat{D} = \frac{(1 + \frac{1}{f})UB^{TSCP}}{f} \quad (4.36)$$

#### 4.4.2 Auswertung von Testläufen

Mithilfe des kommerziellen Optimierungsprogramms Fico Xpress wurde die Lösungsgüte der Modelle M-TSCP, mit (m.B.) und ohne (o.B.) vorherige Reduzierung des Baumes der Instanzen, und M-SCP für den Ein-Fahrzeug-Fall und der Modelle M-MVTSCP, M-MVTSCP+ und M-MVSCP für den Mehr-Fahrzeug-Fall untersucht. Als maximale Laufzeit für die Bestimmung einer Lösung wurde für alle Modelle ein Wert von 60 Sekunden vorgegeben. Im Folgenden werden zunächst Ergebnisse für den Ein-Fahrzeug-Fall und anschließend für den Mehr-Fahrzeug-Fall vorgestellt.

# Aufträge	# Instanzen	M-SCP		M-TSCP o.B.		M-TSCP m.B.	
		#zul.	# opt.	#zul.	# opt.	#zul.	# opt.
50	60	60	30	60	44	60	54
100	80	80	51	80	60	80	63
200	90	71	19	90	70	90	75
300	60	22	3	60	43	60	49
400	60	2	2	60	47	60	50

**Tabelle 4.2:** Anzahl zulässiger und optimal gelöster Instanzen nach Bedarfsanzahl und Modell

Tabelle 4.2 gibt nach Modellen getrennt die Anzahl der Instanzen, für die innerhalb einer Laufzeit von 60 Sekunden mindestens eine zulässige Lösung beziehungsweise eine optimale Lösung ermittelt werden konnte, an. Die Ergebnisse sind nach Anzahl der Aufträge der Instanzen gruppiert. In der zweiten Spalte der Tabelle ist die Anzahl der Instanzen, die die zugehörige Anzahl an Aufträgen aufweist, angegeben. Während mit dem Modell M-TSCP, mit und ohne Baumreduktion, zulässige Lösungen für alle Instanzen ermittelt werden konnten, war dies mit dem Modell M-SCP nur für 71 von 90 Instanzen mit 200 Aufträgen, 22 von 60 Instanzen mit 300 Aufträgen und 2 von 60 Instanzen mit 400 Aufträgen möglich. Für alle Instanzen mit 50 und 100 Aufträgen wurden mit dem Modell M-SCP zulässige Lösungen erzielt. Die Gegenüberstellung der Ergebnisse für das

Modell M-TSCP mit und ohne Baumreduktion zeigt, dass mit vorheriger Baumreduktion für mehr Instanzen die Optimalität einer erhaltenen Lösung gezeigt werden konnte. Bezüglich der optimal gelösten Instanzen zeigt sich das Modell für das Gabelstaplerproblem auf Bäumen der allgemeinen Formulierung überlegen. Die gewählte maximale Rechenzeit ist im Vergleich zu üblichen Größenordnungen in Publikationen sehr knapp bemessen. Insbesondere für größere Instanzen nimmt bereits die Initialisierung des Optimierungsprozesses mit dem Modell M-SCP einen Großteil der 60 Sekunden ein. Erhöht man die maximale Rechenzeit für das Modell M-SCP auf fünf Minuten, werden für die Instanzen mit 300 Aufträgen 47 Instanzen zulässig und davon 11 Instanzen optimal gelöst. Bei den Instanzen mit 400 Aufträgen werden 18 Instanzen zulässig gelöst und für vier davon wird die Optimalität der erhaltenen Lösung gezeigt. Als Beispiel, dass auch bei einer Rechenzeit von 3600 Sekunden für einzelne Instanzen keine zulässige Lösung erhalten wird, sei auf Sawik (2016) verwiesen. Im Rahmen des angestellten Vergleichs der Modelle M-SCP und M-TSCP o./m. B. ist die gewählte Begrenzung auf 60 Sekunden dennoch sinnvoll. Die unter dieser Vorgabe erhaltenen Resultate zeigen, dass die explizite Berücksichtigung einer Baumstruktur die Verwendung kommerzieller Optimierungsprogramme erlaubt, wenn in kurzer Zeit (optimale) Lösungen benötigt werden, wohingegen die Verwendung eines allgemeinen Modells in diesem Zeithorizont nicht zielführend ist.

Die Anzahl optimal gelöster Instanzen unterscheidet sich für das Modell M-TSCP ohne beziehungsweise mit Baumreduktion. In Tabelle 4.3 sind die Ergebnisse gruppiert nach Auftragsanzahl und Kurzzyklenanteil, als Teil der Aufträge die Teil eines Kurzzyklus sind, angegeben. Kombinationen von Auftragsanzahl und Kurzzyklenanteil, für die ohne und mit Baumreduktion die gleiche Anzahl Instanzen optimal gelöst wurden, sind nicht dargestellt. Mit einer vorherigen Reduktion des Baumes werden durchgängig bessere Resultate erzielt. Die dargestellten Ergebnisse zeigen, dass die Unterschiede in den Instanzen mit einem hohen Anteil an Kurzzyklenaufträgen vorliegen. Die Anzahl der Baumknoten hat einen direkten Einfluss auf die Anzahl der Entscheidungsvariablen  $x_i^+$ ,  $x_i^-$ ,  $\phi_i^+$  und  $\phi_i^-$  und der Nebenbedingungen des Modells M-TSCP. Eine Reduzierung des Baumes führt somit zu einer Verkleinerung des Modells, wodurch einzelne Berechnungsschritte weniger Zeit beanspruchen.

Das mit dem Modell M-TSCP und vorheriger Baumreduktion erzielte durchschnittliche prozentuale Gap, in Abhängigkeit der Auftragsanzahl und des Kurzzyklusanteils, ist in Tabelle 4.4 dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber wurden in den ersten beiden Spalten der Tabelle mehrere Kurzzyklenanteile gebündelt. Einträge „-“ bedeuten, dass für eine Kombination aus Auftragsanzahl und Kurzzyklenanteil, keine Testinstanzen vorlagen. Die dargestellten Ergebnisse zeigen, dass insbesondere ein hoher Kurzzyklenanteil der

# Aufträge - KZ-Anteil in %	M-TSCP o.B	M-TSCP m.B
50 - 100	14	24
100 - 100	0	3
200 - 75	10	15
300 - 50	8	10
300 - 66	5	9
400 - 50	6	9

**Tabelle 4.3:** Unterschiede in den optimal gelösten Instanzen nach Auftragsanzahl und Kurzzyklenanteil

# Aufträge	Kurzzyklenanteil in %			
	0-37,5	50-66	75	100
50	0	-	-	1,1
100	0	0	-	11,3
200	0	0	0,8	21,5
300	0	0,1	-	29,3
400	0	0	3,5	-

**Tabelle 4.4:** Mittlere Gaps M-TSCP m.B. nach Auftragsanzahl und Kurzzyklenanteil

Aufträge die Lösungsfindung erschwert. Bis zu einem Auftragsanteil von 66% werden die Instanzen, mit einer Ausnahme bei 300 Aufträgen, innerhalb der vorgegebenen Rechenzeit von 60 Sekunden optimal gelöst. Bei einem Anteil von 75% deutet sich eine Abnahme der Lösungsgüte an. Liegen ausschließlich Aufträge, die Teil von Kurzzyklen sind, vor, erhöht sich der Gap deutlich. Dabei spielt neben dem Anteil der Kurzzyklenaufträge auch die absolute Anzahl der Kurzzyklen eine Rolle. Dies zeigt sich in den mit wachsender Auftragsanzahl steigenden Gap-Werten in der letzten Spalte der Tabelle. Die Ergebnisse passen zu den in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen Anforderungen an eine Lösung. Während die ausgeglichene Befahrung von Kanten sowie die Nutzung vorgelagerter Kanten bei Instanzen ohne Kurzzyklen zur Ermittlung einer optimalen Lösung genügt, ist bei Existenz von Kurzzyklen im Allgemeinen die Lösung eines Steinerbaumproblems erforderlich. Die geringen Gap-Werte bis zu einem Kurzzyklenanteil von 75% legen nahe, dass bereits eine geringe Anzahl von Aufträge, die nicht Teil eines Kurzzyklus sind, die Lösbarkeit einer Instanz positiv beeinflussen. Die Fahrten der Aufträge, die nicht Teil eines Kurzzyklus sind, können einfach ausgeglichen werden. Damit ist bereits ein Teil der Knotenmenge des Baumes vom Depot aus über Aufträge und ausgleichende Leerfahrten erreichbar. Liegen nur Kurzzyklen vor, ist zwar die Nutzung aller Kanten bereits ausgeglichen, jedoch kann im Extremfall weiterhin nur die Wurzel erreichbar sein. Das resultierende Steinerbaumproblem, welche Kanten für die Vernetzung der Kurzzyklen gewählt werden

sollen, enthält in diesem Fall mehr Nicht-Terminalen.<sup>23</sup> Wenngleich im Allgemeinen aus der Anzahl der Nicht-Terminalen einer Instanz des Steinerbaumproblems nicht direkt auf die Dauer beziehungsweise den Verlauf des Lösungsprozesses geschlossen werden kann, zeichnet sich in den erhaltenen Ergebnissen ein solcher Zusammenhang ab.

Aus den Ergebnissen der Testläufe für das Modell M-TSCP mit Baumreduktion lassen sich schließlich kein nennenswerter Einfluss der ursprünglichen Baumgröße sowie des Verzweigungsprofils erkennen.

# Aufträge	# Instanzen	M-MVSCP		M-MVTSCP		M-MVTSCP+	
		#zul.	# opt.	#zul.	# opt.	#zul.	# opt.
50	60	60	3	34	24	42	28
100	80	76	15	55	23	59	26
200	90	39	9	45	16	45	18
300	60	14	6	19	14	24	15
400	60	0	0	22	15	27	16

**Tabelle 4.5:** Anzahl zulässiger und optimal gelöster Instanzen nach Bedarfsanzahl und Modell

Die Untersuchung des Mehr-Fahrzeug-Falls, der durch die Modelle M-MVTSCP, M-MVTSCP+ und M-MVSCP abgebildet wird, wird im Folgenden dargestellt. Für die Modelle M-MVTSCP und M-MVTSCP+ wurden die Bäume der Instanzen für die Testläufe reduziert, da damit im Ein-Fahrzeug-Fall bessere Ergebnisse erzielt wurden. Die Reduktion eines Baumes hat auf das Modell M-MVSCP hinsichtlich der Anzahl der Entscheidungsvariablen und Nebenbedingungen keine Auswirkung. Für das Modell M-MVSCP werden deshalb die Distanzen in den ursprünglichen Bäumen herangezogen. Tabelle 4.5 gibt nach Modellen getrennt die Anzahl der Instanzen, für die innerhalb einer Laufzeit von 60 Sekunden mindestens eine zulässige Lösung beziehungsweise eine optimale Lösung ermittelt werden konnte, an. Die Ergebnisse sind nach Anzahl der Aufträge der Instanzen gruppiert. In der zweiten Spalte der Tabelle ist die Anzahl der Instanzen, die die zugehörige Anzahl an Aufträgen aufweist, angegeben. Die Ergebnisse zeichnen kein einheitliches Bild. Bezüglich der Ermittlung zulässiger Lösungen liefert das Modell M-MVSCP für alle Instanzen mit 50 Aufträgen eine zulässige Lösung. Der Anteil von Instanzen, für die eine zulässige Lösung erzielt wird, nimmt mit wachsender Auftragsanzahl jedoch stark ab. Für Instanzen mit 400 Aufträgen werden mit dem Modell M-MVSCP keine zulässige Lösungen erzielt. Die Modelle M-MVTSCP(+) resultieren dagegen für bis zur Hälfte der Instanzen mit 200-400 Aufträgen in einer zulässigen Lösung. In den kleineren Instanzen mit 50 und 100 Aufträgen werden für einen größeren Anteil

<sup>23</sup> Im Rahmen der Konstruktion von Kurzzyklen werden ausschließlich Blätter des Baumes als Start- und Zielknoten verwendet.



der Instanzen zulässige Lösungen ermittelt. Die Ergebnisse der Modelle M-MVTSCP(+) bleiben bezüglich zulässig gelöster Instanzen bis zu einer Auftragsanzahl von 100 deutlich hinter denen des Modells M-MVSCP zurück, übersteigen diese jedoch Instanzen ab 200 Aufträgen. Die Betrachtung der optimal gelösten Instanzen fällt dagegen durchgehend zugunsten der Modelle M-MVTSCP(+) aus. Die Modelle M-MVTSCP(+) erzielen für alle Instanzgruppen häufiger optimale Lösungen als das Modell M-MVSCP. Unter den Modellen M-MVTSCP(+) liefert das Modell M-MVTSCP+ durchgehend mindestens gleichwertige und für die meisten Instanzgruppen bessere Ergebnisse gegenüber dem Modell M-MVTSCP ohne zusätzliche Schranke.

Tabelle 4.6 enthält die erzielten Gap-Werte des Modells M-MVTSCP+. Die Einträge 'x' stehen für Kombinationen aus Auftrags- und Kurzzyklusanzahl, für die keine Instanzen erzeugt wurden. Die letzte Spalte und Zeile der Tabelle aggregiert die Ergebnisse für die unterschiedlichen Anzahlen von Aufträgen beziehungsweise Kurzzyklen. An Positionen der Tabelle mit einem 'x' als Eintrag, wurde für keine vorliegende Instanz eine zulässige Lösung ermittelt. Die Daten zeigen niedrige GAP-Werte, die mit Vergrößerung des Anteils von Aufträgen in Kurzzyklen stark anwachsen. Die Aussagekraft dieser Beobachtung ist aufgrund des insbesondere bei den Instanzen mit vielen Aufträgen geringen Anteils zulässig gelöster Instanzen jedoch begrenzt.

# Aufträge	# Kurzzyklen						
	0	25	50	75	100	150	
50	0,1	13,2	-	-	-	-	3,8
100	0,3	3,7	15,7	-	-	-	3,0
200	0,1	1,1	2,2	x	20,5	x	1,3
300	0,0	0,2	0,2	0,9	x	x	0,2
400	0,0	0,0	0,1	0,1	1,3	x	0,2
	0,1	3,8	4,9	0,3	5,2	x	

**Tabelle 4.6:** Gaps des Modells M-MVTSCP+

## 4.5 Literaturübersicht

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über Publikationen zu Gabelstaplerproblemen und verwandten Problemstellungen gegeben. Die Übersicht konzentriert sich neben der Quelle, die das Gabelstaplerproblem einführt, auf Veröffentlichungen die einen Baum als Streckennetz unterstellen.

Die erste bekannte Publikation zum Gabelstaplerproblem stammt von Frederickson et al. (1976). Die Autoren betrachten das Gabelstaplerproblem für ein und mehrere Fahrzeuge,

ohne ein spezielles Streckennetz zu unterstellen. Für den Fall mit einem Fahrzeug präsentieren sie zwei heuristische Lösungsansätze. Die beiden Verfahren werden durch die Betrachtung von Grenzfällen, bezüglich der Streckenverhältnisse von Aufträgen und Leerfahrten in einer optimalen Lösung, motiviert. Unterstellt man, dass die Längen der Aufträge in einer optimalen Lösung die Längen der Leerfahrten um ein Vielfaches übersteigen, schlagen sie das Lösen eines Zuordnungsproblems<sup>24</sup> zwischen den Ziel- und Startknoten der Aufträge vor<sup>25</sup>. Im Allgemeinen resultieren aus den Aufträgen und den Fahrten aus dem Zuordnungsproblem zunächst mehrere disjunkte Komponenten. Um die Komponenten zu verknüpfen, wird ein minimaler Spannbaum zwischen den Komponenten ermittelt und die im Spannbaum enthaltenen Kanten als gegengerichtete Leerfahrten in den Fahrtendigraph übernommen. Der andere betrachtete Fall ist durch kurze Auftragslängen und einen hohen Anteil an Leerfahrten motiviert. Die Autoren interpretieren das Gabelstaplerproblem in diesem Fall als Handlungsreisendenproblem, wobei die Aufträge die anzufahrenden Orte darstellen. Zur Lösung verwenden sie das Näherungsverfahren von Christofides (1976). Ein Kriterium zur Vorabauswahl einer der beiden Vorgehensweisen können die Autoren nicht angeben. Sie schlagen daher vor, beide Verfahren auszuführen und die bessere der erhaltenen Lösungen zu verwenden. Das Vorgehen der Autoren für eine Flotte von Fahrzeugen besteht aus dem Aufteilen einer Tour des Ein-Fahrzeug-Falls.

Das Gabelstaplerproblem auf Bäumen wurde erstmals von Frederickson und Guan (1993) betrachtet. Die übrigen Annahmen der Problembeschreibung entsprechen denen von Frederickson et al. (1976). Als Vorbereitung von Lösungsverfahren beschreiben die Autoren die Erstellung einer „balanced instance“, in der bereits ungleiche Nutzungen von Kanten des Baumes durch Aufträge mit Leerfahrten ausglich sind. Im Allgemeinen verbleiben im Fahrtendigraph mehrere Komponenten. Die Autoren beschreiben zwei Vorgehensweisen, die Komponenten zu verknüpfen und so eine zulässige Lösung zu erhalten. Die erste Vorgehensweise kontrahiert die Kanten des Baumes, die von mehr als einer Komponente genutzt werden. Die Nutzung einer Kante durch mehrere Komponenten ist möglich, da der Fall ohne temporäres Abstellen betrachtet wird. Die inzidenten Knoten einer solchen Kante sind maximal Teil einer Komponente, da andernfalls nicht mehrere Komponenten vorliegen würden. Anschließend kann ein minimaler Steinerbaum, für die Instanz bestehend aus allen Komponenten mit Ausnahme des Depots, mit polynomialem Aufwand bestimmt werden. Für die Kanten des minimalen Steinerbaumes sowie der zuvor kontrahierten Kanten des Baumes, werden Leerfahrten in beide Richtungen ergänzt. Der

---

<sup>24</sup> vgl. Neumann und Morlock (2002)

<sup>25</sup> Die Autoren gehen davon aus, dass jeder Knoten maximal mit einem Auftrag inzident ist. Diese Anforderung kann für allgemeine Instanzen durch Aufteilen von Knoten mit mehreren startenden oder endenden Aufträgen erfüllt werden.

resultierende Fahrtendigraph ist eulersch und erlaubt die Bestimmung einer Tour. In ihrem zweiten Lösungsansatz nutzen die Autoren einen minimalen Spannbaum als Näherung eines minimalen Steinerbaumes. Auch hier werden für die Kanten des minimalen Spannbaumes Leerfahrten in beide Richtungen ergänzt, um eine Tour zu erhalten. Die Autoren schlagen weiter die Anwendung beider Vorgehensweisen und die Auswahl der besseren der erhaltenen Lösungen vor. Als Ausblick verweisen sie darüber hinaus auf weitere Lösungsansätze für das Steinerbaumproblem zur Integration in ihre zweite Vorgehensweise. Im Unterschied zu den Darstellungen in dieser Arbeit beschränken sich die Autoren bei der Beschreibung der Problemstellung auf den Ein-Fahrzeug-Fall und geben kein gemischt-ganzzahliges lineares Modell für den Ein-Fahrzeug-Fall an. Eine Modifikation einer vorliegenden Instanz, wie sie in Abschnitt 4.2.1. beschrieben ist, führen die Autoren nicht durch. Coja-Oghlan et al. (2003) untersuchen die Güte des zweiten Lösungsansatzes von Frederickson und Guan (1993). Ihre Untersuchung basiert darauf, dass der Lösungsansatz eine optimale Lösung liefert, sofern die Metrik zwischen den Komponenten eine Sternmetrik darstellt. Eine Sternmetrik liegt für eine Knotenmenge  $C$  vor, sofern ein Knoten  $c \in C$  existiert, sodass für alle Knotenpaare  $(i, j) \in (V \setminus \{c\})^2$   $d_{ij} = d_{ic} + d_{cj}$  gilt. Die Autoren betrachten die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Sternmetrik und damit einer optimalen Lösung nach dem zweiten Verfahren von Frederickson und Guan (1993). Sie kommen zu dem Ergebnis, dass in den meisten Fällen eine Sternmetrik vorliegt und somit eine optimale Lösung generiert werden kann.

Eine Variante der Problemstellung, die das temporäre Abstellen transportierter Objekte an einem Knoten auf dem Weg vom Start- zum Zielknoten des Objektes erlaubt, behandeln Frederickson und Guan (1992). Sie zeigen, dass mit der Abstellmöglichkeit für transportierte Objekte, eine optimale Lösung in polynomialer Zeit ermittelt werden kann und stellen zwei geeignete Vorgehensweisen vor. Im Kontext einer Tourenplanung unter Tage, ist das zeitweise Abstellen eines Objektes aufgrund begrenzter Platzverhältnisse jedoch nicht möglich. Ebenfalls ein Abstellen erlauben Anily et al. (2011) für die verwandte Problemstellung des „Swapping Problem“, eingeführt von Anily und Hassin (1992), auf Bäumen. Das Swapping Problem betrachtet mehrere Arten von Gütern. An einer Menge von Orte sind Bestände und Bedarfe für Gütern gegeben. Es wird angenommen, dass je Gut das Gesamtangebot der -nachfrage entspricht. Ein Fahrzeug, das zeitgleich genau eine Mengeneinheit eines Gutes transportieren kann, soll in einer streckenminimalen Tour die Angebote und Bedarfe der Güter ausgleichen. Damit stellt das Swapping Problem eine Verallgemeinerung des Gabelstaplerproblems dar. Eine Instanz des Gabelstaplerproblems mit  $n$  Aufträgen, kann als Swapping Problem mit  $n$  Gütern interpretiert werden, wobei der Startknoten eines Auftrags ein Angebot und der Zielknoten eines Auftrags eine Nachfrage von einer Einheit für das dem Auftrag zugeordnete Gut besitzt. Anily et al. (2011)

geben ein Näherungsverfahren für das Swapping Problem mit einer begrenzten Fahrzeugkapazität an. Besitzt das Fahrzeug eine Kapazität von Eins, wird eine optimale Lösung erhalten. Weitere Veröffentlichungen, Lim et al. (2005), Wang et al. (2006) und Xu et al. (2014), untersuchen das kapazitierte Handlungsreisendenproblem mit Umsetzungen auf einem Baum als Streckennetz. Diese Problemstellung kann als Swapping Problem mit einem Gut und einem Fahrzeug mit begrenzter Kapazität aufgefasst werden.

# Kapitel 5

## Tourenplanung mit Behältern in der Versorgung von Bergwerken

Die im Folgenden beschriebene Planungsaufgabe wurde im Rahmen eines Projektes mit einem deutschen Kali-Bergbauunternehmen untersucht.

Der Betrieb eines Bergwerks ist auf die Gewinnung eines oder mehrerer Wertstoffe ausgerichtet. Im Zentrum des Handelns steht damit der Abbauprozess, als wertschöpfender Vorgang. Damit die Gewinnung reibungslos voranschreiten kann, sind zahlreiche begleitende Tätigkeiten erforderlich. Beispiele für diese Tätigkeiten sind die Exploration, das heißt die Erkundung der Lagerstätte im umliegenden Gebirgskörper, die Errichtung von Infrastrukturen für den Transport des abgebauten Materials, die Instandhaltung und Reparatur von Maschinen und Anlagen, Versorgungstätigkeiten sowie Maßnahmen zur Sicherung des Grubengebäudes. Diese Tätigkeiten erfordern Materialien, die an den jeweiligen Bedarfsort transportiert werden müssen. Es handelt sich dabei unter anderem um Maschinenteile, Treib-, Sprengstoffe, Bau- und Verbrauchsmaterialien. Darüber hinaus müssen Abfälle und zu reparierende Maschinen- und Anlagenteile transportiert werden. Ausgangs- beziehungsweise Zielorte von Transporten sind dabei Lager, Werkstätten und Wartungsplätze unter Tage sowie der Schacht als Schnittstelle nach über Tage.

Der Transport von Materialien über Tage, durch den Schacht und unter Tage motiviert den Einsatz von Abrollcontainern. Der Aufbau von Abrollcontainern, mit einem einheitlichen Aufnahmehaken, erleichtert die Umsetzung dieses intermodalen Transports. Verschiedene Varianten von Abrollcontainern, die sich durch Aufbauten auf der einheitlichen Containerplattform unterscheiden, ermöglichen den Transport von Flüssigkeiten, Schütt- sowie Stückgütern. Darüber hinaus können technische Apparaturen auf der Plattform montiert werden, wodurch diese flexibel an verschiedenen Orten eingesetzt werden

können. Verallgemeinernd wird im Folgenden für Abrollcontainer der Begriff **Behälter** verwendet.

In Abschnitt 5.1 wird zunächst die vorliegende Planungsaufgabe erläutert. Anschließend wird in Abschnitt 5.2 eine Literaturlauswahl vorgestellt. In Abschnitt 5.3 wird ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm zur Abbildung der Problemstellung formuliert. Weiter werden in Abschnitt 5.4 eine deterministische Konstruktionsheuristik sowie eine Multi-Start-Erweiterung der Heuristik präsentiert. Das Kapitel schließt in Abschnitt 5.5 mit einer Performanceanalyse der zuvor vorgestellten Verfahren.

## 5.1 Planungsaufgabe

Transporte finden in einem Bergwerk über Tage auf dem Werksgelände, unter Tage in der Grube sowie zwischen über und unter Tage durch den Schacht statt. Die nachfolgend beschriebene Planungsaufgabe findet sich sowohl unter als auch über Tage. Der Schacht, als Verbindung von unter und über Tage, ist aus der Betrachtung ausgenommen. Diese Abgrenzung ist durch die Zielstellung, Touren für Transportfahrzeuge, die den Schacht nicht als Verbindung zwischen über und unter Tage „befahren“ können, begründet. Ist ein Behälter, mit oder ohne Material, von über Tage nach unter Tage oder umgekehrt von unter Tage nach über Tage zu transportieren, wird der Transport im Rahmen dieser Arbeit am Schacht abgeschnitten. Transporttätigkeiten sind damit auf einen Teilbereich, unter beziehungsweise über Tage, beschränkt. Wenngleich sich die Planungsaufgabe auch über Tage wiederfinden lässt, ist diese aufgrund der in der Regel größeren räumlichen Ausdehnung der Grube gegenüber dem Werksgelände durch die Transporte unter Tage motiviert.

Die Aufgabenstellung besteht aus der Bedienung anfallender Transportbedarfe durch eine zentrale Transportabteilung mit heterogenen Fahrzeugen  $V$  und heterogenen Mitarbeitern  $W$ . Der untersuchte Planungshorizont umfasst eine Arbeitsschicht der Dauer  $\hat{T}$  und wird als einperiodig angenommen. Der Transportbedarf wird in Form von Aufträgen  $A$  erfasst, die sich auf Behälter-  $B$  und Materialtypen  $M$  beziehen. Unterschieden werden hierbei zunächst Behältertransporte, Bewegungen einzelner Behälter von ihrem Standort zu einem Zielort, sowie Lieferungen und Abholungen von Behältern und Materialien. Tabelle 5.1 führt die Auftragstypen, deren Bezeichner sowie die zur Verarbeitung der Auftragstypen benötigten Informationen auf. Ein Spalteneintrag „+“ bedeutet, dass die jeweilige Information für den jeweiligen Auftragstyp erforderlich ist. Mögliche Informationen eines Auftragstyps sind ein Startort  $\alpha_a^A$ , ein Zielort  $\omega_a^A$ , eine Menge  $B_a^A$  mit einem

oder mehreren Behältertypen sowie ein betroffener Materialtyp  $m_a^A$ . Ist im Rahmen eines Auftrags  $a$  ein konkreter Behälter zu bewegen, ist die Menge  $B_a^A$  einelementig und enthält den Behältertypen des zu bewegenden Behälters. Andernfalls enthält die Menge die für die Durchführung des Auftrags  $a$  infrage kommenden Behältertypen. Ein Eintrag  $\oplus$  in der Spalte Behältertyp bedeutet, dass neben der Angabe verwendbarer Behältertypen im Rahmen der Planung eine Entscheidung über den zu verwendenden Behältertyp zu treffen ist. Insgesamt werden fünf Auftragstypen betrachtet. Der Auftragstyp Behältertransport erfordert den Standort des zu transportierenden Behälters, als Startort des Auftrags, den Zielort, den Typ des Behälters sowie den Typ eines gegebenenfalls geladenen Materials. Soll ein leerer Behälter umgesetzt, das heißt von seinem Standort zu einem anderen Ort transportiert werden, kann die Angabe eines Materialtyps entfallen. Für eine Behälterlieferung sind die Angaben des Zielorts sowie mindestens eines nutzbaren Behältertyps erforderlich. Die Angabe mehrerer Behältertypen ist denkbar, wenn die Behälterlieferung für die Vorbereitung eines späteren Transports erfolgt und Behälter verschiedener Typen infrage kommen. Die Informationen für eine Behälterabholung umfassen den Standort und den Typ des abzuholenden Behälters. Analog zur Behälterlieferung erfordert eine Materiallieferung die Angabe eines Zielortes und abweichend von der Behälterlieferung die Angabe eines zu liefernden Materialtyps. Schließlich ist für die Abholung von Material, der Standort des beladenen Behälters, dessen Behältertyp, sowie das abzuholende Material zu spezifizieren. Eine Entscheidung über den zu verwendenden Behältertyp ist im Allgemeinen bei Behälter- und Materiallieferungen erforderlich. Jedem Auftrag  $a$  ist ein Nutzen  $n_a$ , der bei Durchführung des Auftrags erlöst wird, zugeordnet. Die Aufträge der Teilmenge  $A^T \subseteq A$  besitzen einen Termin  $e_a$ , dessen Einhaltung mit dem zusätzlichen Nutzen  $n_a^T$  bewertet ist. Die Einhaltung eines Termins ist optional. Bei Nichteinhaltung eines Termins wird jedoch anstelle des Nutzens  $n_a + n_a^T$  nur der Nutzen für die Durchführung des Auftrags  $n_a$  erlöst.

Bezeichner	Auftragstyp	Start	Ziel	Behältertyp(en)	Materialtyp
$T^B$	Behältertransport	+	+	+	(+)
$D^B$	Behälterlieferung		+	$\oplus$	
$P^B$	Behälterabholung	+		+	
$D^M$	Materiallieferung		+	$\oplus$	+
$P^M$	Materialabholung	+		+	+

**Tabelle 5.1:** Basis-Auftragstypen

Weitere in der Praxis relevante Tätigkeiten lassen sich durch Verkettung dieser elementaren Auftragstypen abbilden. Diese als **Auftragskette** bezeichnete Verknüpfung von Aufträgen wirkt sich in Form einer Vorrangbeziehung zwischen den betroffenen Aufträgen aus. Beispielsweise kann ein Material, das sich nicht in einem Behälter befindet, erst

abtransportiert werden, nachdem ein geeigneter Behälter bereitgestellt wurde. Wird bei Materiallieferungen und Umsetzungen – Transporten von Material von einem gegebenen Standort zu einem gegebenen Zielort – das transportierte Material am Zielort abgeladen, steht dort ein leerer Behälter zur Verfügung. Das Anhängen einer Behälterabholung an die Materiallieferung beziehungsweise die Umsetzung ermöglicht den Abtransport des genutzten Behälters oder dessen Weiterverwendung für andere Aufträge. Ein Behälter kann auf diese Weise für die Durchführung mehrerer Aufträge genutzt werden. Ohne Verkettung würde ein zur Durchführung eines Auftrags verwendeter Behälter im Rahmen des Planungshorizontes verbraucht, da er nicht für weitere Aufträge zur Verfügung stünde. Im Fall einer Umsetzung, bei der zunächst ein leerer Behälter geliefert werden muss, können sich damit Auftragsketten aus drei Aufträgen ergeben. In den anderen Fällen beschränken sich Auftragsketten auf zwei Aufträge. Alle betrachteten Tätigkeiten, die benötigten Informationen, gekennzeichnet durch ein „+“-Zeichen in der jeweiligen Spalte, sowie die zur Abbildung der Tätigkeit verwendete Auftragskette sind in Tabelle 5.2 aufgeführt. Die Notwendigkeit der Wahl eines Behältertyps innerhalb einer Kette ist mit einem  $\oplus$  ausgedrückt. Die Auftragsketten können in Form von Vorrangbeziehungen beschrieben werden. Eine Vorrangbeziehung entspricht einem geordneten Auftragspaar  $(a, b)$ , wobei Auftrag  $a$  vor Auftrag  $b$  ausgeführt werden muss. Die Abholung losen Materials wird beispielsweise als Vorrangbeziehung zwischen einer Behälterlieferung und einer Materialabholung abgebildet. Die Menge aller Vorrangbeziehungen wird im Folgenden mit  $\mathcal{P}$  bezeichnet. Im Rahmen einer Vorrangbeziehung  $(a, b)$  stellt Auftrag  $a$  den Vorgängerauftrag  $p_b$  von Auftrag  $b$  und umgekehrt Auftrag  $b$  den Nachfolgeauftrag  $u_a$  des Auftrags  $a$  dar. Die Aufträge einer Kette teilen sich stets den genutzten Behälter. Sofern es sich bei dem ersten Auftrag einer Kette um eine Behälter- oder Materiallieferung handelt, ist bei dessen Einplanung eine Entscheidung über den zu verwendenden Behältertyp zu treffen. Für die nachfolgenden Aufträge einer derartigen Kette ist der Behältertyp damit zunächst unbekannt. Die Menge der möglichen Behältertypen teilen sich diese Aufträge mit dem ersten Auftrag ihrer Kette. Die Abhängigkeit des Behältertyps zweier Aufträge wird analog zu den Vorrangbeziehungen als geordnetes Auftragspaar  $(a, b)$ , wobei die Wahl des Behälters für beide Aufträge  $a$  und  $b$  in Auftrag  $a$  erfolgt, notiert. Die Menge aller Auftragspaare, die die Abhängigkeit einer Behälterentscheidung widerspiegeln, wird mit  $\mathcal{B}$  bezeichnet. Mit Ausnahme der Umsetzung eines bekannten Behälters mit anschließender Behälterabholung, in der Tabelle als Umsetzung aufgeladenen Materials mit Behälterabholung bezeichnet, resultieren aus allen Auftragsketten Elemente der Menge  $\mathcal{B}$ . Für jede Kette ist der Behältertyp des zweiten beziehungsweise dritten Auftrags von der Entscheidung im ersten Auftrag der Kette abhängig. Kann lediglich eine Wahl aus einer einelementigen Menge an Behältertypen getroffen werden, kann das Element der



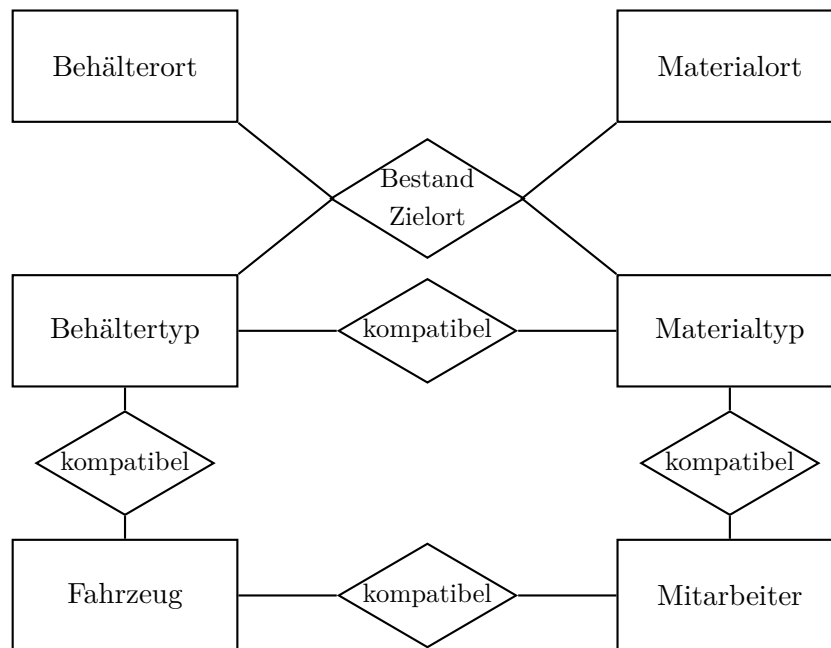
Tätigkeit	Start	Ziel	Behälter-	Mat.-typ	Auftragskette
Materialabholung (lose)	+		$\oplus$	+	$D^B \rightarrow P^M$
Materiallieferung mit Behälterabholung		+	$\oplus$	+	$D^M \rightarrow P^B$
Umsetzung mit Behälter- lieferung (und -abholung)	+	+	$\oplus$	+	$D^B \rightarrow T^B (\rightarrow P^B)$
Umsetzung aufgeladenen Materials mit Behälter- abholung	+	+	+	+	$T^B \rightarrow P^B$

**Tabelle 5.2:** Auftragsketten

Menge direkt als Behältertyp aller beteiligten Aufträge der Kette gesetzt werden. Damit entfällt eine Behälterentscheidung und eine Berücksichtigung der Auftragspaare in der Menge  $\mathcal{B}$  ist nicht erforderlich.

Die Durchführung der Aufträge einer Kette wird auf ein einzelnes Fahrzeug beschränkt. Das bedeutet, die Aufträge können auch unter Einhaltung der Vorrangbeziehungen nicht von unterschiedlichen Fahrzeugen ausgeführt werden. Diese Anforderung ergibt sich aus beschränkten Kommunikationsmöglichkeiten innerhalb des Planungshorizonts. Zusätzlich trägt die Vermeidung von Abhängigkeiten zwischen Touren verschiedener Fahrzeuge zur Robustheit des erstellten Plans bei, da sich Verzögerungen in einer Tour nicht auf andere Touren auswirken. Schließlich ist eine teilweise Durchführung von Auftragsketten zulässig, das heißt es können unter Einhaltung der Vorrangbeziehungen auch nur einzelne Aufträge einer Auftragskette durchgeführt werden.

Eine Übersicht über die weiteren Komponenten der Problemstellung und deren Beziehungen zeigt Abbildung 5.1. Dies sind zunächst die im Rahmen der Planung zu bewegenden Behälter-  $B$  und Materialtypen  $M$ . Nicht jeder Behältertyp kann für den Transport jedes Materials eingesetzt werden. Die Menge  $B_m^M$  enthält die Behältertypen mit denen Material  $m$  transportiert werden kann. Behälter- und Materialorte stellen leere Behälter und Material bereit und dienen als Zielorte für diese. Abhängig von ihrer Funktion als Quelle oder Senke für Behälter oder Material sind Behälter- und Materialorte in den Mengen  $Q^B$  und  $Q^M$  als Quelle für leere Behälter und Material, sowie in den Mengen  $S^B$  und  $S^M$  als Senken für leere Behälter und Material enthalten. Die Zuordnung der Behälter- und Materialorte zu den Mengen der Quellen und Senken dient der funktionalen Einteilung der Orte. Ein Ort kann mehrere Funktionen erfüllen, beispielsweise leere Behälter bereitstellen und als Abstellplatz für abzutransportierende Behälter dienen, und somit in mehreren Mengen enthalten sein. Einer Behälterquelle  $i \in Q^B$  ist ein Bestand  $L_{ib}^B$  an leeren Behältern des Behältertyps  $b$  zugewiesen. Analog dazu gibt der Wert  $L_{imb}^{MB}$  den



**Abbildung 5.1:** ERM-Skizze der Planungsressourcen

Bestand mit Material  $m$  beladener Behälter des Typs  $b$  an Materialquelle  $i \in Q^M$  an. Neben der Bereitstellung auf beladenen Behältern kann Material an einer Materialquelle auch lose zur Verfügung gestellt werden. Für die Nutzung des Materials wird dann ein Behälter benötigt. Es wird angenommen, dass lose bereitgestelltes Material keiner Kapazitätsbeschränkung unterliegt. Diese Annahme hat insbesondere Schüttgüter, deren vorgehaltener Bestand den Bedarf innerhalb eines Planungshorizontes überschreitet, vor Augen. Ebenfalls unbeschränkt sind die Kapazitäten von Behälter- und Materialsenken zur Aufnahme leerer Behälter beziehungsweise von Material. Allerdings kann die Menge an Behälter- und Materialtypen, die zu einer Behälter- beziehungsweise Materialsenke gebracht werden können, auf eine Teilmenge aller Behälter- und Materialtypen beschränkt sein. Ein Beispiel für eine derartige Einschränkung, sind leere Tankbehälter, die zur erneuten Befüllung lediglich zu Standorten mit Großbehältern gebracht werden sollen. Bei Materialien macht eine Einschränkung auf Materialorte, an denen das Material gelagert und bereitgestellt wird, Sinn. Zur Durchführung von Aufträgen stehen heterogene Fahrzeuge und Mitarbeiter zur Verfügung. Jedes Fahrzeug  $\nu$  besitzt eine Geschwindigkeit  $v_\nu$  und kann für den Transport von Behältertypen der Menge  $B_\nu^V \subseteq B$  eingesetzt werden. Die Handhabung mancher Materialien, beispielsweise Gefahrstoffen, erfordert einen Sachkundenachweis. Die Menge der Materialien, die ein Mitarbeiter  $w$  handhaben darf, ist mit  $M_w^W \subseteq M$  bezeichnet. Weiter wird davon ausgegangen, dass ein Fahrzeug von einem Mitarbeiter ausschließlich nach vorheriger Einweisung genutzt werden kann. Zusätzlich

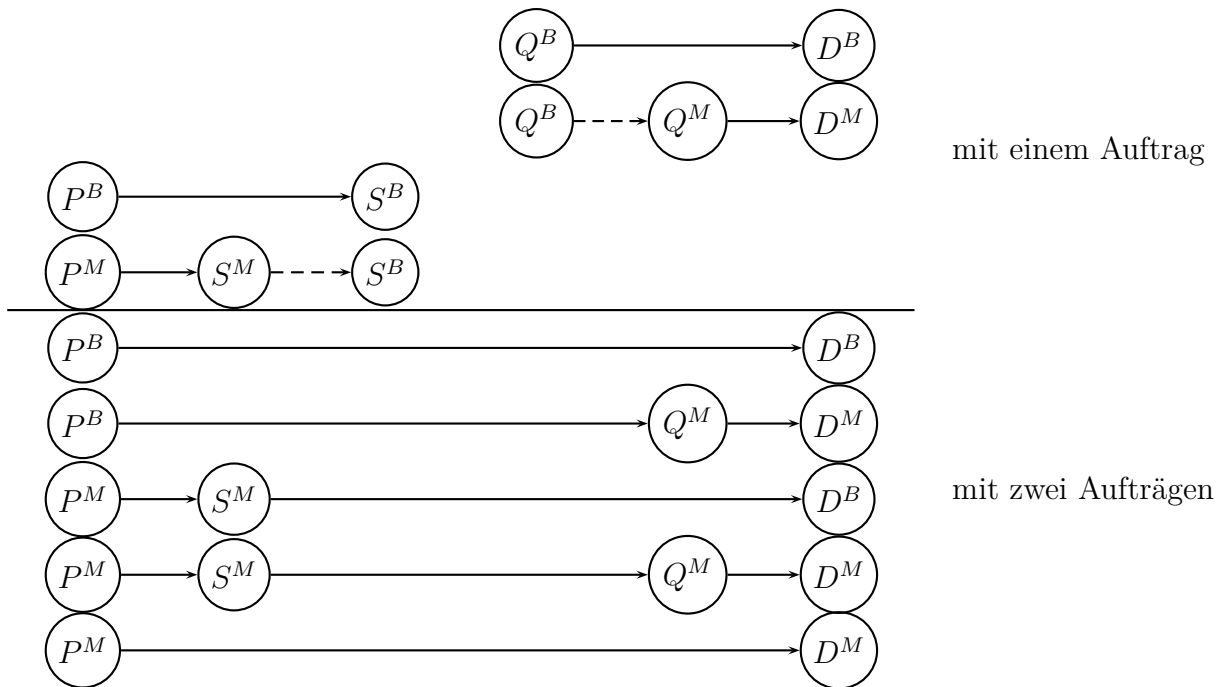
können einzelne Fahrzeuge besondere Ausstattungselemente, beispielsweise einen Kran, besitzen, die einen Sachkundenachweis erfordern. Die Menge  $V_w^W \subseteq V$  enthält die von Mitarbeiter  $w$  nutzbaren Fahrzeuge. Die maximale Anzahl durchzuführender Touren ist auf den Wert  $\hat{F}$  begrenzt. Sinnvolle Werte von  $\hat{F}$  sind nach oben durch das Minimum aus Fahrzeug- und Mitarbeiteranzahl begrenzt. Eine darüberhinausgehende Einschränkung der Tourenanzahl kann sinnvoll sein, wenn beispielsweise Mitarbeiter neben Transporten für weitere Tätigkeiten eingesetzt werden. Die Begrenzung der Tourenanzahl gewährleistet in diesem Fall, dass nicht zu viele Mitarbeiter für Touren eingeplant werden und somit ausreichend Mitarbeiter für andere Tätigkeiten zur Verfügung stehen. Den Objekten der Problemstellung, Fahrzeugen, Mitarbeitern, Behälter- und Materialtypen und -orten, können weitere Informationen zugeordnet sein. Für Behälter- und Materialtypen kann beispielsweise eine Zeitdauer für das Be- und Entladen angegeben sein. Bezüglich der Materialorte, als Ziel von Materialabholungen, kann ortsabhängig nur das Abladen von Material jedoch nicht das Abstellen eines beladenen Behälters, oder der umgekehrte Fall, zulässig sein. Derartige Informationen sind in einer Anwendung zu berücksichtigen, beeinflussen jedoch nicht die Struktur der Problemstellung. Sie werden daher im Folgenden nicht explizit betrachtet.

Die Durchführung eines Auftrags ist immer mit der Bewegung eines Behälters verbunden. Im Fall von Behältertransporten ist dies der Transport des jeweiligen Behälters von seinem Start- zu seinem Zielort. Für alle anderen Auftragsarten existieren im Allgemeinen mehrere Möglichkeiten zur Ausführung. Ein konkreter Fahrweg zur Erfüllung eines Auftrags, eine Abfolge von mindestens zwei Orten, wird im Folgenden als **Ausführungsoption** bezeichnet. Jede Ausführungsoption besitzt einen Start- und einen Zielort an dem ein Behälter auf- beziehungsweise abgeladen wird. Zusätzlich kann eine Zwischenstation, an der Material auf- oder abgeladen wird, enthalten sein. Die Ausführungsoptionen verbinden Orte mit einem Angebot an Behältern beziehungsweise an Material mit Orten, an denen Behälter und oder Material benötigt wird. Sie kombinieren Angebote mit Nachfragen. Behälter- und Materialabholungen besitzen ein Behälterangebot. Im Fall einer Behälterabholung besteht dieses aus dem abzuholenden Behälter, für eine Materialabholung aus dem Behälter, auf dem das abzuholende Material geladen ist oder zuvor als Teil einer Auftragskette geladen wurde. Umgekehrt besitzen Behälter- und Materiallieferungen eine Nachfrage nach einem Behälter, der entweder selbst anzuliefern ist oder für die Lieferung von Material verwendet wird. Das Angebot von und die Nachfrage nach Material beschränken sich, die Auftragsstypen betreffend, auf Materialabholungen und -lieferungen. Dem gegenüber stehen das Angebot und die Aufnahmemöglichkeit als Nachfrage der Behälter- und Materialorte.

Bei Behältertransporten existiert genau eine Ausführungsoption, da ein bestimmter Behälter bewegt werden muss. Für die anderen Auftragsarten ist lediglich ein Behälter- und oder Materialtyp festgelegt. Gegeben ist der Zielort einer Lieferung beziehungsweise der Startort einer Abholung, jedoch nicht der Ursprungsort des zu liefernden Behälters oder Materials beziehungsweise der Zielort an den ein abzuholender Behälter oder Material gebracht werden. Die Ausführungsoptionen resultieren aus den Kombinationsmöglichkeiten der oben erläuterten Angebote und Nachfragen. Aus jeder Kombination resultiert eine Folge von Stationen. Eine Station ist ein anzufahrender Ort. Dabei kann es sich sowohl um einen Behälter- oder Materialort als auch den Start- beziehungsweise Zielort eines Auftrags handeln.

Abbildung 5.2 und Tabelle 5.3 stellen die Ausführungsoptionen grafisch beziehungsweise tabellarisch dar. Beide Darstellungen sind zweigeteilt und zeigen in der oberen Hälfte die Ausführungsoptionen die genau einen Auftrag betreffen und in der unteren Hälfte Ausführungsoptionen in denen zwei Aufträge miteinander interagieren. Die grafische Darstellung enthält je Zeile eine oder zwei Ausführungsoptionen, deren Stationen dargestellt sind. Zwei Ausführungsoptionen liegen in Zeilen mit einem gestrichelten Pfeil vor. In der tabellarischen Übersicht existiert je Ausführungsoption eine Zeile deren Einträge „x“ angeben, dass eine Station in der jeweiligen Ausführungsoption enthalten ist. Die Erfüllung einer Behälterlieferung ohne Interaktion mit einem anderen Auftrag erfolgt durch Kombination des Auftrags mit einer Behälterquelle. Diese Ausführungsoption beinhaltet zwei Stationen, eine Behälterquelle, die zum Aufladen eines geeigneten Behälters angefahren wird, und eine Behälterlieferung, an deren Zielort der angeforderte Behälter abzustellen ist. Ebenfalls kann an einer Behälterquelle die Lieferung von Material beginnen. Ein für den Transport des angeforderten Materials geeigneter Behälter wird an einer Behälterquelle aufgenommen, zu einer Materialquelle transportiert, dort beladen und schließlich zum Zielort gebracht. Bei Verwendung eines bereits mit Material beladenen Behälters entfällt der Start an einer Behälterquelle und die zugehörigen Ausführungsoptionen resultieren aus den Kombinationen des Auftrags mit Materialquellen. Umgekehrt ergeben sich Ausführungsoptionen einer Behälterabholung durch Kombinationen mit Behältersenzen. Abzuholendes Material muss stets zu einer Materialsenke gebracht werden. Dort kann entweder der beladene Behälter abgestellt oder geleert und weiter zu einer Behältersenke transportiert werden.

Die Ausführungsoptionen mit zwei beteiligten Aufträgen resultieren aus den Kombinationen der zuvor beschriebenen Ausführungsoptionen, die an einer Senke enden beziehungsweise an einer Quelle starten. Die beiden Elemente, Senke und Quelle, müssen entweder zur Menge der Behälter- oder der Materialorte gehören. Die abschließende Senke der



**Abbildung 5.2:** Ausführungsoptionen der Basis-Auftragstypen grafisch

ersten Ausführungsoption und die eröffnende Quelle der zweiten Ausführungsoption werden bei der Kombination entfernt. Das Angebot eines Behälters oder Materials eines Auftrags wird zur Bedienung der Nachfrage eines anderen Auftrags verwendet. Der anbietende Auftrag wird für den nachfragenden Auftrag zur Quelle und umgekehrt der nachfragende Auftrag für den anbietenden Auftrag zur Senke. Der abzuholende Behälter einer Behälterabholung kann für eine Behälterlieferung oder nach Aufladen des benötigten Materials an einer Materialquelle für eine Materiallieferung verwendet werden. Analog kann der Behälter einer Materialabholung nach Abladen des abzuholenden Materials für eine Behälterlieferung oder nach wiederum Aufladen von Material an einer Materialquelle für eine Materiallieferung verwendet werden. Schließlich kann eine Materialabholung mit einer Materiallieferung verknüpft werden, sofern das abzuholende mit dem zu liefernden Material übereinstimmt. Aufgrund der zeitlichen Vorrangbeziehung zwischen Aufträgen einer Auftragskette, sind Kombinationen von Aufträgen einer Kette auszuschließen.

Die beschriebenen Ausführungsoptionen stellen die Bausteine der Fahrzeugtouren dar. Die Menge aller Ausführungsoptionen wird mit  $O$  und die Ausführungsoptionen eines Auftrags  $a$  mit  $O_a$  bezeichnet. Aufgrund der auftragsverknüpfenden Ausführungsoptionen sind die Mengen  $O_a$  im Allgemeinen nicht disjunkt. Zusätzlich werden in den Mengen  $O_a^z$  Ausführungsoptionen einem Auftrag zugeordnet. Die Menge  $O_a^z$  enthält alle Ausführungsoptionen des Auftrags  $a$ , die ausschließlich den Auftrag betreffen, sowie alle Ausführungsoptionen in denen Auftrag  $a$  einen Behälter für einen anderen Auftrag zur

Bezeichner	anbietender Auftrag	$S^M$	$S^B$	$Q^B$	$Q^M$	nachfragender Auftrag
$Q^B D^B$				x		x
$Q^M D^M$					x	x
$Q^B Q^M D^M$				x	x	x
$P^B S^B$	x		x			
$P^M S^M$	x	x				
$P^M S^M S^B$	x	x	x			
$P^B D^B$	x					x
$P^B Q^M D^M$	x				x	x
$P^M S^M D^B$	x	x				x
$P^M S^M Q^M D^M$	x	x			x	
$P^M D^M$	x	x			x	

**Tabelle 5.3:** Ausführungsoptionen der Basis-Auftragstypen tabellarisch

Verfügung stellt. Eine Ausführungsoption, die die Nutzung eines Behälters aus Auftrag  $a$  für Auftrag  $b$  vorsieht, ist somit in den Mengen  $O_a$  und  $O_b$ , weiter jedoch nur in der Menge  $O_a^z$  und nicht in der Menge  $O_b^z$  enthalten. Die Distanz von einem Ort  $i$  zu einem Ort  $j$  wird mit  $d_{ij}$  bezeichnet. Die erste Station der Ausführungsoption  $o$  wird als ihr Startort  $\alpha_o^O$ , die letzte Station als ihr Zielort  $\omega_o^O$  bezeichnet. Dabei handelt es sich beispielsweise für eine Ausführungsoption der Art  $Q^B D^B$  um den Ort einer Behälterquelle und den Zielort der Behälterlieferung. Es wird davon ausgegangen, dass Behälter zwischen dem Start- und dem Zielort einer Ausführungsoption nicht abgestellt werden dürfen. Die Ausführungsoptionen sind damit nicht unterbrechbar.

Die Problemstellung sieht keine spezielle Struktur des Streckennetzes, aus dem die Distanzen zwischen Orten resultieren, vor. Wenngleich das Streckennetz in einem Bergwerk einem Brückengraphen ähneln kann, führte die explizite Berücksichtigung dieser Struktur in mathematischen Modellen der kapazitierten Tourenplanung bei der Performanceanalyse zu schlechteren absoluten Ergebnissen.<sup>26</sup> Im Mehr-Fahrzeug-Fall des Gabelstaplerproblems wurden bei der Berücksichtigung in Modellen weniger zulässige Lösungen ermittelt.<sup>27</sup> In der Performanceanalyse in Abschnitt 5.5 werden zwar Brückengraphen als Streckennetze verwendet, diese werden jedoch in ihrer Struktur nicht in den Modellen berücksichtigt sondern gehen lediglich über die resultierenden Distanzen in die Problemstellung ein.

Von einer Ausführungsoption  $o$  zu einer Ausführungsoption  $p$  ist die Distanz  $d_{op}^O = d_{\omega_o^O \alpha_p^O}$  vom Zielort der Ausführungsoption  $o$  zum Startort der Ausführungsoption  $p$  zurückzulegen. Da sich Start- und Zielort einer Ausführungsoption im Allgemeinen unterscheiden,

<sup>26</sup> vgl. Tabelle 3.18

<sup>27</sup> vgl. Tabelle 4.5

sind die Distanzen zwischen Ausführungsoptionen nicht symmetrisch, das heißt nicht für alle Paare von Ausführungsoptionen gilt  $d_{op}^O = d_{po}^O$ . Dies gilt auch bei Vorliegen symmetrischer Distanzen  $d_{ij} = d_{ji}$ . Die minimale Distanz  $d_{op}^O$  beträgt null, wenn das Ende der Ausführungsoption  $o$  mit dem Start der Ausführungsoption  $p$  zusammenfällt. Die Distanz, die innerhalb einer Ausführungsoption zwischen ihren Stationen zurückzulegen ist, wird mit  $d_o^O$  bezeichnet. Weiterer zeitlicher Aufwand, der mit der Durchführung einer Ausführungsoption verbunden ist, wird in der Servicezeit der Ausführungsoption  $s_o^O$  zusammengefasst. Dabei kann es sich beispielsweise um Zeiten für das Auf- oder Abladen eines Behälters oder Materials handeln. Der Gesamtaufwand einer Ausführungsoption ergibt sich als Summe ihrer Servicezeit und der fahrzeugabhängigen Fahrzeit für das Zurücklegen ihrer Fahrstrecke. Die Werte  $d_{oa}^{OA}$  und  $s_{oa}^{OA}$  geben die Fahrstrecke beziehungsweise die Servicezeit innerhalb einer Ausführungsoption  $o$ , die bis zur Fertigstellung des Auftrags  $a$  zurückzulegen ist beziehungsweise vergeht, an. Betrachtet werden diese Werte lediglich für die Menge  $A_o^O$  der Aufträge, die Teil der jeweiligen Ausführungsoption  $o$  sind. Die Mengen  $A_o^O$  enthalten mindestens einen und maximal zwei Aufträge. Ausgehend von dem Startzeitpunkt  $\tau$  einer Ausführungsoption ergibt sich der Fertigstellungszeitpunkt eines Auftrags  $a$  unter Verwendung des Fahrzeugs  $\nu$  zu  $\tau + s_o^O + d_{oa}^{OA}/v_\nu$ . Der Termin eines Auftrags wird eingehalten, sofern sein Fertigstellungszeitpunkt vor seinem Termin liegt. Als weitere Bezeichner werden  $b_o^q$  und  $m_o^q$  für eine gegebenenfalls in einer Ausführungsoption anzufahrende Behälter- beziehungsweise Materialquelle verwendet.

Bei der Erstellung der Ausführungsoptionen für eine konkrete Instanz sind lediglich Kombinationen zu betrachten, die umsetzbar sind. Das heißt beispielsweise im Fall von Behälterlieferungen, dass nur Behälterquellen mit einem Bestand an geeigneten Behältern für die Bildung von Ausführungsoptionen  $Q^B D^B$  infrage kommen. Als weiteres Beispiel können nur Materialsinken mit Materialabholungen kombiniert werden, sofern das abzuholende Material zu der Materialsinke gebracht werden darf. Die Teilmenge  $B_o^O \subseteq \bigcap_{a \in A_o^O} B_a^A$  enthält die Behältertypen, die im Rahmen einer Ausführungsoption verwendet werden können. Die Menge ist zunächst durch die Schnittmenge der Behältertypen der von der Ausführungsoption betroffenen Aufträge eingeschränkt. Bei Ausführungsoptionen von Behälter- und Materiallieferungen, die an einer Behälterquelle  $i$  starten, muss für die Elemente  $b$  der Menge  $B_o^O$  zusätzlich  $L_{ib}^B > 0$  gelten. Analog muss für die möglichen Behältertypen  $b$  der Ausführungsoptionen von Materiallieferungen  $a$ , die an Materialquellen  $i$  beginnen, ein positiver Bestand  $L_{im}^{MB}$  des zu liefernden Materials  $m_a^A$  vorliegen. Bei auftragsübergreifenden Ausführungsoptionen zweier Aufträge  $a$  und  $c$  resultiert die Menge der möglichen Behältertypen aus der Schnittmenge  $B_a^A \cap B_c^A$ . Für jede sinnvolle Ausführungsoption enthält die Menge  $B_o^O$  mindestens ein Element. Andernfalls ist eine Durchführung der jeweiligen Ausführungsoption nicht möglich und

sie kann von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Die Behältertypen, die Ausführungsoptionen zugeordnet sind, werden im mathematischen Modell in Abschnitt 5.3 und dem heuristischen Lösungsverfahren in Abschnitt 5.4 unterschiedlich gehandhabt. Während das heuristische Verfahren mit der Menge  $B_o^O$  arbeitet, wird für das mathematische Modell je Element der Menge  $B_o^O$  eine separate Ausführungsoption erzeugt und deren Behältertyp als  $b_o$  bezeichnet. Damit existieren im mathematischen Modell gegebenenfalls mehrere Ausführungsoptionen, die in den anzufahrenden Stationen übereinstimmen und sich lediglich durch den gewählten Behältertyp unterscheiden. Die Erzeugung einzelner Ausführungsoptionen je nutzbarem Behältertyp im mathematischen Modell vermeidet Variablen für die Zuordnung von Fahrwegen zu Behältertypen und entsprechende Nebenbedingungen zur Festlegung zulässiger Variablenwerte. Die Bündelung gleicher Fahrwege in einer Ausführungsoption unter Zuordnung einer Menge möglicher Behältertypen im Fall der Heuristik trägt der Irrelevanz der konkreten Behälterentscheidung für den zurückzulegenden Weg einer Folge von Stationen Rechnung. Das bei Durchführung einer Ausführungsoption gehandhabte Material wird in der Variable  $m_o$  gespeichert.

Die Betrachtung von Ausführungsoptionen als kleinste Komponenten der Touren, lässt für Ausführungsoptionen mit mindestens drei Stationen eine weitere Einschränkung zu. Der Aufwand, eine Ausführungsoption in eine Tour zu integrieren, setzt sich aus ihrer eigenen Dauer, bestehend aus der Fahrzeit für das Abfahren der Stationen sowie der Servicezeit, und den Fahrzeiten von der vorausgehenden und zu der nachfolgenden Ausführungsoption zusammen. Die Fahrzeiten zwischen einer Ausführungsoption und den angrenzenden Ausführungsoptionen hängen lediglich von der ersten und letzten Station der zu integrierenden Ausführungsoption ab. Für die Ausführungsoptionen des Typs  $Q^B Q^M D^M$ , die eine Materiallieferung über einen neu zu beladendem Behälter, von einer Behälterquelle, vorsehen, genügt aufgrund des als unbegrenzt angenommenen Bestands an losem Material die Berücksichtigung der zwischen Behälterquelle und Zielort bestgelegenen Materialquelle, an der das angefragte Material vorhanden ist. Wird angenommen, dass die Servicezeiten durch die Art der Ausführungsoption fixiert sind, kann die Auswahl des bestgelegenen Materialortes anhand der inneren Fahrstrecke  $d_o^O$  getroffen werden. In Gleichung (5.1) bezeichnet  $i$  den Ort der betrachteten Behälterquelle und  $a$  den Materiallieferungsauftrag. Lediglich die Ausführungsoption mit der geringsten Fahrstrecke, das heißt die bezogen auf die Fahrstrecke bestgelegene Materialquelle, an der das zu liefernde Material verfügbar ist, muss berücksichtigt werden. Analog kann diese Art der Einschränkung für die Ausführungsoptionen der Typen  $P^M S^M D^B$ ,  $P^M S^M S^B$ ,  $P^M S^M D^B$ ,  $P^M S^M Q^M D^M$  und  $P^B Q^M D^M$  vorgenommen werden.



$$\operatorname{argmin}_{j \in Q^M | \text{Material } m_a^A \text{ aufladbar}} d_{ij} + d_{j\omega_a^A} \quad (5.1)$$

Die gegebene Auftragslast lässt sich im Allgemeinen nicht in vollem Umfang im Planungshorizont bearbeiten. Aus den verfügbaren Aufträgen ist daher eine Auswahl zu treffen. Die Maximierung des Nutzens durchgeführter Aufträge sowie eingehaltener Termine wird dabei als Zielstellung verfolgt. Die Problemstellung setzt sich aus einer Reihe von Teilproblemen, die wechselseitig miteinander interagieren, zusammen. Aus den vorhandenen Fahrzeugen und Mitarbeitern ist eine Auswahl zu treffen und diese paarweise zuzuordnen. Eine Teilmenge der verfügbaren Aufträge ist auszuwählen und auf die Touren, die Fahrzeug-Mitarbeiter-Paare, zu verteilen. Dabei ist je Auftrag eine Ausführungsoption zu wählen und gegebenenfalls eine Entscheidung über den zu verwendenden Behältertyp zu treffen. Schließlich muss für die Ausführungsoptionen jeder Tour eine Reihenfolge bestimmt werden.

## 5.2 Literaturüberblick

In der vorliegenden Problemstellung sind Behälter zu transportieren und eine Auswahl aus einer Menge verfügbarer Aufträge zu treffen. Im Folgenden werden zunächst Publikationen, die sich mit Problemstellungen aus dem Bereich des Containertransports auseinandersetzen, vorgestellt. Anschließend wird das Orienteering Problem, als Handlungsreisendenproblem ohne Erfüllungszusage, motiviert.

Im Zuge der Globalisierung steigt das globale Transportvolumen stetig an. Der Großteil dieser Transporte wird mittels Containerschiffen durchgeführt. Allein in den Jahren 2015 bis 2021 ist die Menge der umgeschlagenen Container an den großen Seehäfen um über 20% gestiegen.<sup>28</sup> Die genormten Größen der Container, insbesondere 20- und 40-Fuß Container, ermöglichen eine Standardisierung von Transportvorgängen. Neben dem Transport per Schiff ermöglicht der Einsatz von Güterzügen den zeitgleichen Transport einer Vielzahl von Containern. An den Enden des Transportwegs eines Behälters stehen ein Versender und ein Empfänger, die in der Regel nicht über einen direkten Anschluss an einen Hafen oder an das Schienennetz verfügen. Der Transport eines Containers macht dann den Einsatz von Lastkraftwagen auf den Strecken vom Versender zum Startbahnhof beziehungsweise -hafen und später vom Zielbahnhof oder -hafen zum Empfänger

<sup>28</sup> vgl. Statista (2022)

erforderlich. Außerdem ist der Einsatz von Lastkraftwagen sinnvoll, wenn keine übergeordnete Infrastruktur, Bahn oder Seeweg, zur Verfügung steht oder vergleichsweise kurze Distanzen zu überbrücken sind. Im Folgenden werden Container, in Bezug auf die beschriebene Problemstellung in Abschnitt 5.1, als Behälter bezeichnet und es wird davon ausgegangen, dass die Kapazität von Fahrzeugen auf einen Behälter beschränkt ist. Das Speditionsproblem, vom Englischen „drayage problem“<sup>29</sup>, betrachtet Transporte beladener und leerer Behälter. Beladene Behälter sind von sogenannten Versendern zu Empfängern zu transportieren. Bevor der Versand eines beladenen Behälters erfolgen kann, muss dem Versender ein leerer Behälter zur Verfügung gestellt werden. Der Empfänger eines beladenen Behälters ist zuallererst an der geladenen Ware interessiert. Die Problemstellung sieht deshalb die Abholung abgeladener Behälter von Empfängern vor. Neben den Versendern und Empfängern sieht die Problemstellung mehrere Lager vor, zu denen leere Behälter gebracht werden können und an denen ein Bestand an leeren Behältern zur Verfügung steht. Die Zielgröße der Problemstellung besteht in einer Minimierung des Aufwands zur Realisierung der Transportbedarfe. In der Literatur existieren weitere Veröffentlichungen, die vergleichbare Problemstellungen untersuchen, jedoch nicht die Bezeichnung „drayage problem“ verwenden. Nachfolgend wird eine Auswahl dieser Publikationen aufgegriffen, deren Untersuchungsgegenstand beschrieben und ihr Lösungsansatz skizziert. Die Veröffentlichungen beziehen entgegen der in dieser Arbeit betrachteten Problemstellung Zeitfenster mit ein, bleiben jedoch beispielsweise in Bezug auf die Vielfalt durchzuführender Transporttätigkeiten hinter dieser zurück. Coslovich et al. (2006) betrachten Auftragsstypen, die einem Behältertransport mit anschließender Behälterabholung und einer Behälterlieferung gefolgt von einem Behältertransport entsprechen. Die Weiterverwendung eines geleerten Behälters für einen anderen Auftrag wird als Option einbezogen. Zwischen die Auftragspaare können keine anderen Tätigkeiten eingeschoben werden. Es handelt sich damit nicht um Auftragsketten im Sinne der vorliegenden Arbeit. Dazu kommen Transporte von leeren Behältern zum Ausgleich zwischen verschiedenen Lagern, wobei keine Zuordnung von liefernden und empfangenden Lagern getroffen ist. In der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Problemstellung kann dies durch Behälterabholungen für das abgebende Lager und Behälterlieferungen für das empfangende Lager abgebildet werden. Es werden unterschiedliche Behältertypen unterstellt, wobei kein Typ den gleichzeitigen Transport mehrerer Behälter mit einem Fahrzeug ermöglicht. Eine Lösung beinhaltet eine Zuordnung von abzuholenden Behältern und nachgefragten Behältern. Daraus resultieren Fahrten mit leeren Behältern, die neben den Fahrten mit beladenen Behältern erforderlich sind. Zusätzlich ist eine Zuweisung der Fahrten zu den Fahrzeugen notwendig. Jedes Fahrzeug kann pro Tag maximal eine Fahrt durchführen.

---

<sup>29</sup> vgl. Xue et al. (2014)

Die Autoren beschreiben die Problemstellung zunächst über einen mehrtägigen Planungshorizont als dynamisches und stochastisches Problem, da vorab nicht alle Aufträge bekannt sind und Entscheidungen bezüglich der Nutzung von Behältern und des Einsatzes von Fahrzeugen sowie der daraus resultierenden Positionierung der Fahrzeuge innerhalb der Einsatzregion tagesübergreifende Auswirkungen haben. Als Kosten betrachten die Autoren die Fahrtkosten der durchgeführten Fahrten, Kosten für die Zuordnung einer Fahrt zu einem Fahrzeug sowie erwartete Kosten für den zukünftigen Ausgleich von Behälterangebot und -nachfrage, der durch die getroffenen Entscheidungen notwendig wird. Der zweite Kostenbestandteil resultiert aus der Distanz zwischen dem Standort eines Fahrzeugs am Ende der Vorperiode und dem Startort der jeweiligen Fahrt. Ausgehend von der Beschreibung als dynamische und stochastische Problemstellung führen die Autoren an, dass Speditionen in der Regeln die Zufallsverteilung ihrer zukünftigen Aufträge nicht kennen, sie jedoch gut abschätzen können, wie viele Fahrzeuge sie in der nächsten Planungsperiode in welcher Teilregion mindestens zur Bedienung der Aufträge benötigen werden. Die Autoren beschränken sich deshalb für ihren Lösungsansatz auf die Planung einer Periode und beziehen die Vorgabe einer Mindestanzahl an Fahrzeugen je Teilregion als Restriktion in ihr Ein-Tages-Problem mit ein. Die Aufträge des zu planenden Tages werden als bekannt angenommen. Zur Beschreibung des Ein-Tages-Problems wird ein gemischt-ganzzahliges Modell angegeben. Der vorgestellte Lösungsansatz zerlegt das Ein-Tages-Problem in drei Teilprobleme, die Auswahl durchzuführender Fahrten, deren Zuordnung zu Fahrzeugen und schließlich der Bestimmung einer bestmöglichen Repositionierung von Behältern zum Ausgleich geschaffener Ungleichgewichte von Angebot und Nachfrage. Dabei werden einzelne Restriktionen relaxiert und in Kombination mit Lagrange-Multiplikatoren als Strafkosten in die Zielfunktion integriert. Die Teilprobleme werden mittels Cplex gelöst. Das Vorgehen wiederholt sich iterativ unter Anpassung der Lagrange-Multiplikatoren bis ein Abbruchkriterium greift. Eine vergleichbare Variante des Problems, mit einer Planungsperiode und der Möglichkeit mehrere Fahrten mit einem Fahrzeug durchzuführen, untersuchen Zhang et al. (2010). Außerdem gehen sie davon aus, dass alle Aufträge vorab bekannt und alle Behälter homogen sind. Für das Beladen eines Behälters bei einem Versender beziehungsweise dem Abladen eines Behälters bei einem Empfänger wird eine Servicezeit, die vom durchführenden Fahrzeug vor seiner Weiterfahrt abgewartet werden muss, angenommen. Sie modellieren die Problemstellung auf einem Digraphen, dessen Knoten Auf- und Abladetätigkeiten von Behältern, beispielsweise das Aufladen eines zu transportierenden beladenen Behälters, und dessen Pfeile Transportaktivitäten repräsentieren. Ein gemischt-ganzzahliges lineares Modell, das den Zeitbedarf zur Erfüllung der Aufträge minimiert, wird zur Beschreibung der Problemstellung angegeben. Die vorgestellte Lösungsmethode fokussiert sich auf die Zeitfenster der

Aufträge, welche im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet werden. Auf eine ausführliche Darstellung des Lösungsansatzes wird daher an dieser Stelle verzichtet. Braekers et al. (2013) erweitern die Problemstellung von Zhang et al. (2010), indem sie die Durchführung der Teilfahrten eines Warentransports von einem Versender zu einem Empfänger, die Bereitstellung eines leeren Behälters, dessen Transport nach seiner Beladung und den Abtransport des abgeladenen Behälters, durch verschiedene Fahrzeuge ermöglichen. Werden verschiedene Fahrzeuge für die Teilfahrten eingesetzt, müssen zwar die Servicezeiten für das Beladen und Entladen berücksichtigt werden, ein Fahrzeug muss jedoch während dieser Zeiten nicht beim Versender oder Empfänger warten. Dies entspricht Transporttätigkeiten, die in dieser Arbeit als Auftragskette Umsetzung mit Behälterlieferung und -abholung abgebildet werden, jedoch ohne die Notwendigkeit die Teilaufträge mit einem Fahrzeug zu bedienen. Außerdem verfolgen die Autoren eine zweistufige Zielstellung. Zunächst ist die Anzahl der einzusetzenden Fahrzeuge und anschließend die zurückzulegende Strecke zu minimieren. Die Autoren stellen einen sequenziellen und einen integrierten Lösungsansatz für ihre Problemstellung vor. Der sequentielle Ansatz löst zunächst ein Transportproblem zum Ausgleich von Behälterangebot und -nachfrage optimal. Anschließend werden die resultierenden Fahrten für leere Behälter zusammen mit den Fahrten für beladene Behälter in ein Tourenplanungsproblem mit Zeitfenstern überführt. Dabei wird jede Fahrt in einem Knoten zusammengefasst. Im Gegensatz zum sequenziellen Vorgehen erfordert ein integrierter Ansatz die Berücksichtigung jeder potentiellen Fahrt während der Tourenplanung. Als Lösungsansatz, sowohl für das Tourenplanungsproblem des sequenziellen als auch des integrierten Vorgehens, schlagen die Autoren ein Simulated Annealing Verfahren vor. Eine Startlösung wird mit einer Einfügeheuristik, die alle Touren parallel berücksichtigt, erzeugt. Anschließend wird eine Reihe für Tourenplanungsprobleme typischer Nachbarschaftsoperatoren im Rahmen einer lokalen Suche verwendet, wobei in Abhängigkeit der Temperatursteuerung des Verfahrens Verschlechterungen des Zielfunktionswertes erlaubt sind. Xue et al. (2014) gehen davon aus, dass das Ab- und Beladen von Behältern einen nennenswerten Zeitbedarf mit sich bringt, der gegenüber den Fahrzeiten nicht vernachlässigbar ist. Dies ist insbesondere der Fall, wenn Transporte regional und nicht über mehrere hundert Kilometer durchzuführen sind. Die Autoren betrachten ebenfalls die Möglichkeit zwischen Teilfahrten eines Transportes andere Aufträge einzuschieben. Ist ein beladener Behälter zu einem Zielort zu transportieren, kann dieser dort abgestellt werden und während dessen Entladung ein anderer Auftrag durchgeführt werden. Nach Abladen des Behälters, abgebildet durch einen zeitlichen Mindestabstand nach der Anlieferung des beladenen Behälters, kann der geleerte Behälter abgeholt werden. Wie bei Braekers et al. (2013) können die einzelnen Fahrten auf verschiedene Fahrzeuge verteilt werden. Ein gemischt-ganzzahliges lineares

Modell wird angegeben und eine Tabu-Suche als Lösungsansatz vorgestellt. Die Startlösung wird mittels einer Einfügeheuristik erzeugt. Dabei erfolgt die Bildung von Touren nacheinander. Eine neue Tour wird begonnen, sobald das Hinzufügen eines weiteren Auftrags zur aktuell generierten Tour nicht mehr möglich ist. Die Konstruktion der Touren berücksichtigt Zeitfenster. Als Nachbarschaftsoperatoren kommen die Repositionierung von Aufträgen innerhalb der Tour, der Austausch von Aufträgen zwischen zwei Touren und die Neuverteilung der Aufträge einer gesamten Tour zum Einsatz.

Der Ursprung der Betrachtung von Tourenplanungsproblemen ohne Erfüllungszusage, bei der im Gegensatz zur klassischen Tourenplanung lediglich eine Auswahl von Orten zu besuchen ist, liegt in der sportlichen Disziplin des Orientierungslaufs. Tsiligirides (1984) beschreibt die Disziplin des bewerteten Orientierungslaufs, bei der ein Läufer innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne eine Teilmenge von Stationen ablaufen muss. Jeder Station ist eine Bewertung, die bei ihrem Erreichen erlöst wird, zugeordnet. Ziel ist es, innerhalb der Zeitbegrenzung eine möglichst hohe Gesamtbewertung durch Ablaufen geeigneter Stationen zu erzielen. Diese Problemstellung setzt sich aus der Auswahl von Stationen sowie der Bestimmung einer Reihenfolge, in der die gewählten Stationen abzulaufen sind, zusammen. Der Autor interpretiert diese Aufgabe als verallgemeinertes Handlungsreisendenproblem. Er stellt unter anderem ein randomisiertes Konstruktionsverfahren zur Bestimmung zulässiger Lösungen vor. Das vorgestellte Verfahren setzt schrittweise eine Tour zusammen und ist an das Bester-Nachfolger-Verfahren<sup>30</sup> für das Handlungsreisendenproblem angelehnt. Ausgehend vom Startort wird in jeder Iteration eine bislang nicht besuchte Station gemäß einem Kriterium als beste nachfolgende Station ausgewählt und an das Ende der Tour angehängt. Das Vorgehen bricht ab, sofern die vorgegebene Zeitspanne die Einplanung einer weiteren Station unmöglich macht. Als Kriterium zur Wahl der nächsten Station verwendet der Autor den Quotienten aus der Stationsbewertung und der Entfernung zur aktuell letzten Station der Tour. In einer Erweiterung des Kriteriums wird dieses um einen Term, der die verbleibende Zeit sowie die Nähe einer Station zu weiteren Stationen berücksichtigt, ergänzt. Golden et al. (1987) führen die Benennung der Problemstellung als „Orienteering Problem“ ein. Die Autoren gehen davon aus, dass jeder Station Koordinaten zugeordnet sind und schlagen ein mehrstufiges Vorgehen vor. Zunächst wird eine Ausgangslösung nach einer nicht näher erläuterten Einfügeheuristik ermittelt. Die Distanz der erhaltenen Lösung wird durch Anwendung der 2-opt-Nachbarschaft zu verbessern versucht und falls möglich um zusätzliche Stationen erweitert. Aus den Koordinaten der enthaltenen Stationen wird ein nach ihrer Bewertung gewichteter Schwerpunkt der vorliegenden Tour ermittelt. Anschließend wird eine neue

---

<sup>30</sup> vgl. Domschke und Scholl (2010)

Tour konstruiert, wobei die Betrachtung der Stationen in fallender Reihenfolge des zugeordneten Kriteriumwertes, dem Quotienten aus ihrer Bewertung und Entfernung zum bestimmten Schwerpunkt, erfolgt. Abschließend wird versucht, die erhaltene Tour wiederum unter Verwendung der 2-opt-Nachbarschaft zu verbessern. Zwei gemischt-ganzzahlige lineare Modelle sowie weitere Verfahren für das Orienteering Problem wurden von Laporte und Martello (1990) vorgestellt. Das allgemeine Modell nutzt zweifachindizierte Variablen zur Abbildung der Laufwege. Das zweite Modell unterstellt symmetrische Distanzen zwischen den Stationen und nutzt je Stationspaar eine ganzzahlige Variable, die angibt wie oft die Kante zwischen den jeweiligen Stationen in einer Tour enthalten ist. Wird ausgehend von einem Startort in einer Tour ausschließlich eine Station angefahren und anschließend zum Startort zurückgekehrt, nimmt die Variable für die Kante zwischen Startort und angefahrener Station den Wert zwei an. Andernfalls sind nur die Werte null und eins möglich. Zusätzlich wird eine binäre Variable je Station zur Angabe, ob eine Station in einer Tour enthalten ist, verwendet. Die Autoren stellen zwei heuristische Verfahren vor. Das erste Verfahren erweitert eine Tour schrittweise ausgehend von ihrer letzten Station. Das zweite Verfahren ermöglicht das Einfügen von Stationen an allen Positionen einer Tour. Als Kriterium, zur Auswahl der nächsten Tourerweiterung, dient in beiden Fällen eine Gegenüberstellung der Bewertung der Stationen sowie ihrer Entfernung zur letzten Station der Tour beziehungsweise der zusätzlichen Distanz bei Einfügen an einer Position der Tour. Für das in Abschnitt 5.4 beschriebene Verfahren dient das zweite Verfahren als Grundlage. Neben den heuristischen Verfahren stellen die Autoren zwei Enumerationsverfahren vor. Einen guten Überblick über das Themenfeld der Orienteering Probleme bieten Vansteenwegen und Gunawan (2019). Darüber hinaus dokumentieren Gunawan et al. (2016) zahlreiche Varianten und Erweiterungen des Orienteering Problems und verfolgter Lösungsansätze.

### 5.3 Modellierung der Problemstellung

Die in Abschnitt 5.1 beschriebene Problemstellung wird in Unterabschnitt 5.3.1 als gemischt-ganzzahliges lineares Modell beschrieben. Anschließend werden in den Unterabschnitten 5.3.2 und 5.3.3 Möglichkeiten zur Erweiterung des Modells um eine vorgeschriebene Pause innerhalb eines Pausenkorridors sowie eine Priorisierung von Aufträgen vorgestellt.

### 5.3.1 Mathematisches Modell

Grundlage der Modellierung ist die Interpretation der Problemstellung als Orienteering Problem. Neben dem Depot als Start- und Zielort der Touren wird jeder Ausführungsoption ein Knoten zugeordnet. Im Rahmen der Modellbeschreibung ist der Behältertyp einer Ausführungsoption bekannt. Das heißt, insbesondere für Aufträge, für die mehrere Behältertypen infrage kommen, existieren gegebenenfalls mehrere Ausführungsoptionen, die in den anzufahrenden Orten übereinstimmen, sich jedoch im verwendeten Behältertyp unterscheiden. Der Knoten 0 entspricht dem Depot, das als Ausführungsoption mit genau einer Station interpretiert werden kann. Die Knoten der Ausführungsoptionen sind fortlaufend nummeriert. Die Menge  $O$  enthält die Knoten der Ausführungsoptionen sowie den Knoten des Depots. Die Knotenmenge aller echten Ausführungsoptionen ist somit  $O \setminus \{0\}$ . Da in der Regel eine Auswahl an Aufträgen zu treffen ist und für einen gewählten Auftrag genau eine Ausführungsoption ausgewählt werden muss, handelt es sich um ein Tourenplanungsproblem ohne Erfüllungszusage.

Das vorgestellte Modell verwendet reellwertige und binäre Variablen zur Kodierung einer Lösung. Für jeden Auftrag  $a$  gibt der Wert der binären Variablen  $y_a$  an, ob ein Auftrag durchgeführt wird oder nicht. Der Wert 1 steht dabei für die Einplanung des Auftrags. Besitzt ein Auftrag einen Termin, so gibt der Wert 1 der binären Variable  $y_a^T$  an, dass der Termin des Auftrags  $a$  eingehalten wird. Die Einhaltung eines Termins ist davon abhängig, zu welcher Zeit ein Auftrag abgeschlossen wird. Der zeitliche Verlauf einer Tour muss deshalb berücksichtigt werden. Die reellwertige Variable  $t_a^A$  gibt den Fertigstellungszeitpunkt des Auftrags  $a$  an. Der Wert der Variable wird durch die Modellierung im Allgemeinen nicht auf einen Zeitpunkt fixiert und kann optionale Wartezeiten beinhalten. Es handelt sich daher nicht in jedem Fall um den frühestmöglichen Fertigstellungszeitpunkt des Auftrags. Der tatsächliche frühestmögliche Fertigstellungszeitpunkt eines Auftrags kann aus der Auftragsreihenfolge abgeleitet werden. Die Auftragsreihenfolge einer Tour ergibt sich im dargestellten Modell aus der Reihenfolge in der Ausführungsoptionen angefahren werden. Nimmt die binäre Variable  $x_{op}$  den Wert 1 an, so findet eine Fahrt von Ausführungsoption  $o$  zu Ausführungsoption  $p$  statt.<sup>31</sup> Der frühestmögliche Zeitpunkt, zu dem eine Ausführungsoption  $o$  auf Grundlage einer geplanten Reihenfolge vom Depot aus erreicht werden kann, das heißt mit der Ausführung der Ausführungsoption begonnen werden kann, wird durch den Wert der reellwertigen Variablen  $t_o^O$  wiedergegeben. Die obige Bemerkung für die Variablen  $t_a^A$  gilt auch für die Variablen  $t_o^O$ . Für die Aufteilung von Ausführungsoptionen und damit Aufträgen auf Fahrzeuge werden binäre Variablen

<sup>31</sup> Eine Fahrt von einer Ausführungsoption  $o$  zu sich selbst ist nicht zulässig. Der Wert der Variablen  $x_{oo}$  wird deshalb als null angenommen.

$z_{o\nu}^{OV}$  verwendet, die bei einem Wert von 1 die Ausführungsoption  $o$  dem Fahrzeug  $\nu$  zuordnen. Die binären Variablen  $z_{w\nu}^{WV}$  legen durch den Wert 1 fest, dass Mitarbeiter  $w$  Fahrzeug  $\nu$  fährt. Die Nutzung eines Fahrzeugs durch mehrere Fahrer beziehungsweise die Nutzung mehrerer Fahrzeuge durch einen Fahrer ist nicht vorgesehen.

In Formel (5.2) ist die Nutzenmaximierung als Zielstellung der Problemstellung dargestellt. Sie setzt sich aus dem Nutzen durchgeführter Aufträge sowie eingehaltener Termine zusammen. Die Nutzenwerte gehen jeweils nur in den Zielfunktionswert ein, sofern die zugehörigen Variablen  $y_a$  beziehungsweise  $y_a^T$  den Wert 1 annehmen.

$$\text{Maximiere} \quad \sum_{a \in A} n_a y_a + \sum_{a \in A^T} n_a^T y_a^T \quad (5.2)$$

Die nachfolgenden Gleichungen und Ungleichungen geben grundlegende Anforderungen an die Bildung der Touren und die damit verbundene Durchführung von Aufträgen vor. Die Gleichungen (5.3) fordern, dass für jede Ausführungsoption und das Depot die Anzahl ein- und ausgehender Fahrten übereinstimmt. Wird ein Knoten angefahren, ist ausgehend von diesem ebenfalls eine Fahrt notwendig, sodass ein Fahrzeug seine Tour nicht an einem angefahrenen Knoten beenden kann. Für das Depot bedeutet die Gleichung, dass alle eingesetzten Fahrzeuge wieder zum Depot zurückkehren müssen. Die Anfahrt einer Ausführungsoption entspricht ihrer Durchführung. Gemäß den Gleichungen (5.4) wird ein Auftrag erfüllt, sofern eine seiner Ausführungsoptionen angefahren wird. Zugleich beschränken die Gleichungen die Wahl von Ausführungsoptionen durch die binäre Variable  $y_a$  auf maximal eine je Auftrag. Die Durchführung einer Ausführungsoption erfordert ein Fahrzeug. Die Gleichungen (5.5) gewährleisten, dass einer angefahrenen Ausführungsoption genau ein Fahrzeug zugeordnet wird. Wird eine Ausführungsoption nicht umgesetzt, kann ihr kein Fahrzeug zugeordnet werden. Die konsistente Zuordnung von Fahrzeugen zu nacheinander angefahrenen Ausführungsoptionen wird über die Ungleichungen (5.6) erreicht. Zwei Ausführungsoptionen  $o$  und  $p$ , zwischen denen eine Fahrt stattfindet, müssen dem gleichen Fahrzeug zugeordnet werden. Die rechte Seite der Ungleichungen nimmt in diesem Fall den Wert 0 an, sodass bei Zuordnung der Ausführungsoption  $o$  zu Fahrzeug  $\nu$  und somit  $z_{o\nu}^{OV} = 1$  auch die Variable  $z_{p\nu}^{OV}$  den Wert 1 annehmen muss, um die Ungleichung zu erfüllen. Schließlich gewährleisten die Ungleichungen (5.7), dass je Fahrzeug maximal eine Tour durchgeführt wird. Dies wird erreicht, indem die Zuordnung zweier vom Depot aus angefahrenen Ausführungsoptionen zum gleichen Fahrzeug unterbunden wird. Damit ist für jede vom Depot aus angefahrne Ausführungsoption der Einsatz eines eigenen Fahrzeugs notwendig.



$$\sum_{p \in O} x_{op} - x_{po} = 0 \quad o \in O \quad (5.3)$$

$$\sum_{o \in O, p \in O_a} x_{op} = y_a \quad a \in A \quad (5.4)$$

$$\sum_{p \in O} x_{po} = \sum_{\nu \in V} z_{o\nu}^{OV} \quad o \in O \setminus \{0\} \quad (5.5)$$

$$z_{o\nu}^{OV} - z_{p\nu}^{OV} \leq 1 - x_{op} \quad \nu \in V, o, p \in O \setminus \{0\} \mid o \neq p \quad (5.6)$$

$$x_{0o} + x_{0p} + z_{o\nu}^{OV} + z_{p\nu}^{OV} \leq 3 \quad v \in V, o, p \in O \setminus \{0\} \mid o \neq p \quad (5.7)$$

Eine weitere Gruppe von Ungleichungen betrifft die Nutzung von Fahrzeugen und deren Besetzung mit Mitarbeitern. Die Zuordnung eines Fahrzeugs zum Depot, das heißt  $z_{0\nu}^{OV} = 1$  für ein Fahrzeug  $\nu$ , wird als Nutzung des Fahrzeugs interpretiert. Gemäß den Ungleichungen (5.8) kann ein Fahrzeug nur als eingesetzt gelten, sofern ihm mindestens eine Ausführungsoption zugeordnet ist. Die Verknüpfung von Fahrzeugen und Mitarbeitern erfolgt in den Ungleichungen (5.9) - (5.11). Die Zuordnung eines Mitarbeiters zu einem Fahrzeug ist gemäß den Ungleichungen (5.9) nur möglich, sofern das Fahrzeug eingesetzt wird. Zugleich ist maximal die Zuordnung eines Mitarbeiters zu einem Fahrzeug zulässig. Umgekehrt erlauben die Ungleichungen (5.10) maximal die Zuordnung eines Fahrzeugs zu einem Mitarbeiter. Die Durchführung von Ausführungsoptionen mit einem Fahrzeug kann aufgrund der Ungleichungen (5.11) nur erfolgen, wenn dem jeweiligen Fahrzeug ein Mitarbeiter zugeordnet ist. Schließlich begrenzt die Ungleichung (5.12) die Anzahl durchgeführter Touren durch Beschränkung der vom Depot startenden Fahrten.

$$z_{0\nu}^{OV} \leq \sum_{o \in O \setminus \{0\}} z_{o\nu}^{OV} \quad \nu \in V \quad (5.8)$$

$$\sum_{w \in W} z_{w\nu}^{WV} \leq z_{0\nu}^{OV} \quad \nu \in V \quad (5.9)$$

$$\sum_{\nu \in V} z_{w\nu}^{WV} \leq 1 \quad w \in W \quad (5.10)$$

$$\sum_{o \in O \setminus \{0\}} z_{o\nu}^{OV} \leq \sum_{w \in W} z_{w\nu}^{WV} |A| \quad \nu \in V \quad (5.11)$$

$$\sum_{o \in O \setminus \{0\}} x_{0o} \leq \hat{F} \quad (5.12)$$

Die möglichen Zuordnungen von Fahrzeugen, Mitarbeitern und Ausführungsoptionen werden durch Kompatibilitäten eingeschränkt. Ausführungsoptionen, deren Behältertyp

nicht mit einem Fahrzeug kompatibel ist, können diesem gemäß den Gleichungen (5.13) nicht zugeordnet werden. Gleiches gilt nach den Gleichungen (5.14) für Kombinationen aus Mitarbeitern und Fahrzeugen, für welche ein Fahrzeug nicht in der Menge der nutzbaren Fahrzeuge eines Mitarbeiters enthalten ist. Die Kompatibilität zwischen Materialien und Mitarbeitern wird über die Ungleichungen (5.15) gewährleistet. Eine Ausführungsoption eines Auftrags darf einem Fahrzeug nicht zugeordnet werden, sofern dem Fahrzeug ein Mitarbeiter zugewiesen ist, der das zu bewegende Material eines Auftrags nicht handhaben darf. Behälterlieferungen und -abholungen müssen in den Ungleichungen nicht betrachtet werden, da diese lediglich leere Behälter und keine Materialien betreffen.

$$z_{ov}^{OV} = 0 \quad o \in O \setminus \{0\}, \nu \in V \mid b_o \notin B_\nu^V \quad (5.13)$$

$$z_{w\nu}^{WV} = 0 \quad w \in W, \nu \in V \mid \nu \notin V_w^W \quad (5.14)$$

$$\sum_{o \in O_a} z_{ov}^{OV} + z_{w\nu}^{WV} \leq 1 \quad a \in T^B \cup D^M \cup P^M, \nu \in V, w \in W \mid m_a^A \notin M_w^W \quad (5.15)$$

Die Bestände leerer und mit Material beladener Behälter an Behälter- und Materialquellen schränken die Möglichkeiten zur Wahl von Ausführungsoptionen ein. Die Ungleichungen (5.16) beschränken die Anzahl der Ausführungsoptionen, die einen Behälter eines bestimmten Typs von einer Behälterquelle nutzen, auf den Bestand des Behältertyps an der jeweiligen Behälterquelle. Analog limitieren die Ungleichungen (5.17) die Nutzung mit einem Material beladener Behälter eines Behältertyps je Materialquelle auf den entsprechenden Bestand.

$$\sum_{\nu \in V} \sum_{o \in O \mid b_o = b, b_o^q = i} z_{ov}^{OV} \leq L_{ib}^B \quad i \in Q^B, b \in B \quad (5.16)$$

$$\sum_{\nu \in V} \sum_{o \in O \mid m_o = m, m_o^q = i} z_{ov}^{OV} \leq L_{imb}^{MB} \quad i \in Q^M, b \in B, m \in M \quad (5.17)$$

Die Fahrtzeit für das Zurücklegen einer Strecke hängt von der Geschwindigkeit des verwendeten Fahrzeugs ab. Die Variablen  $x_{op}$  weisen keinen Index für das verwendete Fahrzeug auf. Stattdessen muss das verwendete Fahrzeug, das eine Strecke befährt, beziehungsweise eine Ausführungsoption  $o$  durchführt, über die Zuordnungsvariable  $z_{ov}^{OV}$  ermittelt werden. Der Term  $\sum_{\nu \in V} v_\nu z_{ov}^{OV}$  gibt die Geschwindigkeit, mit der das verwendete Fahrzeug zu Ausführungsoption  $o$  fährt, an. Anders ausgedrückt handelt es sich bei dem Ausdruck um die Geschwindigkeit des Fahrzeugs, das die Tour, die Ausführungsoption  $o$

beinhaltet, durchführt. Diese Geschwindigkeit ist damit für die Fahrten zu und von der Ausführungsoption sowie für zurückzulegende Strecken innerhalb der Ausführungsoption relevant. Da einer Ausführungsoption maximal ein Fahrzeug zugeordnet werden kann, resultiert der Term entweder in der Geschwindigkeit eines Fahrzeugs oder dem Wert null, sofern die jeweilige Ausführungsoption nicht durchgeführt wird. Zur Bestimmung des Zeitbedarfs für das Überbrücken einer Distanz muss der Kehrwert der Geschwindigkeit gebildet werden. Da die soeben erläuterte Vorgehensweise zur Beschreibung der Geschwindigkeit des eingesetzten Fahrzeuges den Wert null als Ergebnis aufweisen kann, ist eine Bildung des Kehrwertes im Allgemeinen nicht möglich. In den nachfolgenden Ungleichungen wird deshalb der Ausdruck  $\sum_{v \in V} z_{ov}^{OV} / v_v$  für den Kehrwert der Geschwindigkeit des verwendeten Fahrzeugs genutzt. Es handelt sich dabei um die Summation der Geschwindigkeitskehrwerte aller Fahrzeuge. Da höchstens ein Fahrzeug zugeordnet werden kann, resultiert entweder der Geschwindigkeitskehrwert eines einzelnen Fahrzeugs oder der Wert null. Da der Kehrwert der Geschwindigkeit mit einer zurückzulegenden Distanz zur Ermittlung der benötigten Fahrzeit multiplikativ zu verknüpfen ist, stellt ein Wert von null keine Einschränkung dar.

Die nächsten Restriktionen betreffen den zeitlichen Ablauf einer Tour und die Einhaltung der maximalen Tourdauer  $\hat{T}$ . Die Ungleichungen (5.18) gewährleisten, dass eine Ausführungsoption frühestens nach der vom Depot aus zum Erreichen ihres Startortes benötigten Fahrzeit beginnen kann. Die rechten Seiten der Ungleichungen stellen somit den frühesten Startzeitpunkt der jeweiligen Ausführungsoption dar. Umgekehrt stellen die rechten Seiten der Ungleichungen (5.19) den spätesten Startzeitpunkt einer Ausführungsoption dar. Der Wert dieser oberen Schranke des Startzeitpunktes setzt sich aus der nach Beginn einer Ausführungsoption benötigten Zeit zur Rückkehr zum Depot zusammen. Dazu gehören zunächst die Servicezeit und die Fahrzeit der Ausführungsoption sowie die Fahrzeit vom Zielort der Ausführungsoption zurück zum Depot. Die Ungleichungen stellen sicher, dass jede Tour spätestens nach  $\hat{T}$  Zeiteinheiten beendet ist. In den Fällen, in denen eine Ausführungsoption von keinem Fahrzeug durchgeführt wird, muss für die Erfüllbarkeit der Ungleichungen  $\hat{T} - s_o^O \geq 0$  gelten. Unter der Annahme, dass die zeitliche Tourbegrenzung  $\hat{T}$  die Durchführung jeder Ausführungsoption in einer eigenen Tour erlaubt und dabei zur Servicezeit der jeweiligen Ausführungsoption zusätzliche Fahrdauern vom und zum Depot hinzukommen, ist dies stets erfüllt. Schließlich schreiben die Ungleichungen (5.20) die Startzeiten aufeinanderfolgender Ausführungsoptionen in einer Tour fort. Findet eine Fahrt von Ausführungsoption  $o$  zu Ausführungsoption  $p$  statt, entspricht der Startzeitpunkt der Ausführungsoption  $p$  mindestens dem Startzeitpunkt der Ausführungsoption  $o$  zuzüglich deren Servicezeit, Fahrdauer und dem Zeitbedarf der Fahrt von Ausführungsoption  $o$  zu Ausführungsoption  $p$ . Andernfalls gewährleistet

das Abziehen der maximalen Tourdauer auf der rechten Seite der Ungleichungen deren Zulässigkeit. Das Fortschreiben der Startzeitpunkte gewährleistet unter der Annahme  $s_o^O + d_o^O + d_{op} > 0$  zusätzlich die Vermeidung von Kurzzyklen, als geschlossene Folgen von Fahrten, die das Depot nicht enthalten. Diese Annahme ist plausibel, da die Summe zum einen aus nicht negativen Summanden besteht und davon ausgegangen wird, dass jegliche Tätigkeit einen zeitlichen Aufwand größer null erfordert.

$$t_o^O \geq d_{0o}^O \sum_{\nu \in V} z_{o\nu}^{OV} / v_\nu \quad o \in O \setminus \{0\} \quad (5.18)$$

$$t_o^O \leq \hat{T} - s_o^O - (d_o^O + d_{o0}^O) \sum_{\nu \in V} z_{o\nu}^{OV} / v_\nu \quad o \in O \setminus \{0\} \quad (5.19)$$

$$t_p^O \geq t_o^O + s_o^O + (d_o^O + d_{op}^O) \sum_{\nu \in V} z_{o\nu}^{OV} / v_\nu - (1 - x_{op})\hat{T} \quad o, p \in O \setminus \{0\} \mid o \neq p \quad (5.20)$$

Die Startzeitpunkte der Ausführungsoptionen müssen für die Berücksichtigung von Auftragsterminen in Fertigstellungszeitpunkte der Aufträge überführt werden. Die Ungleichungen (5.21) beschränken dafür den Fertigstellungszeitpunkt der Aufträge einer Ausführungsoption auf deren Startzeitpunkt zuzüglich der Service- und Fahrzeiten, die bis zur Fertigstellung des jeweiligen Auftrags anfallen. Der Fertigstellungszeitpunkt eines Auftrags wird in den Ungleichungen (5.22) seinem Termin, sofern der jeweilige Auftrag einen Termin besitzt, gegenübergestellt. Die Variable  $y_a^T$  kann nur den Wert 1 annehmen, sofern der Fertigstellungszeitpunkt des Auftrags  $a$  seinen Termin nicht überschreitet. Da der Fertigstellungstermin eines nicht ausgeführten Auftrags keine sinnvolle Angabe darstellt, beschränken die Ungleichungen (5.23) die pünktliche Erfüllung auf durchgeführte Aufträge.

$$t_a^A \geq t_o^O + s_{oa}^{OA} + d_{oa}^{OA} \sum_{\nu \in V} z_{o\nu}^{OV} / v_\nu \quad o \in O \setminus \{0\}, a \in A_o^O \quad (5.21)$$

$$t_a^A \leq e_a + (1 - y_a^T)\hat{T} \quad a \in A^T \quad (5.22)$$

$$y_a^T \leq y_a \quad a \in A^T \quad (5.23)$$

Die weiteren Restriktionen bilden Anforderungen, die sich aus Auftragsketten ergeben, ab. Die Ungleichungen (5.24) setzen für die Ausführung des zweiten Auftrags einer Vorrangbeziehung die Durchführung des ersten Auftrags voraus. Die Durchführung von Aufträgen einer Kette mit einem Fahrzeug wird über die Ungleichungen (5.25) sichergestellt. Die Ausführungsoptionen des Auftrags  $b$  einer Vorrangbeziehung  $(a, b)$  können einem

Fahrzeug nur zugeordnet werden, sofern in Verbindung mit Gleichungen (5.4) genau eine Ausführungsoption des Auftrags  $a$  demselben Fahrzeug zugeordnet wurde. Eine Zuordnung von Ausführungsoptionen von Aufträgen einer Kette auf verschiedene Fahrzeuge ist damit nicht möglich. Die zeitliche Reihenfolge von Aufträgen einer Kette beziehungsweise deren Ausführungsoptionen legen die Ungleichungen (5.26) fest. Sie garantieren, dass der Startzeitpunkt einer Ausführungsoption  $p$  eines Nachfolgauftrags, sofern dieser durchgeführt wird, nicht vor dem Startzeitpunkt einer Ausführungsoption  $o$  des vorausgehenden Auftrags liegt. In Verbindung mit den Ungleichungen (5.20) kann bei Wahl beider Ausführungsoptionen  $o$  und  $p$  die Ausführung der Ausführungsoption  $p$  nicht vor Abschluss der Ausführungsoption  $o$  beginnen.

$$y_b \leq y_a \quad (a, b) \in \mathcal{P} \quad (5.24)$$

$$\sum_{o \in O_b} z_{ov}^{OV} \leq \sum_{o \in O_a} z_{ov}^{OV} \quad (a, b) \in \mathcal{P}, \nu \in V \quad (5.25)$$

$$t_p^O - t_o^O \geq \left[ \sum_{\nu \in V} (z_{ov}^{OV} + z_{p\nu}^{OV}) - 2 \right] \hat{T} \quad (a, b) \in \mathcal{P}, o \in O_a, p \in O_b \quad (5.26)$$

Innerhalb von Auftragsketten kommt es zur Verwendung eines konkreten Behälters für mehrere Aufträge. Dabei handelt es sich entweder um einen bereits bekannten Behälter, beispielsweise bei dem Transport eines Behälters mit anschließendem Abtransport, oder eine Entscheidung über den Behältertyp wird im Rahmen der Einplanung des ersten Auftrags einer Kette getroffen. Für Auftragsketten mit einer Behälterentscheidung im ersten Auftrag, einer Behälter- oder Materiallieferung, und einer Behälter- oder Materialabholung als abschließendem Auftrag muss sichergestellt werden, dass der verwendete Behältertyp konsistent ist. Dies erfolgt, indem die Verwendungsmöglichkeiten im abschließenden Auftrag der Kette durch die getroffene Behälterentscheidung des ersten Auftrags eingeschränkt werden. Die Ungleichungen (5.27) beschränken hierfür die wählbaren Ausführungsoptionen des abhängigen Auftrags  $b$  durch die gewählte Ausführungsoption des Auftrags  $a$ , die die Entscheidung über den Behältertyp beinhaltet.

$$\sum_{\nu \in V} \left( \sum_{o \in O_b | b_o = b} z_{ov}^{OV} - \sum_{o \in O_a | b_o = b} z_{ov}^{OV} \right) \leq 0 \quad (a, b) \in \mathcal{B}, b \in B \quad (5.27)$$

In den Formeln (5.28) - (5.34) erfolgt abschließend die Definition der Variablen. Für die Variablen  $x_{oo}$  wird unterstellt, dass diese auf den Wert 0 festgelegt sind. Eine Fahrt von einer Ausführungsoption zu sich selbst, ist somit ausgeschlossen.

$$x_{op} \in \{0, 1\} \quad o, p \in O \quad (5.28)$$

$$y_a \in \{0, 1\} \quad a \in A \quad (5.29)$$

$$y_a^T \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A^T \quad (5.30)$$

$$z_{ov}^{OV} \in \{0, 1\} \quad o \in O, \nu \in V \quad (5.31)$$

$$z_{w\nu}^{WV} \in \{0, 1\} \quad w \in W, \nu \in V \quad (5.32)$$

$$t_o^O \geq 0 \quad o \in o \setminus \{0\} \quad (5.33)$$

$$t_a^A \geq 0 \quad a \in A \quad (5.34)$$

### 5.3.2 Integration einer Pause

Die Erstellung von Arbeitsplänen erfordert die Einhaltung von Vorschriften zu Arbeitszeiten. Für den Plan eines einzelnen Arbeitstages gehört hierzu die Berücksichtigung von Pausenzeiten. Dabei ist nicht zwangsläufig das konkrete Festlegen einer Pausenzeit notwendig. Es genügt, wenn der Arbeitsplan die Integration einer regelkonformen Pause ermöglicht. Eine mögliche Regelung zu Pausenzeiten ist die Vorgabe eines zeitlichen Korridors  $[H^a, H^e]$ , innerhalb dessen eine Pause vorgegebener Dauer  $H^d$  begonnen werden muss. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass keine weiteren Anforderungen, insbesondere den Pausenort betreffend, an das Einlegen einer Pause gestellt werden.

Die Relevanz einer Pausenregelung für die Erstellung eines Arbeitsplans hängt von ihren Auswirkungen auf dessen Zulässigkeit und Bewertung ab. Das im vorigen Abschnitt beschriebene Modell sieht Informationen mit Zeitbezug unter anderem in Form der Dauer der Planungsperiode sowie etwaigen Terminen von Aufträgen vor. Die Notwendigkeit einer Pause innerhalb des Planungshorizonts reduziert zunächst die zur Verfügung stehende produktive Arbeitszeit. Weiter kann der Fertigstellungszeitpunkt eines Auftrags durch eine Pause um deren Dauer nach hinten verschoben werden. Die Fertigstellungszeitpunkte von Aufträgen ergeben sich zunächst aus den gewählten Ausführungsoptionen und deren Reihenfolge in einer Tour. Der Fertigstellungszeitpunkt eines Auftrags verschiebt sich um die Pausendauer nach hinten, wenn die Pause vor Abschluss des Auftrags eingeplant wird. Eine Verschiebung durch die Pause ergibt sich damit zwangsläufig, wenn der Fertigstellungszeitpunkt ohne Berücksichtigung der Pausendauer hinter das Ende des Pausenkorridors fällt. Liegt ein Fertigstellungszeitpunkt vor oder auf dem Ende des Pausenkorridors, ist der Einschub einer Pause vor Abschluss des jeweiligen Auftrags nicht notwendig. Das bedeutet, die Notwendigkeit einer Pause muss lediglich für die Ter-

mintreue von Aufträgen mit Terminen nach dem Ende des Pausenkorridors betrachtet werden. Da der Umfang einer Verschiebung durch eine Pause in Form der Pausendauer bekannt ist, kann die Auswirkung der Pause auf die Termintreue von Aufträgen durch Modifikation der Termine abgebildet werden. Die Termine von Aufträgen, die nach dem Ende des Pausenkorridors liegen, sind dafür gemäß Formel (5.35) auf das Ende des Pausenkorridors zu setzen oder um die Pausendauer vorzuziehen, je nachdem was in einem späteren Zeitpunkt resultiert.

$$e_a := \max \{H^e, e_a - H^d\} \quad a \in A^T \mid e_a > H^e \quad (5.35)$$

Eine derartige Modifikation in Verbindung mit einer Verkürzung des Planungszeitraums um die Pausendauer gewährleistet die Integrierbarkeit einer regelkonformen Pause sowie eine korrekte Bewertung der Termintreue von Aufträgen. Damit erübrigt sich eine explizite Berücksichtigung einer Pause in einem mathematischen Modell beziehungsweise einem zugehörigen Planungsverfahren. Ist die Information, dass ein Auftrag erst nach einer notwendigen Pause eingeplant ist, jedoch für ein Modell anderweitig relevant, können wie folgt entsprechende binäre Variablen  $h_a$  nach Formel (5.36) in das Modell integriert werden. Die zuvor beschriebene Modifikation der Auftragstermine entfällt in diesem Fall. Die Verkürzung der maximalen Tourdauer um die Pausendauer,  $\hat{T} := \hat{T} - H^d$ , ist jedoch zu übernehmen.

$$h_a \in \{0, 1\} \quad a \in A \quad (5.36)$$

$$t_a^A \leq H^e + h_a(\hat{T} - H^e) \quad a \in A \quad (5.37)$$

$$h_a \leq y_a \quad a \in A \quad (5.38)$$

Die Beschränkung der Variablen  $h_a$  auf die Werte null und eins erfolgt in Formel (5.36). Die Ungleichungen (5.37) gewährleisten, dass die Variable  $h_a$  den Wert 1 annimmt, sofern der Fertigstellungszeitpunkt des zugehörigen Auftrags nicht vor Ende des Pausenkorridors liegt. Wird auf die Variable  $h_a$  kein zusätzlicher Druck über andere Restriktionen oder eine Einbeziehung in die Zielgröße ausgeübt, bedeutet ein Wert von 1 nicht zwangsläufig die Notwendigkeit einer Pause vor Fertigstellung des jeweiligen Auftrags. Mittels der Ungleichungen (5.38) wird die Notwendigkeit einer Pause vor Fertigstellung eines Auftrags durch die Variable zur Durchführung des jeweiligen Auftrags beschränkt. Für das bestehende Modell müssen schließlich die Ungleichungen (5.22) zur Prüfung einer pünktlichen Auftragsdurchführung gemäß (5.39) angepasst werden. Zu dem Fertigstellungszeit-

punkt wird in Abhängigkeit der Notwendigkeit einer vorherigen Pause die Pausendauer addiert und die Summe dem Termin des Auftrags gegenübergestellt.

$$t_a^A + h_a H^d \leq e_a + (1 - y_a^T) \hat{T} \quad a \in A^T \quad (5.39)$$

### 5.3.3 Priorisierung von Aufträgen

In realen Anwendungen stellt die Bewertung von Aufträgen mit Nutzenwerten eine Herausforderung dar. Der Nutzen eines Auftrags quantifiziert den Vorteil, der durch seine Ausführung entsteht. Da der Transport eines Gutes selbst nicht wertschöpfend ist, hängt sein Wert vom Kontext ab, in dem er stattfindet. Beispielsweise kann die Lieferung eines Ersatzteils für eine wichtige Maschine bedeutender sein als die Abholung von Abfällen. Die Bewertung eines Auftrags mittels einer Zahl, dem Nutzen, geht über eine derartige ordinale Sortierung hinaus, da sie einen quantitativen Vergleich von Aufträgen ermöglicht. Die Nutzenbewertung stellt eine Verhältnisskala für die Aufträge dar. Die Wahl geeigneter Nutzenwerte, die Verhältnisse der Aufträge untereinander geeignet abbilden, wird mit wachsender Auftragsmenge herausfordernder. Stammen Aufträge darüber hinaus von verschiedenen Auftraggebern, erschwert dies die Festlegung zusätzlich.

Wenngleich eine vollständig differenzierte Bewertung von Aufträgen nicht praktikabel erscheint, sind in der praktischen Anwendung häufig zumindest Priorisierungen möglich. Dabei kann es sich beispielsweise um eine Einordnung anhand der transportierten Materialien oder schlicht um Erfahrungswerte eines Disponenten handeln. Letzteres ermöglicht zudem die Einbeziehung kurzfristiger mündlicher Mitteilungen, die bei statischen Einstufungen unter Umständen schwer Berücksichtigung finden. Da die Problemstellung selbst keine Prioritätsstufen vorsieht, muss eine entsprechende Einstufung über eine geeignete Wahl beziehungsweise Modifikation der Nutzenwerte erfolgen. Eine mögliche Vorgehensweise zur Anpassung bestehender Nutzenwerte unter Vorgabe einer Priorisierung wird nachfolgend beschrieben.

Es werden Prioritäten  $\{1, 2, \dots, \hat{P}\}$  angenommen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit stelle Priorität 1 die niedrigste und  $\hat{P}$  die höchste Priorität dar. Jeder Auftrag ist einer Menge  $A_p$ , entsprechend seiner Priorität  $p$ , zugeordnet. Die Durchführung eines Auftrags der Priorität  $p$  soll der Umsetzung aller Aufträge niedrigerer Prioritätsstufen vorgezogen werden. Als Prioritätswert  $n_a^P$  eines Auftrags  $a$  wird ein modifizierter Nutzenwert bezeichnet, der diese Anforderung erfüllt und zugleich die Nutzenverhältnisse der Aufträge innerhalb der Prioritätsstufen bewahrt. Die Prioritätswerte gehen als Nutzenwerte



---

**Algorithmus 5.1:** Berechnung von Prioritätswerten  $n_a^P$  anhand einer Priorisierung  $A_p$  und Prioritäten  $p \in \{1, 2, \dots, \hat{P}\}$

---

```

1  $p := 1$ 
2  $S := 0$ 
3 for  $a \in A_p$  do
4    $n_a^P := n_a$ 
5    $S := S + n_a^P$ 
6 while  $p < \hat{P}$  do
7    $p := p + 1$ 
8    $S' := S + 1$ 
9   for  $a \in A_p$  do
10   $n_a^r := n_a S'$ 
11   $S := S + n_a^r$ 

```

---

in die Problemstellung ein. Der Autor schlägt für ihre Berechnung das Vorgehen gemäß Algorithmus 5.1 vor. Bezüglich der Nutzenwerte der Aufträge werden Werte größer gleich Eins angenommen. Die Prioritätswerte der Aufträge der Priorität 1 entsprechen deren Nutzenwerten. Für alle weiteren Prioritäten wird der Prioritätswert durch Multiplikation mit der Summe aller Prioritätswerte der bereits betrachteten Prioritäten  $S'$  gebildet. Die Addition von Eins bei der Bestimmung des Multiplikators  $S'$  ist notwendig, um bei genau einem Auftrag mit Priorität 1 und Nutzenwerten von Eins, beispielsweise aufgrund der Zielstellung die Anzahl der durchgeführten Aufträge zu maximieren, gleiche Prioritätswerte für Aufträge der Prioritäten 1 und 2 zu unterbinden.

Auftrag $a$	$n_a$	$n_a^P$
$A_1$		
1	2	2
2	1	1
$A_2$		
3	2	8
4	4	16
$A_3$		
5	1	29

**Tabelle 5.4:** Beispiel zur Bestimmung von Prioritätswerten

In Tabelle 5.4 sind exemplarisch fünf Aufträge, aufgeteilt auf die Prioritäten  $\{1, 2, 3\}$ , mit ihren Nutzenwerten und den nach Algorithmus 5.1 resultierenden Prioritätswerten angegeben. Zu Beginn der Bestimmung der Prioritätswerte gilt  $S' = 0$  und die Nutzenwerte der Aufträge 1 und 2, als Aufträge mit Priorität 1, werden als Prioritätswerte  $n_1^P = 2$  und  $n_2^P = 1$  übernommen. Anschließend werden die Prioritätswerte der beiden Aufträge

zu  $S'$  hinzuaddiert. Nach Vergrößerung von  $S'$  um eins gilt  $S' = 4$ . Die Prioritätswerte der Aufträge mit Priorität 2, Auftrag 3 und Auftrag 4, resultieren aus der Multiplikation ihres Nutzenwertes mit  $S'$  zu  $n_3^P = 2 \cdot 4 = 8$  und  $n_4^P = 4 \cdot 4 = 16$ . Die Addition der Prioritätswerte  $n_3^P$  und  $n_4^P$  sowie des Wertes eins zu  $S'$  führt zu  $S' = 29$ . Der Prioritätswert des Auftrags 5 ergibt sich schließlich als  $n_5^P = 29$ .

## 5.4 Konstruktionsverfahren

In diesem Abschnitt wird ein heuristisches Vorgehen zur Ermittlung einer zulässigen Lösung für die in Abschnitt 5.1 erläuterte und in Unterabschnitt 5.3.1 als mathematisches Modell formalisierte Problemstellung beschrieben. Das Vorgehen basiert auf dem zweiten Verfahren von Laporte und Martello (1990) für das Orienteering Problem und stellt eine Einfügeheuristik dar. Bei dieser Verfahrensart wird eine Lösung schrittweise konstruiert. Dabei werden mögliche Erweiterung einer bestehenden Lösung, anfangs der leeren Startlösung, bewertet, die beste Option ausgewählt und in die bestehende Lösung integriert. Die Darstellung einer Lösung erfolgt im Rahmen der Heuristik als eine Menge von Touren, die wiederum aus einer Abfolge von Ausführungsoptionen bestehen. Jede mögliche Erweiterung einer Tour setzt sich aus einer einzufügenden Ausführungsoption  $o$  und einer Einfügeposition  $(p, q)$ , zwischen zwei eingeplanten und aufeinanderfolgenden Ausführungsoptionen  $p$  und  $q$ , innerhalb der Tour zusammen. Ein Paar aus Ausführungsoption und Einfügeposition  $(o, (p, q))$  wird im Folgenden als Einfügeoption bezeichnet.

---

### Algorithmus 5.2: Überblick des Konstruktionsverfahrens

---

```

1 while Aufträge und Mitarbeiter-Fahrzeug-Kombinationen vorhanden und
   maximale Tourenanzahl noch nicht erreicht do
2   | Wahl einer Mitarbeiter-Fahrzeug-Kombination;
3   | while Nutzenbringende kompatible Ausführungsoptionen vorhanden do
4   |   | Wahl der besten Einfügeoption;
5   |   | Einplanung der gewählten Option;
6   |   | Aktualisierung der Tourdauer;
7   |   | Anpassung der verfügbaren Ausführungsoptionen;

```

---

Der Ablauf des Verfahrens ist in Algorithmus 5.2 skizziert. Das Verfahren startet mit einem leeren Tourenplan. Solange eine kompatible Kombination aus Mitarbeiter und Fahrzeug sowie durchführbare Aufträge vorhanden sind und die maximale Tourenanzahl noch nicht erreicht ist, wird ein Mitarbeiter-Fahrzeug-Paar gewählt. Für diese Kombination wird anschließend eine Tour konstruiert. Dafür wird in jeder Iteration die beste Einfügeoption, bestehend aus Ausführungsoption und Einfügeposition, bestimmt und

diese, sofern sie zu einer Verbesserung der Zielgröße führt, realisiert. Die verwendete Bewertung der Einfügeoptionen basiert auf einer Gegenüberstellung ihres Nutzens und Aufwands. Der Nutzen  $\Delta n$  stellt die Bewertungsänderung einer Tour dar, die bei Implementierung einer Einfügeoption resultiert. Demgegenüber steht  $\Delta t$  für die Änderung der Tourdauer durch ihre Einplanung. Konkret wird die Rentabilität  $r = \Delta n / \Delta t$ , als Nutzenzuwachs je zusätzlich aufgewendeter Zeiteinheit, zur Bewertung von Einfügeoptionen verwendet. Bei der Bestimmung der besten Einfügeoption werden die Komponenten der bislang besten ermittelten Einfügeoption, die zugehörige Ausführungsoption als  $o^*$ , die vorausgehende Ausführungsoption als  $p^*$  und die zugehörige Rentabilität als  $r^*$  bezeichnet. Wird eine Einfügeoption realisiert, das heißt die zugehörige Ausführungsoption an der betreffenden Stelle in die Tour eingeplant, erfolgt eine Aktualisierung der verfügbaren Ausführungsoptionen. Dabei werden beispielsweise alternative Ausführungsoptionen des beziehungsweise der soeben eingeplanten Aufträge entfernt und bei Verwendung eines Behälters von einer Behälter- oder Materialquelle deren Bestand aktualisiert. Können einer Tour, beispielsweise aufgrund einer ausgeschöpften Tourdauer, keine weiteren Ausführungsoptionen hinzugefügt werden, beginnt gegebenenfalls die Erstellung einer weiteren Tour.

Im Folgenden werden die Komponenten des Verfahrens näher erläutert. Zunächst wird in Unterabschnitt 5.4.1 auf die Auswahl von Mitarbeiter-Fahrzeug-Kombinationen und in Unterabschnitt 5.4.2 auf die notwendigen Schritte bei Einplanung einer Ausführungsoption eingegangen. Anschließend wird in den Unterabschnitten 5.4.3 und 5.4.4 die Bewertung von Ausführungsoptionen von Aufträgen ohne und mit einem Nachfolgeauftrag erläutert. In Unterabschnitt 5.4.5 wird die Ermittlung einer bestbewerteten Einfügeoption zusammengefasst dargestellt. Als Modifikation des Verfahrens wird neben der aufeinanderfolgenden Konstruktion einzelner Touren die parallele Konstruktion mehrerer Touren in Unterabschnitt 5.4.6 betrachtet. Schließlich wird in Unterabschnitt 5.4.7 eine Möglichkeit zur Randomisierung des Verfahrens vorgestellt.

### 5.4.1 Sequentielle Auswahl von Fahrzeug-Mitarbeiter-Kombinationen

Die Wahl eines Fahrzeugs  $\nu$  und eines Mitarbeiters  $w$  als Besetzung einer Tour hat Einfluss auf die durchführbaren Aufträge. Bezüglich des Fahrzeugs ist die Menge  $B_\nu^V$  verwendbarer Behältertypen und betreffend den Mitarbeiter die Menge  $M_w^W$  handhabbarer Materialien relevant. Die Kompatibilität von Fahrzeugen und Mitarbeitern schließt außerdem manche Kombinationen von vornherein aus. Die Auswahl einer Tourbesetzung

orientiert sich an dem Nutzen der Aufträge, die von dieser Besetzung ausgeführt werden können. Dafür wird zunächst der maximale Nutzen eines Auftrags  $\hat{n}_a$  in Gleichung (5.40) definiert. Der maximale Auftragsnutzen entspricht mindestens dem Nutzen  $n_a$  des Auftrags. Sofern ein Auftrag einen Termin besitzt, kommt der Nutzenwert zur Einhaltung des Termins hinzu.

$$\hat{n}_a = \begin{cases} n_a & a \in A \setminus A^T \\ n_a + n_a^T & a \in A^T \end{cases} \quad (5.40)$$

Die Auswahl der Fahrzeug-Mitarbeiter-Kombinationen verfolgt das Ziel, einen möglichst attraktiven Teil der Auftragsmenge abzudecken. Ausgehend von den maximalen Auftragsnutzen kann für jede Kombination aus Fahrzeug und Mitarbeiter ein Nutzenpotential  $N_{\nu w}^P$  wie folgt bestimmt werden:

$$N_{\nu w}^P := \begin{cases} v_\nu \sum_{a \in A | m_a^A \in M_w^W, B_a^A \subseteq B_\nu^V} \hat{n}_a & \nu \in V_w^W \\ 0 & \nu \notin V_w^W \end{cases} \quad \nu \in V, w \in W \quad (5.41)$$

Das Nutzenpotential einer Tourbesetzung besitzt den Wert 0, sofern ein Fahrzeug von einem Mitarbeiter nicht genutzt werden kann. Andernfalls wird der maximale Auftragsnutzen aller von der Tourbesetzung durchführbaren Aufträge aufsummiert und mit der Fahrzeuggeschwindigkeit gewichtet. Durchführbar ist ein Auftrag von einer Tourbesetzung, wenn ein zu bewegendes Material vom Mitarbeiter gehandhabt werden darf und ein zu bewegendes Behälter mit dem Fahrzeug kompatibel ist. Bei Behälter- und Materiallieferungen, bei denen im Allgemeinen ein Behältertyp aus einer Menge möglicher Typen ausgewählt werden muss, genügt die Kompatibilität des Fahrzeugs mit einem der möglichen Behältertypen. Die Gewichtung der Nutzenwerte mit der Fahrzeuggeschwindigkeit dient der Einbeziehung des begrenzten Planungshorizonts. Da für die Durchführung der Aufträge neben den Servicezeiten vor allem Aufwand in Form von Fahrzeiten anfällt, können mit einem Fahrzeug mit größerer Geschwindigkeit tendenziell mehr Aufträge durchgeführt werden. Mit Ausnahme der Behältertransporte sind den Aufträgen keine konkreten Fahrstrecken zugeordnet. Es wird davon ausgegangen, dass die Verteilung der Behälter- und Materialorte zu in der Größenordnung vergleichbaren Fahrstrecken für die übrigen Auftragsstypen führt. Bei der Bestimmung des Nutzenpotentials wird daher auf die Einbeziehung von Fahrstrecken verzichtet. Weitere Restriktionen, beispielsweise begrenzte Bestände an leeren Behältern oder die Dauer des Planungshorizontes, gehen ebenfalls nicht in die Bestimmung des Nutzenpotentials ein.

Der Verfahrensablauf in Bezug auf die Wahl von Tourbesetzungen ist in Algorithmus 5.3 dargestellt. Die Anzahl bereits geplanter Touren wird durch die Variable  $f$  erfasst. Solange die maximale Tourenanzahl nicht erreicht ist und verfügbare Fahrzeuge  $V'$  und Mitarbeiter  $W'$  vorhanden sind, wird jene Fahrzeug-Mitarbeiter-Kombination mit dem größten Nutzenpotential ausgewählt.

Eine gewählte Tourbesetzung besitzt eine Menge  $A'$  verfügbarer Aufträge und je Auftrag  $a$  eine Menge  $O'_a$  verfügbarer Ausführungsoptionen sowie eine Menge  $O_a^z$  verfügbarer zugeordneter Ausführungsoptionen. Diese entsprechen zu Beginn des Verfahrens allen Aufträgen und deren Ausführungsoptionen  $O_a$  beziehungsweise  $O_a^z$ , die mit der Tourbesetzung durchführbar sind. Wurden bereits Touren geplant, stehen im Allgemeinen nur noch Teilmengen dieser Mengen zur Verfügung. Die Vereinigung aller verfügbaren Ausführungsoptionen wird mit  $O'$  bezeichnet. Die Menge möglicher Behältertypen einer Ausführungsoption  $B'_o$  stellt eine Teilmenge der Menge  $B_o$  dar. Einschränkungen der Behältertypen können aus aufgebrauchten Beständen oder den von einem Fahrzeug nutzbaren Behältertypen resultieren. Die Vereinigung der Mengen verfügbarer Behältertypen aller verfügbaren Ausführungsoptionen eines Auftrags  $\bigcup_{o \in O'_a} B'_o$  bildet die Menge  $B'_a$  der für einen Auftrag  $a$  nutzbaren Behältertypen. Mithilfe dieser Informationen wird, gemäß dem in den folgenden Unterabschnitten erläuterten Vorgehen, eine Tour für die Tourbesetzung ermittelt. Anschließend werden die Nutzenpotentiale der verbleibenden Fahrzeug-Mitarbeiter-Kombinationen angepasst. Dafür ist der Beitrag nicht mehr verfügbarer Aufträge aus den Nutzenpotentialen zu entfernen. Aufträge stehen nicht mehr zur Verfügung, wenn sie bereits eingeplant wurden oder aufgrund fehlender Ressourcen nicht mehr durchgeführt werden können. Außerdem ist eine Berücksichtigung nicht eingeplanter Aufträge begonnener Auftragsketten in anderen Touren ausgeschlossen. Eine begonnene Auftragskette liegt vor, wenn mindestens der erste Auftrag, jedoch nicht alle Aufträge der Auftragskette eingeplant wurde. Nach Aktualisierung der Nutzenpotentiale wird die nächste Tourbesetzung bestimmt. Dieses Vorgehen wird wiederholt bis entweder die maximale Tourenanzahl erreicht ist oder keine Tourbesetzung mit positivem Nutzenpotential mehr zur Verfügung steht. Letzteres kann entweder auf das Fehlen einer weiteren zulässigen Fahrzeug-Mitarbeiter-Kombination, dem Fehlen von Aufträgen oder mangelnden Behälterbeständen zur Durchführung der offenen Aufträge zurückzuführen sein.

**Algorithmus 5.3:** Sequentielle Konstruktion von Touren

---

```

1  $f := 0;$ 
2  $V' := V;$ 
3  $W' := W;$ 
4 while  $f < \hat{F}$  und  $|V'| > 0$  und  $|W'| > 0$  do
5    $(\nu, w) := \operatorname{argmax}_{(\nu, w) | \nu \in V', w \in W'} N_{\nu w}^P;$ 
6   if  $N_{\nu w}^P := 0$  then
7     break;
8   Ermittle Tour für Besetzung  $(\nu, w);$ 
9    $V' := V' \setminus \{\nu\};$ 
10   $W' := W' \setminus \{w\};$ 
11  Aktualisiere Nutzenpotentiale  $N_{\nu w}^P$  für  $\nu \in V', w \in W';$ 
12   $f := f + 1;$ 

```

---

**5.4.2 Einplanung von Ausführungsoptionen**

Die Umsetzung einer Einfügeoption  $(o, (p, q))$  entspricht der Einplanung der Ausführungsoption  $o$  zwischen die aufeinanderfolgenden Ausführungsoptionen  $p$  und  $q$ . Dabei ist zu gewährleisten, dass aufgrund des Einfügens der Ausführungsoption die maximale Tourdauer nicht überschritten wird. Abhängig von der konkreten Ausführungsoption und den enthaltenen Aufträgen sind weitere Festlegungen zu treffen. So ist gegebenenfalls ein zu verwendender Behältertyp auszuwählen. Besitzt ein Auftrag der Ausführungsoption einen Termin, der bei Einplanung an der gegebenen Position eingehalten wird, geht der Nutzenwert für dessen Einhaltung in die Bewertung der Tour ein. Durch zukünftige Einplanungen an vorausgehenden Positionen der Tour kann ein zunächst eingehaltener Termin verletzt werden und der Nutzen für dessen Einhaltung entfallen. Die Verzögerung, ab der für einen eingeplanten Auftrag  $a$  ein eingehaltener Termin verletzt wird, ergibt sich aus der Differenz seines Termins und seines aktuellen Fertigstellungszeitpunktes. Dieser Wert wird als kritische Verschiebung  $\delta_a^t$  gespeichert. Bei Einplanung einer Ausführungsoption ist dieser Wert für die beteiligten Aufträge der Ausführungsoption erstmalig zu bestimmen und im Weiteren zu aktualisieren, sofern an einer vorausgehenden Position der Tour eine Ausführungsoption eingeplant wird. Die notwendigen Schritte bei Einplanung einer Ausführungsoption werden im Folgenden erläutert.

Wird eine Ausführungsoption  $o$  in einer Tour eingeplant, stehen alternative Ausführungsoption der betroffenen Aufträge  $A_o^O$  nicht mehr zur Verfügung. Die Aufträge und ihre Ausführungsoptionen sind aus der Menge der verfügbaren Aufträge beziehungsweise Ausführungsoptionen zu entfernen.

Die Zeitzulässigkeit einer Tour ist gewährleistet, wenn keine Einfügeoption umgesetzt

wird, die zu einer Überschreitung der maximalen Tourdauer führt. Dafür wird bei Erstellung einer Tour die verbleibende Tourdauer  $T^r$ , initialisiert mit der maximalen Tourdauer, fortgeschrieben. Würde die maximale Tourdauer durch eine Einplanung überschritten, das heißt die verbleibende Tourdauer den Wert null unterschreiten, kann diese nicht durchgeführt werden. Es wird angenommen, dass zu Beginn des Verfahrens ausschließlich Ausführungsoptionen in der Menge der verfügbaren Ausführungsoptionen enthalten sind, die durch das jeweilige Fahrzeug der Tour innerhalb des Planungshorizonts durchgeführt werden können. In einer Iteration zur Erweiterung einer Tour wird zunächst gemäß dem in Unterabschnitt 5.4.5 beschriebenen Vorgehen eine bestbewertete Einfügeoption, bestehend aus einer verfügbaren Ausführungsoption und einer Einfügeposition, ermittelt. Sofern die verbleibende Tourdauer für die Einplanung der Einfügeoption ausreicht, wird diese realisiert. Andernfalls ist die Einplanung der Einfügeoption zeitunzulässig und kann nicht erfolgen. Die Ausführungsoption der Einfügeoption wird in diesem Fall aus der Menge der verfügbaren Ausführungsoptionen entfernt. Eine Einplanung in der Tour, insbesondere auch an anderen Positionen der Tour, ist damit nicht mehr möglich. Dieses Vorgehen stellt eine Vereinfachung, um eine Verwaltung der verfügbaren Ausführungsoptionen je Einfügeposition zu vermeiden, dar. Die Einplanung der Ausführungsoption an einer anderen Position der Tour kann zeitzulässig sein, jedoch aufgrund eines geringeren Nutzens, durch Verletzung bislang eingehaltener Termine nachfolgender Aufträge, eine geringere Rentabilität aufweisen und nicht als bestbewertete Einfügeoption ermittelt worden sein.<sup>32</sup> Wurde die bestbewertete Einfügeoption als zeitunzulässig verworfen, wird für alle verbleibenden verfügbaren Ausführungsoptionen geprüft, ob mindestens eine zeitzulässige Einfügeposition existiert. Kann für eine Ausführungsoption keine zulässige Position bestimmt werden, wird die Ausführungsoption und gegebenenfalls der zugehörige Auftrag aus der Menge der verfügbaren Ausführungsoptionen beziehungsweise Aufträge entfernt. Das Entfernen aller Ausführungsoptionen, für die keine zeitzulässige Einfügeposition existiert, beschleunigt das Ende der Erstellung einer Tour. Die Entfernung einer Ausführungsoption aus der Menge der verfügbaren Ausführungsoptionen ist damit bei ihrer Einplanung, der Ermittlung als Teil der bestbewerteten, jedoch zeitunzulässigen Einfügeoption sowie als Ausführungsoption ohne zeitzulässige Einfügeposition bei Verwerfen der bestbewerteten Ausführungsoption möglich.

Betrifft eine einzuplanende Ausführungsoption ausschließlich eine Behälter- oder Materiallieferung, erfordert ihre Einplanung die Festlegung eines zu verwendenden Behältertyps

---

<sup>32</sup> Das beschriebene Vorgehen zielt auf die Verwendung des Konstruktionsverfahrens in einem Multi-Start-Verfahren gemäß Unterabschnitt 5.4.7 für Instanzen mit einem Auftragsüberschuss, das heißt mehr Aufträgen als im Planungshorizont durchgeführt werden können, ab. Bei einer deterministischen Anwendung, insbesondere bei einem geringen Auftragsüberhang, bietet die Verwaltung der verfügbaren Ausführungsoptionen je Einfügeposition Verbesserungspotential.

---

**Algorithmus 5.4:** Einplanung von Ausführungsoptionen  $o$  mit Behälterentscheidung

---

```

1 if  $b_o^q \geq 0$  then
2    $b := \operatorname{argmax}_{i \in B^R} L_{b_o^q i}^B$ ;
3    $L_{b_o^q b}^B := L_{b_o^q b}^B - 1$ ;
4   if  $L_{b_o^q b}^B = 0$  then
5     foreach  $p \in O' \mid b_p^q = b_o^q$  und  $b \in B_p'^O$  do
6        $B_p'^O := B_p'^O \setminus \{b\}$ ;
7       if  $|B_p'^O| = 0$  then
8          $a :=$  Auftrag der Ausführungsoption  $p$ ;
9          $O'_a := O'_a \setminus \{p\}$ ;
10        if  $|O'_a| = 0$  then
11           $A' := A' \setminus \{a\}$ ;
12 else if  $A_o^O \subseteq D^M$  und  $b_o^q < 0$  then
13    $b := \operatorname{argmax}_{i \in B^R} L_{m_o^q m_o i}^{MB}$ ;
14    $L_{m_o^q m_o b}^{MB} := L_{m_o^q m_o b}^{MB} - 1$ ;
15   if  $L_{m_o^q m_o b}^{MB} = 0$  then
16     foreach  $p \in O' \mid A_p^O \subseteq D^M$  und  $m_p^q = m_o^q$  und  $b_p^q < 0$  und  $b \in B_p'^O$  do
17        $B_p'^O := B_p'^O \setminus \{b\}$ ;
18       if  $|B_p'^O| = 0$  then
19          $a :=$  Auftrag der Ausführungsoption  $p$ ;
20          $O'_a := O'_a \setminus \{p\}$ ;
21         if  $|O'_a| = 0$  then
22            $A' := A' \setminus \{a\}$ ;

```

---

aus der Menge der für die Ausführungsoption verfügbaren Behältertypen  $B_o'^O$ . Gehört die einzuplanende Ausführungsoption zu einem Auftrag innerhalb einer Auftragskette, an deren Ende eine Behälter- oder Materialabholung steht, kommen Erwägungen zur Weiterverwendbarkeit des gewählten Behälters hinzu. Die zugehörigen Überlegungen sind in Unterabschnitt 5.4.4 dargestellt. An dieser Stelle wird von einer Menge  $B^R$  wählbarer Behältertypen ausgegangen, die im Fall von Einzelaufträgen, die nicht Teil einer Auftragskette sind, der Menge  $B_o'^O$  entspricht. Die Festlegung des Behältertyps aus einer Menge möglicher Behältertypen wird im Weiteren als Behälterentscheidung bezeichnet. Das Vorgehen bei einer Behälterentscheidung ist in Algorithmus 5.4 exklusive der Auswirkung auf Auftragsketten dargestellt. Die Ausführungsoptionen mit Behälterentscheidung beinhalten entweder eine Behälter- oder eine Materialquelle als Ursprungsort eines Behälters. Ausführungsoptionen, die einen Behälterort als Quelle eines Behälters beinhalten, das heißt für die  $b_o^q \geq 0$  gilt, betreffen nach Tabelle 5.3 ausschließlich entweder eine Behälter- oder eine Materiallieferung. In beiden Fällen stellt der Behälterort einen leeren Behälter für den jeweiligen Auftrag zur Verfügung. Materialorte können als Quelle dagegen sowohl



Material als auch mit Material beladene Behälter zur Verfügung stellen. Als Quelle eines (beladenen) Behälters fungieren Materialorte nur in Ausführungsoptionen, die ausschließlich eine Materiallieferung betreffen und die keine Behälterquelle beinhalten, das heißt für die die Menge der von der Ausführungsoption betroffenen Aufträge  $A_o^O$  eine Teilmenge der Menge der Materiallieferungen  $D^M$  ist und für die  $b_o^q < 0$  gilt. Der Bestand der wählbaren Behältertypen an der Quelle entscheidet über den zu verwendenden Behältertyp. Gewählt wird der Behältertyp, der an der Behälter- beziehungsweise Materialquelle den größten Bestand aufweist. Bei Gleichheit der Bestände zweier Behältertypen erfolgt die Auswahl nach einer beliebigen, aber festen Sortierung der Behältertypen. Dabei kann es sich beispielsweise um einen zugewiesenen Index handeln. Das Aufbrauchen des Bestands eines Behältertyps kann die Durchführbarkeit anderer Ausführungsoptionen, die die gleiche Behälter- beziehungsweise Materialquelle sowie den gewählten Behältertyp umfassen, einschränken. Die Wahl des Behältertyps mit dem größten Bestand zielt darauf ab, derartige Einschränkungen zu vermeiden. Wurde ein Behältertyp  $b$  gewählt, so ist zunächst der zugehörige Bestand  $L_{ib}^B$  beziehungsweise  $L_{im_o b}^{MB}$  an der genutzten Quelle  $i$ , mit  $m_o$  als dem in der Ausführungsoption zu transportierenden Material, um eine Einheit zu reduzieren. Liegt weiterhin ein Bestand des gewählten Behältertyps vor, sind keine weiteren Anpassungen notwendig. Andernfalls muss der gewählte Behältertyp aus der Menge der wählbaren Behältertypen  $B_p^O$  aller Ausführungsoptionen, die die genutzte Quelle in der gleichen Form wie die eingeplante Ausführungsoption beanspruchen, das heißt als Quelle eines leeren beziehungsweise eines beladenen Behälters, und für die der gewählte Behältertyp infrage kommt, entfernt werden. Sollte die Menge der verfügbaren Behältertypen einer Ausführungsoption dadurch leer werden, steht die Ausführungsoption nicht weiter zur Verfügung und ist aus der Menge der verfügbaren Ausführungsoptionen  $O_a$  des betroffenen Auftrags  $a$  zu entfernen. Handelt es sich bei einer entfernten Ausführungsoption um die letzte verfügbare Ausführungsoption eines Auftrags, ist dessen Einplanung in der aktuellen Tour nicht mehr möglich und er ist aus der Menge der verfügbaren Aufträge  $A'$  zu entfernen.

Stellt eine eingeplante Behälter- oder Materiallieferung den Beginn einer Auftragskette dar, legt die getroffene Behälterentscheidung auch den Behältertyp der nachfolgenden Aufträge und deren Ausführungsoptionen fest. Dabei können Ausführungsoptionen aus der Menge verfügbarer Ausführungsoptionen entfallen, falls der gewählte Behältertyp nicht Teil der möglichen Behältertypen der jeweiligen Ausführungsoption ist. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn der gewählte Behältertyp im Rahmen einer Behälterabholung nicht zur Behältersenke einer Ausführungsoption gebracht werden darf oder eine Ausführungsoption die Weiterverwendung für eine andere Behälter- oder Materiallieferung vorsieht, der gewählte Behältertyp jedoch dafür nicht infrage kommt. Aufträge,

deren aktualisierte Menge verfügbarer Ausführungsoptionen leer ist, sind für die in Planung befindliche Tour nicht weiter zu berücksichtigen. Werden Aufträge, die als Teil einer Auftragskette nachfolgende Aufträge besitzen, aus der Menge der verfügbaren Aufträge entfernt, gilt dies auch für die nachfolgenden Aufträge der Auftragskette. Unabhängig von Behälterentscheidungen ist bei Einplanung einer Ausführungsoption  $o$  ihre Auftragsmenge  $A_o^O$  aus der Menge der verfügbaren Aufträge  $A'$  zu entfernen. Ebenso müssen für alle verbleibenden Aufträge die Ausführungsoptionen, die einen der entfernten Aufträge betreffen, aus den Mengen der verfügbaren Ausführungsoptionen entfernt werden.

Für Aufträge mit einem Termin legt der Zeitpunkt ihrer Fertigstellung fest, ob der Nutzenwert  $n_a^T$  Erlöst wird. Die Einplanung einer Ausführungsoption verlängert die Dauer der Tour und verschiebt die Startzeitpunkte nachfolgender Ausführungsoptionen und damit die Fertigstellungszeiten ihrer Aufträge um den gleichen Wert. Ursprünglich eingehaltene Termine können dadurch verletzt werden und der zugehörige Nutzenwert entfallen. Bei Einplanung einer Ausführungsoption zu Zeitpunkt  $\tau$  wird für in der Ausführungsoption enthaltene Aufträge, die einen Termin besitzen, geprüft, ob ihr Termin eingehalten wird. Ist dies der Fall, wird die Verzögerung der Ausführungsoption durch zukünftige Einplanungen an vorausgehenden Positionen der Tour, ab der der Termin des Auftrags verletzt wird, bestimmt. Dieser Wert wird als kritische Verschiebung  $\delta_a^t$  des Auftrags  $a$  gespeichert. Anhand dieses Wertes kann bei zukünftigen Einplanungen geprüft werden, ob der Termin des Auftrags weiter eingehalten wird oder nicht. Der zugehörige Nutzenverlust entspricht dem Nutzenwert der bisherigen Termineinhaltung  $n_a^T$  und ist daher nicht separat zu erfassen. Wird ein Auftragstermin nicht eingehalten, wird  $\delta_a^t$  auf den Wert  $\hat{T}$ , der eine durch weitere Einplanungen nicht erreichbare Verlängerung der Tour bedeutet, gesetzt. Im Folgenden wird auf die Bestimmung und Aktualisierung der kritischen Verschiebungen von Aufträgen eingegangen. Eine Bewertung von Einfügeoptionen, die die Verletzung von Terminen bereits eingeplanter Aufträge berücksichtigt, wird im nachfolgenden Unterabschnitt 5.4.3 erläutert.

---

**Algorithmus 5.5:** Bestimmung der kritischen Verschiebungen von Aufträgen bei Einplanung der Ausführungsoption  $o$  zu Zeitpunkt  $\tau$  mit Fahrzeug  $\nu$  |  $T(o, \tau, \nu)$

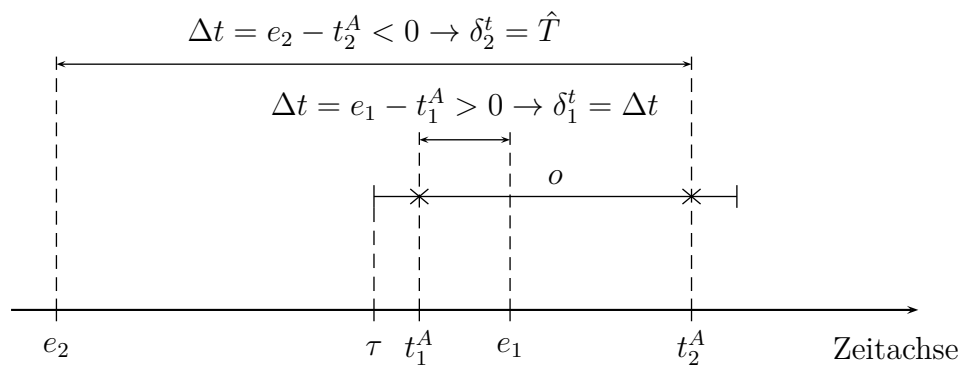
---

```

1 foreach  $a \in A_o^O \cap A^T$  do
2   |  $\Delta t := e_a - (\tau + s_{oa}^{OA} + d_{oa}^{OA}/v_\nu);$ 
3   | if  $\Delta t > 0$  then
4   |   |  $\delta_a^t := \Delta t;$ 
5   | else
6   |   |  $\delta_a^t := \hat{T};$ 

```

---



**Abbildung 5.3:** Bestimmung kritischer Verschiebungen

Die Ermittlung der kritischen Verschiebungen bei Einplanung einer Ausführungsoption  $o$  ist in Algorithmus 5.5 dargestellt. Zur Verwendung in nachfolgenden Algorithmen wird das Vorgehen als Funktion  $T(o, \tau, \nu)$  bezeichnet. Für jeden von der Ausführungsoption betroffenen Auftrag  $a$ , der einen Termin besitzt, wird die Existenz einer kritischen Verschiebung geprüft. Liegt der Fertigstellungszeitpunkt des Auftrags aufgrund des Startzeitpunktes  $\tau$  der eingeplanten Ausführungsoption vor seinem Termin, geht sein Nutzen für die Einhaltung seines Termins in die Zielfunktion ein. Die zukünftige Einplanung anderer Ausführungsoptionen an einer vorausgehenden Position der Tour kann jedoch zu einem Nutzenverlust durch Verletzung des zunächst eingehaltenen Termins führen. Der Nutzenverlust tritt ein, wenn die Verzögerung mindestens der Differenz  $\Delta t$  zwischen dem Termin des Auftrags  $e_a$  und seinem bisherigen Fertigstellungszeitpunkt  $t_a^A$  entspricht. Der Fertigstellungszeitpunkt eines von der Ausführungsoptionen umfassten Auftrags  $a$  aus der Menge  $A_o^O$  resultiert aus dem geplanten Startzeitpunkt der Ausführungsoption zuzüglich der nach Beginn der Ausführungsoption bis zur Fertigstellung des Auftrags aufzuwendenden Service-  $s_{oa}^{OA}$  und Fahrzeit  $d_{oa}^{OA}/v_v$ . Das verwendete Fahrzeug geht über seine Geschwindigkeit in die Berechnung der Fahrzeit ein. Bei Einhaltung eines Termins, das heißt einem Wert  $\Delta t > 0$ , entspricht die kritische Verschiebung des jeweiligen Auftrags dem Wert  $\Delta t$ . Wird der Termin eines Auftrags bereits bei Einplanung nicht eingehalten, ist im Weiteren kein Nutzenverlust aufgrund einer zeitlichen Verschiebung nach hinten möglich. Die kritische Verschiebung des Auftrags wird in diesem Fall auf den Wert  $\hat{T}$  gesetzt.

Abbildung 5.3 zeigt das Beispiel einer Ausführungsoption  $o$ , die mit Startzeitpunkt  $\tau$  eingeplant wird. Die Ausführungsoption betrifft zwei Aufträge 1 und 2, denen jeweils ein Termin  $e_1$  beziehungsweise  $e_2$  zugeordnet ist. Ausgehend von dem Startzeitpunkt der Ausführungsoption resultieren durch Service- und Fahrzeiten die Fertigstellungszeitpunk-

te  $t_1^A$  und  $t_2^A$  der beiden Aufträge. Der Fertigstellungszeitpunkt des Auftrags 1 liegt vor dem Termin des Auftrags, sodass dieser eingehalten wird. Die zeitliche Differenz  $\Delta t$  aus Fertigstellungszeitpunkt und Termin ist positiv, sodass eine kritische Verschiebung  $\delta_1^t$  für Auftrag 1 in Höhe der Differenz  $\Delta t$  gespeichert wird. Dagegen liegt der Fertigstellungszeitpunkt des Auftrags 2 nach seinem Termin und der Wert  $\Delta t$  ist negativ. Die kritische Verschiebung des Auftrags 2 wird daher auf den Wert  $\hat{T}$  festgelegt.

Die Einplanung einer Ausführungsoption verschiebt die nachfolgenden Ausführungsoptionen um die Tourverlängerung  $\Delta t$ . Die kritischen Verschiebungen von Aufträgen in nachfolgenden Ausführungsoptionen der Tour müssen deshalb aktualisiert werden. Das Vorgehen ist in Algorithmus 5.6 für eine einzelne verschobene Ausführungsoption  $q$  dargestellt. In nachfolgenden Algorithmen wird das Vorgehen mittels der Funktion  $T^u(q, \Delta t)$  eingebunden. Ein Nutzenverlust in Höhe des Wertes  $n_a^T$  tritt ein, wenn die Verlängerung der Tour den Wert  $\delta_a^t$  eines Auftrags  $a$  überschreitet. Weitere Nutzenverluste aufgrund zusätzlicher Verzögerungen des Fertigstellungstermins sind für den Auftrag nicht mehr möglich. Die kritische Verschiebung des Auftrags wird deshalb auf den Wert  $\hat{T}$  gesetzt. Wurde die kritische Verschiebung eines Auftrags nicht überschritten, bleibt der Nutzenwert seiner Termineinhaltung erhalten. Zusätzlich muss seine kritische Verschiebung um die Verzögerung aufgrund der Einplanung reduziert werden.

---

**Algorithmus 5.6:** Aktualisierung der kritischen Verschiebungen für eine um  $\Delta t$  verzögerte Ausführungsoption  $q$  |  $T^u(q, \Delta t)$

---

```

1 foreach  $a \in A_q^O \cap A^T$  do
2   | if  $\Delta t \geq \delta_a^t$  then
3   |   |  $\delta_a^t := \hat{T}$ ;
4   | else
5   |   |  $\delta_a^t := \delta_a^t - \Delta t$ ;

```

---

### 5.4.3 Bewertung der Einfügeoptionen von Einzelaufträgen

In diesem Unterabschnitt wird zunächst die Bewertung einer einzelnen Ausführungsoption an einer Einfügeposition erläutert. Anschließend wird das Vorgehen zur Ermittlung einer besten Einfügeoption eines Auftrags ohne Nachfolger beschrieben.

Für die Bewertung einer Einfügeoption werden die Auswirkungen ihrer Einplanung auf die Nutzenbewertung sowie die Dauer der Tour untersucht und in Form der Rentabilität aggregiert. Die Nutzenveränderung setzt sich aus dem Nutzenbeitrag der Einfügeoption

---

**Algorithmus 5.7:** Nutzenbewertung einer Ausführungsoption  $o$  mit Fahrzeug  $\nu$  zum Startzeitpunkt  $\tau$  |  $N(o, \tau, \nu)$

---

**Output** Nutzen  $n$

```

1 n := 0;
2 foreach  $a \in A_o^O$  do
3    $n := n + n_a$ ;
4   if  $a \in A^T$  then
5     if  $e_a - \tau - s_{oa}^{OA} - d_{oa}^{OA}/v_\nu \geq 0$  then
6        $n := n + n_a^T$ ;
7 return n;
```

---

und den Nutzenverlusten auf nachfolgenden Positionen der Tour zusammen. Algorithmus 5.7 beschreibt zunächst die Bestimmung des Nutzenbeitrags einer Ausführungsoption. Die Position der Einfügeoption geht über den Startzeitpunkt der Ausführungsoption  $\tau$  in die Betrachtung ein. In nachfolgenden Algorithmen wird auf den Algorithmus mittels der Bezeichnung als Funktion  $N(o, \tau, \nu)$  verwiesen. Der Nutzenbeitrag besteht zunächst aus den Nutzenwerten aller beteiligten Aufträge der Ausführungsoption. Besitzt ein Auftrag einen Termin, wird bei dessen Einhaltung der Nutzenbeitrag der Ausführungsoption um den Wert  $n_a^T$  erhöht. Die Überprüfung der Termineinhaltung berücksichtigt das verwendete Fahrzeug einer Tour, dass über seine Geschwindigkeit den Fertigstellungszeitpunkt eines Auftrags beeinflusst.

Mögliche Nutzenverluste auf nachfolgenden Positionen der Tour werden gemäß Algorithmus 5.8 bestimmt. Als Funktion erhält der Algorithmus die Bezeichnung  $N^V(\Delta t, q)$ . Für alle nach der Einfügeposition eingeplanten Ausführungsoptionen werden die kritischen Verschiebungen untersucht. Die mit Nutzenverlusten verbundenen zeitlichen Verschiebungen werden der durch die Einfügeoption verursachten Verzögerung  $\Delta t$  gegenübergestellt und die Nutzenverluste der überschrittenen Werte aufsummiert. Überschreiten die Nutzenverluste den Nutzen der betrachteten Ausführungsoption, resultiert eine negative Rentabilität. Sofern die jeweilige Ausführungsoption zu einem Auftrag ohne Nachfolgauftrag gehört, ist eine Einplanung in diesem Fall keinesfalls sinnvoll. Im Rahmen von Auftragsketten kann ein großer Nutzenwert des Nachfolgauftrags allerdings zu einer positiven Rentabilität führen<sup>33</sup>.

Die Ermittlung einer besten Einfügeoption für einen verfügbaren Auftrag ohne Nachfolger nutzt die zuvor erläuterte Bewertung von Ausführungsoptionen. Für alle Positionen der bislang bestehenden Tour und alle verfügbaren Ausführungsoptionen des Auftrags ist die resultierende Rentabilität zu ermitteln. Die Kombination mit der höchsten Ren-

---

<sup>33</sup> vgl. Unterabschnitt 5.4.4

---

**Algorithmus 5.8:** Nutzenverlust durch Verschiebung nachfolgender Ausführungsoptionen ab Ausführungsoption  $p$  um  $\Delta t \mid N^V(\Delta t, q)$

---

**Input** Dauer der Verschiebung  $\Delta t$ , erste verschobene Ausführungsoption  $q$

**Output** Nutzenverlust  $\Delta n$

```

1  $\Delta n := 0;$ 
2 foreach Auf die Einfügeposition folgende Ausführungsoptionen  $o$  der Tour,
   beginnend mit Ausführungsoption  $q$  do
3   |   foreach  $a \in A_o^O \cap A^T$  do
4   |   |   if  $\Delta t \geq \delta_a^t$  then
5   |   |   |    $\Delta n := \Delta n + n_a^T;$ 
6 return  $\Delta n;$ 

```

---

tabilität stellt die beste Einfügeoption des jeweiligen Auftrags dar. Betrachtet werden je Auftrag  $a$  jeweils die diesem Auftrag verfügbaren zugeordneten Ausführungsoptionen  $O_a^z$ . Diese Ausführungsoptionen enthalten entweder nur Auftrag  $a$  oder betreffen Auftrag  $a$  als ersten von zwei Aufträgen. Damit entfällt eine Prüfung, ob gegebenenfalls ein Vorgängerauftrag für den zweiten Auftrag existiert und ob dieser bereits an einer vorausgehenden Position eingeplant ist. Außerdem wird die mehrfache Bewertung von auftragsübergreifenden Ausführungsoptionen, die in den Mengen  $O_a'$  und  $O_b'$  zweier Aufträge  $a$  und  $b$  enthalten sind, vermieden. Ist bereits eine Rentabilität, beispielsweise aus der Untersuchung der Ausführungsoptionen anderer Aufträge, bekannt, kann unter Umständen auf die Untersuchung der Ausführungsoptionen eines Auftrags an bestimmten Einfügepositionen verzichtet werden. Möglich wird dies durch Abschätzung der maximalen Rentabilität der einem Auftrag  $a$  zugeordneten Ausführungsoptionen  $R_{a,(p,q),\nu}^{max}$  an einer Einfügeposition  $(p, q)$ , wobei es sich bei  $p$  oder  $q$  auch um das Depot handeln kann, bei Durchführung mit Fahrzeug  $\nu$ . Hierfür ist der maximale Nutzenwert der einem Auftrag zugeordneten Ausführungsoptionen  $\bar{n}_a$ , bestehend aus den Nutzenwerten der betroffenen Aufträge und gegebenenfalls deren Nutzenwerten für die Einhaltung ihrer Termine, der zu Beginn des Verfahrens einmalig bestimmt werden kann, einer unteren Schranke für die Einplanungsdauer aller Ausführungsoptionen des Auftrags an der untersuchten Einfügeposition gegenüberzustellen. Für jeden Auftrag kann ein Ort angegeben werden, der in jeder seiner Ausführungsoptionen anzufahren ist. Dabei handelt es sich für Lieferungen um den Zielort und für Abholungen um den Startort der Aufträge. Die Summe der Strecke vom Ende der vorausgehenden Ausführungsoption zu diesem Ort sowie der Strecke von diesem Ort zum Start der nachfolgenden Ausführungsoption stellt aufgrund der Dreiecks-Ungleichung eine untere Schranke für die Fahrstrecke der Einbindung einer Ausführungsoptionen des Auftrags dar. In Verbindung mit der Geschwindigkeit des verwendeten Fahrzeugs resultiert aus der unteren Schranke der Fahrstrecke eine untere

re Schranke für die Einfügedauer. Diese Abschätzung des zeitlichen Mindestaufwands kann durch Berücksichtigung der minimalen Servicezeit einer dem Auftrag zugeordneten Ausführungsoption  $s_a^{min} = \min_{o \in O_a^z} s_o^O$ , die zu Beginn des Verfahrens einmalig bestimmt werden kann, weiter verbessert werden. Aus dem Quotienten des maximalen Nutzenwertes und der unteren Schranke der Einfügedauer kann nach Gleichung (5.42) eine obere Schranke für die Rentabilität der einem Auftrag zugeordneten Ausführungsoptionen ermittelt werden. Der Ort  $i$  in der Gleichung entspricht dabei dem bekannten Ort, dem Startort für Behälter- und Materialabholungen beziehungsweise dem Zielort für Behälter- und Materiallieferungen, des jeweiligen Auftrags. Unterschreitet der bestimmte Wert die beste bekannte Rentabilität, müssen die Ausführungsoptionen des Auftrags an dieser Einfügeposition nicht untersucht werden.

$$R_{a,(p,q),\nu}^{max} = \frac{\bar{n}_a}{(d_{\omega_p^O i} + d_{i\alpha_q^O})/v_\nu + s_a^{min}} \quad i = \begin{cases} \alpha_a^A & a \in P^B \cup P^M \\ \omega_a^A & a \in D^B \cup D^M \end{cases} \quad (5.42)$$

Algorithmus 5.9 fasst die Ermittlung einer besten Einfügeoption eines Auftrags zusammen. Für alle Einfügepositionen der zu erweiternden Tour wird zunächst der Schrankenwert der Rentabilität des Auftrags an dieser Position der besten bekannten Rentabilität gegenübergestellt. Ist der Schrankenwert größer, folgt die Untersuchung der verfügbaren zugeordneten Ausführungsoptionen des Auftrags. Der zusätzliche Zeitaufwand der Einplanung einer Ausführungsoption wird zweistufig ermittelt. Bevor konkret Ausführungsoptionen betrachtet werden, wird die entfallende Fahrzeit  $t^-$  der bislang aufeinanderfolgenden Ausführungsoptionen  $p$  und  $q$  berechnet. Anschließend wird der hinzukommende zeitliche Aufwand  $t^+$ , resultierend aus den neuen Fahrwegen und der Servicezeit der jeweiligen Ausführungsoption, berechnet. Aus der Differenz der hinzukommenden und entfallenden Zeit ergibt sich der Zeitaufwand der Einfügeoption. Weiter wird ausgehend von dem Endzeitpunkt  $\hat{t}_p^O$  der vorausgehenden Ausführungsoption der Startzeitpunkt der betrachteten Ausführungsoption bestimmt. Es folgen die Berechnung des Nutzens der Einfügeoption und schließlich die Ermittlung ihrer Rentabilität. Ergibt sich eine Verbesserung zur bislang besten Rentabilität wird die beste Einfügeoption überschrieben.

#### 5.4.4 Berücksichtigung von Auftragsketten

In diesem Unterabschnitt wird die Bewertung von Aufträgen mit einem Nachfolgauftrag beschrieben. Die Struktur des Vorgehens wird zunächst motiviert. Anschließend werden die einzelnen Komponenten näher erläutert.

---

**Algorithmus 5.9:** Bewertung der Einfügeoptionen des Auftrags  $a$  ohne Nachfolger für eine bestehende Tour mit Fahrzeug  $\nu$

---

```

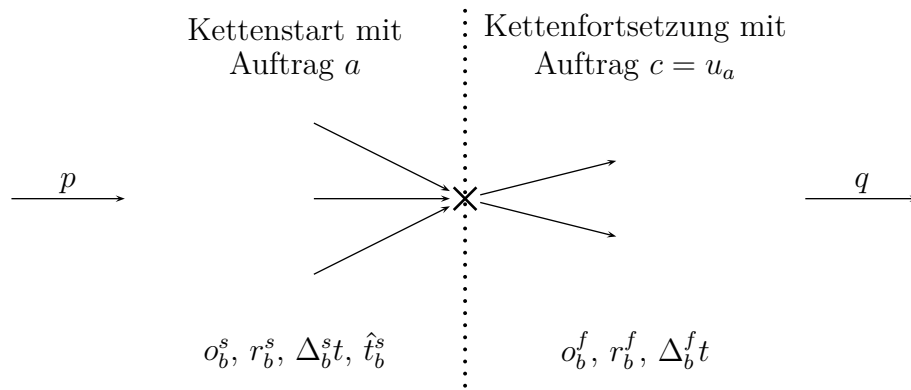
1  $r^* :=$  beste bislang ermittelte Rentabilität;
2 foreach Einfügepositionen  $(p, q) \in$  Tour do
3   if  $R_{a,(p,q),\nu}^{max} > r^*$  then
4      $t^- := d_{pq}^O / v_\nu$ ;
5     foreach  $o \in O_a^z$  do
6        $t_o^O := \hat{t}_p^O + d_{po}^O / v_j$ ;
7        $t^+ := (d_{po}^O + d_o^O + d_{oq}^O) / v_\nu + s_o^O$ ;
8        $\Delta t := t^+ - t^-$ ;
9        $\Delta n := N(o, t_o^O, \nu) - N^V(\Delta t, q)$ ;
10       $r := \Delta n / \Delta t$ ;
11      if  $r > r^*$  then
12         $(r^*, o^*, p^*) := (r, o, p)$ ;

```

---

Auftragsketten wirken sich in Form von Vorrangbeziehungen zwischen den enthaltenen Aufträgen und der Identität des genutzten Behälters aus. Ein Auftrag  $a$ , der einen Vorgänger  $p_a$  besitzt, kann nur an einer Position einer Tour eingeplant werden, sofern sein Vorgänger an einer vorausgehenden Position derselben Tour eingeplant ist. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Untersuchung der Einfügepositionen einer Tour am Beginn der Tour startet und im Rahmen der Betrachtung eine Menge  $A^e$  bis zur aktuell betrachteten Position eingeplanter Aufträge fortgeschrieben wird. Gilt für einen Auftrag  $a$  mit einem Vorgängerauftrag an einer Position einer untersuchten Tour  $p_a \in A^e$ , ist dessen Einplanung an dieser Position mit Blick auf die Vorrangbeziehungen  $(p_a, a)$  zulässig. Der Beitrag eines Vorgängerauftrags geht über seinen eigenen Nutzenwert hinaus, da seine Einplanung eine Voraussetzung für die Einplanung seines Nachfolgeauftrags und damit der Erlösung dessen Nutzenwertes ist. Eine isolierte Bewertung der Aufträge kann diesen Zusammenhang nicht abbilden. Aufträge  $a$ , die einen Nachfolgeauftrag  $u_a$  besitzen, werden deshalb neben der Bewertung als Einzelauftrag zusammen mit ihrem Nachfolgeauftrag bewertet. Die Aufträge einer Vorrangbeziehung teilen sich einen Ort. Der Zielort des ersten Auftrags ist der Startort seines Nachfolgers. Die Distanz zwischen den Ausführungsoptionen der beiden Aufträge ist damit stets null. Die Ursache dafür liegt in den als Auftragsketten abgebildeten Tätigkeiten, die die auftragsübergreifende Nutzung eines Behälters erfordern. Die Bewertung der Ausführungsoptionen des Auftragspaars einer Vorrangbeziehung wird an diesem gemeinsamen Ort der Aufträge in zwei Stufen aufgeteilt. Zunächst werden die Ausführungsoptionen des ersten Auftrags, die an diesem Ort enden, bewertet. Anschließend folgt die Bewertung der Auftragsoptionen des Nachfolgers, die an diesem Ort starten. Die Stufen werden im Folgenden als Kettenstart und -fortsetzung





→ Aggregation von Kettenstart und -fortsetzung

**Abbildung 5.4:** Überblick Bewertung von Auftragsketten

bezeichnet. Im Anschluss an die Bewertung der Stufen werden die Ergebnisse, die beste Ausführungsoption des Kettenstarts sowie der -fortsetzung, zusammengeführt. Ist dem ersten Auftrag einer Auftragskette bereits ein konkreter Behälter zugeordnet, wird dieser auch von den nachfolgenden Aufträgen der Kette genutzt. Andernfalls handelt es sich bei dem ersten Auftrag einer Auftragskette um einen Auftrag mit Behälterentscheidung, eine Behälter- oder Materiallieferung. Die Behälterentscheidung des ersten Auftrags legt den Behältertyp aller Aufträge der Kette fest und schränkt unter Umständen deren verfügbare Ausführungsoptionen ein. Letzteres gilt insbesondere für Behälter- oder Materialabholungen als abschließende Aufträge einer Auftragskette und deren Ausführungsoptionen, die eine weitere Nutzung des Behälters für eine Behälter- oder Materiallieferung vorsehen. Eine Kombination von Ausführungsoptionen zweier Aufträge einer Kette ist zulässig, sofern die Schnittmenge der möglichen Behältertypen der beiden Ausführungsoptionen nicht leer ist. Die besten Ausführungsoptionen des Kettenstarts und der Kettenfortsetzung werden daher differenziert nach dem nutzbaren Behältertyp gespeichert. So kann sichergestellt werden, dass nur Kombinationen von Ausführungsoptionen betrachtet werden, für die eine zulässige Wahl eines gemeinsamen Behältertyps möglich ist.

Abbildung 5.4 skizziert die Bewertung zweier Aufträge, die über eine Vorrangbeziehung  $(a, c)$  in einer Auftragskette verbunden sind. Die Einfügeposition ist durch die vorausgehende Ausführungsoption  $p$  und die nachfolgende Ausführungsoption  $q$ , die in der bisherigen Tour direkt aufeinanderfolgen, gegeben. Für Auftrag  $a$  stehen drei Ausführungsoptionen zur Einplanung zur Verfügung. Zusammen entsprechen die drei Ausführungsoptionen der Menge  $O'_a$  der für Auftrag  $a$  verfügbaren Ausführungsoptionen. Analog besteht die Menge  $O'_c$  der verfügbaren Ausführungsoptionen des Nachfolgeauftrags  $u_a = c$  in der Abbildung aus zwei Ausführungsoptionen. Der Zielort der Ausführungsoptionen

des Auftrags  $a$  stimmt mit dem Startort der Ausführungsoptionen des Auftrags  $c$  überein. Neben den verfügbaren Ausführungsoptionen zeigt die Abbildung die im Rahmen der Bewertung von Auftragsketten verwendeten Variablen. Jeder Ausführungsoption  $o$  ist eine Menge verwendbarer Behältertypen  $B'_o$ , die vom aktuell betrachteten Fahrzeug genutzt werden können, zugeordnet. Enthält die Menge genau ein Element, ist der Behältertyp der Ausführungsoption bereits bekannt. Andernfalls ist bei der Einplanung eine Entscheidung über den zu verwendenden Behältertyp zu treffen. In Bezug auf Aufträge einer Auftragskette sind nur Kombinationen von Ausführungsoptionen zulässig, deren Mengen der verwendbaren Behältertypen mindestens einen Behältertyp teilen. Die zweistufige Bewertung von Auftragsketten als Kettenstart und -fortsetzung erfolgt deshalb differenziert nach Behältertypen. Je Behältertyp  $b$ , der in den verfügbaren Ausführungsoptionen des Auftrags  $a$  genutzt werden kann, wird die Ausführungsoption, deren Einfügen an der betrachteten Einfügeposition, hier  $(p, q)$ , mit der höchsten Rentabilität bewertet wird, als  $o_b^s$  und die zugehörige Rentabilität als  $r_b^s$  gespeichert. Außerdem wird für die spätere Verwendung in der Bewertung der Kettenfortsetzung die Tourverlängerung durch eine Einplanung von Ausführungsoption  $o_b^s$  als  $\Delta_b^s t$  und der Abschlusszeitpunkt der Ausführungsoption als  $\hat{t}_b^s$  gespeichert. Vergleichbar werden bei der Betrachtung der Ausführungsoption des Nachfolgeauftrags, der Kettenfortsetzung, die beste Ausführungsoption zur Kettenfortsetzung, deren Rentabilität und die resultierende Verlängerung der Tour differenziert nach den nutzbaren Behältertyp gespeichert. Kettenstart und -fortsetzung werden dabei getrennt bewertet. Bei der Kettenfortsetzung wird aufgrund der verwendbaren Behältertypen die beste Ausführungsoption des Kettenstarts festgehalten und deren Fertigstellungszeitpunkt bei der Bewertung der Fortsetzung berücksichtigt. Wiederum wird abhängig vom verwendbaren Behältertyp  $b$  die bestbewertete Ausführungsoption des Nachfolgeauftrags als  $o_b^f$ , ihre Rentabilität als  $r_b^f$  und die Dauer der Einplanung als  $\Delta_b^f t$  gespeichert. Abschließend werden die Kombinationen aus bestem Kettenstart und bester Kettenfortsetzung über alle verwendbaren Behältertypen bewertet und für die Einplanung in Betracht gezogen. Im Folgenden werden die Vorgehensweisen auf den beiden Stufen, Kettenstart- und -fortsetzung, erläutert. Im Rahmen des erweiterten Kettenstarts wird für Aufträge mit einem Behälterbedarf, Behälter- oder Materiallieferungen, bei auftragsübergreifenden Ausführungsoptionen mit Aufträgen, die wiederum einen Behältertransport als einzigen Vorgänger besitzen, die Durchführung ihres Vorgängers zur Freigabe eines Behälters betrachtet. Das verwendete Fahrzeug  $\nu$  geht mit seiner Geschwindigkeit  $v_\nu$  und über die Menge seiner nutzbaren Behältertypen  $B_\nu^V$ , die in den Mengen  $B_a^A$  und  $B_o^O$  für Aufträge beziehungsweise Ausführungsoptionen nutzbarer Behältertypen berücksichtigt ist, in die Betrachtung ein.

Das Vorgehen zur Bewertung des Kettenstarts mit einem Auftrag  $a$  an einer gegebenen

---

**Algorithmus 5.10:** Kettenstart mit Auftrag  $a$  an Einfügeposition  $(p, q)$  mit Fahrzeug  $\nu$

---

```

1  $t^- := d_{pq}^O / v_\nu;$ 
2  $O^s := O'_a;$ 
3 foreach  $o \in O^s \mid |A_o^O| = 2, A_o^O = \{a, d\}$  do
4   | if  $p_d \geq 0$  und  $p_d \notin A^e$  then
5   |   |  $O^s := O^s \setminus \{o\};$ 
6 foreach  $b \in B_a^{A}$  do
7   |  $r_b^s := -\infty;$ 
8 foreach  $o \in O^s$  do
9   |  $t^S := \hat{t}_p^O + d_{po}^O / v_\nu;$ 
10  |  $t^+ := (d_{po}^O + d_o^O + d_{oq}^O) / v_\nu + s_o^O;$ 
11  |  $\Delta t := t^+ - t^-;$ 
12  |  $\Delta n := N(o, t^S, \nu) - N^V(\Delta t, q);$ 
13  |  $r := \Delta n / \Delta t;$ 
14  | if  $r > r^*$  then
15  |   |  $(r^*, o^*, p^*) := (r, o, p);$ 
16  | foreach  $b \in B_o^{O}$  do
17  |   | if  $r > r_b^s$  then
18  |     |  $(r_b^s, o_b^s, \hat{t}_b^s, \Delta_b^s t) = (r, o, t^S + d_o^O / v_\nu + s_o^O, \Delta t);$ 

```

---

Einfügeposition  $(p, q)$  mit Fahrzeug  $\nu$  ist in Algorithmus 5.10 dargestellt. Zunächst wird für die gegebenen Einfügeposition die entfallende Fahrzeit  $t^-$  zwischen den bislang aufeinanderfolgenden Ausführungsoptionen  $p$  und  $q$  berechnet. Diese Größe ist unabhängig von der einzufügenden Ausführungsoption. Anschließend werden die einplanbaren Ausführungsoptionen  $O^s$  des Auftrags  $a$  ermittelt. Diese beinhalten zunächst alle verfügbaren Ausführungsoptionen  $O'_a$ . Für auftragsübergreifende Ausführungsoptionen ist zu prüfen, ob der zweite von der Ausführungsoption betroffene Auftrag  $d$  einen Vorgänger besitzt. Existiert ein Vorgänger und ist dieser nicht Teil einer an einer vorausgehenden Positionen der Tour eingeplanten Ausführungsoption, das heißt es gilt  $p_d \notin A^e$ , ist er aus der Menge  $O^s$  zu entfernen. Weiter werden für alle verwendbaren Behältertypen des Auftrags  $a$  die Rentabilitäten  $r_b^s$ , der größten mit den Ausführungsoptionen der Menge  $O^s$  unter Verwendung eines Behälters des Behältertyps  $b$  erzielbaren Rentabilität, mit minus unendlich initialisiert. Ist der Behältertyp eines Auftrags bereits bekannt, wird lediglich der Wert für diesen Behältertyp initialisiert. Das Zulassen negativer Werte ist im Rahmen der Betrachtung von Auftragsketten notwendig, da ein Nutzenverlust des eröffnenden Auftrags durch einen Nutzengewinn des nachfolgenden Auftrags ausgeglichen oder gar dominiert werden kann. Für alle zuvor ermittelten einplanbaren Ausführungsoptionen erfolgt daraufhin die Bestimmung ihrer Rentabilität bei Einfügung an der gegebenen Einfügeposition.

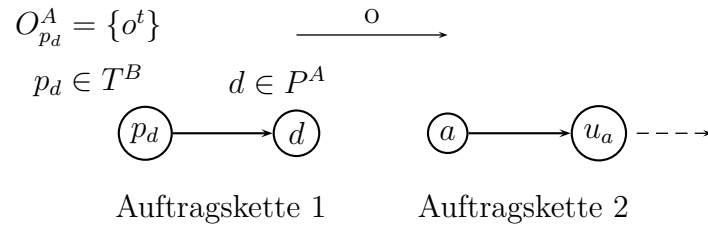
$o \in O'_a$	$B'_o$	$r$	$\Delta t$	$\hat{t}^s$
1	{1, 2}	3	10	50
2	{1}	4	8	48
3	{2, 3}	2	20	70

**Tabelle 5.5:** Verfügbare Ausführungsoptionen des Kettenstarts mit Auftrag  $a$

Dafür wird zunächst der Startzeitpunkt  $t^S$  der jeweiligen Ausführungsoption  $o$  aus dem Endzeitpunkt der vorausgehenden Ausführungsoption  $\hat{t}_p^O$  und der Fahrtdauer von Ausführungsoption  $p$  zu Ausführungsoption  $o$  bestimmt. Als nächstes wird der zusätzliche Zeitaufwand  $t^+$ , der durch die Einfügung von Ausführungsoption  $o$  entsteht, berechnet. Er setzt sich aus dem Zeitaufwand der Ausführungsoption, der Servicezeit und der Fahrzeit für das Zurücklegen der Fahrstrecke, sowie den zusätzlichen Fahrzeiten zwischen den Ausführungsoptionen zusammen. Aus der Differenz der hinzukommenden sowie entfallenden Zeiten, ergibt sich der Zeitbedarf  $\Delta t$ . Die Nutzenänderung  $\Delta n$ , die aus der Realisierung der Einfügeoption folgen würde, wird aus dem Nutzenwert der Ausführungsoption zu ihrem ermittelten Startzeitpunkt und dem Nutzenverlust durch Verletzung von Terminen nachfolgend eingeplanter Ausführungsoptionen aufgrund der Verzögerung verrechnet. Die Rentabilität ergibt sich schließlich als Quotient aus Nutzenänderung und Zeitbedarf. Für die Betrachtung des Auftrags  $a$  als Einzelauftrag, erfolgt eine Gegenüberstellung der berechneten Rentabilität  $r$  mit der besten bislang ermittelten Rentabilität  $r^*$ . Sofern eine Verbesserung vorliegt, wird die jeweilige Einfügeoption als beste bislang gefundene Option festgehalten. Im Rahmen der Untersuchung des Auftrags als Vorgängerauftrag wird die Rentabilität für jeden verwendbaren Behältertyp  $b$  der untersuchten Ausführungsoption mit dem jeweils besten bislang ermittelten Wert,  $r_b^s$ , verglichen und dieser gegebenenfalls aktualisiert. Für spätere Berechnungen werden neben der Rentabilität, die zugehörige Ausführungsoption  $o_b^s$  sowie deren Abschlusszeitpunkt  $\hat{t}_b^s$  und der Zeitaufwand der Einplanung  $\Delta_b^s t$  gespeichert. Für eine Ausführungsoption des Nachfolgauftrags kann auf Basis der ermittelten Ergebnisse die als Kettenstart bestbewertete Ausführungsoption abgeleitet werden.

Tabelle 5.5 listet als Beispiel drei verfügbare Ausführungsoptionen eines Auftrags  $a$ , der Teil einer Vorrangbeziehung  $(a, c)$  ist, auf. Je Ausführungsoption ist die Menge der nutzbaren Behältertypen angegeben. Beispielsweise kann für Ausführungsoption 1 sowohl Behältertyp 1 als auch Behältertyp 2 eingesetzt werden. Außerdem enthält die Tabelle die Bewertung der Ausführungsoptionen als Kettenstart. Angegeben sind die ermittelte Rentabilität  $r$ , die resultierende Verlängerung der Tour  $\Delta t$  und der Zeitpunkt zu dem die Ausführungsoption endet als  $\hat{t}^s$ .

$b \in B'_a$	$o_b^s$	$r_b^s$	$\Delta_b^s t$	$\hat{t}_b^s$
1	2	4	8	48
2	1	3	10	50
3	3	2	20	70

**Tabelle 5.6:** Bester Kettenstart nach nutzbarem Behältertyp**Abbildung 5.5:** Situation eines erweiterten Kettenstarts

Für jeden nutzbaren Behältertyp des Auftrags  $a$  sind, auf Basis der Angaben in Tabelle 5.5, in Tabelle 5.6 die zugehörige beste Ausführungsoption und die für die weitere Verarbeitung in der Kettenfortsetzung relevanten Informationen angegeben. Von den Ausführungsoptionen 1, 2 und 3 können die Ausführungsoptionen 1 und 2 mit Behältertyp 1 durchgeführt werden. Ausführungsoption 2 besitzt die größere Rentabilität der beiden und stellt somit die beste Kettenstartoption  $o_1^s = 2$  für Behältertyp 1 an. Die übrigen Werte  $r_b^s$ ,  $\Delta_b^s t$  und  $\hat{t}_b^s$  entsprechen den Werten  $r$ ,  $\Delta t$  und  $\hat{t}^s$  der Ausführungsoption  $o_1^s$  aus Tabelle 5.5. Behältertyp 2 kann von den Ausführungsoption 1 und 3 genutzt werden, wovon Ausführungsoption 1 die größere Rentabilität besitzt. Schließlich stellt Ausführungsoption 3 die beste Ausführungsoption für Behältertyp 3 dar.

Als Erweiterung der in Algorithmus 5.10 beschriebenen Vorgehensweise zur Bewertung von Kettenstarts findet für auftragsübergreifende Ausführungsoptionen, deren zweiter Auftrag einen Behältertransport mit einem konkreten Behälter bekannten Behältertyps als Vorgänger besitzt, eine separate Untersuchung statt. In dieser Situation liegt als Behälter-Quelle eines aktuell untersuchten Auftrags  $a$ , eine Behälter- oder Materiallieferung, eine zweite Auftragskette des Typs „Umsetzung aufgeladenen Materials mit Behälterabholung“ vor. Diese besteht aus einem Behältertransport und einer anschließenden Behälterabholung für den genutzten Behälter, das heißt ein konkreter Behälter ist, in der Regel mit Material beladen, von seinem Standort zu einem Zielort zu transportieren und nach Abladen des Materials im Rahmen einer Behälterabholung als leerer Behälter vom Zielort abzuholen. Der Behälter der zweiten Auftragskette kann nur über die Ausführungsoption, die die abschließende Behälterabholung mit Auftrag  $a$  verknüpft, für Auftrag  $a$  zur Verfügung gestellt werden, sofern der vorausgehende Behältertransport durchgeführt

wurde. Ist dem Transport jedoch ein vergleichsweise geringer Nutzenwert, aufgrund dessen der Auftrag für sich genommen nicht attraktiv genug ist, um eingeplant zu werden, zugeordnet, steht der betreffende Behälter für eine weitere Nutzung nicht zur Verfügung. Abbildung 5.5 skizziert die Situation eines erweiterten Kettenstarts. Ausführungsoption  $o$  stellt einen Behälter für Auftrag  $a$  aus der Behälterabholung  $d$  zur Verfügung. Da die Behälterabholung einen Behältertransport als Vorgängerauftrag besitzt, kann Ausführungsoption  $o$  nur ausgeführt werden, sofern der Behältertransport eingeplant wurde. Als erweiterter Kettenstart wird die Einplanung der Ausführungsoption  $o^t$ , der Ausführungsoption des Behältertransportes  $p_d$ , erwogen, um die Ausführungsoption  $o$  einplanen zu können. Fälle, in denen der Behältertransport wiederum einen Vorgänger besitzt, werden nicht betrachtet. Der Behältertransport kann in einem solchen Fall keinen Behälter zur Verfügung stellen, da er zunächst selbst über einen Vorgängerauftrag des Typs Behälterlieferung mit einem Behälter zu versorgen wäre. Bei der Bewertung von Einfügeoptionen liegen dann zwei alternative Verwendungsmöglichkeiten für einen verfügbaren, das heißt ohne Durchführung eines Behältertransport nutzbaren, Behälter vor. Die Entscheidung, ob der Behälter für die Auftragskette von Auftrag  $a$  oder die alternative Auftragskette verwendet wird, hängt schließlich von deren Bewertung ab. Dagegen steht bei einem erweiterten Kettenstart der Behälter eines Behältertransportes ohne dessen Durchführung für keinen Auftrag zur Verfügung.

---

**Algorithmus 5.11:** Erweiterter Kettenstart mit Auftrag  $a$  des Typs Behälter- oder Materiallieferung an Einfügeposition  $(p, q)$  mit Fahrzeug  $\nu$

---

```

1 foreach  $d \in A' \mid |O'_d \cap O'_a| = 1$  und  $p_d \in T^B$  und  $p_d \in A'$  und  $p_d$  besitzt keinen
   Vorgänger do
2    $o^t :=$  Ausführungsoption des Transports  $p_d$ ;
3    $o :=$  einziges Element von  $O'_d \cap O'_a$ ;
4    $t_1^S := \hat{t}_p^O + d_{pot}^O / v_\nu$ ;
5    $t_2^S := t_1^S + s_{ot}^O + d_{ot}^O / v_\nu$ ;
6    $t^+ := s_{ot}^O + s_o^O + (d_{ot}^O + d_o^O + d_{pot}^O + d_{oq}^O) / v_\nu$ ;
7    $t^- := d_{pq}^O / v_\nu$ ;
8    $\Delta t := t^+ - t^-$ ;
9   if  $\Delta t > T^r$  then
10    | break;
11     $\Delta n := N(o^t, t_1^S, \nu) + N(o, t_2^S, \nu) - N^V(\Delta t, q)$ ;
12     $r := \Delta n / \Delta t$ ;
13     $b :=$  Typ des im Behältertransport  $p_d$  zu transportierenden Behälters;
14    if  $r > r_b^s$  then
15    |  $(r_b^s, o_b^s, \hat{t}_b^s, \Delta_b^s t) = (r, o^t, t_2^S + d_o^O / v_\nu + s_o^O, \Delta t)$ ;

```

---

Das Vorgehen für einen erweiterten Kettenstart, der Durchführung der Ausführungsoption

tion  $o^t$  eines Behältertransports zur Nutzbarmachung des für den Transport genutzten Behälters über eine nachfolgende Behälterabholung, ist in Algorithmus 5.11 notiert. Die Ausführungsoption  $o$  verknüpft die Behälterabholung mit Auftrag  $a$ , der als Kettenstart untersucht wird. Der erweiterte Kettenstart besteht aus der Durchführung beider Ausführungsoptionen,  $o^t$  und  $o$ . Für eine Bewertung werden zunächst die Startzeitpunkte  $t_1^S$  der Ausführungsoption  $o^t$  und  $t_2^S$  der Ausführungsoption  $o$  berechnet. Außerdem wird der Zeitaufwand für das Einfügen der beiden Ausführungsoptionen  $\Delta t$  bestimmt. Der zusätzliche Zeitaufwand setzt sich aus den Servicezeiten der beiden Ausführungsoptionen, den notwendigen Fahrzeiten zur Durchführung der Ausführungsoptionen sowie den Fahrzeiten von der vorausgehenden beziehungsweise zu der nachfolgenden Ausführungsoption der Einfügeposition zusammen. Eine Fahrzeit zwischen den Ausführungsoptionen  $o^t$  und  $o$  ist nicht zu berücksichtigen, da der Zielort des Behältertransports mit dem Startort der Behälterabholung  $d$  übereinstimmt. Die Fahrzeit zwischen den bislang aufeinanderfolgenden Ausführungsoptionen der Einfügeposition entfällt. Überschreitet der zeitliche Mehraufwand die verbleibende Tourdauer  $T^r$  bricht die Betrachtung ab. Die Berechnung der Nutzenänderung  $\Delta n$  umfasst neben dem Nutzen aus der Ausführungsoption  $o$  zusätzlich den vom Startzeitpunkt  $t_1^S$  abhängigen Nutzen des Behältertransports, der dem Nutzen seiner Ausführungsoption  $o^t$  entspricht. Abzuziehen sind Nutzenverluste aufgrund der Verlängerung der Tour um  $\Delta t$ . Die resultierende Rentabilität wird mit dem besten bekannten Wert  $r_b^s$  für den Behältertyp  $b$  des Behältertransports verglichen und dieser gegebenenfalls aktualisiert. Als eröffnende Ausführungsoption der Einplanung wird Ausführungsoption  $o^t$  festgehalten. Der Endzeitpunkt des Kettenstarts resultiert aus dem Zeitpunkt an dem die auftragsübergreifende Ausführungsoption  $o$  abgeschlossen wird. Ein Vergleich mit der besten bislang ermittelten Rentabilität  $r^*$  ist an dieser Stelle nicht nötig, da dieser im Rahmen der Untersuchung der Einfügeoptionen des Behältertransports  $p_d$ , mit Ausführungsoption  $o^t$  als Kettenstart und Ausführungsoption  $o$  als Kettenfortsetzung, erfolgt.

Das Vorgehen der zweiten Stufe, der Kettenfortsetzung, ist in Algorithmus 5.12 dargestellt. Zunächst wird geprüft, ob der Nachfolgauftrag  $u_a = c$  Teil der verfügbaren Auftragsmenge  $A'$  ist. Diese Überprüfung ist notwendig, da der Auftrag bei Einplanung einer Ausführungsoption aussortiert worden sein kann, weil die für seine Ausführung benötigte Zeit die verbliebene Resttourdauer überschritten hat. Die Untersuchung der Kettenfortsetzung erfolgt für jede verfügbare Ausführungsoption des Nachfolgauftrags. Vorab wird die beste Rentabilität der Kettenfortsetzung  $r_b^f$  für jeden möglichen Behältertyp  $b$  des Auftrags auf null gesetzt. Im Gegensatz zum Kettenstart kommt eine negative Rentabilität nicht für eine Einplanung infrage, da sie die Bewertung eines Kettenstarts durch Hinzunahme einer derart bewerteten Ausführungsoption als Kettenfortsetzung verschlechtern

---

**Algorithmus 5.12:** Kettenfortsetzung mit Nachfolgauftrag  $u_a = c$  an Einfügeposition  $(p, q)$  mit Fahrzeug  $\nu$

---

```

1 if  $c \in A'$  then
2   foreach  $b \in B_c^A$  do
3      $(r_b^f, o_b^f, \Delta_b^f t) := (0, -1, 0)$ ;
4   foreach  $o \in O_c'$  do
5      $b^* := \operatorname{argmax}_{b \in B_o^O} r_b^s$ ;
6      $t^+ := (d_o^O + d_{oq}^O)/v_\nu + s_{os}^O$ ;
7      $t^- := d_{o_b^* q}^O/v_\nu$ ;
8      $\Delta t := t^+ - t^-$ ;
9     if  $\Delta_b^s t + \Delta t \leq T^r$  then
10       $\Delta n := N(o, \hat{t}_{b^*}^s, \nu) - N^V(\Delta t + \Delta_b^s t, q) + N^V(\Delta_b^s t, q)$ ;
11       $r := \Delta n / \Delta t$ ;
12      foreach  $b \in B_o^O \cap B_{o_b^*}^O$  do
13        if  $r > r_b^f$  then
14           $(r_b^f, o_b^f, \Delta_b^f t) := (r, o, \Delta t)$ ;
15      foreach  $b \in B_a^A \cap B_c^A \mid r_b^f > 0$  do
16         $\Delta n := r_b^s \Delta_b^s t + r_b^f \Delta_b^f t$ ;
17         $\Delta t := \Delta_b^s t + \Delta_b^f t$ ;
18         $r := \Delta n / \Delta t$ ;
19        if  $r > r^*$  then
20           $(r^*, o^*, B^R) := (r, o_b^s, B_{o_b^s}^O \cap B_{o_b^f}^O)$ ;

```

---

würde. Die ausschließliche Durchführung des Auftrags, der als Kettenstart betrachtet wurde, wäre in diesem Fall attraktiver als die Einplanung mit einer fortführenden Ausführungsoption. Exemplarisch kann dies bei Auftragsketten, die einen Behältertransport mit einer Behälterabholung kombinieren, auftreten, wenn der Behältertransport allein zu einem Nutzenzuwachs führt, die Behälterabholung aufgrund einer geringen Nutzenbewertung und Nutzenverlusten bei nachgelagerten Ausführungsoptionen jedoch insgesamt zu einer negativen Nutzenveränderung führt. Zur Bewertung einer Ausführungsoption  $o$  aus der Menge der verfügbaren Ausführungsoptionen des Nachfolgauftrags  $O_c'$  wird zunächst der Behältertyp  $b^*$ , für den die Rentabilität  $r_b^s$  des Kettenstarts maximal ist, ermittelt. Über den Behältertyp  $b^*$  kann im Folgenden auf die zugehörige Ausführungsoption  $o_b^*$ , deren Abschlusszeitpunkt  $\hat{t}_{b^*}^s$  und den Zeitaufwand ihrer Einplanung  $\Delta_b^s t$  zugegriffen werden. Der Abschlusszeitpunkt der Ausführungsoption des besten Kettenstarts  $\hat{t}_{b^*}^s$  entspricht der Startzeit der betrachteten Ausführungsoption  $o$ , da der Zielort des Kettenstarts mit dem Startort der Ausführungsoptionen des Nachfolgauftrags zusammenfällt, und wird für die Bestimmung ihres Nutzenbeitrags verwendet. Bei der Berechnung des zusätzlichen Zeitaufwands  $t^+$  entfällt daher auch die Fahrzeit zwischen der



Ausführungsoption des Kettenstarts und der Ausführungsoption der Kettenfortsetzung. Als entfallender Zeitaufwand  $t^-$  resultiert die Fahrzeit zwischen der Ausführungsoption des Kettenstarts und der aufgrund der Einfügeposition nachfolgenden Ausführungsoption. Die Verwaltung der verfügbaren Ausführungsoptionen berücksichtigt lediglich die zeitliche Einplanbarkeit einzelner Ausführungsoptionen. Im Fall von Auftragspaaren, als Teil einer Auftragskette, muss deshalb die zeitliche Zulässigkeit einer Einplanung der betrachteten Kombination von Ausführungsoptionen geprüft werden. Die Einplanung ist möglich, sofern der zeitliche Aufwand des Kettenstarts in Summe mit dem zeitlichen Aufwand der Kettenfortsetzung die verbleibende Tourdauer  $T^r$  nicht überschreitet. Für zulässige Kombinationen wird anschließend die Nutzenveränderung berechnet. Neben dem Nutzenbeitrag der als Fortsetzung betrachteten Ausführungsoption muss der Nutzenverlust in nachfolgend eingeplanten Ausführungsoptionen berücksichtigt werden. Dabei wird der Verlust durch die kumulative Verzögerung von Kettenstart und -fortsetzung verwendet und um den Nutzenverlust aufgrund der Verschiebung des Kettenstarts reduziert. Letzteres ist notwendig, um eine mehrfache Berücksichtigung von Verlusten zu vermeiden. Die resultierende Rentabilität wird für alle Behältertypen, die für die Verwendung der Ausführungsoption  $o$  sowie ihrer zugehörigen besten Ausführungsoption für einen Kettenstart  $o_b^s$  nutzbar sind, mit der besten Rentabilität einer Kettenfortsetzung dieses Behältertyps  $r_b^f$  verglichen. Sofern eine Verbesserung vorliegt, wird die beste Fortsetzung des jeweiligen Behältertyps aktualisiert. Dazu werden neben der Rentabilität die jeweilige Ausführungsoption als beste Option  $o_b^f$  und der zugehörige Zeitbedarf als  $\Delta_b^f t$  gespeichert. Abschließend werden für alle möglichen Behältertypen des Kettenstartauftrags  $a$ , für die eine Fortsetzung mit positiver Rentabilität ermittelt wurde, die gemeinsame Nutzenänderung von Kettenstart und -fortsetzung, als Summe der Produkte von Rentabilität und Zeitaufwand, sowie der gemeinsame Zeitaufwand berechnet. Die resultierende Rentabilität wird mit dem bisher besten ermittelten Wert  $r^*$  verglichen und im Fall einer Verbesserung wird die beste Ausführungsoption an der betrachteten Einfügeposition aktualisiert. Als einzufügende Ausführungsoption wird die Ausführungsoption des Kettenstarts gewählt. Zusätzlich wird die Menge der für die Kombination aus Kettenstart und -fortsetzung wählbaren Behältertypen  $B^R$  festgehalten. Die Menge der nutzbaren Behältertypen einer Kombination resultiert aus der Schnittmenge der verfügbaren Behältertypen beider Ausführungsoptionen. Die Beschränkung auf die Ausführungsoption des Kettenstarts, als einzuplanende Ausführungsoption, ermöglicht in weiteren Iterationen eine bessere Bewertung der Ausführungsoption der Kettenfortsetzung. Dies ist insbesondere dann relevant, wenn der Nachfolgauftrag eine Behälter- oder Materialabholung darstellt und eine Teilmenge seiner Ausführungsoptionen die Weiterverwendung des genutzten Behälters für einen anderen Auftrag abbildet. Handelt es sich bei dem anderen

Auftrag um den Beginn einer Auftragskette kann eine verknüpfende Ausführungsoption als Kettenfortsetzung unterbewertet werden, da das Nutzenpotential der zweiten Auftragskette nicht berücksichtigt wird. Bei ausschließlicher Einplanung des untersuchten Kettenstarts kann in einer nachfolgenden Iteration die verknüpfende Ausführungsoption als Kettenstart der anderen Auftragskette einbezogen werden und ihr Nutzenpotential besser erfasst werden. Im Gegensatz zum Kettenstart findet für die Ausführungsoptionen der Kettenfortsetzung kein Vergleich ihrer Rentabilität mit der besten bislang ermittelten Rentabilität statt, da eine isolierte Einplanung des Nachfolgeauftrags nicht zulässig ist.

Das Beispiel aus den Tabellen 5.5 und 5.6 wird in Tabelle 5.7 fortgeführt. Die Tabelle enthält zwei Zeilen, je eine für die beiden verfügbaren Ausführungsoptionen 4 und 5 des Nachfolgeauftrags  $c$ . Zu den Ausführungsoptionen ist die Menge der nutzbaren Behältertypen angegeben. Basierend auf dieser Menge wird anhand der Rentabilitäten aus Tabelle 5.6 der Behältertyp  $b^*$  für beide Ausführungsoptionen bestimmt. Im Fall der Ausführungsoption 4 stehen der Behältertyp 1 mit der Rentabilität  $r_1^s = 4$  und der Behältertyp 2 mit der Rentabilität  $r_2^s = 3$  zur Auswahl. Der beste Kettenstart für die Kettenfortsetzung mit Ausführungsoption 4 steht somit bei Verwendung des Behältertyps 1 zur Verfügung. Die übrigen Werte  $o_{b^*}^s$ ,  $\Delta_{b^*}^s t$  und  $\hat{t}_{b^*}^s$  sind entsprechend aus der Tabelle 5.6 übernommen. Analog resultiert  $b^* = 2$  für Ausführungsoption 5. Der Abschlusszeitpunkt der jeweiligen Ausführungsoption des Kettenstarts  $\hat{t}_{b^*}^s$  geht als Startzeitpunkt der Ausführungsoptionen der Kettenfortsetzung in deren Nutzenbewertung ein. Außerdem wird der Wert  $\Delta_{b^*}^s t$  in Verbindung mit der Verlängerung der Tourdauer durch die Kettenfortsetzung benötigt, um die Zeitzulässigkeit der Kombination aus gewählter Ausführungsoption des Kettenstarts und Ausführungsoption der Kettenfortsetzung zu prüfen. Die letzten beiden Spalten der Tabelle geben zum einen die Rentabilität der Ausführungsoption 4 beziehungsweise 5 bei Einplanung sowie die resultierende Verlängerung der Tour an.

$o \in O'_c$	$B'_o$	$b^*$	$o_{b^*}^s$	$r_{b^*}^s$	$\Delta_{b^*}^s t$	$\hat{t}_{b^*}^s$	$r$	$\Delta t$
4	{1, 2}	1	2	4	48	8	3	10
5	{2, 3}	2	1	3	50	10	6	15

**Tabelle 5.7:** Kettenfortsetzung mit den verfügbaren Ausführungsoptionen des Auftrags  $c = u_a$

Analog zum Vorgehen des Kettenstarts wird für alle verwendbaren Behältertypen diejenige Ausführungsoption der Kettenfortsetzung ermittelt, die die größte Rentabilität aufweist. Tabelle 5.8 enthält die Ergebnisse dieser Betrachtung. Behältertyp 1 und 3 kann jeweils nur in Ausführungsoption 4 beziehungsweise 5 genutzt werden. Für Behältertyp 1 stellt somit Ausführungsoption 4 die beste Ausführungsoption für die Kettenfortsetzung

$o_1^f = 4$  mit einer Rentabilität von  $r_1^f = 3$  und einer Verlängerung der Tour um  $\Delta_1^f t = 10$  dar. Die Werte für Behältertyp 3 lauten  $o_3^f = 5$ ,  $r_3^f = 6$  und  $\Delta_3^f t = 15$ . Mit Behältertyp 2, der sowohl in Ausführungsoption 4 als auch in Ausführungsoption 5 genutzt werden kann, wird in Ausführungsoption 5 die bessere Rentabilität erzielt. Der Rest der Zeile des Behältertyps 3 entspricht dem des Behältertyps 2.

$b \in B_c^A$	$o_b^f$	$r_b^f$	$\Delta_b^f t$
1	4	3	10
2	5	6	15
3	5	6	15

**Tabelle 5.8:** Beste Kettenfortsetzung nach nutzbarem Behältertyp

Am Ende der Untersuchung von Kettenstart und -fortsetzung steht deren zusammenfassende Bewertung. Tabelle 5.9 enthält zunächst die für die Zusammenfassung benötigten Werte der Tabellen 5.6 und 5.8 je Behältertyp. Die Nutzenänderung der Kombination der besten Ausführungsoptionen für Kettenstart  $o_b^s$  und -fortsetzung  $o_b^f$  eines Behältertyps  $b$  resultiert aus der Summe der Produkte aus Rentabilität und Tourverlängerung  $r_b^s \Delta_b^s t + r_b^f \Delta_b^f t$ . Für Behältertyp 2 resultiert beispielsweise der Wert  $3 \cdot 10 + 6 \cdot 15 = 120$ . Die Summe der Tourverlängerungen  $\Delta_b^s t + \Delta_b^f t$  liefert den Zeitbedarf der Ausführungsoptionspaare. Dieser beträgt beispielsweise für Behältertyp 2  $10 + 15 = 25$ . Schließlich kann für das Paar von Ausführungsoptionen für jeden Behältertyp aus der Nutzenänderung und der Tourverlängerung eine Rentabilität ermittelt werden. Der Wert 4,8 resultiert beispielsweise für Behältertyp 2. Die erhaltenen Werte werden der besten bislang ermittelten Rentabilität  $r^*$  gegenübergestellt. Liegt eine Verbesserung vor, das heißt es gilt  $r > r^*$ , wird die beste Einplanungsoption aktualisiert. Unter der Annahme  $r^* < 4,8$  wird  $o^* := o_2^s = 1$  gesetzt und  $r^* := 4,8$  aktualisiert. Die Menge der wählbaren Behältertypen  $B^R$  resultiert aus der Schnittmenge der nutzbaren Behältertypen der beiden Ausführungsoptionen  $o_b^s$  und  $o_b^f$ , mit  $b$  als dem Behältertyp mit  $r > r^*$ . Die Berücksichtigung sowohl der Ausführungsoption für den Kettenstart als auch der Ausführungsoption für die Kettenfortsetzung ist notwendig, um die ermittelte Rentabilität durch Einplanung der Ausführungsoption  $o_b^f$  in nachfolgenden Iterationen realisieren zu können. Würde ein Behältertyp, der zwar für Ausführungsoption  $o_b^s$  aber nicht für Ausführungsoption  $o_b^f$  nutzbar ist, gewählt, kann die Rentabilität nicht erzielt werden. Im Beispiel führt Behältertyp  $b = 2$  mit den zugehörigen Ausführungsoptionen  $o_2^s = 1$  und  $o_2^f = 5$  zu einer Verbesserung der besten bislang ermittelten Rentabilität  $r^*$ , sodass  $B^R := \{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$  resultiert. Im Allgemeinen kann die Menge  $B^R$  mehrere Elemente besitzen, wenn für zwei Behältertypen  $b_1$  und  $b_2$  die gleiche Rentabilität ermittelt wird. Für die Ausführungsoptionen gilt dann  $o_{b_1}^s = o_{b_2}^s$  und  $o_{b_1}^f = o_{b_2}^f$ .

$b \in B'_a \cap B'_c$	$o_b^s$	$r_b^s$	$\Delta_b^{st}$	$o_b^f$	$r_b^f$	$\Delta_b^{ft}$	$\Delta n$	$\Delta t$	$r$
1	2	4	8	4	3	10	62	18	3,4
2	1	3	10	5	6	15	120	25	4,8
3	3	2	20	5	6	15	130	35	$\approx 3,7$

Tabelle 5.9: Zusammenfassung von Kettenstart und -fortsetzung

### 5.4.5 Bestimmung einer bestbewerteten Einfügeoption

Zusammenfassend ist die Bestimmung der besten Einfügeoption in Algorithmus 5.13 dargestellt. Das dargestellte Vorgehen bettet die in den Unterabschnitten 5.4.3 und 5.4.4 erläuterten Vorgehensweisen in den übergeordneten Ablauf zur Bestimmung der besten Einfügeoption einer Tour ein. Zunächst werden die Menge der bis zur betrachteten Position der Tour eingeplanten Aufträge  $A^e$  und die Daten der besten Einfügeoption initialisiert. Anschließend erfolgt für jede Einfügeposition  $(p, q)$  in der bestehenden Tour die Betrachtung aller verfügbaren Aufträge. Die Menge, der bis zur aktuell betrachteten Tourposition eingeplanten Aufträge, wird dabei zu Beginn der Betrachtung einer Einfügeposition um die beteiligten Aufträge der vorausgehenden Ausführungsoption ergänzt. Für die Einplanung werden Aufträge ausschließlich an Einfügepositionen in Erwägung gezogen, sofern sie keinen Vorgänger besitzen oder dieser bereits in der Menge an vorherigen Positionen eingeplanter Aufträge enthalten ist. Das weitere Vorgehen erfolgt in Abhängigkeit der Existenz eines Nachfolgebefehls. Als Ergebnis resultiert eine beste Einfügeoption für die betrachtete Tour, bestehend aus einer Ausführungsoption und einer Einfügeposition mit der zugehörigen Rentabilität und bei Behälterentscheidungen der Menge wählbarer Behältertypen.

---

#### Algorithmus 5.13: Bestimmung einer besten Einfügeoption

---

```

1  $(r^*, o^*, p^*, B^R) = (0, -1, -1, \{\});$ 
2 foreach  $(p, q) \in Tour$  do
3    $A^e := A^e \cup A_p^O;$ 
4   foreach  $a \in A'$  do
5     if  $a$  kein Vorgänger oder Vorgänger in  $A^e$  enthalten then
6       if  $a$  besitzt keinen Nachfolger then
7         Algorithmus 5.9;
8       else
9         Algorithmus 5.10;
10        Algorithmus 5.11;
11        Algorithmus 5.12;
12 return  $(r^*, o^*, p^*, B^R)$ 

```

---

### 5.4.6 Verfahrensvariante mit paralleler Planung von Touren

Das in den vorausgehenden Unterabschnitten beschriebene Verfahren plant nacheinander einzelne Touren. Die Möglichkeit zur Variation des Vorgehens durch eine parallele Planung mehrerer Touren wird in diesem Unterabschnitt betrachtet. Die gleichzeitige Planung mehrerer Touren erfordert zunächst die Auswahl von Tourbesetzungen für alle zu planenden Touren. Grundlage dieser Auswahl ist weiterhin das Nutzenpotential  $N_{vw}^P$ <sup>34</sup>. Zunächst wird die Tourbesetzung mit dem maximalen Nutzenpotential gewählt. Das gewählte Fahrzeug und der gewählte Mitarbeiter stehen für weitere Touren nicht mehr zur Verfügung. Aus den verbleibenden Fahrzeugen und Mitarbeitern wird so lange die Kombination mit dem größten Nutzenpotential gewählt, bis entweder die maximale Tourenanzahl erreicht oder keine Tourbesetzung mit positivem Nutzenpotential mehr zur Verfügung steht. Im Gegensatz zur sequenziellen Planung von Touren gemäß Unterabschnitt 5.4.1 wird, mangels eingeplanter Aufträge, zwischen der Wahl zweier Tourbesetzungen keine Aktualisierung der Nutzenpotentiale vorgenommen.

Für die Konstruktion von Touren stehen nach Auswahl der Tourbesetzungen im Allgemeinen mehrere leere Touren zur Verfügung. Da Aufträge maximal einmal eingeplant werden dürfen, müssen die verfügbaren Aufträge tourübergreifend verwaltet werden. Die zusätzliche Speicherung der verfügbaren Aufträge, Ausführungsoptionen und Behältertypen je Ausführungsoption auf Tourebene ermöglicht bei der Auswahl der besten Einfügeoptionen auf Kompatibilitätsprüfungen zu verzichten. Die Bestimmung der besten Einfügeoption für eine Tour bleibt gegenüber der sequenziellen Tourerstellung unverändert. Eingeplant wird jedoch die beste Einfügeoption aller Touren. Wird die beste Einfügeoption einer Tour eingeplant, muss aus den verbleibenden Optionen die beste Einfügeoption neu ermittelt werden. Die besten Einfügeoptionen der anderen Touren sind nur zu aktualisieren, sofern die Ausführungsoption der Einfügeoption nicht mehr zur Verfügung steht. Dies kann entweder in der Einplanung eines von der Ausführungsoption betroffenen Auftrags oder der Ausschöpfung eines Bestandes an einer Behälter- oder Materialquelle, auf den von der besten Einfügeoption zugegriffen wird, begründet sein. Stehen für eine Tour im Lauf der Tourerstellung keine Ausführungsoptionen mehr zur Verfügung, ist die Erstellung der jeweiligen Tour beendet und eine weitere Betrachtung ist nicht erforderlich. Das Verfahren endet schließlich, wenn für keine Tour eine Erweiterungsmöglichkeit in Form einer zulässigen und nutzensteigernden Einfügeoption verbleibt.

---

<sup>34</sup> vgl. Gleichung (5.41)

### 5.4.7 Multi-Start-Erweiterung durch Randomisierung

Ein deterministisches Vorgehen führt bei gleichen Ausgangsdaten stets zum gleichen Ergebnis. Das in den vorhergehenden Unterabschnitten beschriebene Vorgehen, sowohl mit sequentieller als auch mit paralleler Erstellung von Touren, ist deterministisch. Für eine Instanz kann nur eine Lösung erzeugt werden. Die Randomisierung einzelner oder mehrerer Entscheidungskriterien erweitert das Verfahren zu einem Multi-Start-Verfahren. Die zu randomisierenden Kriterien müssen dafür um eine Zufallskomponente erweitert werden. Die Möglichkeit von den gemäß den deterministischen Kriterien optimalen Entscheidungen abzuweichen, ermöglicht die Konstruktion unterschiedlicher Lösungen. Weiter können durch teils suboptimale Erweiterungen einer Tour global besser bewertete Lösungen resultieren. Aus der Menge der erzeugten Lösungen ist schließlich die beste auszuwählen. Als Verfahrenskomponenten können die Auswahl von Tourbesetzungen, die Entscheidung zu nutzender Behältertypen sowie die Berechnung der Rentabilität von Ausführungsoptionen randomisiert werden. Für alle drei Komponenten wird im Folgenden die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Randomisierung erläutert.

Die Wahl der Tourbesetzungen sowie die Behälterentscheidungen erfolgen mit Hilfe der Rouletteradauswahl. Dabei werden den Entscheidungsmöglichkeiten Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Mittels einer (0,1)-gleichverteilten Zufallszahl wird anschließend eine der Optionen gewählt. Eine geeignete Zuweisung von Auswahlwahrscheinlichkeiten führt zu einer Bevorzugung vielversprechender Optionen. Zugleich erlaubt diese Auswahl grundsätzlich die Wahl jeder Alternative. Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten ist zunächst die Summe über die Kriteriumswerte aller Optionen zu bilden. Anschließend resultiert die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Option aus dem Quotienten ihres eigenen Kriteriumswertes und der Summe aller Kriteriumswerte. Gleichung (5.43) gibt die Berechnung für die Auswahlwahrscheinlichkeit  $p_{\nu w}^{VW}$  einer Fahrzeug-Mitarbeiter-Kombination an. Berücksichtigt werden nur die vor einer Entscheidung verfügbaren Fahrzeuge und Mitarbeiter. Inkompatible Zusammenstellungen besitzen kein Nutzenpotential und erhalten somit eine Auswahlwahrscheinlichkeit von null.

$$p_{\nu w}^{VW} = \frac{N_{\nu w}^P}{\sum_{i \in V'} \sum_{j \in W'} N_{ij}^P} \quad \nu \in V, w \in W \quad (5.43)$$

Die deterministische Auswahl eines Behältertyps erfolgt nach dem maximalen Bestand. Gemäß Gleichung (5.44) resultiert die Auswahlwahrscheinlichkeit eines Behältertyps  $p_b^B$  aus dem Quotienten des Bestands des jeweiligen Behältertyps zum Bestand aller zur Wahl stehenden Behältertypen. Abhängig von dem Ort, an dem eine Behälterentscheidung zu

treffen ist, ist der Bestand leerer Behälter an einer Behälterquelle oder der Bestand mit einem Material  $m$  beladener Behälter an einer Materialquelle zu verwenden.

$$p_b^B = \begin{cases} \frac{L_{ib}^B}{\sum_{j \in B^R} L_{ij}^B} & i \in Q^B \\ \frac{L_{imb}^{MB}}{\sum_{j \in B^R} L_{imj}^{MB}} & i \in Q^M \end{cases} \quad (5.44)$$

Eine andere Art der Randomisierung wird für die Modifizierung der Rentabilitätswerte von Einfügeoptionen verwendet. Die deterministisch ermittelte Rentabilität wird dabei mit einer  $((1-z), 1)$ -gleichverteilten Zufallszahl multipliziert. Die zufällige Modifizierung der Rentabilitäten aller Optionen ändert in der Regel deren Rangfolge, sodass andere als die gemäß der deterministischen Rentabilität beste Option gewählt werden können. Der Randomisierungsfaktor  $(1-z)$  wird durch Wahl des Randomisierungsgrades  $z \in [0, 1]$  bestimmt. Aus der Wahl  $z = 0$  resultiert die deterministische Rentabilität ohne Randomisierung. Je größer der Randomisierungsgrad gewählt wird, umso mehr Optionen kommen als Kandidaten zur Einplanung infrage. Der Wert  $z = 1$  ermöglicht, sieht man von Optionen mit negativer Rentabilität ab, die Auswahl jeder Option zur Einplanung. Damit kann im Allgemeinen eine Vielzahl verschiedener Lösungen erzeugt werden. Es werden allerdings auch bei einem Randomisierungsgrad  $z = 1$  weiterhin vielversprechende Optionen bevorzugt. Als Beispiel werden zwei Rentabilitäten  $r_1 = r_2/2$  angenommen. Mit  $z = 1$  resultieren die zugehörigen Zufallszahlen  $z_1 \in [0, r_2/2]$  und  $z_2 \in [0, r_2]$ . In der einen Hälfte der Fälle gilt  $z_2 > r_2/2 \geq z_1$ , in der anderen liegen beide Zufallszahlen  $z_1$  und  $z_2$  im Intervall  $[0, r_2/2]$  und  $z_2 > z_1$  gilt wiederum in fünfzig Prozent der Fälle. Insgesamt ist  $z_2$  in 75% der Fälle größer als  $z_1$  und würde wie im deterministischen Fall gewählt werden. In den übrigen 25% der Fälle würde die Option mit der zunächst kleineren Rentabilität ausgewählt. Der Randomisierungsgrad  $z$  kann als maximale relative Abweichung einer Rentabilität von der besten Rentabilität, die nach Randomisierung die Wahl der zugehörigen Option ermöglicht, interpretiert werden. Bei  $z = 0,5$  kommen nur Optionen infrage, deren Rentabilität mindestens  $0,5r^*$ , wobei  $r^*$  der Rentabilität der besten Option entspricht, beträgt. Die Randomisierung der Rentabilität erlaubt weiterhin die Abschätzung der maximalen Rentabilität für die Ausführungsoptionen von Einzelaufträgen an einer gegebenen Einfügeposition gemäß Gleichung (5.42), die in Algorithmus 5.9 verwendet wird. Rentabilitäten von Einfügeoptionen werden durch die Randomisierung nicht vergrößert, sodass die obere Abschätzung ihre Gültigkeit behält.

Bezüglich der Bewertung von Auftragsketten, in den Stufen Kettenstart oder -fortsetzung sowie deren Zusammenfassung, ist eine doppelte Randomisierung von Werten zu vermeiden. Die Randomisierung erfolgt daher getrennt für die Ermittlung der besten Optionen

für Kettenstart und -fortsetzung. Für die Berechnung der gemeinsamen Rentabilität einer Kombination zweier Ausführungsoptionen werden anschließend zunächst die deterministischen Werte des gewählten Kettenstarts und der Kettenfortsetzung verwendet. Anschließend erfolgt die Randomisierung der gemeinsamen Rentabilität. Die mögliche Akzeptanz von Ausführungsoptionen mit negativer Rentabilität für den Kettenstart wird durch die Randomisierung per Multiplikation mit einer Zufallszahl insofern eingeschränkt, als dass die Wahl einer Ausführungsoption mit negativer Rentabilität nur möglich ist, sofern keine Ausführungsoption, die zu einer positiven Rentabilität führt, vorliegt.

Ein größerer Randomisierungsfaktor erweitert im Allgemeinen den erreichbaren Teil des Lösungsraums. Damit erhöht sich die Chance, dass gute und optimale Lösungen durch ein Verfahren konstruiert werden können. Zugleich bedeutet ein größerer erreichbarer Lösungsraum, dass auch die Zahl konstruierbarer Lösungen, die schlechtere Zielfunktionswerte aufweisen, ansteigen kann. Können nur wenige Iterationen eines Verfahrens durchgeführt werden, bietet sich die Fokussierung auf ein geeignetes Kriterium, hier die Rentabilität der Einfügeoptionen, und damit ein kleiner Randomisierungsfaktor an. Umgekehrt werden bei vielen Iterationen und kleinem Randomisierungsfaktor häufiger Lösungen mehrfach erzeugt. Eine Erhöhung des Randomisierungsfaktors bietet sich in diesem Fall an, um durch die Erweiterung des erreichbaren Lösungsraums gegebenenfalls vorhandenes Potential für bessere Lösungen zu bergen. Die konkrete Auswirkung der Wahl des Randomisierungsfaktors bei einer vorgegebener Rechenzeit kann im Allgemeinen nicht vorhergesagt werden.

## 5.5 Performanceanalyse

In diesem Abschnitt wird zunächst die Erzeugung von Instanzen in Unterabschnitt 5.5.1 beschrieben. Anschließend erfolgt in Unterabschnitt 5.5.2 die Darstellung der in Testläufen erhaltenen Ergebnisse.

### 5.5.1 Erzeugung von Testdaten

Um die Leistungsfähigkeit der zuvor beschriebenen Verfahrensvarianten zu untersuchen, werden zufallsgesteuert Testinstanzen erzeugt. Die Grundlage der Testinstanzen bilden fünf Brückengraphen, die als Streckennetze dienen. Die Brückengraphen werden zufällig gemäß dem in Abschnitt 2.3 beschriebenen Vorgehen konstruiert. Die Verwendung



eines Brückengraphen als Streckennetz dient der Nachempfindung einer Grube. Für jeden Brückengraphen werden die Distanzen zwischen allen Knoten, zur Bewertung von Fahrwegen in den Touren, ermittelt. Die Knotenanzahl der Brückengraphen wird auf 300 Knoten, zuzüglich der Wurzel als Depot, mit 15 Knoten je Untergraph festgelegt. Die Brückengraphen besitzen somit 20 Untergraphen. Die gewählte Knotenanzahl ist geeignet um die räumliche Struktur großer Bergwerke abzubilden. Als Kantenlänge des Quadrates, in dem die Knoten eines Untergraphen platziert werden können, kann ein beliebiger Wert größer null gewählt werden. Die Längen der Brücken werden mittels eines Faktors, bestimmt über eine  $(1/2, 2)$ -gleichverteilte Zufallszahl, zur gewählten Abmessung der Quadrate ins Verhältnis gesetzt. Ein Faktor von 2 bedeutet beispielsweise, dass eine Brücke die doppelte Kantenlänge der Quadrate als Länge besitzt. Für die Anzahl der Kindknoten eines Knotens, bei der Erzeugung des Untergraphenbaumes, werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 66% zwei und mit 33% drei gewählt. Im Mittel ist ein Untergraph, sieht man von Untergraphen die Blätter des Untergraphenbaumes darstellen ab, mit  $3,3$  Untergraphen über Brücken verbunden, wovon eine Brücke die Erreichbarkeit der Wurzel von den Knoten des Untergraphen sichergestellt.

Die Instanzen enthalten fünf Behälter- und fünf Materialtypen. Je drei Behältertypen kommen für den Transport eines Materialtypen infrage. Die Verteilung von Behälter- und Materialorten, als Knoten an denen Behälter- beziehungsweise Materialquellen und -senken vorliegen können, erfolgt durch Auswahl von jeweils fünf der zwanzig Untergraphen der Brückengraphen. In den gewählten Untergraphen wird ein zufälliger Knoten als Behälter- beziehungsweise Materialort bestimmt. Je Behältertyp dienen drei der fünf Behälterorte als Behälterquelle und davon wiederum zwei als Behältersenke. Für jeden Materialtyp werden drei der fünf Materialorte als Materialquellen gewählt. An zwei der drei Materialquellen je Materialtyp steht aufladbares Material zur Verfügung. Mit Material beladene Behälter können an allen drei Materialquellen vorhanden sein. Ebenfalls zwei der drei Materialorte eines Materialtypen dienen als Materialsenke, wobei eine nur das Abstellen beladener Behälter und die andere nur das Abladen von Material erlaubt. Zur Durchführung von Aufträgen stehen Fahrzeuge, die jeweils vier der fünf Behältertypen transportieren können, zur Verfügung. Die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge werden ganzzahlig zwischen 20 und 25 variiert. Mitarbeiter dürfen jeweils vier der fünf Fahrzeuge benutzen sowie vier der fünf Materialtypen handhaben. Die Begrenzung der Tourdauer erfolgt derart, dass ein Fahrzeug mit der gemittelten Geschwindigkeit aller Fahrzeuge die Strecke zwischen Wurzel und dem von der Wurzel am weitesten entfernten Knoten des Brückengraphen achtmal zurücklegen kann. Die maximale Tourdauer ist somit von den Geschwindigkeiten der Fahrzeuge und dem jeweiligen Brückengraphen abhängig.

Für die Auftragserzeugung werden zunächst zwei Profile, die sich in den Anteilen der Auftragsstypen und der Häufigkeit von Auftragsketten unterscheiden, verwendet. Die Profile sind in Tabelle 5.10 angegeben. Auf der linken Seite der Tabelle sind den Auftragsstypen je Profil Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Bei Erzeugung eines Auftrags wird dessen Auftragsstyp anhand dieser Wahrscheinlichkeiten ausgewählt. In Profil 1 beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Behältertransport 40% und für die übrigen Auftragsstypen jeweils 15%. Profil 2 sieht eine gleich wahrscheinliche Wahl jedes Auftragsstypen mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% vor. Die rechte Seite der Tabelle spezifiziert je Profil Wahrscheinlichkeiten, dass bei Erstellung eines Auftrags eine Auftragskette gebildet wird. Die Spalte „Abholung“ gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Abholauftrag für den genutzten Behälter eines Behältertransport oder einer Materiallieferung anzulegen ist. Analog spezifiziert der Wert in Spalte „Lose“ die Wahrscheinlichkeit, dass für einen Behältertransport oder eine Materialabholung zunächst ein geeigneter Behälter geliefert werden muss. In diesem Fall resultiert eine Auftragskette aus Behälterlieferung und anschließendem Behältertransport beziehungsweise Materialabholung. Für Behältertransporte kann sowohl die Notwendigkeit der Lieferung eines geeigneten Behälters als auch die Möglichkeit der Abholung des genutzten Behälters nach Durchführung des Transportes eintreten. Gemäß Tabelle 5.2 liegt dann eine Umsetzung mit Behälterabholung vor. Für die Auftragserstellung genügt für Behälter- und Materiallieferungen und -abholungen die Bestimmung eines Knotens als Start- oder Zielknoten und eines Behälter- beziehungsweise Materialtypen. Die Erstellung von Behältertransporten erfolgt nach dem in Unterabschnitt 4.4.1 beschriebenen Vorgehen. Hierfür werden zunächst ein minimaler Spannbaum des jeweiligen Brückengraphen ermittelt und anschließend Start- und Zielknoten der Transporte bestimmt. Die Wahl eines Materialtypen kann für Behältertransporte ohne weitere Einschränkung erfolgen. Die Angabe eines Behältertypen ist nur sinnvoll, sofern keine vorausgehende Behälterlieferung angelegt wird.

	$B^T$	$B^L$	$B^A$	$M^L$	$M^A$	Lose	Abholung
Profil 1	0,4	0,15	0,15	0,15	0,15	0,2	0,2
Profil 2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,5	0,5

**Tabelle 5.10:** Profile der Auftragslast

Die Skalierung der Testinstanzen erfolgt über die Vorgabe der maximalen Anzahl durchzuführender Touren  $\hat{F}$ . Als Werte werden 1, 2, 4 und 8 verwendet. Diese Vorgabe wirkt sich auf die Anzahl der verfügbaren Mitarbeiter und Fahrzeuge, die verfügbaren leeren und beladenen Behälter sowie die zur Auswahl stehenden Aufträge aus. Die Anzahl an Fahrzeugen und Mitarbeitern wird jeweils als  $\hat{F} + 2$  festgelegt. Damit wird die Notwendigkeit, eine Auswahl aus der Menge der Fahrzeuge und Mitarbeiter zu treffen, gewährleistet.

Die Anzahl der leeren Behälter eines Behältertypen sowie der mit einem Materialtyp beladenen Behälter wird ebenfalls als  $\hat{F} + 2$  gewählt. Bezüglich der Auftragslast werden zwei Lastprofile unterschieden. Im Lastprofil 1 werden je Tour 12, im Lastprofil 2 16 Aufträge je Tour erzeugt. Beide Lastprofile sorgen für eine Auftragslast, die innerhalb der Planungsperiode nicht vollständig bearbeitet werden kann. Eine Auftragskette, als Repräsentation einer Transporttätigkeit aus Tabelle 5.2, wird als ein Auftrag gezählt. Weiter werden je Tour entweder einem oder drei Aufträgen ein Termin im Zeitfenster  $[\hat{t}/4, \hat{t}/2]$  zugeordnet. Die Zuordnung eines Termins je Tour wird als Terminprofil 1, die Zuordnung von drei Terminen je Tour als Terminprofil 2 bezeichnet. Schließlich werden je Parameterkombination und Brückengraph zwei Instanzen erzeugt. Für jede Parameterkombination resultieren somit zehn Instanzen. Insgesamt stehen 320 Instanzen zur Verfügung.

### 5.5.2 Auswertung von Testläufen

Das mathematische Modell der Problemstellung aus Unterabschnitt 5.3.1 wurde in der Software Fico Xpress 8.11 implementiert. Die Umsetzung des heuristischen Lösungsverfahrens aus Abschnitt 5.4, inklusive der Erweiterung zu einem Multi-Start-Verfahren, erfolgte in C#. Sowohl die sequenzielle als auch die parallele Erstellung von Touren wurde realisiert. Die Testläufe wurden mit einem Intel Core i7-8700 Prozessor und 64 GB RAM unter Windows 10 ausgeführt. Als maximale Rechenzeit wurden 600 Sekunden für die Testläufe mit Xpress verwendet. Die heuristischen Lösungsansätze in der Multi-Start-Version wurden über eine Laufzeit von 1 und 60 Sekunden mit den Werten 0,15, 0,5 und 0,95 als Randomisierungsfaktor  $z$  untersucht. Zusätzlich wurden Testläufe der Multi-Start-Verfahren mit einem Randomisierungsfaktor von 0,95 über 600 Sekunden durchgeführt. Die letztgenannten Testläufe zielten weniger auf eine Bewertung nach 600 Sekunden als auf die Ermittlung guter Lösungen als Grundlage einer Bewertung der Ergebnisse nach 1 und 60 Sekunden ab. In der Praxis liegen Informationen, beispielsweise ein Teil der verfügbaren Aufträge, erst kurzfristig vor. Um die Ausgabe von Touren an die Fahrer nicht unnötig zu verzögern, muss die Ermittlung einer Lösung in kurzer Zeit erfolgen. Dies gilt insbesondere dann, wenn der Bediener einer Lösungssoftware mehrere Varianten einer Instanz, beispielsweise durch Vorfiltern der durchführbaren Aufträge, berechnen lassen möchte. Eine sinnvolle Berechnungsdauer liegt dann maximal in der Größenordnung einer Minute. Je Instanz wurde der beste Zielfunktionswert der ermittelten Lösungen über alle Testläufe  $f_{best}$  ermittelt. Im Rahmen der Auswertung wird der Zielfunktionswert der mit einem Verfahren nach einer bestimmten Laufzeit erhaltenen Lösung  $f_H$  diesem besten Zielfunktionswert gegenübergestellt. Die Angabe erfolgt, sofern

$\hat{F}$	600s	deterministisch		Multi-Start, $z=0,95$ , 600s	
	Xpress	sequenziell	parallel	sequenziell	parallel
1	37,1	11,7		0,2	0,4
2	49,2	13,1	20,8	0,3	1,8
4	59,7	9,8	22,2	0,2	2,3
8	85,5	6,6	21,7	0,3	1,5

**Tabelle 5.11:** Ergebnisse von Xpress, den deterministischen Verfahren sowie den Multi-Start-Erweiterung mit Randomisierungsfaktor 0,95

nicht explizit eine andere Darstellung erläutert ist, als relative Abweichung des Zielfunktionswertes des jeweiligen Verfahrens zum besten Zielfunktionswert aller Verfahren, das heißt  $(f_{best} - f_H) / f_{best}$ . Ein Wert 0 bedeutet, dass mit einem Verfahren der beste Zielfunktionswert aller Testläufe erzielt wurde. Bei der Gruppierung von Instanzen, beispielsweise nach der maximalen Anzahl an Touren  $\hat{F}$ , werden gemittelte Werte angegeben.

Tabelle 5.11 zeigt neben den mit Xpress erhaltenen Ergebnisse, die Resultate der deterministischen und Multi-Start Testläufe der beiden heuristischen Lösungsansätze gruppiert nach Instanzgröße. Für die Multi-Start-Verfahren sind die Ergebnisse mit dem Randomisierungsfaktor  $z=0,95$  über eine Laufzeit von 600 Sekunden angegeben. Die Laufzeit der deterministischen Ansätze liegt über alle Instanzen unter 0,05 Sekunden. Mit Xpress wurden, selbst für kleine Instanzgrößen, vergleichsweise schlechte Lösung innerhalb der vorgegebenen Rechenzeit ermittelt. Die von Xpress erzielten oberen Schranken hingen insbesondere vom Auftragsüberhang, dem Anteil der Aufträge die aufgrund der zeitlichen Restriktion nicht einplant werden können, ab. Alle Varianten des heuristischen Lösungsansatzes erzielten bessere Ergebnisse. Dies gilt insbesondere auch für die deterministischen Ansätze mit einer um ein Vielfaches geringeren Rechenzeit. Unter den deterministischen Ansätzen lieferte die sequenzielle Planung von Touren durchweg bessere Resultate. Mit zunehmender Instanzgröße kann sich der sequenzielle Ansatz weiter von der parallelen Erstellung von Touren absetzen. Der Vergleich der Multi-Start-Varianten mit Randomisierungsfaktor  $z=0,95$  und 600 Sekunden Laufzeit fällt ebenfalls zugunsten der sequenziellen Planung von Touren aus, wenngleich die Abweichungen absolut geringer ausfallen als bei den deterministischen Ansätzen. Die Ergebnisse der Testläufe mit hohem Randomisierungsfaktor und langer Laufzeit lieferten zusammengenommen für nahezu alle Instanzen die Lösungen mit den besten gefundenen Zielfunktionswerten.

Weitere Ergebnisse sind in Tabelle 5.12 für die Multi-Start-Verfahren mit Randomisierungsfaktoren 0,15, 0,5 und 0,95 sowie Laufzeitbegrenzungen von einer und sechzig Sekunden dargestellt. Der Randomisierungsfaktor, der für ein Verfahren, eine Laufzeitbegrenzung und Instanzgröße zum besten Zielfunktionswert führte, ist jeweils hervorgehoben.

	1s						60s					
	sequenziell			parallel			sequenziell			parallel		
$\hat{F}$	0,15	0,5	0,95	0,15	0,5	0,95	0,15	0,5	0,95	0,15	0,5	0,95
1	5,9	2,3	<b>1,3</b>	6,2	2,6	<b>1,7</b>	4,1	<b>0,1</b>	0,7	4,5	<b>0,4</b>	1,0
2	4,7	<b>3,4</b>	3,7	5,9	4,9	<b>4,7</b>	2,6	<b>0,2</b>	1,2	3,8	<b>1,7</b>	2,5
4	<b>3,2</b>	3,5	4,0	5,3	<b>5,2</b>	5,4	<b>0,6</b>	<b>0,6</b>	1,5	3,0	<b>2,7</b>	3,3
8	<b>2,6</b>	3,0	3,5	4,1	<b>3,9</b>	4,3	<b>0,5</b>	0,6	1,2	2,1	<b>1,9</b>	2,3

**Tabelle 5.12:** Ergebnisse der Multi-Start-Ansätze bei einer Laufzeit von einer und sechzig Sekunden

$\hat{F}$	sequenziell			parallel		
	0,15	0,5	0,95	0,15	0,5	0,95
1	98,1	97,9	99,3	98,3	97,8	99,3
2	97,8	96,8	97,5	97,8	96,8	97,7
4	97,5	97,1	97,5	97,6	97,4	97,8
8	97,9	97,6	97,6	98,0	97,9	98,0
	97,8	97,3	98,0	97,9	97,5	98,2

**Tabelle 5.13:** Gegenüberstellung der Ergebnisse nach Laufzeit ( $f_H^1/f_H^{60}$ )

Die sequenzielle Planung von Touren dominiert in allen Fällen die parallele Planung von Touren. Bei einer Laufzeit von einer Sekunde liefern hohe Werte des Randomisierungsfaktors bessere Ergebnisse für kleinere Instanzen, da im Vergleich zu den größeren Instanzen deutlich mehr Iterationen durchgeführt werden können. Für eine Laufzeit von sechzig Sekunden resultieren die besten Ergebnisse aus der Verwendung des mittleren Randomisierungsfaktor 0,5.

In Tabelle 5.13 werden die Ergebnisse der Multi-Start-Verfahren mit verschiedenen Randomisierungsfaktoren nach einer Laufzeit von einer Sekunde zu den Ergebnissen nach sechzig Sekunden ins Verhältnis gesetzt. Die angegebenen Werte resultieren aus den Quotienten des ermittelten Zielfunktionswerts eines Verfahrens nach einer und sechzig Sekunden  $f_H^1/f_H^{60}$ . Der maximale Wert 1 des Quotienten resultiert, sofern nach der ersten Sekunde der Laufzeit eines Verfahrens keine weitere Verbesserung innerhalb der folgenden 59 Sekunden erzielt werden konnte. Neben der Angabe je Instanzgröße enthält die Tabelle die gemittelten Werte je Verfahren in der letzten Zeile. Die Werte zeichnen ein weitgehend einheitliches Bild. Ausgehend von der nach einer Sekunde erhaltenen Lösung kann durch Verlängerung der Rechenzeit auf 60 Sekunden eine Verbesserung des Zielfunktionswertes von etwa 2 bis 3% erzielt werden. Umgekehrt betrachtet bringt ein Verkürzen der Rechenzeit von 60 auf eine Sekunde einen Verlust an Zielfunktionswert in vergleichbarer Höhe. Dies gilt insbesondere auch für die nach einer Laufzeit von 60 Sekunden im Mittel beste Kombination aus Verfahren und Randomisierungsfaktor, se-

quenzielle Tourerstellung mit  $z=0,5$ . Die Ergebnisse mit einem Randomisierungsfaktor von 0,95 für Instanzen mit maximal einer Tour weichen von den übrigen Ergebnissen durch eine geringere mittlere Verbesserung von weniger als einem Prozent ab.

Auftragsprofil	1 Sekunde						
	$z=0,15$		$z=0,5$		$z=0,95$		
	seq.	par.	seq.	par.	seq.	par.	
Profil 1	3,6	3,7	2,9	2,9	3,1	2,9	
Profil 2	4,6	7,0	3,2	5,4	3,2	5,1	
Auftragsprofil	60 Sekunden						
	Profil 1	1,6	1,9	0,5	0,7	1,2	1,2
	Profil 2	2,2	4,7	0,2	2,7	1,1	3,2

**Tabelle 5.14:** Einfluss des Auftragsprofil

Die Differenzierung der Ergebnisse der Multi-Start-Verfahren nach dem Auftragsprofil der Instanzen ist in Tabelle 5.14 vorgenommen. Im Auftragsprofil 1 liegt der Fokus auf Behältertransporten und einer vergleichsweise geringen Anzahl an Auftragsketten. Dagegen sind die Anteile der Auftragsstypen im Auftragsprofil 2 homogen aufgeteilt und es liegt im Vergleich zu Auftragsprofil 1 eine größere Menge an Auftragsketten vor. Die Ergebnisse sind für jeden verwendeten Randomisierungsfaktor dargestellt. In der oberen Hälfte der Tabelle sind die Ergebnisse nach einer Laufzeit von einer Sekunde angegeben. Während für die sequenzielle Planung von Touren lediglich bei einem Randomisierungsfaktor von  $z=0,15$  ein größerer Unterschied zwischen den beiden Auftragsprofilen zu erkennen ist, stehen die Ergebnisse der parallelen Tourerstellung für das Auftragsprofil 2 über alle verwendeten Randomisierungsfaktoren hinter den Resultaten für das Auftragsprofil 1 zurück. Beschränkt man die Betrachtung auf das Auftragsprofil 1 liefern die sequenzielle und die parallele Planung von Touren gleichwertige Ergebnisse. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei einer Laufzeit von 60 Sekunden, dargestellt in der unteren Hälfte der Tabelle. Die größeren Unterschiede in der Qualität der Ergebnisse der beiden Verfahren beschränken sich für alle verwendeten Randomisierungsfaktoren auf die Instanzen mit Auftragsprofil 2.

Als weiterer Instanzparameter wird in Tabelle 5.15 das Terminprofil als Auswertungskriterium verwendet. Analog zu Tabelle 5.14 sind je Terminprofil die Ergebnisse der Multi-Start-Verfahren mit den verwendeten Randomisierungsfaktoren für eine und sechzig Sekunden Laufzeit angegeben. Die Anzahl der Aufträge, denen je zu planende Tour ein Termin zugeordnet wird, beträgt im Terminprofil 1 eins, im Terminprofil 2 drei. Die sequenzielle Tourerstellung liefert sowohl für eine Laufzeit von einer Sekunde als auch für eine Laufzeit von 60 Sekunden über alle drei Randomisierungsfaktoren bessere Ergebnisse für Instanzen mit Terminprofil 1. Die absolute Differenz der Resultate für die

Terminprofil	1 Sekunde					
	z=0,15		z=0,5		z=0,95	
	seq.	par.	seq.	par.	seq.	par.
Profil 1	3,7	5,3	2,8	4,1	2,9	4,1
Profil 2	4,6	4,6	3,3	4,2	3,3	3,9
	60 Sekunden					
Profil 1	1,7	3,4	0,3	1,9	0,9	2,4
Profil 2	2,2	3,3	0,5	1,4	1,3	2,2

**Tabelle 5.15:** Einfluss des Terminprofils

beiden Terminprofile fallen bei einer Laufzeit von 60 Sekunden gegenüber einer Laufzeit von einer Sekunde für die Randomisierungsfaktoren 0,15 und 0,5 geringer, für den Randomisierungsfaktor 0,95 gleich hoch aus. Der Einfluss des Terminprofils auf die Ergebnisse der parallele Tourerstellung fällt für die meisten Kombinationen aus Laufzeit und Randomisierungsfaktor geringer aus. In den Fällen des Randomisierungsfaktors 0,15 bei einer Laufzeit von einer Sekunde und des Randomisierungsfaktors 0,5 bei einer Laufzeit von 60 Sekunden zeigt die Auswertung einen zur sequenziellen Tourerstellung entgegengesetzten Effekt. Eine größere Anzahl an Aufträgen mit Terminen führt in diesen Fällen gegenüber einer geringeren Terminanzahl zu besseren Ergebnissen.

Schließlich zeigt Tabelle 5.16 die Ergebnisse der Testläufe unterteilt nach Lastprofilen. Die Lastprofile unterscheiden sich in der Anzahl je zu planender Tour vorliegender Aufträge. Im Lastprofil 1 werden je Tour 12 Aufträge erzeugt. Dagegen liegen 16 Aufträge im Lastprofil 2 je Tour vor. Betrachtet wird zunächst eine Laufzeit von einer Sekunde. Mit Randomisierungsfaktor 0,15 resultieren für beide Verfahrensvarianten bessere Lösungen für Lastprofil 2. Mit zunehmendem Randomisierungsfaktor kehren sich die Ergebnisse jedoch um und es werden für Lastprofil 1 bessere Resultate erzielt. Während im Fall von Lastprofil 2 bei einem niedrigen Randomisierungsfaktor eine Fokussierung auf das Rentabilitätskriterium vorliegt und die erhöhte Anzahl verfügbarer Aufträge mehr Spielraum für gute Kombinationen ermöglicht, ist dieser Fokus bei hohem Randomisierungsfaktor nicht gegeben. Die größere Auftragsmenge des Lastprofils 2 führt auch hier zu einer Vergrößerung der Möglichkeiten Touren zusammenzustellen, jedoch steigt in Verbindung mit dem hohen Randomisierungsfaktor auch die Menge wählbarer, nach dem Rentabilitätskriterium suboptimaler, Einfügeoptionen. Bei einer Laufzeit von 60 Sekunden fallen die Unterschiede zwischen den Lastprofilen geringer aus. Die Tendenz der Ergebnisse bleibt, wie für die Laufzeit von einer Sekunde beschrieben, bestehen.

Die Varianten des vorgestellten heuristischen Verfahrens wurden mit einem Praxispart-

	1 Sekunde					
	$z=0,15$		$z=0,5$		$z=0,95$	
Lastprofil	seq.	par.	seq.	par.	seq.	par.
Profil 1	4,3	5,6	3,3	4,1	3,0	3,8
Profil 2	3,9	5,1	2,8	4,2	3,3	4,2
	60 Sekunden					
Profil 1	2,1	3,5	0,5	1,6	1,1	2,2
Profil 2	1,8	3,2	0,3	1,8	1,2	2,3

**Tabelle 5.16:** Einfluss des Lastprofils

ner, einem deutschen Bergbauunternehmen, zunächst in einer mehrmonatigen Testphase erprobt und schließlich im regulären Schichtbetrieb eingesetzt. Die Bereitstellung einer computergestützten Erstellung von Tourenvorschlägen ermöglichte die Bündelung von Transporttätigkeiten verschiedener Fachabteilungen in einer zentralen Transportabteilung. Dadurch können Leerfahrten, Fahrten ohne aufgeladenen Behälter, reduziert und Behälter effizienter genutzt werden. Die einzelnen Fachabteilungen können sich seither durch die Entlastung von den Transporttätigkeit besser auf ihre Kernaufgaben konzentrieren.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit setzt sich mit verschiedenen Problemstellungen aus dem Bereich der Tourenplanung, die Relevanz in der innerbetrieblichen Versorgung von Bergwerken besitzen, auseinander. Betrachtet werden die Auslieferung oder das Einsammeln von Gütern in Kapitel 3, die Umsetzung von Objekten in Kapitel 4 und schließlich die vielfältigen Transportaufgaben einer Transportabteilung in Kapitel 5. Während in der Regel Distanzmatrizen zwischen anzufahrenden Orten als Eingangsgröße von Tourenplanungsproblemen verwendet werden, wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf die Struktur von Streckennetzen eingegangen. Die Betrachtung von Bäumen und der eingeführten Struktur des Brückengraphen ist in den redundanzarmen Streckennetzen mancher Bergwerke begründet. Die Verwendung von Bäumen als Streckennetze stellt oftmals eine Näherung realer Streckennetze dar. Die Struktur des Brückengraphen verallgemeinert die Struktur des Baumes. Konkret werden Knoten eines Baumes durch zusammenhängende Graphen ersetzt. Eine sinnvolle Verwendung der Struktur Brückengraph ist möglich, wenn mehrere Brücken im Graphen eines Streckennetzes existieren und gegebenenfalls vorhandene Kreise auf vergleichsweise kurze Längen beschränkt sind. Die Verwendung bei einem Graphen, der aus genau einem Kreis besteht, macht beispielsweise keinen Sinn. Für die nachfolgenden Ausführungen sei angemerkt, dass alle Testläufe mit der verwendeten Optimierungssoftware unter Vorgabe einer begrenzten Rechenzeit durchgeführt wurden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird zunächst die Möglichkeit, das Handlungsreisendenproblem auf Bäumen effizient zu lösen, aufgegriffen. Darauf aufbauend wird das Handlungsreisendenproblem auf Brückengraphen betrachtet und der Vorteil gegenüber der Verwendung eines vervollständigten Graphen beziehungsweise einer Distanzmatrix dargelegt. Für die kapazitierte Tourenplanung werden mathematische Modelle aus der Literatur für vollständige Graphen und Bäume als Streckennetze vorgestellt. Mittels kommerzieller Optimierungssoftware werden mit den Modellen für die Baumstruktur mit begrenzter Re-

chenzeit deutlich kleinere Gap-Werte erzielt. Basierend auf den Erkenntnissen über das TCVRP werden zwei mathematische Modelle für das BCVRP erarbeitet. Zusätzlich werden Möglichkeiten zur Bestimmung unterer und oberer Schranken für die Problemstellung erläutert. Die Durchführung einer Performanceanalyse zeigt, dass die Berücksichtigung der Struktur Brückengraph in einem mathematischen Modell bei begrenzter Rechenzeit ebenfalls zu niedrigeren Gap-Werten führt. Die Möglichkeit untere Schranken für die notwendige Anzahl von Fahrzeugen, die eine Brücke befahren müssen, in das Modell zu integrieren, resultiert in größeren unteren Schranken für den Zielfunktionswert und schließlich in besseren Gap-Werten. Die Anzahl von Instanzen für die zulässige Lösungen erzielt werden, nimmt bei den Brückengraph-Modellen jedoch ab. Die Zielfunktionswerte der erzielten Lösungen sind für das Standardmodell, das eine Distanzmatrix als Eingangsgröße verwendet, im Durchschnitt am besten. In Verbindung mit vergleichsweise schlechten unteren Schranken resultieren jedoch größere Gap-Werte. Als zweistufiges Näherungsverfahren liefert das Lösen einer als Näherung der BCVRP-Instanz verwendeten TCVRP-Instanz gefolgt von dem Lösen lokaler Handlungsreisendenprobleme in den Untergraphen, insbesondere für größere Instanzen, mit Abstand die besten Resultate.

Die Betrachtung des Gabelstaplerproblems konzentriert sich auf Bäume als Streckennetze. Untersucht werden sowohl der aus der Literatur bekannte Ein-Fahrzeug-Fall als auch der Mehr-Fahrzeug-Fall. Die Anforderungen an eine Lösung beider Varianten, TSCP und MVTSCP, werden beschrieben und darauf basierend mathematische Modelle aufgestellt. Weiter werden Möglichkeiten zur Komprimierung der Instanzen von TSCP und MVTSCP, die zu einer erheblichen Reduktion der Variablen- und Nebenbedingungsanzahl der Modelle führen können, beschrieben. Während manche Instanzen des TSCP mit linearem Aufwand gelöst werden können, ist bei Vorliegen von Kurzzyklen aus Aufträgen im Allgemeinen die Lösung eines Steinerbaumproblems zur Bestimmung einer optimalen Lösung erforderlich. Für eine Performanceanalyse werden Instanzen derart erstellt, dass unterschiedliche Anteile der durchzuführenden Aufträge paarweise Kurzzyklen bilden. Die Testläufe für das TSCP zeigen, dass die Berücksichtigung der Baumstruktur gegenüber der Verwendung einer Distanzmatrix die Ermittlung zulässiger Lösungen für alle verwendeten Instanzen mittels kommerzieller Optimierungssoftware ermöglicht. Die maximale Auftragsanzahl der untersuchten Instanzen beträgt 400, was mit Blick auf innerbetriebliche Transporte deutlich über der üblicherweise anzutreffenden Größenordnung liegt. Der Anteil der optimal gelösten Instanzen erhöht sich, wenn die Instanz zuvor komprimiert wurde. Eine Differenzierung der erhaltenen Gap-Werte nach dem Anteil der Aufträge, die Teil von Kurzzyklen sind, zeigt, dass, sofern nicht alle Aufträge Teil von Kurzzyklen sind, Gaps unter 4% erzielt werden. Bei einem Anteil unter 66% liegen die Gaps im Mittel unter 0,1%. Im Bewusstsein, dass es sich bei den Instanzen mit hohem

Auftragsanteil in Kurzzyklen um tendenziell realitätsfremde Beispiele handelt, können auch große Instanzen des TSCP in Anwendungen zuverlässig gelöst werden. In den Testläufen für das MVTSCP liefern die Modelle mit Berücksichtigung der Baumstruktur für mehr Instanzen optimale jedoch für weniger Instanzen zulässige Lösungen. Die Reduktion der Instanzen führt zu einer geringen Verbesserung. Während für das Modell mit Baumstruktur vor allem ein höherer Anteil an Aufträgen in Kurzzyklen zu schlechteren Ergebnissen führt, fällt der Einfluss dieser Instanzeigenschaft auf das Modell mit Distanzmatrix geringer aus. Dafür wirkt sich bei dem letztgenannten Modell eine größere Auftragsanzahl stärker aus.

Als zentrale Problemstellung der vorliegenden Arbeit wird die Planungsaufgabe einer Transportabteilung, die Transporttätigkeiten zur innerbetrieblichen Versorgung eines Bergwerks mit Behältern durchführt, beschrieben. Die Problemstellung sieht fünf Basistypen von Aufträgen vor und ermöglicht durch deren Verknüpfung die Abbildung zahlreicher weiterer Transporttätigkeiten. Die durchzuführenden Tätigkeiten werden als Aufträge verwaltet. Im Rahmen des Planungshorizontes einer Periode können nicht alle Aufträge durchgeführt werden, sodass eine Auswahl anhand von Nutzenwerten erforderlich ist. Die Berücksichtigung heterogener Mitarbeiter und Fahrzeuge sowie von Kompatibilitäten zwischen Fahrzeugen, Mitarbeitern, Material- und Behältertypen ermöglicht die Abbildung realer Situationen. Als Zielstellung wird die Maximierung des Nutzens durchgeführter Aufträge verfolgt. Ein gemischt-ganzzahliges lineares Modell wird für die Problemstellung formuliert. Im Anschluss wird eine Möglichkeit zur Integration einer Pausenregelung in das Modell erläutert. Außerdem wird auf die Schwierigkeit der Bestimmung geeigneter Nutzenwerte für Aufträge eingegangen und ein Vorgehen zur Einbeziehung einer stufenweisen Priorisierung von Aufträgen beschrieben. Ein zunächst deterministisches, heuristisches Lösungsverfahren, das sequentiell Touren konstruiert, wird beschrieben. Besondere Beachtung finden dabei Aufträge, die Teil von Vorrangbeziehungen sind. Die Modifikation des Verfahrens, Touren parallel statt sequentiell zu konstruieren, wird erläutert und auf notwendige Anpassungen eingegangen. Anschließend werden Möglichkeiten zur Erweiterung der Verfahrensvarianten zu einem Multi-Start-Verfahren vorgestellt. Im Rahmen einer Performanceanalyse liefern die heuristischen Lösungsansätze deutlich bessere Lösungen im Vergleich zur Verwendung des mathematischen Modells in kommerzieller Optimierungssoftware. Die Ergebnisse der Multi-Start-Verfahren werden mit Laufzeiten von einer und sechzig Sekunden ausgewertet. Die mittlere relative Abweichung der nach einer Sekunde erhaltenen Zielfunktionswerte von den besten nach sechzig Sekunden erhaltenen Zielfunktionswerten liegt über alle Instanzgrößen im niedrigen einstelligen Prozentbereich. Die Anzahl durchführbarer Iterationen der Multi-Start-Verfahren ist wesentlich von der Auftragsanzahl der jeweiligen Instanz abhängig. Bei der

Beschränkung der Rechenzeit auf eine Sekunde bietet sich für vergleichsweise kleine Instanzen die Verwendung eines größeren Randomisierungsfaktors an. Dagegen profitieren größere Instanzen von einer Fokussierung auf die Entscheidungskriterien durch Wahl eines kleinen Randomisierungsfaktors. Bei der längeren Rechenzeit von sechzig Sekunden resultieren die besten Ergebnisse sowohl für kleine als auch für große Instanzen aus der Wahl eines mittleren Randomisierungsfaktors. Die Variante des Verfahrens Touren sequentiell zu konstruieren, liefert in der Regel bessere, jedoch mindestens gleichwertige Lösungen im Vergleich zur Variante mit paralleler Konstruktion von Touren.

Auf Basis der Betrachtung von Streckennetzen und den untersuchten Problemstellungen dieser Arbeit bieten sich weitere Forschungsmöglichkeiten an.

- Die Berücksichtigung von konkreten Streckennetzen anstelle von Distanzmatrizen in mathematischen Modellen führt bei der Verwendung von kommerzieller Optimierungssoftware nicht zwangsläufig zu besseren Resultaten. Es bietet sich daher an, gezielt Lösungsverfahren für die Problemstellungen mit speziellen Streckennetzen zu entwickeln, um die vergleichsweise geringere Komplexität für die schnelle Ermittlung sehr guter Lösungen zu nutzen. Die Resultate des in der vorliegenden Arbeit verwendete Lösungsansatzes TCVRP+R für das BCVRP deuten das Potential angepasster Vorgehensweisen an.
- Der vorgenannte Punkt gilt insbesondere auch für die in Kapitel 5 untersuchte Problemstellung. Mit Blick auf Ausführungsoptionen, als elementare Bestandteile einer Tour, zeigt sich eine Ähnlichkeit zur Problemstellung des Gabelstaplerproblems für das insbesondere auf Bäumen sehr gute Ergebnisse in dieser Arbeit dokumentiert werden. Die Nutzung einer Baumstruktur als Streckennetz bei der Entwicklung eines Verfahrens für die vorliegende Problemstellung bringt mehrere Herausforderungen mit sich. Diese resultieren aus der Notwendigkeit zur Auswahl von Aufträgen, der Kapazitätsrestriktion von Behälter- und Materialorten, sowie der Relevanz der Reihenfolge der Ausführungsoptionen in einer Tour mit Blick auf Vorrangbeziehungen und die Erlösung von Nutzen aus der Einhaltung von Terminen. Ein geeignetes Lösungsverfahren muss diese Aspekte neben der ausgeglichenen Nutzung von Kanten in beide Richtungen und der Erreichbarkeit der Startknoten von Aufträgen, beziehungsweise Ausführungsoptionen, einbeziehen.
- In Anwendungen existieren als Ladefläche nutzbare Typen von Abrollcontainern - Abrollcontainer werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit als Behälter bezeichnet. Ein Fahrzeug, das einen solchen Behälter geladen hat, kann Aufgaben gemäß dem kapazitierten Tourenplanungsproblem durchführen. Eine Erweiterungsmöglichkeit

der in Kapitel 5 beschriebenen Problemstellung besteht in der Aufnahme dieser Nutzung von Behältern. Damit würde die Möglichkeit geschaffen, Auslieferungs- oder Einsammeltätigkeiten mit den bereits vorgesehenen Transporttätigkeiten, die allesamt der Bewegung eines Behälters bedürfen, zu kombinieren. Die getrennte Planung von Auslieferungstätigkeiten und dem Transport von Abrollcontainern kann insbesondere für Bedarfsorte beziehungsweise Aufträge in großer Entfernung zum Depot zu einem Mehraufwand führen. Bei einer integrierten Planung kann ein Fahrzeug dagegen beispielsweise eine Auslieferungstour durchführen und andere, nahe der Tourstationen gelegene, Transporttätigkeiten einschieben. Außerdem bietet die Integration weiteres Potential zur Reduktion von Fahrstrecken durch die Wahl des als Ladefläche zu verwendenden Behälters bei Einsammeltouren beziehungsweise am Ende einer Auslieferungstour aus der Weiterverwendung des genutzten Behälters.



# Literaturverzeichnis

- Anily, S., M. Gendreau und G. Laporte (2011). The preemptive swapping problem on a tree. *Networks* 58(2), 83–94. (Zitiert auf Seite 103)
- Anily, S. und R. Hassin (1992). The swapping problem. *Networks* 22(4), 419–433. (Zitiert auf Seite 103)
- Applegate, D., R. Bixby, V. Chvátal und W. Cook (2011). *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press. (Zitiert auf Seite 23)
- Asano, T., N. Katoh und K. Kawashima (2001). A new approximation algorithm for the capacitated vehicle routing problem on a tree. *Journal of Combinatorial Optimization* 5(2), 213–231. (Zitiert auf Seite 37)
- Averbakh, I. und O. Berman (1995). Sales-delivery man problems on treelike networks. *Networks* 25(2), 45–58. (Zitiert auf Seite 44)
- Basnet, C., L. R. Foulds und J. M. Wilson (1999). Heuristics for vehicle routing on tree-like networks. *Journal of the Operational Research Society* 50(6), 627–635. (Zitiert auf den Seiten 36 und 37)
- Braekers, K., A. Caris und G. K. Janssens (2013). Integrated planning of loaded and empty container movements. *OR Spectrum* 35(2), 457–478. (Zitiert auf Seite 120)
- Chandran, B. und S. Raghavan (2008). Modeling and Solving the Capacitated Vehicle Routing Problem on Trees. In: R. Sharda, B. Golden, S. Raghavan, S. Voß und E. Wasil (Hg.), *The Vehicle Routing Problem*, Volume 43 der Reihe *Operations Research/Computer Science Interfaces*, 239–261. Boston, MA: Springer Science+Business Media, LLC. (Zitiert auf den Seiten 36, 37 und 38)
- Christofides, N. (1976). *Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem*. Carnegie-Mellon Univ Pittsburgh Pa Management Sciences Research Group. (Zitiert auf Seite 102)

- Clarke, G. und J. W. Wright (1964). Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations research* 12(4), 568–581. (Zitiert auf Seite 36)
- Coja-Oghlan, A., S. O. Krumke und T. Nierhoff (2003). A heuristic for the stacker crane problem on trees which is almost surely exact. In: *International Symposium on Algorithms and Computation*, 605–614. Springer. (Zitiert auf Seite 103)
- Coslovich, L., R. Pesenti und W. Ukovich (2006). Minimizing fleet operating costs for a container transportation company. *European Journal of Operational Research* 171(3), 776–786. (Zitiert auf Seite 118)
- Diestel, R. (2010). *Graphentheorie*. Springer Verlag. (Zitiert auf den Seiten 8 und 16)
- Domschke, W. und A. Scholl (2010). *Logistik: Rundreisen und Touren*. Oldenbourg Verlag. (Zitiert auf den Seiten 23 und 121)
- Frederickson, G. N. und D. Guan (1992). Preemptive ensemble motion planning on a tree. *SIAM Journal on Computing* 21(6), 1130–1152. (Zitiert auf Seite 103)
- Frederickson, G. N. und D. J. Guan (1993). Nonpreemptive ensemble motion planning on a tree. *Journal of Algorithms* 15(1), 29–60. (Zitiert auf den Seiten 70, 71, 78, 79, 84, 91, 102 und 103)
- Frederickson, G. N., M. S. Hecht und C. E. Kim (1976). Approximation algorithms for some routing problems. In: *17th annual symposium on foundations of computer science (sfcs 1976)*, 216–227. IEEE. (Zitiert auf den Seiten 66, 68, 101 und 102)
- Golden, B. L., L. Levy und R. Vohra (1987). The orienteering problem. *Naval Research Logistics (NRL)* 34(3), 307–318. (Zitiert auf Seite 121)
- Gunawan, A., H. C. Lau und P. Vansteenwegen (2016). Orienteering problem: A survey of recent variants, solution approaches and applications. *European Journal of Operational Research* 255(2), 315–332. (Zitiert auf Seite 122)
- Gutin, G. und A. P. Punnen (2006). *The traveling salesman problem and its variations*, Volume 12. Springer Science & Business Media. (Zitiert auf Seite 23)
- Hamaguchi, S.-y. und N. Katoh (1998). A capacitated vehicle routing problem on a tree. In: *International symposium on algorithms and computation*, 399–407. Springer. (Zitiert auf Seite 37)
- Hwang, F., D. Richards und P. Winter (1992). *The Steiner Tree Problem*. Advanced lectures in mathematics. North-Holland. (Zitiert auf den Seiten 89, 90, 92 und 93)



- Korte, B. und J. Vygen (2008). *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*. Springer. (Zitiert auf Seite 22)
- Kumar, R., A. Unnikrishnan und S. T. Waller (2012). Heuristic scheme for heterogeneous vehicle routing problem on trees based on generalized assignment and bin-packing upper bounds. *Transportation research record* 2283(1), 1–11. (Zitiert auf Seite 37)
- Labbé, M., G. Laporte und H. Mercure (1991). Capacitated vehicle routing on trees. *Operations Research* 39(4), 616–622. (Zitiert auf den Seiten 35, 36, 37 und 39)
- Laporte, G. und S. Martello (1990). The selective travelling salesman problem. *Discrete applied mathematics* 26(2-3), 193–207. (Zitiert auf den Seiten 122 und 134)
- Lim, A., F. Wang und Z. Xu (2005). The capacitated traveling salesman problem with pickups and deliveries on a tree. In: *International Symposium on Algorithms and Computation*, 1061–1070. Springer. (Zitiert auf Seite 104)
- Martello, S. und P. Toth (1990). Lower bounds and reduction procedures for the bin packing problem. *Discrete applied mathematics* 28(1), 59–70. (Zitiert auf den Seiten 35, 39 und 50)
- Mbaraga, P., A. Langevin und G. Laporte (1999). Two exact algorithms for the vehicle routing problem on trees. *Naval Research Logistics (NRL)* 46(1), 75–89. (Zitiert auf Seite 37)
- Neumann, K. und M. Morlock (2002). *Operations Research*. Carl Hanser Verlag. (Zitiert auf den Seiten 7, 10, 12, 13, 14, 22, 57, 73, 77, 90 und 102)
- Prömel, H. J. und A. Steger (2012). *The Steiner tree problem: a tour through graphs, algorithms, and complexity*. Springer Science & Business Media. (Zitiert auf den Seiten 89 und 90)
- Rennie, S. (1995). Optimal dispatching and routing of milk tankers for northland dairy board. In: *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Operational Research Society of New Zealand. ORSNZ: Wellington, New Zealand*, 95–102. (Zitiert auf Seite 37)
- Sawik, T. (2016). A note on the Miller-Tucker-Zemlin model for the asymmetric traveling salesman problem. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 517–520. (Zitiert auf Seite 98)
- Statista (2022). Entwicklung des weltweiten Containerumschlag-Index von Dezember 2015 bis Dezember 2021. abgerufen: 05.02.2022, Online verfügbar: <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/219285/umfrage/containerumschlag-index-weltweit/>. (Zitiert auf Seite 117)

- Toth, P. und D. Vigo (2002). *The vehicle routing problem*. SIAM. (Zitiert auf den Seiten 29, 30 und 69)
- Tsiligirides, T. (1984). Heuristic methods applied to orienteering. *Journal of the Operational Research Society* 35(9), 797–809. (Zitiert auf Seite 121)
- Vansteenwegen, P. und A. Gunawan (2019). *Orienteering Problems: Models and Algorithms for Vehicle Routing Problems with Profits*. Springer. (Zitiert auf Seite 122)
- Vidyarthi, S. und K. K. Shukla (2013). Approximation Algorithms for Vehicle Routing Problems with Stochastic Demands on Trees. *arXiv e-prints*, arXiv–1304. (Zitiert auf den Seiten 37 und 38)
- Wang, F., A. Lim und Z. Xu (2006). The one-commodity pickup and delivery travelling salesman problem on a path or a tree. *Networks: An International Journal* 48(1), 24–35. (Zitiert auf Seite 104)
- Xu, Z., X. Lai, A. Lim und F. Wang (2014). An improved approximation algorithm for the capacitated TSP with pickup and delivery on a tree. *Networks* 63(2), 179–195. (Zitiert auf Seite 104)
- Xue, Z., C. Zhang, W.-H. Lin, L. Miao und P. Yang (2014). A tabu search heuristic for the local container drayage problem under a new operation mode. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* 62, 136–150. (Zitiert auf den Seiten 118 und 120)
- Zhang, R., W. Y. Yun und H. Kopfer (2010). Heuristic-based truck scheduling for inland container transportation. *OR Spectrum* 32(3), 787–808. (Zitiert auf den Seiten 119 und 120)