



 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación | 

Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

---

<http://ued.uniandes.edu.co>  
@uedUniandes

1


 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación | 

Relaciones en el conocimiento del profesor de matemáticas sobre problemas aditivos con enteros




Keylla Otero-Valega, Estela Juárez-Ruiz

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

28/03/2023



2

## Planteamiento del problema

**MTSK**

Sánchez (2021)

Los docentes deberían conocer respecto a la manera en que la matemática puede enseñarse o aprenderse.

**Resolución de problemas**


Rojas (2014)

Eje principal de la actividad matemática, y es fuente y soporte del aprendizaje matemático en la educación básica.




**Números enteros**

Becerra et al. (2012)

Utilización del lenguaje matemático y verbal, la recta numérica y resultados negativos.



3


## Planteamiento del problema

¿Qué relaciones entre subdominios del conocimiento especializado evidencia una profesora de matemática de educación básica en el diseño de una planeación de clase sobre resolución de problemas aditivos con números enteros?




**Pregunta de investigación**

Establecer relaciones entre subdominios del conocimiento especializado que evidencia una profesora de matemáticas de educación básica en el diseño de una planeación de clase sobre resolución de problemas aditivos con números enteros.


**Objetivo general**




4


## Planteamiento del problema


- 
 Modelo MTSK: "Profundizar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en su acción docente" (Rojas, 2014).

---




- 
 Resolución de problemas aditivos con números enteros: "Número, algebra y variación" tema de adición y sustracción, aprendizaje esperado: los estudiantes resuelvan problemas de suma y resta con números enteros (SEP, 2017).

---

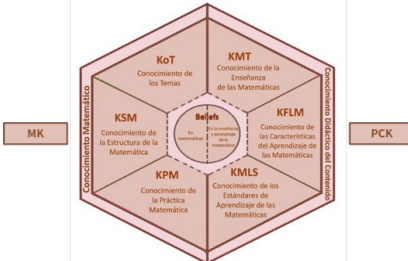
- 
 Relaciones entre subdominios: La observación de aspectos concretos del conocimiento y generar distintas perspectivas (Escudero-Ávila et al., 2017).



5


## Marco teórico: Modelo MTSK






El MTSK se constituye como un modelo que permite analizar el conocimiento que el profesor pone en juego en cualquier tarea relacionada con la docencia, como la preparación de clases, la discusión con otros docentes, la enseñanza en aula o la reflexión posterior (p. 192).

**Advíncula et al. (2021)**

Fuente: Basado en Muñoz-Catalán et al. (2015)



6


## Marco teórico

Conocimiento de las conexiones entre los conceptos, la forma de estructurar las ideas, la razón de los procedimientos, los medios de prueba, las formas de proceder en matemáticas, el conocimiento del lenguaje matemático y su precisión (Carrillo et al., 2013)


**Conocimiento Matemático (MK)**

Conocimiento que posee el profesor sobre el contenido matemático tomado como objeto de enseñanza y aprendizaje (Escudero-Ávila et al., 2017)

**Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)**




7




## Marco teórico

### Subdominios y categorías del dominio MK

Dominio	Subdominios	Categorías
Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento De Los Temas (KoT)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Procedimientos.</li> <li>✓ Definiciones, propiedades y fundamentos.</li> <li>✓ Registros de representación.</li> <li>✓ Fenomenología y aplicaciones.</li> </ul>
	Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Conexiones de simplificación.</li> <li>✓ Conexiones de complejización.</li> <li>✓ Conexiones auxiliares.</li> <li>✓ Conexiones transversales.</li> </ul>
	Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ La práctica de demostrar</li> <li>✓ La práctica de definir</li> <li>✓ La práctica de resolver problemas</li> <li>✓ El papel del lenguaje matemático</li> </ul>




8


 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación 



## Marco teórico

### Subdominios y categorías del dominio PCK

Dominio	Subdominios	Categorías
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Recursos de enseñanza (físicos y digitales)</li> <li>✓ Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.</li> <li>✓ Teorías de enseñanza de las matemáticas.</li> </ul>
	Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Teorías de aprendizaje de las matemáticas.</li> <li>✓ Fortalezas y dificultades en el aprendizaje.</li> <li>✓ Interacción del estudiante con el contenido.</li> <li>✓ Intereses y expectativas del aprendizaje de las matemáticas.</li> </ul>
	Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Contenidos que se requieren enseñar.</li> <li>✓ Nivel de desarrollo conceptual y experimental esperado.</li> <li>✓ Secuenciación de los temas.</li> </ul>



9


 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación 

## Metodología

**Tipo de investigación:**  
Cualitativa  
**Paradigma:**  
Interpretativo

- Diseño**

  - Estudio de caso instrumental
- Informante**

  - Una profesora mexicana de educación básica
- Procedimiento**

  - Planeación de clase
  - Guía de preguntas y descriptores
  - Entrevista y transcripción

**Evidencia-Indicio-Oportunidad**

**Evidencias**

Nos permiten afirmar que un profesor posee, o no un conocimiento determinado.


**Indicios**

Sospechas de la existencia o inexistencia de un conocimiento determinado




**Oportunidades**

Momentos o situaciones que sirven para explorar el conocimiento de algún subdominio

Escudero-Ávila et al. (2015)



10






## Metodología

### ¿Cómo se establecen relaciones?

Para afirmar que dos (o más) subdominios de conocimiento están relacionados en un episodio, se identifican indicios o evidencias que ayuden a interpretar qué conocimiento ha manifestado la maestra y, con dicha identificación, se establece la relación

Flores-Medrano (2015) - Aguilar-González et al. (2018)



11





## Metodología

### ¿Cómo se dan las relaciones?

**Intra-subdominio**

Relaciones entre los conocimientos o categorías de un mismo subdominio.

Subdominios	Categorías
Conocimiento De Los Temas (KoT)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Procedimientos.</li> <li>✓ Definiciones, propiedades y fundamentos.</li> <li>✓ Registros de representación.</li> <li>✓ Fenomenología y aplicaciones.</li> </ul>

Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021)



12





## Metodología ¿Cómo se dan las relaciones?

**Intra-dominio**

Relaciones al interior de un dominio.

**Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021)**

Dominio	Subdominios	Categorías
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Recursos de enseñanza (físicos y digitales)</li> <li>✓ Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</li> <li>✓ Teorías de enseñanza de las matemáticas.</li> </ul>
	Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Teorías de aprendizaje de las matemáticas.</li> <li>✓ Fortalezas y dificultades en el aprendizaje</li> <li>✓ Interacción del estudiante con el contenido</li> <li>✓ Intereses y expectativas del aprendizaje de las matemáticas.</li> </ul>



13





## Metodología ¿Cómo se dan las relaciones?

**Inter-dominio**




Relaciones entre categorías de diferentes dominios

**Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021)**

Dominios	Subdominios	Categorías
Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Conexiones de simplificación.</li> <li>✓ Conexiones de complejización.</li> <li>✓ Conexiones auxiliares.</li> <li>✓ Conexiones transversales.</li> </ul>
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Contenidos que se requieren enseñar.</li> <li>✓ Nivel de desarrollo conceptual y experimental esperado.</li> <li>✓ Secuenciación de los temas.</li> </ul>

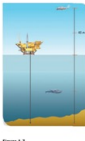


14






## Resultados




Figura 2. Momento de exploración en la fase de inicio

Fase	Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo
Inicio	Exploración	<p>Se toma de referencia la actividad introductoria propuesta en libro de texto y se discute de manera grupal, lo que permite al docente conocer cómo cada estudiante comprende y aborda el problema, y las dificultades que puedan presentarse. El problema es el siguiente:</p> <p>1. Lee la situación y haz lo que se pide.</p> <p>Una compañía petrolera instaló una plataforma para la extracción de crudo a 48 m sobre el nivel del mar, y el vaciadero se sitúa a 120 m bajo el nivel del mar.</p> <p>a) Señala en la figura 1.7 las distancias antes mencionadas.</p> <p>b) En la imagen se observa un helicóptero y una ballena. ¿Cuál de ellos se encuentra a una distancia de +100 m del nivel del mar?</p> <p>c) ¿Cuál se encuentra a -80 m? _____</p> <p>d) Dibuja en la imagen un bote que esté aproximadamente a -20 m del nivel del mar.</p> <p>e) Dibuja en la imagen un submarino que esté aproximadamente a -100 m del nivel del mar.</p> <p>f) Dibuja en la imagen un ave que esté aproximadamente a +75 m del nivel del mar.</p> <p>g) De la distancia entre el helicóptero y la plataforma y la distancia entre el submarino y la plataforma, ¿cuál de las dos es mayor?</p> <p>h) ¿Qué distancia es mayor, la distancia entre el ave y la plataforma o la distancia entre la plataforma y la ballena? _____</p> <p>En grupo comparen y validen sus resultados.</p>  <p>Figura 1.7</p>	<p>Libro de texto</p> <p>Libreta</p>	20 minutos

Diseño de la planeación de la informante



15


## Resultados

¿Cómo cree usted que ellos abordarían esta actividad? ¿Cree que quizá para ellos sería fácil o más compleja? Leticia respondió:

Leticia: Si hay algunos puntos donde considero que genera este ejercicio o estos incisos ciertas dudas. Por ejemplo, a la hora que pide dibujar, ¿dibujar sobre qué? O sea, **ya partir de dónde inicio mi dibujo?** es a lo mejor de momento decir, que es obvio para algunos, que es sobre mano, que inicia, sube. Pero muchas veces eso causa conflicto. **Pensar que va hacia abajo hay que darle un sentido negativo, por decir, o hacia la parte superior, o también problemas de este estilo que se ven marcados, es pues justamente la comprensión del problema,** o sea, **¿qué me pide como tal realizar?, una aproximación, determinar una escala,** por decirlo (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).



**Evidencia** del KFLM: Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

**Oportunidad** de investigación del KPM: Práctica de resolver problemas



16





 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación 

## Resultados



¿Cree usted que existe algún método o procedimiento específico para solucionar o resolver problemas matemáticos? ¿Conoce usted algún método?, Leticia responde:

Leticia: Pues yo tomaría de referencia tal cual lo que sugiere Pólya, que son los cuatro pasos, O sea, en todo momento, en cualquier problema matemático o no matemático, pues tenemos que primero **comprender el problema**, ya sea la operación, incluso la operación tal cual, denotada como de  $(-5)+(-8)$ , o sea ¿Qué me estás pidiendo? Debo de comprender qué debo hacer, entonces, ya que lo comprendiste, pues entonces nos vamos al paso dos, **diseña tu plan**, o sea, qué vas a hacer, entonces, ya que pensaste, no pues tengo que hacer una ley de signos, o tengo que hacer mi recta, o tengo que hacer algo, entonces pues ya vamos al paso tres, pues **aplicalo, ejecútalo** y el último, cuatro, **verifica, hasta haz un análisis, reates a hacer una introspección** y decir si es coherente, si tiene sentido, ¿estoy bien?, no, pues redirecciona y otra vez... (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).

**Evidencia** del KPM: Práctica de resolver problemas



17


 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación 

## Resultados

Inter-dominio

Subdominios	KFLM	KPM
Categorías	Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	La práctica de resolver problemas
Descriptor	Conoce las dificultades que pueden presentar los estudiantes al momento de resolver problemas aditivos con números enteros.	Conoce estrategias heurísticas de resolución de problemas que se pueden emplear en problemas aditivos con números enteros.








Tabla 3. Categorías y descriptores de los subdominios KFLM y KPM.

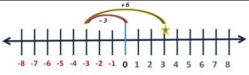


18



 Universidad de los Andes Colombia
 
 Facultad de Educación
 

## Resultados




**Figura 3. Momento de estructuración en la fase de desarrollo**

Desarrollo	Estructuración	 <p>Se hará énfasis en hacer la reflexión con los estudiantes del sentido de sumar y restar, y estas como operaciones inversas.</p> <p>De manera análoga, se definen además conceptos relacionados tales como: Números simétricos, valor absoluto, orden de los números, comparación de números, etc.</p>	Libro de texto Libreta PDF adicionales, referencias externas	30 minutos
------------	----------------	---	--	------------

Diseño de la planeación de la informante



19


 Universidad de los Andes Colombia
 
 Facultad de Educación
 


## Resultados

¿Qué propósito tiene en ese momento que los estudiantes hagan esa reflexión?, Leticia respondió:




Leticia: Bueno, es claro que se está trabajando con la recta numérica en este punto y pues dentro de esos ejemplos ¿que se pueden poner? Pues digamos los sencillos, los iniciales, para ellos pensar en un  $3+6$ , y entonces se hace el movimiento, o sea un sentido de suma, qué está pasando, pues tres movimientos a la derecha. Ahora, hacemos una resta, eh, por decir, el caso también sencillo, donde el primer número es mayor que el segundo, de  $6-3$ . Entonces nos vamos a seis unidades, son positivas, nos movemos a la derecha y luego pide restar en sentido negativo, regresamos a la izquierda. Entonces ya a través de la recta se le va tratando de demostrar que las operaciones tienen digamos una cierta dirección para la operación y en este caso ponerles ejemplos como con los mismos números, pero con signos simétricos puede ayudarles a generar esta reflexión de operaciones inversas. Un caso particular, a lo mejor todavía no formalizado, pero sí de a ver qué pasa, si decimos  $5-5$ , cinco positivo y luego menos cinco, este negativo. ¿Qué sucede? Pues me mueve a la derecha, me regresa. Entonces al final de cuentas es algo inverso. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).

**Evidencia** del KoT: Procedimientos; Propiedades

**Evidencia** del KSM: Conexiones auxiliares



20






## Resultados

Intra-subdominio




Subdominios	KoT		KSM
Categorías	Procedimientos	Definiciones, propiedades y fundamentos	Conexiones auxiliares
Descriptores	Conoce procedimientos involucrados en la resolución de problemas aditivos con números enteros.	Conoce propiedades que cumplen la suma y resta de números enteros.	Conoce elementos matemáticos de temas anteriores que sirven como conexiones auxiliares en el desarrollo de problemas aditivos con números enteros.

Intra-dominio    MK



**Tabla 4.** Categorías y descriptores de los subdominios KoT y KSM.

21






## Resultados




**Figura 4. Momento de valoración en la fase cierre**

Cierre	Valoración (Evaluación formativa)	Evaluación concreta en hojas físicas a operaciones de números enteros con signo y resolución de problemas aplicados	Hojas blancas (examen)	80 minutos
--------	-----------------------------------	---	------------------------	------------

Diseño de la planeación de la informante



22


## Resultados

Respecto a los problemas aplicados, ¿Usted los toma del libro o los propone?, Leticia respondió:




*Leticia: En su mayoría lo tomo del libro y a lo mejor ahí sí lo adapto. Lo que podría hacer es pues cambiar algunos datos, pues obviamente para que sea un problema nuevo y o el contexto también se puede cambiar, o sea que sea cercano y no tan lejano al estudiante y ya si bien existe la pauta por ahí de crear alguno pues se crea, pero en su mayoría si se toman de libro con adaptación. Por ejemplo, nos hemos enfrentado a problemas donde nos dice un refrigerador tiene variaciones de temperatura y cuando vemos está en 30 grados, o sea, ¿un refrigerador caliente?, o sea como que no tiene sentido... Luego ellos mismos dicen pues como que no tiene sentido, ¿no? Por ejemplo, algo que a todos nos queda, yo tenía 20 pesos, pero perdí, no sé ocho, cuánto me queda, o yo debía 50 pesos y pagué 26, ¿cuánto debo? ¿Ya lo cubri? O sea, contextos súper básicos, sencillos, en los que estamos inmersos y que ellos lo ven aplicados. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).*

**Evidencia** del KMT: Recursos de enseñanza

**Evidencia** del KoT: Fenomenología y aplicaciones





23


## Resultados

Inter-dominio



Subdominios	KMT	KoT
Categorías	Recursos de enseñanza	Fenomenología y sus aplicaciones
Descriptores	Conoce las limitaciones de los recursos materiales que utiliza para la enseñanza de la resolución de problemas aditivos con números enteros.	Conoce situaciones del contexto de los estudiantes a los que se puede aplicar la resolución de problemas aditivos con números enteros.

 ————— 


**Tabla 4.** Categorías y descriptores de los subdominios KMT y KoT.





24



 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación 


## Conclusiones



 Los resultados han evidenciado relaciones entre el conocimiento que manifiesta la profesora sobre las dificultades que presentan los estudiantes al momento de resolver problemas aditivos con números enteros y la práctica de resolver problemas.


 Además, se evidenció relación entre el conocimiento de procedimientos, propiedades que cumplen la suma y resta de enteros y el conocimiento de la recta numérica como un auxiliar para el desarrollo del objeto matemático en cuestión.




 Asimismo, se encontró evidencia de la relación entre los recursos de enseñanza que utiliza la profesora y la fenomenología y aplicaciones de la resolución de problemas aditivos con números enteros.


 La planeación de clase es un instrumento de recolección de datos óptimo y propicio para estudiar el conocimiento especializado que el profesor de matemáticas pone en juego en su intención de enseñar.


 La planeación de clase se ha convertido en una pieza clave para identificar indicios y evidencias de conocimiento y oportunidades de investigación (Pacheco-Muñoz et al. 2022).




25




 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación 

## Referencias

- Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia*, 35(1), 190-209. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.12>
- Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, J. L. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, 13(1), 41-61. <https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944>
- Becerra, O. J., Buitrago, M. R., Calderón, S. C., Gómez, R. A., Cañadas, M. C. y Gómez, P. (2012). Adición y sustracción de números enteros. En P. Gómez. (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Universidad de los Andes. <http://unes.uniandes.edu.co/1920/>
- Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas? En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congresso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 288-295). Congressense.
- Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., Aguilar, A. (2015). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE.
- Escudero-Ávila, D., Vasco, D. y Aguilar-González, A. (2017). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*. (Ed.), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 83-91). FESPM. <http://unes.uniandes.edu.co/19810/>




26


 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación 

## Referencias

- Flores-Medrano, E. (2015). Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) [Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. <http://hdl.handle.net/10272/11503>
- Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18 (3), 589-605. <https://gaceta.rsmes.es/abrir.php?id=1294>
- Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E., y Flores-Medrano, E. (2022). Conocimiento didáctico del contenido en la enseñanza de la localización en el plano cartesiano. Investigación e Innovación en Matemática Educativa IIME, 7, 1-20. <https://doi.org/10.46618/iime.143>
- Rojas, N. (2014). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de caso [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. DIGIBUG. <http://hdl.handle.net/10481/35192>
- Sánchez, J. (2021). ¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría apoe sobre su conocimiento especializado? [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Secretaría de Investigación y estudios de Posgrado BUAP.
- Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017). Aprendizajes clave para la Educación Integral. Matemáticas Educación Secundaria. SEP. <https://www.planviverprogramasdestudio.sep.gob.mx/index-Descargas.html>



27


 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación 

## ¡Muchas gracias!

Keylla Margarita Otero Valega  
 kmotero12@gmail.com  
 +57 300 429 3323



28



## Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

<http://ued.uniandes.edu.co>  
@uedUniandes