

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA  
Corso di Laurea in Astronomia

# Effetti relativistici in Astrofisica

Tesi di Laurea

Presentata da:  
Allegra Firinu

Relatrice:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Marcella Brusa

---

Sessione IV  
Anno Accademico 2021-2022



## Introduzione

Gli ultimi anni dell'Ottocento furono costellati da numerosi successi e altrettanti dibattiti in ambito scientifico. Primo fra tutti interessò l'elettromagnetismo di Maxwell e la ormai appurata relatività galileiana. Infatti, Galileo aveva dimostrato che, dati due sistemi di riferimento inerziali, le misure effettuate sugli intervalli spaziali e temporali e sulla massa erano assolute e indipendenti dal moto relativo dell'osservatore e che si poteva soltanto definire una velocità relativa rispetto a un certo sistema di riferimento inerziale. Le equazioni di Maxwell, invece, associavano un valore costante  $c$  alla velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto in qualsiasi sistema di riferimento inerziale, stridendo con quanto veniva esposto da Galilei. Ora, siccome la relatività galileiana era sostenuta dalla meccanica newtoniana, ma allo stesso tempo non si applicava alle leggi di Maxwell, fu necessario assumere l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato. Tale sistema, detto *etere*, costituiva il mezzo entro cui la luce avrebbe dovuto possedere velocità  $c$ . Michelson e Morley cercarono di dimostrarne invano l'esistenza, consentendo lo sviluppo della teoria della relatività di Einstein.

L'elaborato inizierà con una breve trattazione dei risultati ottenuti dalla relatività ristretta e dalle trasformazioni di Lorentz. Successivamente verranno illustrati i fenomeni dell'aberrazione e dell'effetto Doppler per sorgenti di onde elettromagnetiche in moto relativistico rispetto ad un osservatore a riposo, quindi si studierà come la luminosità e la distribuzione della radiazione di tali sorgenti possano variare per lo sperimentatore.

In questo modo, sarà possibile applicare i risultati all'ambito astrofisico, studiando i principali processi di emissione non termici che coinvolgono cariche relativistiche: il Sincrotrone e il Compton Inverso. Confrontando questi due fenomeni, si potrà descrivere la catastrofe Compton facendo, poi, riferimento al peculiare caso dei moti superluminali. Verranno, infine, accennati anche i fondamenti della relatività generale, così da poter analizzarne le conseguenze, menzionando gli effetti del redshift e della lente gravitazionale.



# Indice

<b>1</b>	<b>Relatività ristretta</b>	<b>1</b>
1.1	Trasformazioni di Lorentz . . . . .	1
1.2	Aberrazione e Effetto Doppler relativistici . . . . .	2
1.3	Amplificazione della luminosità . . . . .	3
1.4	Beaming relativistico . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Processi non-termici</b>	<b>6</b>
2.1	Sincrotrone . . . . .	6
2.2	Compton Inverso . . . . .	8
2.3	Synchrotron-Self-Compton e Catastrofe Compton . . . . .	10
2.4	Moti superluminali . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Relatività generale</b>	<b>12</b>
3.1	Redshift gravitazionale . . . . .	13
3.2	Lente gravitazionale . . . . .	14



# 1 Relatività ristretta

## 1.1 Trasformazioni di Lorentz

Nel 1905, nel tentativo di risolvere le contraddizioni sorte tra le equazioni di Maxwell sull'elettromagnetismo e la relatività galileiana, Albert Einstein pubblicò sulla rivista *Annalen der Physik* la **teoria della relatività ristretta**, che si erge sui seguenti postulati:

1. *le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Non esiste un sistema di riferimento privilegiato* (Principio di relatività);
2. *la velocità della luce nello spazio vuoto ha lo stesso valore  $c$  in tutti i sistemi inerziali* (Principio della costanza della velocità della luce);

In realtà, Hendrik Lorentz, nel 1904, affinché venisse mantenuta l'invarianza delle leggi dell'elettromagnetismo, riscrisse le trasformazioni di Galileo, note oggi come *trasformazioni di Lorentz*, giungendo agli stessi risultati di Einstein. Si tratta di relazioni spazio-temporali che legano due sistemi di riferimento inerziali, in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Si considerino, quindi, due sistemi  $S$  e  $S'$ , tali che risultino sovrapposti per  $t = t' = 0$  e che il moto avvenga parallelamente agli assi  $x - x'$  con velocità costante  $v$ . Assumendo, inoltre, che lo spazio-tempo sia omogeneo (significa che tutti i punti nello spazio e nel tempo sono equivalenti) si richiede che le equazioni delle trasformazioni debbano essere lineari. In questo modo, un evento che ha luogo nel sistema di riferimento  $S$ , nelle coordinate spazio-temporali  $x, y, z, t$ , verrà osservato da uno sperimentatore solidale a  $S'$  nelle seguenti coordinate:

$$\begin{cases} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Per compattezza, solitamente il termine  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  viene espresso con  $\gamma$ , detto *fattore di Lorentz*.

Quindi, dato  $S'$  in moto con velocità  $v$  rispetto ad  $S$  si può dedurre che:<sup>1</sup>

1. la lunghezza di un corpo misurata nel sistema di riferimento in cui è in moto, apparirà contratta di un fattore  $\gamma$  lungo direzione del moto, rispetto al sistema in cui è in quiete:  $\Delta x = \Delta x' / \gamma$

---

<sup>1</sup>analogaente si può considerare  $S$  in moto con velocità  $-v$  rispetto a  $S'$

2. la durata di un evento misurata nel sistema in cui è in moto relativamente all'osservatore risulterà dilatata di un fattore  $\gamma$  rispetto a quando la misura viene effettuata nel sistema in cui è in quiete:  $\Delta t = \Delta t' \gamma$  (spesso  $t'$ , detto tempo proprio, è indicato con  $\tau$ )
3. due eventi simultanei in  $S$  ( $\Delta t = 0$ ), ma separati tra loro di una distanza  $\Delta x$ , non sono simultanei nel sistema  $S'$ :  $\Delta x' = \gamma \Delta x$ ,  $\Delta t' = -\frac{\gamma v}{c^2} \Delta x$

Se il corpo in  $S$  si muove con velocità  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ , un osservatore in  $S'$  ricaverà le seguenti relazioni:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v / c^2} \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v / c^2} \quad (1)$$

Affinché l'impulso continui a essere soggetto ad una legge di conservazione e che venga mantenuta la forma  $\vec{p} = m\vec{u}$ , è necessario ridefinire la massa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad m = \gamma m_0$$

che esprime come  $m$ , la *massa relativistica* di un corpo, dipenda dal sistema in cui la si misura, quindi non è più un'invariante. Si può osservare che nel sistema in cui il corpo è a riposo, si ottiene  $m = m_0$ . Di conseguenza, anche l'energia cinetica  $K$  del corpo in questione, definita (classicamente) come il lavoro compiuto da una forza esterna per aumentare la velocità da zero al valore  $u$ , sarà riscritta come segue:

$$K = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad \rightarrow \quad K = mc^2 - m_0 c^2$$

Detta  $mc^2 = E$  energia totale e  $m_0 c^2$  energia a riposo (cioè quando  $u=0$  e  $K=0$ ), si avrà:

$$E = K + m_0 c^2 = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad (2)$$

Le trasformazioni per l'energia e l'impulso sono combinate nel quadrivettore energia-impulso che lega i valori espressi nel sistema  $S$  al sistema  $S'$ :

$$p'_x = \frac{p_x - E v / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad p'_y = p_y \quad p'_z = p_z \quad \frac{E'}{c^2} = \frac{E/c^2 - (v/c^2) p_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3)$$

## 1.2 Aberrazione e Effetto Doppler relativistici

Si consideri una sorgente di onde elettromagnetiche, solidale a  $S'$ , di ampiezza unitaria, con raggi tali da essere paralleli al piano  $x' - y'$  e inclinati di un certo  $\theta'$  rispetto a  $x'$ , in avvicinamento all'osservatore in  $S$ . La velocità con cui si muove l'onda è la stessa sia per  $S$  ( $\lambda\nu = c$ ) sia per  $S'$  ( $\lambda'\nu' = c$ ) e, siccome la fase di un'onda è un'invariante relativistica



ed essendo le trasformazioni di Lorentz lineari, la propagazione nei due sistemi può essere espressa nella seguente forma:

$$\cos(2\pi)\left[\frac{x' \cos\theta' + y' \sin\theta'}{\lambda'} - \nu't'\right] = \cos(2\pi)\left[\frac{x \cos\theta + y \sin\theta}{\lambda} - \nu t\right] \quad (4)$$

con  $\theta$  angolo tra la direzione del moto e la linea di vista. Scrivendo le coordinate del sistema  $S'$  in funzione di quelle di  $S$  ed eguagliando, quindi, i coefficienti di  $x, y$  e  $t$  dei membri di destra e sinistra, si ottengono due importanti risultati:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos\theta' + \beta^2} \quad (5)$$

$$\nu = \nu' \frac{1 + \beta \cos\theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{oppure} \quad \nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos\theta} = \nu' D \quad (6)$$

Il primo rappresenta l'**equazione relativistica per l'aberrazione della luce**, ossia il legame tra le direzioni di propagazione  $\theta$  e  $\theta'$  viste da due sistemi di riferimento inerziali. Il secondo, invece, descrive l'**effetto Doppler relativistico**, ovvero la relazione che intercorre tra la frequenza di emissione misurata dall'osservatore in  $S$  e quella propria, calcolata in  $S'$ .

Si evince, pertanto, che per una sorgente in avvicinamento, la frequenza osservata dal sistema  $S$  sarà maggiore rispetto a quella in cui si verifica l'emissione. Al contrario, in caso di allontanamento, risulterà minore.

### 1.3 Amplificazione della luminosità

Conseguenza immediata dell'effetto Doppler relativistico, per una sorgente in avvicinamento, è l'amplificazione della luminosità dal punto di vista dell'osservatore. Dalla 6 si nota, innanzitutto, che se la potenza viene irradiata in una banda di frequenza  $\Delta\nu'$ , questa sarà percepita dall'osservatore nella banda  $\Delta\nu = \Delta\nu' D$ . Inoltre, la luminosità, essendo definita come energia di radiazione per unità di tempo, sarà sottoposta ai seguenti effetti relativistici:

1. dalla relazione 6, si osserva come l'energia dei fotoni  $h\nu$  influenzi la luminosità osservata ( $L_o$ ) rispetto a quella effettiva ( $L_e$ ) di un fattore  $D$ .
2. l'intervallo di tempo  $dt_e$  durante il quale avviene l'emissione, essendo un tempo proprio, è dilatato di un fattore  $\gamma$  per l'osservatore. Invece il periodo in cui avviene la ricezione del segnale ( $dt_o$ ), siccome la sorgente è in avvicinamento, risulta più breve di un fattore  $D$ :

$$dt_o = dt_e \gamma - dt_e \gamma \frac{v \cos\theta_o}{c} = dt_e \gamma (1 - \beta \cos\theta_o) = dt_e / D$$

3. la radiazione emessa dalla sorgente sarà distribuita in un angolo solido  $d\Omega_e$ , che per un osservatore esterno sarà più piccolo, in particolare corrisponderà a  $d\Omega_o = d\Omega_e/D^2$ . Il risultato si ottiene a partire da  $d\Omega_o \approx \pi d\theta_o^2$  e  $d\Omega_e \approx \pi d\theta_e^2$  a cui viene poi applicata l'equazione di aberrazione.

In conclusione, riassumendo le condizioni sopraelencate, si ha:

$$L_o = L_e \times D^4 \quad (7)$$

che significa che la luminosità osservata di una sorgente in movimento rispetto a un osservatore differisce di un fattore  $D^4$  rispetto al valore che si otterrebbe se fosse in quiete. La dipendenza da  $D^4$  permette di intuire che l'aumento diventerà importante al crescere di  $\beta$  e al diminuire dell'angolo  $\theta$

## 1.4 Beaming relativistico

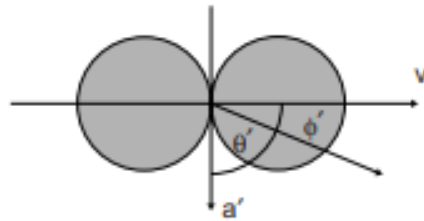
Si consideri una particella carica  $q$  non relativistica, con momento di dipolo  $\vec{\delta}$  e sottoposta ad un'accelerazione  $a = \frac{1}{q^2} \frac{d^2\delta}{dt^2}$ . Dall'elettromagnetismo classico, l'oggetto in questione emette radiazione, la cui potenza è indicata dalla *formula di Larmor*:

$$P = -\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 \quad (8)$$

Esprimendola in unità di angolo solido  $\Omega$ , si ha che la potenza irradiata assume una distribuzione toroidale, rappresentata come segue:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{q^2}{c^3} a^2 \sin^2 \theta \quad (9)$$

dove  $\theta$  indica l'angolo tra la linea di vista e la direzione dell'accelerazione.



**Figura 1:** Distribuzione di radiazione di una carica non relativistica. Fonte: Longair, High Energy Astrophysics

Si può osservare che uno sperimentatore allineato alla direzione di accelerazione (ovvero la direzione di oscillazione) non capterà alcun segnale di radiazione, mentre nella direzione ad essa perpendicolare misurerà il massimo di emissione.

Si prenda ora in esame una particella carica relativistica ( $\gamma \gg 1$ ) sottoposta ad accelerazione. Per effetto della dilatazione del tempo ( $d\tau = dt/\gamma$ ), riscrivendo la 2 come  $\varepsilon^2 = p^2 c^2 + m_0 c^4$ , si ottiene la formula di Larmor nella forma relativisticamente invariante:

$$P = \frac{2q^2}{3m_0^2 c^3} \left( \frac{dp_i}{d\tau} \cdot \frac{dp_i}{d\tau} \right) \quad (10)$$

dove  $p_i$ , quantità di moto della particella, è espressa nella forma di quadrimpulso  $p_i = (\vec{p}, i\varepsilon/c)$ . Risolvendo il prodotto tra parentesi

$$\frac{dp_i}{d\tau} \cdot \frac{dp_i}{d\tau} = \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right)^2 = \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \beta^2 \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (11)$$

si osserva che la potenza irradiata dipende sia da una componente vettoriale, ossia l'impulso vero e proprio, sia da una componente scalare ottenuta dalla definizione di quadrimpulso.

A questo punto è possibile valutare i due contributi dell'accelerazione:

1. **accelerazione lineare**, ovvero quando velocità e accelerazione hanno la stessa direzione. In tal caso  $\vec{p}$  cambia solo in modulo e non in direzione ( $|\frac{d\vec{p}}{d\tau}| \simeq \frac{dp}{dt}$ ). Di conseguenza la formula di Larmor coincide con il caso non relativistico:

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3 \gamma^2} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \simeq \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2$$

2. **accelerazione centripeta**, che si verifica quando la variazione della direzione della velocità supera la variazione del modulo ( $\frac{d\vec{p}}{d\tau} \gg \beta \frac{dp}{dt}$ ). Si ottiene, così, una potenza pari a:

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 \simeq \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \gamma^2 \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \quad (12)$$

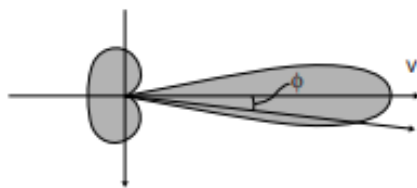
Da questi due risultati, si può evincere che, a parità di forza applicata, le emissioni di radiazione nel caso relativistico sono più elevate rispetto a quello non relativistico di un fattore  $\gamma^2$ . Siccome quest'ultimo coincide con il contributo lineare, nel caso relativistico si può studiare l'irraggiamento considerando solo l'accelerazione centripeta istantanea. Inoltre, a parità di  $\gamma$ , data l'inversa proporzionalità rispetto a  $m_0^2$ , si deduce che particelle leggere, ad esempio gli elettroni, presentano una potenza superiore rispetto a quelle pesanti, quali i protoni.

Per quanto concerne la distribuzione della radiazione, come già anticipato nel paragrafo precedente, nel sistema di riferimento solidale alla carica in moto, i fotoni vengono

emessi isotropicamente, mentre in un sistema esterno, applicando l'equazione relativistica per l'aberrazione della luce (formula 5), appariranno concentrati in un cono di semi-apertura  $1/\gamma$  nella direzione del moto. Infatti, per  $\theta' = 90^\circ$  e  $\beta \sim 1$ :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos\theta' + \beta} \simeq \frac{1}{\gamma} \xrightarrow{\gamma \gg 1} \theta \simeq \frac{1}{\gamma}$$

Questo fenomeno è noto come *beaming relativistico*.



**Figura 2:** Distribuzione di radiazione di una carica relativistica. Fonte: Longair, High Energy Astrophysics

## 2 Processi non-termici

In astrofisica, le particelle in regime relativistico rivestono un ruolo fondamentale nei processi di emissione. Già negli anni '50, venne suggerito che gli elettroni relativistici presenti nei raggi cosmici, interagendo con i campi magnetici interstellari, potessero essere tra i responsabili della radiazione non-termica diffusa dalla nostra galassia e dalle radiosorgenti allora conosciute.

### 2.1 Sincrotrone

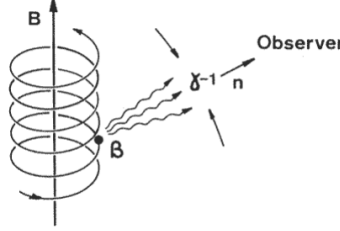
La radiazione di sincrotrone è il processo dominante nell'astrofisica delle alte energie.<sup>2</sup> Coinvolge elettroni ultra-relativistici in moto con velocità  $\vec{v}$  in un campo magnetico (uniforme)  $\vec{H}$ . Da questa interazione, la carica in questione verrà deviata poiché sottoposta all'azione della forza di Lorentz:

$$\vec{F}_L = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{H} \quad (13)$$

con  $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$  quantità di moto della particella. Si possono distinguere due componenti della velocità: una parallela,  $v_{\parallel} = v \cos \theta$ , e una perpendicolare,  $v_{\perp} = v \sin \theta$ , dove  $\theta$ , *angolo di pitch*, indica l'angolo compreso tra  $\vec{v}$  e  $\vec{H}$ . Dal momento che  $v_{\parallel}$  costituisce un moto rettilineo uniforme lungo le linee di forza del campo magnetico, mentre con  $v_{\perp}$  si

<sup>2</sup>Per particelle non relativistiche si parla di ciclotrone

ha un moto circolare uniforme, la particella si muoverà *elicoidalmente*, con asse parallelo alle linee di campo.



**Figura 3:** Carica in moto in un campo magnetico.

Come visto nel capitolo precedente, la carica, in quanto accelerata e in moto relativistico, emetterà radiazione concentrata in un cono di semi-apertura  $1/\gamma$  nella direzione della velocità e distribuita secondo la 12. In questo caso sarà:

$$(-) \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^4}{m_0^2 c^3} \beta^2 \gamma^2 H^2 \sin^2 \theta \xrightarrow{\varepsilon = m_0 c^2} \frac{2}{3} \frac{q^4}{m_0^4 c^7} \varepsilon^2 H^2 \sin^2 \theta \quad (14)$$

Definendo ora la sezione d'urto Thomson  $\sigma_T$  dell'elettrone come  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_0 c^2}\right)^2$  e considerando  $\beta \sim 1$ , si può esprimere numericamente la 14 nel seguente modo:

$$(-) \frac{d\varepsilon}{dt} = 2c\sigma_T \gamma^2 \frac{H^2}{8\pi} \sin^2 \theta \simeq 1.62 \cdot 10^{-15} \gamma^2 H^2 \sin^2(\theta) \text{ erg } s^{-1} \quad (15)$$

da cui è evidente che l'emissione sarà importante per cariche molto energetiche e campi magnetici intensi.

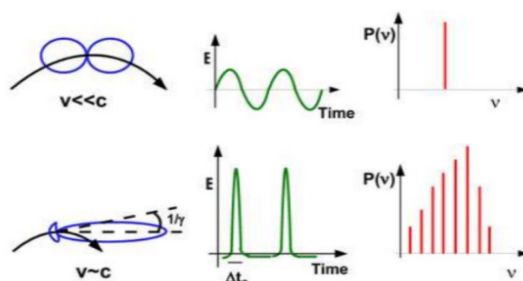
Dato il moto elicoidale della particella e la distribuzione della radiazione, l'emissione è costituita da impulsi di durata  $\Delta\tau \simeq 5 \cdot 10^{-8} \gamma^{-2} H^{-1} [G] \text{ sec}$  i cui massimi si verificano quando la velocità della particella è allineata con la linea di vista. Mediante l'analisi di Fourier dell'impulso ricevuto, è possibile ricavare la distribuzione spettrale della potenza di sincrotrone (per un singolo elettrone) per unità di frequenza. Si nota che, a differenza dello spettro di ciclotrone, per il quale si ha emissione ad una sola frequenza caratteristica  $\nu_L = \frac{qH}{2\pi mc}$ , l'emissione di sincrotrone presenta uno spettro con infinite armoniche e avviene alla frequenza caratteristica <sup>3</sup>

$$\nu_s \simeq \frac{3}{4\pi} \gamma^2 \frac{eH}{m_e c} \approx 4.2 \cdot 10^{-9} \gamma^2 H (\mu G). \quad (16)$$

Si può osservare, quindi, come le condizioni relativistiche introducano un forte effetto Doppler sulla frequenza caratteristica, che risulta essere  $\gamma^2$  volte superiore rispetto a

<sup>3</sup>la frequenza delle armoniche dipende dallo spostamento Doppler dovuto alla componente  $v_{\parallel}$ . Quindi, al crescere della velocità le armoniche saranno così vicine da sovrapporsi e formare uno spettro continuo

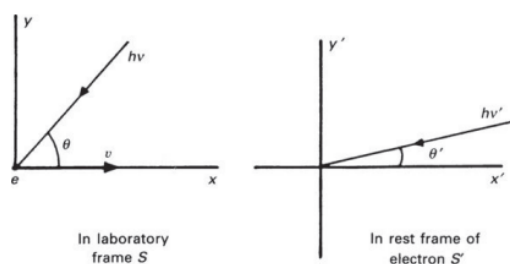
quella di ciclotrone, e comportino un'amplificazione dei campi elettrici e magnetici in avvicinamento rispetto all'osservatore, visibili in Figura 4.



**Figura 4:** Confronto tra emissione di ciclotrone e sincrotrone. Fonte: Ghisellini, “Radiative Processes in High Energy Astrophysics”

## 2.2 Compton Inverso

Il processo di Inverse Compton (IC) è un fenomeno di scattering tramite il quale un elettrone relativistico trasferisce parte della sua energia cinetica, a seguito di un urto, a un fotone meno energetico. E' possibile analizzare il problema ponendosi dapprima nel sistema di riferimento solidale all'elettrone ( $S'$ ), dove vale il processo di scattering Thomson<sup>4</sup> e successivamente, applicando le dovute trasformazioni relativistiche, nel sistema dell'osservatore ( $S$ ).



**Figura 5:** Geometria dell'effetto Compton Inverso. Fonte: Carla & Roberto Fanti. Una finestra sull'Universo “Invisibile”

Nel sistema dell'osservatore, l'energia del fotone prima e dopo l'urto viene definita rispettivamente come  $\varepsilon_i = h\nu_i$ ,  $\varepsilon_f = h\nu_f$ , mentre in  $S'$  come  $\varepsilon'_i = h\nu'_i \ll m_e c^2$  e  $\varepsilon'_f = h\nu'_f$ . Inoltre, avendo ipotizzato che nel sistema dell'elettrone valga l'effetto Thomson, il fotone viene re-irradiato alla stessa frequenza precedente all'urto ( $h\nu'_i = h\nu'_f$ ). Quindi, per

<sup>4</sup>l'energia del fotone incidente prima e dopo l'urto non varia  $\varepsilon'_1 = \varepsilon'$

l'effetto Doppler relativistico, si ricava che in  $S'$ :

$$\varepsilon'_i = \varepsilon_i \gamma (1 - \beta \cos \theta) \quad (17)$$

L'energia misurata nel sistema  $S$  risulta essere:

$$\varepsilon_f = \varepsilon'_f \gamma (1 + \beta \cos \theta') \quad \xrightarrow{\varepsilon'_f = \varepsilon'_i} \quad \varepsilon_f = \varepsilon_i \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta) (1 + \beta \cos \theta') \quad (18)$$

dove  $\theta$  indica l'angolo tra la direzione del moto del fotone incidente e dell'elettrone nel sistema dell'osservatore,  $\theta'$  è l'angolo tra la direzione del moto del fotone diffuso e l'elettrone nel sistema  $S'$ .

Si può notare che il massimo guadagno di energia per il fotone si ha per urti frontali, cioè  $\theta = \pi$  e  $\theta' = 0$ . Quindi, dal momento che  $\beta \approx 1$  si ottiene:

$$\varepsilon_f \simeq 4\gamma^2 \varepsilon_i \quad (19)$$

L'Inverse Compton rappresenta un metodo molto efficiente nel trasferimento di energia da un elettrone relativistico a un fotone poco energetico. Si presti, però, attenzione al sistema di riferimento  $S'$ : se il fotone in questione possiede un'energia troppo elevata, la sezione d'urto dell'elettrone si riduce, provocando una netta diminuzione dell'efficienza del processo che diventerà uno scattering Compton<sup>5</sup>. Invece, se il fotone in  $S'$  possiede un'energia dell'ordine di 100 keV, con  $\gamma \sim 10^3$ , è comunque possibile produrre fotoni con energie elevate, ad esempio

$$\begin{aligned} \text{fotoni Radio} &\xrightarrow{IC} \text{fotoni UV} \\ \text{fotoni } F - IR &\xrightarrow{IC} \text{fotoni } X \\ \text{fotoni Ottici} &\xrightarrow{IC} \text{fotoni } \gamma \end{aligned}$$

Si può estendere il ragionamento a una regione di spazio in cui è presente un plasma di elettroni relativistici e un campo di radiazione  $E_{rad}$  dovuto ai fotoni, entrambi distribuiti isotropicamente.

Dalla relazione 17, si ha  $E'_{rad} = E_{rad} \gamma (1 - \beta \cos \theta)$ . Ricordando che l'energia emessa è un'invariante di Lorentz, quindi è la stessa sia nel sistema dell'osservatore sia nel sistema dell'elettrone, sfruttando la definizione di vettore di Poynting  $\langle S \rangle = (c/8\pi) \langle E'^2_{rad} \rangle$ , nel riferimento dell'elettrone la potenza emessa sarà:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon'}{dt'} = \langle S \rangle \sigma_T = c\sigma_T \gamma^2 \langle (1 - \beta \cos \theta)^2 \rangle \langle E'^2_{rad} \rangle \quad (20)$$

che significa che nel sistema  $S'$  la densità di energia risulta aumentata di un fattore  $[\gamma(1 - \beta \cos \theta)]^2$  rispetto a quella misurata dall'osservatore in  $S$ . Un fattore è dovuto

<sup>5</sup>perdita di energia del fotone a seguito di un urto con l'elettrone

all'effetto Doppler che aumenta l'energia sui singoli fotoni, l'altro deriva dalla contrazione relativistica delle lunghezze, ossia lo spazio si contrae nella direzione del moto, quindi in  $S'$  aumenta il numero di fotoni per unità di volume.

Ora, tornando alla potenza emessa, data la distribuzione isotropa di fotoni, detta  $U_{ph} = \langle E_{rad}^2 \rangle$  la densità di energia, integrando sull'angolo solido  $d\Omega = (1/2) \sin \theta d\theta$ <sup>6</sup>, si ottiene la potenza totale emessa dalla regione di scattering ( $\frac{d\varepsilon_{out}}{dt} = c\sigma_T U_{ph} \gamma^2 (1 + \frac{1}{3}\beta^2)$ )

Sottraendo a quest'ultima il tasso di diminuzione dell'energia dei fotoni ( $\frac{d\varepsilon_{in}}{dt} = c\sigma_T U_{ph}$ ), essendo  $\gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$  si ricava l'energia netta persa dagli elettroni e convertita in aumento di radiazione

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{IC} = \frac{4}{3} c\sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{ph} \quad (21)$$

Dato che il numero di fotoni sottoposti allo scattering nell'unità di tempo è rappresentato da  $c\sigma_T U_{ph}/\varepsilon$ , il valore medio dell'energia dei fotoni diffusi è dato da  $\varepsilon_f \approx \frac{4}{3} \gamma^2 \varepsilon_i$ .

Si può anche osservare come la 21 ricordi il risultato raggiunto per la potenza emessa dal sincrotrone  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 2c\sigma_T \gamma^2 \beta^2 \frac{H^2}{8\pi} \sin^2 \theta$ , dove il termine  $\sin^2 \theta$ , per una distribuzione isotropa, è pari a  $2/3$ .

Dal rapporto tra le emissioni di sincrotrone e di Inverse Compton:

$$\eta = \frac{(d\varepsilon/dt)_{sinc}}{(d\varepsilon/dt)_{IC}} = \frac{U_H}{U_{ph}} \quad U_H = H^2/8\pi \quad (22)$$

si può evincere che gli elettroni relativistici che emettono fotoni poco energetici per sincrotrone possono interagire con gli stessi fotoni partecipando ai fenomeni di scattering, in particolare di Inverse Compton.

## 2.3 Synchrotron-Self-Compton e Catastrofe Compton

La combinazione di questi due processi, denominata **Synchrotron Self-Compton**, è particolarmente interessante nel caso di sorgenti compatte. Si prenda, ad esempio, una regione di spazio sferica costituita da plasma ultra-relativistico magnetizzato, di raggio  $R$ , posta a una distanza  $d$  da un osservatore. Dal momento che la sorgente è compatta, l'emissione di sincrotrone è autoassorbita,<sup>7</sup> pertanto è possibile studiare il flusso  $S(\nu)$  applicando l'approssimazione di corpo nero:

$$S(\nu) = 2kT_e \frac{\nu^2}{c^2} \Omega = 2kT_e \frac{\nu^2}{c^2} \frac{R^2}{d^2} \quad (23)$$

Si noti che, specificatamente a questa situazione, la temperatura cinetica  $T_e$  degli elettroni relativistici ( $\varepsilon = \gamma m_e c^2 = 3kT_e$ ) è uguale alla temperatura di brillantezza  $T_B$  della sorgente,

<sup>6</sup> $\frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \beta \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta = 1 + \frac{1}{3}\beta^2$

<sup>7</sup>situazione che si verifica quando un fotone cede la propria energia a un elettrone; la temperatura di brillantezza della sorgente è prossima alla temperatura cinetica degli elettroni, quindi il numero di fotoni che cedono la propria energia cresce causando la diminuzione della luminosità della sorgente



dalla cui luminosità Radio bolometrica  $L = L(\nu)\nu$  (con  $L(\nu) = 4\pi d^2 S(\nu)$ ) dovuta al sincrotrone, è possibile ottenere la corrispondente densità di energia  $U_{rad}$ :

$$U_{rad} = \frac{4\pi S}{cd\Omega} = \frac{L(\nu)\nu}{cR^2 d\Omega} \simeq 2kT_B \frac{\nu^3}{c^3} \quad (24)$$

Sostituendo il risultato nella 22 al posto di  $U_{ph}$ , in quanto densità di energia del campo di radiazione, si ottiene:

$$\eta = \frac{(d\varepsilon/dt)_{sinc}}{(d\varepsilon/dt)_{IC}} = \frac{U_{rad}}{H^2/8\pi} = \frac{16\pi kT_B \nu^3}{H^2 c^3} \quad (25)$$

Esprimendo il campo magnetico in termini di osservabili, ricordando la definizione di frequenza caratteristica del sincrotrone ( $\nu \approx \nu_s \approx \gamma^2 \nu_L = (\frac{\varepsilon}{m_e c^2})^2 \frac{eH}{2\pi m_e c}$ ), si osserva la forte dipendenza tra il rapporto di emissione e la temperatura di brillantezza della sorgente radio:

$$\eta = \frac{324e^2 k^5}{\pi m_e^6 c^{13}} \nu T_B^5 \xrightarrow[\eta=1]{per} T_B = 10^{12} \left( \frac{1GHz}{\nu} \right)^{1/5} K \quad (26)$$

Il valore  $T_B = 10^{12} K$  esprime una temperatura limite al di sopra della quale il Compton Inverso domina completamente i processi radiativi e la sorgente irradia prevalentemente nella banda X e molto meno in quella Radio. Infatti gli elettroni, a causa delle perdite energetiche sempre maggiori, provocheranno uno scattering dei fotoni dalla banda X ai raggi  $\gamma$ , e così via a frequenze superiori. Se le perdite energetiche degli elettroni aumentano, il tempo di vita radiativo<sup>8</sup> diventerà sempre più breve, provocando un raffreddamento della radiosorgente, conosciuto come **catastrofe Compton**.

## 2.4 Moti superluminali

Le sorgenti più compatte presentano una temperatura di brillantezza di circa  $10^{11} K$  provando che la radiazione è dovuta effettivamente agli elettroni relativistici. Esistono, però, casi in cui la temperatura osservata supera il valore critico: si potrebbe ipotizzare una notevole radiazione nelle bande X e  $\gamma$ , ma, in realtà, non viene rilevato alcun segno di catastrofe Compton. Questo fenomeno è spiegabile mediante i **moti superluminali**, situazione in cui la velocità di determinate radiosorgenti sembra superare quella della luce. Uno degli oggetti più studiati è **3C273**, un quasar che presentava componenti Radio che sembravano percorrere una distanza di 25 anni luce in

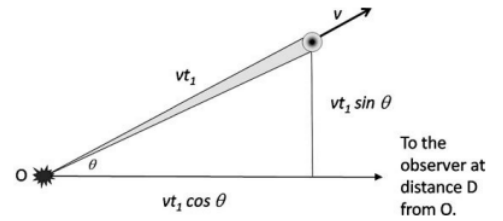


Figura 6: Schema del moto superluminale

<sup>8</sup>dalla perdita energetica dei due processi combinati  $-(\frac{d\varepsilon}{dt})_{sinc+IC} = \frac{4}{3}c\sigma_T\gamma^2\beta^2(U_H + 8\pi U_{rad})$  si ottiene il tempo di raffreddamento  $t^* = \frac{\varepsilon}{d\varepsilon/dt} \approx \frac{1}{\varepsilon^*(H^2+8\pi U_{rad})}$

circa 3 anni ( $\sim 8c$ ). Si consideri, dunque, un osservatore posto a una distanza  $d$  dalla sorgente, la quale, all'istante  $t_0$ , espelle una sua componente nel punto  $O$  in modo da formare un angolo  $\theta$  rispetto alla linea di vista. Il segnale giungerà all'osservatore dopo un tempo  $t = d/c$ . Dopo un tempo  $t_1$ , la stessa componente ha raggiunto una distanza  $vt_1$  rispetto al punto  $O$  e  $vt_1 \sin \theta$  rispetto allo sperimentatore. L'osservatore percepirà tale spostamento dopo un tempo  $t_2 = t_1 + \frac{d-vt_1 \cos \theta}{c}$ , per cui i due segnali verranno rilevati in un  $\Delta t = t_2 - t_1 = t_1(1 - \beta \cos \theta)$ . In questo modo si ricava la velocità trasversale apparente:

$$v_{\perp} = \frac{v \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \quad (27)$$

Differenziando la 27 rispetto a  $\theta$ , si ottiene il massimo valore di velocità trasversale, cioè per  $\cos \theta = v/c = \beta$ , per cui  $\beta_{\perp}^{max} = \gamma\beta$ , che significa che se la sorgente si muove con velocità prossime a quelle della luce e se l'angolo è sufficientemente piccolo, per l'osservatore sembrerà superare la velocità della luce.

La radiazione sarà dunque concentrata in un cono di semi-apertura  $1/\gamma$ , e sia la frequenza sia la temperatura  $T_B$  osservate saranno influenzate dall'effetto Doppler:  $\nu_o = D\nu_{vera}$  e  $T_{Boss} = T_{Bvera}D^5$ . Dal momento che  $\eta \propto \nu T_B^5$ , se la sorgente si muove relativisticamente il valore osservato della temperatura supererà il valore soglia di  $10^{12}K$ , sebbene non ci sia alcuna catastrofe Compton.

### 3 Relatività generale

La relatività ristretta riuscì a conciliare il principio di relatività galileiano con la teoria maxwelliana sull'elettromagnetismo, ma allo stesso tempo creò una nuova incongruenza con la teoria della gravitazione di Newton, secondo cui la forza gravitazionale tra due corpi si trasmette *istantaneamente*, cioè con *velocità infinita*.

Inoltre, la teoria newtoniana rendeva difficile la distinzione tra la massa inerziale e gravitazionale: la prima esprime la capacità di un corpo di opporsi a una forza (dal secondo principio della dinamica  $F = m_i a$ ), mentre la seconda indica la capacità di un corpo di attrarne un altro (dalla legge di gravitazione universale  $F = G \frac{m_g M}{r^2}$ ). In aggiunta, dalla relatività ristretta particelle che presentano una massa a riposo nulla continuano a godere delle proprietà tipiche della massa. Nel tentativo di dare una risposta a tali contraddizioni, Einstein avanzò il **principio di equivalenza**, nonchè la base della relatività generale.

Si tratta di un esperimento mentale che prende in considerazione due sistemi di riferimento: il primo inerziale e dotato di campo gravitazionale ( $S$ ), mentre il secondo uniformemente accelerato e privo di campo di gravità ( $S'$ ). I due sistemi sono detti equivalenti, vale a dire che gli esperimenti effettuati in tali condizioni forniscono gli stessi risultati.

Basti pensare a un'astronave a riposo nel sistema  $S$  (ad esempio la Terra) in cui è presente un campo di gravità. Sotto questa assunzione, gli oggetti al suo interno cadranno con un'accelerazione  $\vec{g}$  mentre quelli a riposo saranno soggetti a una forza uguale e contraria al loro peso. Ora, la stessa nave si muove verso una regione di spazio priva di campo gravitazionale con un'accelerazione  $a = -g$  (sistema  $S'$ ) rispetto a  $S$ . Anche in tal caso, gli oggetti abbandonati saranno sottoposti ad un'accelerazione  $\vec{g}$ , mentre quelli in quiete rispetto alla navicella percepiranno una forza pari a quella che nel sistema  $S$  controbilanciava il loro peso. L'esperienza confermava quanto già dedusse Galileo, secondo cui la traiettoria di un corpo in caduta libera non dipende dalle proprietà dello stesso: la massa di un corpo che viene attratto dalla gravità terrestre è la stessa di quando è soggetto ad un'accelerazione  $g$  in assenza di campo di gravità. Quindi, similmente alla relatività ristretta, il significato più profondo di questo ragionamento è che non si può parlare di un'accelerazione assoluta, bensì di una relativa.

Tra gli aspetti fondamentali della relatività generale, si ricordano:

1. le leggi della fisica sono invarianti rispetto alle trasformazioni tra tutti i sistemi di riferimento, indipendentemente dal moto.
2. lo scorrere del tempo è più lento nelle regioni a potenziale gravitazionale più basso;
3. la direzione della velocità della luce non è costante in un campo gravitazionale. Infatti, la presenza di una massa provoca la curvatura dello spazio-tempo nella regione prossima alla quantità di materia e tale curvatura corrisponde proprio al campo gravitazionale classico. Per questo motivo, in regioni grandi, la relatività ristretta e la geometria euclidea non sono applicabili, e conseguentemente i raggi luminosi non percorreranno per forza delle traiettorie rettilinee, ma delle geodetiche

La teoria della relatività generale riscontra numerose conferme sia in ambito classico sia in quello moderno. Alcuni esempi possono essere la precessione del perielio dell'orbita di Mercurio, lo spostamento gravitazionale verso il rosso, la deflessione della luce del Sole e il fenomeno della lente gravitazionale.

### 3.1 Redshift gravitazionale

Il principio di equivalenza formulato da Einstein conduce direttamente a un importante risultato: la presenza di un campo gravitazionale provoca lo spostamento della frequenza di emissione percepita da un osservatore. Questo fenomeno, noto come **redshift gravitazionale**, si verifica quando un fotone, nel tentativo di risalire il campo di gravità generato da un oggetto massivo, perde energia e, conseguentemente la frequenza osservata viene spostata verso il rosso. In altri termini, dal momento che il tempo risulta scorrere più lentamente in prossimità di corpi gravitanti, la frequenza sarà influenzata da tale dilatazione, causandone, quindi, lo "shift".

Detta  $\varepsilon_e = h\nu_e$  l'energia del fotone e  $m_\gamma = \varepsilon_e/c^2$  la massa fittizia ad essa associata, considerato che il fotone compie lavoro contro il campo gravitazionale generato dal corpo, indicando con  $\Delta U_g$  la differenza di potenziale fra il punto di partenza ed un altro punto lungo la traiettoria, si ha che l'energia finale del fotone (ossia quella osservata) sarà  $\varepsilon = \varepsilon_e - m_\gamma \Delta U_g$ , che, in termini di frequenza, diventa:

$$\nu_o = \nu_e \left(1 - \frac{\Delta U_g}{c^2}\right) \quad (28)$$

Si può allora esprimere il redshift gravitazionale tramite la quantità adimensionale  $z_g$ :

$$z_g = \frac{\nu_o - \nu_e}{\nu_e} = \frac{\Delta\nu}{\nu_e} = \frac{\Delta U_g}{c^2} \quad (29)$$

Un esempio comune di questo fenomeno riguarda i fotoni che vengono emessi dalla superficie di una stella di massa  $M$  e raggio  $R$ .

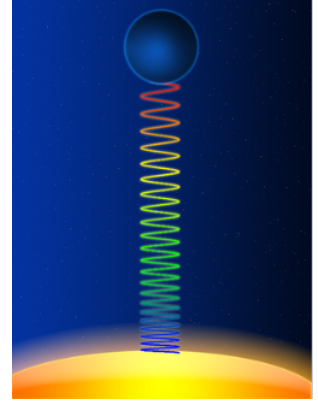
In tal caso il potenziale gravitazionale sulla superficie vale  $U_g = GM/R$  (con  $G = 6.67 \times 10^{-8} g^{-1} cm^3 s^{-2}$ ), mentre sulla Terra (luogo di osservazione) è pari a zero. Quindi la 29 è data da:

$$z_g = \frac{\Delta\nu}{\nu_e} = \frac{GM}{Rc^2} = \frac{R_s}{2R} \quad (30)$$

con  $R_s = 2GM/R$  raggio di Schwarzschild<sup>9</sup>. La relazione mette in evidenza che per corpi compatti il redshift è più pronunciato. Ad esempio, per il Sole è stato calcolato un redshift di circa  $10^{-6}$ , mentre la Nana Bianca Sirio B, avente massa simile a quella del Sole, ma raggio comparabile a quello terrestre, presenta uno spostamento dell'ordine  $1 - 2 \times 10^{-4}$ . Pochi anni fa la stella *S2*, orbitante attorno a Sagittarius A\*, ha raggiunto la minima distanza rispetto al buco nero ( $\sim 120$  AU) avente  $R_s \sim 0.08$  AU, comportando una diminuzione della frequenza di circa  $6 \times 10^{-4}$ .

### 3.2 Lente gravitazionale

La lente gravitazionale è un effetto visivo che dimostra la validità della teoria della relatività generale. Si verifica quando tra un osservatore e una sorgente di luce è presente un campo gravitazionale generato dalla concentrazione di materia (ad esempio il nucleo di una galassia). In questo modo, tale massa provoca la distorsione della luce



**Figura 7:** Schema del redshift gravitazionale

<sup>9</sup>il raggio di Schwarzschild indica la distanza a cui neanche la luce riesce a sfuggire alla gravità del corpo di massa  $M$  e raggio  $R$

dell'oggetto in studio, creando immagini multiple ricurve attorno ad essa. In condizioni di perfetto allineamento, viene prodotto un vero e proprio cerchio di luce, chiamato *anello di Einstein*.



**Figura 8:** A sinistra l'ammasso MACSJ0138.0-2155 funge da lente per la galassia MRG-M0138 (Fonte: NASA/ESA Hubble Space Telescope). A destra l'anello di Einstein di una galassia blu generato dalla gravità di una galassia rossa (Fonte: ESA/Hubble & NASA)

E' possibile stimare di quanto viene deviato il raggio luminoso da una massa  $M$  puntiforme associando al fotone un'energia  $\varepsilon = h\nu$ , una massa fittizia  $h\nu/c^2$  e quantità di moto  $p = h\nu/c$ . A causa della forza di gravità  $F_g$  esercitata dal corpo gravitante, il vettore  $\vec{p}$  ruota e la differenza tra la direzione iniziale e finale può essere scritta:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_g \Delta t \approx \vec{F}_g \frac{b}{c} = \frac{h\nu}{c^2} \vec{a}_g \frac{b}{c} \quad (31)$$

dove  $b$ , parametro di impatto, indica la minima distanza raggiungibile, in assenza di interazione, tra il fotone e il corpo di massa  $M$  e  $a_g$  è l'accelerazione percepita dal fotone. L'angolo di deviazione  $\alpha$  è dato da:

$$\alpha \approx \frac{\Delta\vec{p}}{p} \approx \frac{h\nu}{c^2} \frac{b}{c} \frac{a_g}{h\nu} \approx \frac{b}{c^2} a_g \quad (32)$$

che per una massa puntiforme risulterà come  $\alpha \approx \frac{b}{c^2} \frac{GM}{b^2} = \frac{GM}{c^2 b}$ . Ciò significa che, a parità di massa, più lontano è il corpo rispetto al fotone, tanto minore sarà la deviazione.

Il Doppio Quasar **QSO 0957+561 A/B** è stato il primo oggetto con lente gravitazionale a essere stato osservato. Inizialmente si pensava fossero due oggetti distinti, ma in qualche modo legati fisicamente: presentavano il medesimo spettro di emissione e assorbimento, magnitudini pressapoco uguali e lo stesso rapporto di luminosità a tutte le lunghezze d'onda. Grazie all'articolo pubblicato su Nature nel 1979 dal gruppo di ricerca guidato da Walsh (Walsh et al., 1979, Nature, 279, p.381) venne spiegato che si trattava, in realtà, di un unico oggetto sottoposto al fenomeno di lente gravitazionale, a causa della presenza di un campo gravitazionale esercitato dalla galassia YGKOW G1 (che si scoprì successivamente essere un ammasso di galassie) frapposta tra QSO 0957+561 A/B e la Terra.



## Riferimenti bibliografici

- [1] Daniele Dallacasa, *Appunti del corso di Processi di emissione e MHD*, Università di Bologna.
- [2] Carla & Roberto Fanti, *Una finestra sull'universo "Invisibile"*, Bologna, 2012
- [3] Mario Vietri, *Foundations of High-Energy Astrophysics*, Università di Chicago, 2008
- [4] Robert Resnick, *Introduzione alla relatività ristretta*, Milano: Casa Editrice Ambrosiana, 2020
- [5] Malcom S. Longair, *High Energy Astrophysics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [6] Gabriele Ghisellini, *Special relativity at action in the universe*, Osservatorio Astronomico di Brera, v. Bianchi 46, I-23807 Merate, Italia
- [7] George B. Rybicki & Alan P. Lightman *Radiative Processes in Astrophysics*, Weinheim:WILEY-VHC Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004
- [8] Peter Young et al. *The Double Quasar QSO 0957+561 A,B: a gravitational lens image formed by a galaxy at  $z=0.39$* , The American Astronomical Society, 1980
- [9] <https://hubblesite.org/contents/articles/gravitational-lensing>
- [10] Figura 7:[https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational\\_redshift](https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_redshift)
- [11] Nick Kaiser, *Gravitational Redshifts in Clusters of Galaxies*, Département de Physique École Normale Supérieure, Paris
- [12] R. Abuter et al., *Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole*, Astronomy and Astrophysics, 2018

