UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE

TRABAJO DE GRADO:

"LA ENSEÑANZA DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICA Y LOS NIVELES ALCANZADOS EN EL ÁREA DE ÁLGEBRA POR LOS ALUMNOS DE TERCER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA, EN LOS CENTROS ESCOLARES: INSA, TOMÁS MEDINA, JOSÉ MARIANO MÉNDEZ Y COLONIA SAN LUIS, DEL MUNICIPIO DE SANTA ANA, AÑO 2017".

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO(A) EN EDUCACIÓN, ESPECIALIDAD MATEMÁTICA

PRESENTADO POR:

MAZARIEGO GÓMEZ, CARLOS ERNESTO
MOLINERO SAMAYOA, VANESSA ESTER
PÉREZ CASTILLO, JUAN CARLOS
POSADA GRANDE, RENÉ EDUARDO
VALIENTE RIVERA, JOSÉ ANGEL

DOCENTE DIRECTOR:
LICDO. LEO EDGARDO MENDOZA ESCÁRATE

MAYO DE 2018

SANTA ANA, EL SALVADOR, CENTRO AMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES CENTRALES

M.Sc. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

RECTOR

DR. MANUEL DE JESÚS JOYA ÁBREGO

VICERRECTOR ACADÉMICO

ING. NELSON BERNABÉ GRANADOS ALVARADO

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

LICDO. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ

SECRETARIO GENERAL

M.Sc. CLAUDIA MARÍA MELGAR DE ZAMBRANA

DEFENSORA DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS

LICDO. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARIN

FISCAL GENERAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE

AUTORIDADES

DR. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ

DECANO

M.Ed. ROBERTO CARLOS SIGÜENZA CAMPOS

VICEDECANO

M.Sc. DAVID ALFONSO MATA ALDANA

SECRETARIO DE LA FACULTAD

M.Ed. RINA CLARIBEL BOLAÑOS DE ZOMETA

JEFA DE PROYECTOS ACADÉMICOS ESPECIALES

Índice

Introducción. 6
Capítulo I. Planteamiento Del Problema. 9
1.1 El Problema. 10
1.2 Justificación. 12
1.3 Objetivos. 15
1.4 Preguntas de Investigación. 15
Capítulo II. Marco Teórico. 16
2.1 Antecedentes. 17
2.1.1 Dirección de las investigaciones en La Enseñanza del Álgebra. 17
2.1.2 Investigaciones Previas sobre La Letra en Álgebra Basadas en La Propuesta de Küchemann. 18
2.2 La Enseñanza de La Matemática y Los Niveles de Comprensión del Álgebra. 23
2.2.1 Primeras Aplicaciones de la Psicología a la Enseñanza de la Matemática. 23
2.2.2 La Teoría del Desarrollo Cognitivo de Jean Piaget. 26
2.2.3 El Aprendizaje de la Matemática y los Estadíos de Desarrollo Cognitivo. 29
2.2.4 Niveles de Comprensión del Álgebra. 33
2.2.5 Formas de Interpretar la Letra en Álgebra. 34
2.2.6 Caracterización de los Niveles de Comprensión En Álgebra. 36
2.2.7 Diferencias y Clasificación en los Niveles de Comprensión del Álgebra. 43
2.2.8 Índices de Facilidad. 44
2.3 El Álgebra en el Sistema Educativo de El Salvador desde la última Reforma Educativa. 45
2.3.1 El Álgebra En La Enseñanza De La Matemática Desde La Reforma Educativa De 1995. 45
2.3.2 El Álgebra En La Enseñanza De La Matemática Desde El Plan Nacional de Educación 2021. 48
Capítulo III. Marco Metodológico. 55
3.1 Tipo de Investigación. 56
3.2 Universo. 56
3.3 Muestra. 57
3.4 Recolección y tratamiento de datos. 58
3.4.1 Naturaleza de los datos. 58

3.4.2 Procedimientos e instrumentos. 59
3.4.2.1 Pilotaje de Instrumentos. 59
3.4.2.2 Instrumento de recolección de datos. 59
3.4.2.3 Procedimiento Estadístico y Vaciado de Datos. 66
3.4.2.3.1 Procedimiento para los Índices de Facilidad. 66
3.4.2.3.2 Procedimiento para los Niveles de Comprensión del Álgebra. 66
3.4.2.3.3 Procedimientos para la Pormenorización de Resultados por Institución. 67
3.4.3 Formas de Administración. 67
3.4.4 Sobre el Análisis de Resultados. 68
Capítulo IV. Análisis de Resultados. 69
4.1 Resultados Generales de Índices de Facilidad. 70
4.2 ¿Cuáles son los promedios en los índices de facilidad de los estudiantes en cada forma de interpretar y utilizar la letra en álgebra? 71
4.3 Resultados Generales de Niveles de Comprensión del Álgebra. 73
4.4 ¿Qué porcentaje de estudiantes clasifica en cada nivel de comprensión del álgebra? 73
4.5 Resultados Institucionales. 76
4.6 ¿Cuáles fueron los resultados institucionales según cada grado examinado? 80
Capítulo V. Conclusiones y Recomendaciones. 92
5.1 Conclusiones. 93
5.2 Recomendaciones. 99
Bibliografía 101
Anexos. 104

Índice de Tablas y Figuras.

Tablas.

Tabla 1. Plan de estudio de Matemáticas para tercer ciclo de educación básica, Reforma 1995. 47
Tabla 2. Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de *la letra Evaluada*. 49
Tabla 3. Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de *la letra No Usada*. 50
Tabla 4. Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de *la letra Como Objeto*. 50
Tabla 5. Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de *la letra Como Número Generalizado.* 51
Tabla 6. Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de *la letra Como Incógnita Especifica* 51
Tabla 7. Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de *la letra Como Variable* 52
Tabla 8. Plan de estudio de Matemáticas para Tercer Ciclo de Educación Básica, 2008. 53
Tabla 9. Matrícula efectiva Centro Escolar INSA 2017. 56
Tabla 10. Matrícula efectiva Centro Escolar Tomás Medina 2017. 57
Tabla 11. Matrícula efectiva Centro Escolar José Mariano Méndez 2017. 57
Tabla 12. Matrícula efectiva Centro Escolar Colonia San Luis 2017. 57
Tabla 13. Número de ítems resueltos requeridos para clasificar en cada nivel. 66
Tabla 14. Distribución de la muestra de estudio. 67
Tabla 15. Resultados Generales de Índices de Facilidad. 70
Tabla 16. Resultados Generales de Promedios de los Índices de Facilidad. 71
Tabla 17. Resultados Generales Niveles de Comprensión del Álgebra. 73
Tabla 18. Resultados Generales Distribución de Porcentajes en Niveles de Comprensión del Álgebra. 73
Tabla 19. Resultados de los índices de facilidad por ítems del Centro Escolar INSA. 76

Tabla 20. Resultados de los índices de facilidad por ítems del Centro Escolar Tomás Medina. 77
Tabla 21. Resultados de los índices de facilidad por ítems del Centro Escolar José Mariano Méndez. 78
Tabla 22. Resultados de los índices de facilidad por ítems del Centro Escolar Colonia San Luis. 79
Tabla 23. Promedios de los índices de facilidad según cada tipo de interpretación y uso de la letra en álgebra, en el Centro Escolar INSA. 80
Tabla 24. Niveles de Comprensión del Álgebra en el Centro Escolar INSA. 81
Tabla 25. Promedios de los índices de facilidad según cada tipo de interpretación y uso de la letra en álgebra, en el Centro Escolar Tomás Medina. 82
Tabla 26. Niveles de Comprensión del Álgebra en el Centro Escolar Tomas Medina. 83
Tabla 27. Promedios de los índices de facilidad según cada tipo de interpretación y uso de la letra en álgebra, en el Centro Escolar José Mariano Méndez. 84
Tabla 28. Niveles de Comprensión del Álgebra en el Centro Escolar José Mariano Méndez 85
Tabla 29. Promedios de los índices de facilidad según cada tipo de interpretación y uso de la letra en álgebra, en el Centro Escolar Colonia San Luis. 86
Tabla 30. Niveles de Comprensión del Álgebra en el Centro Escolar Colonia San Luis. 87

Gráficos.

Gráfico 1. Promedio de Índices de Facilidad Resultados Generales en Porcentajes. 71
Gráfico 2. Niveles de Comprensión del Álgebra. Resultados Generales en Porcentajes. 74
Gráfico 3. Promedio de Índices de Facilidad en Porcentajes. Centro Escolar INSA 80
Gráfico 4. Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Centro Escolar INSA. 81
Gráfico 5. Promedio de Índices de Facilidad en Porcentajes. Centro Escolar Tomás Medina. 82
Gráfico 6. Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Centro Escolar Tomás Medina. 83
Gráfico 7. Promedio de Índices de Facilidad en Porcentajes. Centro Escolar José Mariano Méndez. 84
Gráfico 8. Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Centro Escolar José Mariano Méndez. 85
Gráfico 9. Promedio de Índices de Facilidad en Porcentajes. Centro Escolar Colonia San Luis. 86
Gráfico 10. Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Centro Escolar Colonia San Luis. 87
Gráfico 11. Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Resultados por Institución. 88

Introducción.

La temática de los niveles de comprensión del álgebra corresponde al área de la didáctica de la matemática afín al aprendizaje del álgebra, y forma parte de los estudios que se centran en el proceso de aprendizaje específico de un contenido. Los niveles de Comprensión del Álgebra son una jerarquía teórica propuesta por el Dr. Dietmar Erich Küchemann en 1980, como producto de una gran investigación realizada en Londres, Inglaterra. Küchemann clasifica al estudiante en cuatro niveles de comprensión del álgebra de acuerdo con la capacidad que este manifiesta para interpretar y utilizar la letra en álgebra en la resolución de tareas de contexto algebraico, así como la complejidad de la estructura implicada en la resolución de problemas.

El desarrollo de investigaciones sobre procesos de aprendizaje específico de un contenido en matemática, aparecen como una alternativa al fallido intento de desarrollar una teoría del aprendizaje general y neutral respecto al contenido, y derivar de ella una teoría de aprendizaje matemático. En el camino de desarrollar una teoría de aprendizaje sobre el concepto de la letra en álgebra, se enmarcaron estudios como los desarrollados por Dietmar Küchemann, Peter Rosnick, Sidrid Warner, Zalman Usiskin, Carolyn Kieran y otros, sobresaliendo de entre estos el trabajo de Küchemann, de tal manera que se han desarrollado estudios en Inglaterra (nuevamente), Colombia, México, Nicaragua y otros, basados en las teorías de este autor.

Este estudio describe los niveles de comprensión del álgebra alcanzados por los estudiantes de tercer ciclo de educación básica en cuatro centros escolares del municipio de Santa Ana. Los resultados de esta investigación pueden servir para desarrollar proyectos especiales de aprendizaje del álgebra escolar. Además, es posible determinar los principales errores que los estudiantes cometen al momento de interpretar y usar la letra en álgebra y reforzar específicamente las áreas más débiles identificadas. Permite obtener información para minimizar los conflictos y la crisis que genera la transición del aprendizaje de la aritmética al álgebra. Considerando los resultados, las autoridades de las escuelas y los docentes de matemáticas pueden tener indicadores que les permitan tomar decisiones y desarrollar iniciativas para mejorar el proceso de aprendizaje escolar o reforzar parcialmente dicho proceso.

El capítulo uno desarrolla de forma teórica el problema de investigación sobre los niveles de comprensión del álgebra. También se exponen investigaciones relacionadas al aprendizaje y comprensión de la letra en álgebra. Se presentan las instituciones participantes en el estudio y los criterios de selección de dichas instituciones, la justificación del estudio y se detallan los objetivos y preguntas de investigación.

El capítulo dos explica la dirección que han tomado las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra desde el Tercer Congreso Internacional en Matemática Educativa, y describe brevemente las metodologías y resultados de otras investigaciones basadas en la propuesta de Küchemann. Posteriormente, se exponen las primeras aplicaciones de la psicología experimental a la enseñanza de la matemática hasta llegar a la teoría de Desarrollo Cognitivo de Jean Piaget que, a su vez, sirvió de base para la teoría de niveles de comprensión del álgebra de Küchemann. Finalmente, se presenta la teoría de niveles de comprensión del álgebra junto a los ejercicios que corresponden en cada nivel, y la relación que guarda cada forma de interpretar y utilizar la letra en álgebra con los indicadores de logro de las unidades de álgebra del programa de estudio de matemática para tercer ciclo de educación básica del sistema educativo salvadoreño.

El tercer capítulo describe la metodología utilizada en la investigación. Se presenta la forma en que está distribuido el universo de investigación en los centros escolares, grados y secciones basados en la matricula efectiva del año 2017 de cada institución. También se explica el cálculo de la muestra de investigación y la forma en que esta está distribuida en los centros escolares. Posteriormente se presenta el test que se administró a los estudiantes y la manera en que se planificó el vaciado y tratamiento de datos.

El cuarto capítulo presenta el análisis de resultados. Se detallan los resultados en tablas y gráficos de los promedios de los índices de facilidad y porcentaje de estudiantes clasificados en los niveles de comprensión del álgebra en forma general y por cada institución participante del estudio. También se realiza el desarrollo de las preguntas de investigación y el análisis detallado de los resultados obtenidos.

El capítulo final contiene las conclusiones y recomendaciones producto de la investigación. Se realizan conclusiones con respecto a los promedios en los índices de facilidad de los estudiantes en cada forma de interpretar y utilizar la letra en álgebra, respecto a los porcentajes de estudiantes clasificados en cada nivel de comprensión del álgebra y respecto a los resultados institucionales según cada grado examinado. También se proponen recomendaciones respecto a las deficiencias encontradas al Ministerio de Educación de El Salvador y a los docentes encargados de la asignatura Matemática en los centros escolares participantes del estudio.

Capítulo I. Planteamiento Del Problema.

1.1 El Problema.

El eje central de este proyecto de investigación es la interpretación y el uso que los estudiantes de tercer ciclo de educación básica hacen de la letra en álgebra. Esto se debe a que los niveles de comprensión del álgebra se fundamentan en la interpretación y uso de la letra en la resolución de problemas que exigen un abordaje algebraico. La interpretación y uso que los estudiantes hacen de la letra en álgebra es producto de la forma en la que entienden el papel que puede adoptar la letra, y explica gran parte de las estrategias a las que recurren para resolver problemas de tipo algebraico. Si bien es cierto, en el sistema educativo salvadoreño, el uso de letras en matemáticas no es exclusivo ni se inicia en tercer ciclo de educación básica, pero es en este nivel donde se comienza a trabajar directamente sobre dicha situación. De compilar dicha interpretación y uso, estos sirven de insumo para analizar índices de facilidad en cada forma de utilizar e interpretar la letra en álgebra, clasificar a los estudiantes de acuerdo con niveles de comprensión del álgebra, hacer análisis de la estratificación de resultados e interpretar sus implicaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra.

Muchos investigadores han desarrollado estudios acerca de la interpretación y el uso de la letra en álgebra escolar desde diferentes contextos. Entre estos podemos mencionar a Dietmar Küchemann (1978), que en el marco del proyecto “Conceptos en Ciencias y Matemáticas en Secundaria” (CSMS), presentó algunos avances de dicha investigación en un artículo con el título de “Comprensión en los niños de las variables numéricas”. Küchemann investigó las diferentes maneras de como los estudiantes interpretan y usan los símbolos literales (letras), en álgebra. Gracias a los trabajos de investigación, Küchemann identificó seis categorías de interpretación y uso de la letra. Posteriormente Peter Rosnick (1981), desarrolló una investigación publicada en un artículo titulado “Algunos conceptos erróneos sobre el concepto de variable”, cuyo objetivo era estudiar las dificultades que muestran los estudiantes en la comprensión del uso de letras en las ecuaciones, al convertir un enunciado verbal a una expresión algebraica. Rosnick señala que enseñarle al estudiante de educación media y superior a precisar sobre el tipo de uso requerido de la letra para resolver problemas, debe ser un objetivo en los planes de estudio.

Desde otro punto del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra, Sigrid Warner (1983), investigó acerca de las dificultades que presentan los estudiantes al iniciar el estudio del álgebra con símbolos literales o variables. La investigación de Warner se resume en el artículo que lleva por nombre ¿Cuáles son estas cosas llamadas Variables? Warner expone ideas sobre una enseñanza gradual del uso de la letra en álgebra para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Otro investigador que teorizó sobre el uso de la letra en álgebra fue Zalman Usiskin (1999), en el artículo "Concepciones del álgebra escolar y usos de las variables", Usiskin expone cuatro usos diferentes en las variables, que se asocian a cuatro concepciones distintas del álgebra, haciendo énfasis en la relación existente entre concepciones y usos. Carolyn Kieran en colaboración con George Booke, Eugenio Filloy, Gerard Vergnaund y David Wheeler (Kieran, Booke, Filloy, Vergnaund, & Wheeler, 1990), desarrollaron un estudio titulado "Procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra escolar", que centra su atención en los significados que le asocian los estudiantes a los símbolos literales durante la transición del aprendizaje de la aritmética al álgebra.

Esta investigación describe los niveles de comprensión del álgebra de los estudiantes de tercer ciclo de educación básica, basándose en la interpretación y el uso que estos hacen de la letra en álgebra desde la propuesta teórica de Dietmar Erich Küchemann (1980), y siguiendo la lógica del proceso descriptivo propuesta por A. Schökel (García & Gema, 2010). Küchemann propuso seis formas que los estudiantes tienen de interpretar (y usar) la letra en álgebra, a saber: *letra evaluada, letra no usada, letra como objeto, como incógnita específica, como número generalizado y como variable*. Además, Küchemann utiliza índices de facilidad para analizar los resultados por ítems en instrumentos de recolección de datos y propuso una jerarquía de cuatro niveles de comprensión del álgebra que se sustentan en un marco teórico de desarrollo cognitivo Piagetiano.

El índice de facilidad se define como la frecuencia relativa con la que un estudiante responde correctamente un ítem. Aunque el índice de facilidad es una herramienta sencilla, resulta altamente útil para identificar las formas de interpretar y usar la letra en las que los estudiantes presentan mayores dificultades. Los niveles de comprensión del álgebra son una jerarquía teórica que clasifica al estudiante de acuerdo con el tipo de interpretación y el uso que hace de la letra en la resolución de tareas de contexto algebraico, así como la complejidad de la estructura implicada en la resolución (Küchemann, 1980).

Delimitación Espacial y Temporal de la Investigación.

La investigación se desarrolló en cuatro centros escolares del municipio de Santa Ana, pertenecientes al sistema integrado de escuelas inclusivas n° 12 “El Palmar” estos son:

1- Centro Escolar INSA.
2- Centro Escolar Tomas Medina.
3- Centro Escolar José Mariano Méndez.
4- Centro Escolar Colonia San Luis.

Los criterios de selección de los centros escolares donde se realizó la investigación fueron:

- ✓ Que pertenezcan a un mismo Sistema Integrado de Escuelas Inclusivas de Tiempo Pleno (SI-EITP).
- ✓ Que proporcionen servicios educativos a nivel de tercer ciclo.
- ✓ Que las autoridades institucionales acepten participar en dicho estudio.

La investigación se realizó durante el transcurso del año escolar 2017, y el pilotaje de instrumentos y recolección de datos durante el mes de Julio.

1.2 Justificación.

Las investigaciones en matemática educativa proporcionan información para precisar sobre proyectos educativos que se pretenden desarrollar. En evidencia a otras investigaciones, estudiar la interpretación y uso de la letra en álgebra ha permitido generar directrices para disminuir o solventar los errores, problemas de aprendizaje y mejorar la comprensión que tienen los estudiantes en dicha rama de la matemática. Por ejemplo, en la última década la sociedad salvadoreña a ponderado gran importancia a la formación de estudiantes de educación básica y media en el área de matemática, así se crearon programas como la academia sabatina de jóvenes talento de la Universidad de El Salvador, donde se asegura, se forman los futuros dirigentes técnico-científicos del país. Pero, para lograr desarrollar con éxito proyectos especiales de educación matemática, se exige trabajo de investigación que proporcione indicadores que expliquen, de la manera más precisa posible, las variables implicadas en dichos proyectos.

La evaluación sumativa tradicional no es capaz de compilar información sobre la comprensión que los estudiantes poseen sobre determinado contenido evaluado. En El Salvador, según el sistema educativo nacional, la única evaluación que tiene la función de promover y acreditar es la evaluación sumativa. En matemática, por lo general, evaluar sumativamente implica administrar un test que contiene ejercicios o problemas matemáticos, donde estos estarán correctamente resueltos si atienden las indicaciones algorítmicas y la respuesta coincide con la proporcionada por el profesor. Por tanto, la evaluación sumativa de matemáticas no verifica que el estudiante haya comprendido lo que ha hecho y entienda por qué sus acciones eran apropiadas, en consideración, el hecho que un alumno proporcione una respuesta correcta no garantiza un aprendizaje significativo que tenga como fundamento la comprensión. Esta investigación atiende a los niveles de comprensión del álgebra que manifiestan los estudiantes a través de la interpretación y uso que estos hacen de la letra en dicha rama de la matemática.

La interpretación y el uso de la letra en álgebra escolar es uno de los conceptos o nociones más problemáticos en el aprendizaje del álgebra. Según algunos investigadores, cada área de la matemática tiene conceptos o nociones que resultan ser más difíciles o problemáticos de comprender y manejar, este es el caso de la letra en álgebra. La confusión se genera con mucha facilidad dada la diversidad de papeles que puede adoptar la letra en álgebra, además de resultar problemático para los estudiantes comprender las diferentes facetas de dicho elemento. Puesto que la letra es un elemento omnipresente en la vida del estudiante en matemática, tener problemas sobre su interpretación y uso, prolongará un problema y un obstáculo para la obtención de nuevos conocimientos en matemáticas. Conocer los errores que cometen los estudiantes a la hora de interpretar y usar la letra en álgebra permite al docente estar atento a realizar las aclaraciones precisas y agilizar la dinámica de aprendizaje.

Enfrentarse a la interpretación y uso de las letras es uno de los primeros retos que tienen que asumir los estudiantes al iniciar el estudio del álgebra escolar. Durante la transición del aprendizaje de la aritmética al aprendizaje del álgebra se genera una crisis o conflicto en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Esto en gran parte porque la nueva área del conocimiento a estudiar exige un gran cambio en el modo de pensar o proceder en la resolución de problemas. A lo anterior hay que agregar la ansiedad generada por las especulaciones latentes entre estudiantes, e incluso de profesores, sobre las dificultadas del aprendizaje del álgebra. Toda investigación que aporte información sobre como minimizar la crisis o conflictos de aprendizaje que se generan en los estudiantes al iniciar el aprendizaje del álgebra, resulta valiosa para el quehacer de los educadores en matemáticas.

Las escuelas que participen del estudio podrán obtener sus respectivos resultados, por tanto, podrán valorar sus fortalezas y debilidades en aprendizaje del álgebra del tercer ciclo de manera clara y detallada. En consecuencia, las autoridades institucionales, así como sus docentes de matemática, podrán hacer juicios y tomar decisiones sobre como redireccionar el trabajo en la enseñanza del álgebra y fortalecer las habilidades de sus estudiantes. En consideración a los resultados las escuelas participantes pueden diseñar instrumentos o métodos que permita fortalecer contenidos específicos de grados específicos resultando en técnicas eficientes y precisas para mejorar los rendimientos académicos y aprendizajes de los estudiantes.

Por tanto, los resultados de esta investigación pueden servir para desarrollar proyectos especiales de aprendizaje del álgebra escolar. También proporciona información de los niveles de comprensión del álgebra que se está alcanzando gracias al trabajo docente desarrollado, lo que permitiría ir más allá de lo que la evaluación sumativa tradicional permite. Además, es posible determinar los principales errores que los estudiantes cometen al momento de interpretar y usar la letra en álgebra y reforzar específicamente las áreas más débiles identificadas. Permite obtener información para minimizar los conflictos y la crisis que genera la transición del aprendizaje de la aritmética al álgebra. La investigación puede servir, además, para que las autoridades de las escuelas y los docentes de matemáticas puedan tener indicadores que les permitan tomar decisiones y desarrollar iniciativas para mejorar el proceso de aprendizaje escolar o reforzar parcialmente dicho proceso.

1.3 Objetivos.

Objetivo General: Describir los niveles de comprensión del álgebra alcanzados por los estudiantes de tercer ciclo de educación básica.

Objetivos Específicos:

1- Identificar las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra que manifiestan los estudiantes de tercer ciclo de educación básica.
2- Determinar los porcentajes de estudiantes que clasifican en cada nivel de comprensión del álgebra.
3- Detallar los resultados institucionales según cada grado examinado.

1.4 Preguntas de Investigación.

1- ¿Cuáles son los promedios en los índices de facilidad de los estudiantes en cada forma de interpretar y utilizar la letra en álgebra?
2- ¿Qué porcentaje de estudiantes clasifica en cada nivel de comprensión del álgebra?
3- ¿Cuáles fueron los resultados institucionales según cada grado examinado?

Capítulo II.

Marco Teórico.

2.1 Antecedentes.

2.1.1 Dirección de las investigaciones en La Enseñanza del Álgebra.

En el tercer Congreso Internacional en Matemática Educativa (ICME3) realizado en 1976, en la Universidad de Karlsruhe (Alemania), se presentó un informe titulado "Investigación relacionada con el proceso de aprendizaje de las matemáticas". Los resultados de la investigación y su discusión implicaron un cambio significativo en la dirección de las investigaciones en matemática educativa. Según Kieran y Filloy (1989), el informe explica con desilusión los resultados de investigaciones de la aplicación de las teorías conductistas al aprendizaje de la matemática, siendo estos resultados no muy favorables. Considerando los resultados, los autores del informe sugirieron que "no deberíamos comenzar desde una teoría del aprendizaje general y neutral respecto al contenido, y derivar de ella una teoría de aprendizaje matemático…, [más bien deberíamos] empezar [desde] procesos de aprendizaje específicos de un contenido" (Bauersfeld y Skowronek, 1976, pág. 244 citado en Kieran y Filloy, 1989, pág. 229).

Según Kieran y Filloy (1989), los resultados de dicho congreso y el énfasis en indagar sobre aprendizaje específico de un contenido, han marcado la tendencia en las investigaciones de matemática educativas en las décadas posteriores. El aprendizaje del álgebra ha sido fuente de numerables investigaciones en temas específicos. Según Kieran y Filloy (1989), algunos de los principales temas investigados relacionados al aprendizaje del álgebra son: Formas de ver el signo igual, Dificultades con las convenciones de notación, Métodos de simbolizar, Resoluciones de ecuaciones, Funciones y sus Gráficas, Enfoque mediante computadoras y Variables e interpretación de la letra. Esta última área de investigación, de la interpretación y uso de la letra en álgebra, dio origen a planteamientos sobre niveles de comprensión del álgebra en estudiantes, dichos planteamientos son la fundamentación teórica de este estudio, enfocándose en las propuestas de Küchemann (1980).

2.1.2 Investigaciones Previas sobre La Letra en Álgebra Basadas en La Propuesta de Küchemann.

Aunque Dietmar Erich Küchemann no ha sido el único en teorizar sobre la interpretación y uso de la letra en el álgebra, sus propuestas han sido ampliamente aceptadas por la comunidad de educadores en matemática. Una de las primeras presentaciones que hizo Küchemann sobre su estudio se difundió en la revista británica Mathematics in School, de la Mathematical Association de Gran Bretaña. El artículo de Küchemann lleva por nombre “Children's Understanding of Numerical Variables” (1978), y ha servido de referente en líneas de investigación análogas. Según Google Scholar dicho artículo ha sido citado en al menos 212 textos científicos registrados. La obra completa de Küchemann se tituló “The understanding of generalised arithmetic (algebra) by secondary school” (1980), y ha servido de base teórica para posteriores investigaciones referentes a la interpretación y uso de la letra en álgebra relacionadas a problemas de aprendizaje en educación básica y superior universitaria. Se mencionan a continuación algunas de las investigaciones basadas en las propuestas de Küchemann que se han podido identificar.

Un grupo de docentes e investigadores de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en Bogotá Colombia, llamados grupo PRETEXTO, realizaron la investigación titulada “La Variable en Matemáticas como Problema Puntual: Búsqueda de causas en octavo grado” (1996). El equipo estaba conformado por Jorge Rodríguez Bejarano y Eugenia Castillo Echeverri, Licenciados en matemática y Máster en Educación, Pedro Javier Rojas y Javier Humberto Romero, Licenciados en matemática y Doctores en Educación, y Luis Oriol Mora Doctor en Matemática. Según los investigadores el objetivo principal de la investigación era “explicar causas de incomprensión del concepto de variable en matemáticas, así como también indagar sobre cuáles son las ideas que tienen los estudiantes de este concepto” (Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo, & Mora, 1999, pág. 46). La referencia teórica de este estudio está sustentada en los planteamientos e instrumentos diseñados por Küchemann (1980).

En la metodología básica abordada en la investigación del grupo PRETEXTO se utilizaron, además de la observación en el aula (acercamiento a la actividad al interior de la clase de matemáticas), dos cuestionarios: Según Rojas et al. (1999), al principio del año escolar (en 1994) se administró el primer cuestionario basado en la jerarquía propuesta por Küchemann para indagar acerca de la interpretación de la letra que manejaban los estudiantes de séptimo, octavo y noveno grados de los colegios donde se desarrolló la investigación, y que serviría además como punto de referencia una vez transcurrida la primera mitad del año. Un segundo cuestionario, se administró con la intención de indagar sobre los universos numéricos a los que acudían los estudiantes y, además, precisar un poco acerca de la interpretación de la letra. La muestra de estudio fueron 256 estudiantes de tres colegios.

Según los investigadores del grupo Pretexto (Rojas et al, 1999), se observó que la mayoría de los estudiantes (cerca de un 70%) están en los niveles más bajos de interpretación de la letra (*evaluada, no usada o como objeto*) y sólo un reducido número de ellos (15%) en los niveles superiores (*como incógnita, número generalizado o variable*). En particular, para el grupo de octavo grado al que se aplicó el cuestionario por segunda vez (41 estudiantes), para observar las modificaciones en la interpretación de la letra, como resultado del trabajo en clase de los ocho primeros meses del año escolar, el grupo Pretexto concluye lo siguiente:

> Se estableció que, si bien existían cambios en las tendencias de interpretación, los mayores cambios se daban en el nivel de *letra como objeto* y en el número de estudiantes que ingresan a la clasificación (porque en la segunda vez más personas se atreven a contestar) y a los niveles más bajos de la jerarquía: *letra evaluada, letra ignorada* (*o no usada*). Mientras que del nivel *letra como objeto* hay un desplazamiento hacia los otros; los porcentajes presentes tanto en *letra como incógnita, número generalizado o variable*, permanecen (Rojas et al, 1999, pág. 49).

José García Suarez, Máster en Didáctica de la Matemática, Isidoro Segovia Alex y José Luis Lupiañez Gómez (2014), Doctores en Didáctica de la Matemática, realizaron la investigación titulada "El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas". La investigación se realizó en el centro Universitario de la Costa Sur, en Autlán, México. Según los autores, el objetivo de la investigación era analizar los errores de los estudiantes al utilizar las letras en diferentes contextos y significados.

> (…) cuyo objetivo es analizar los errores más comunes que los alumnos de primer semestre presentan en las producciones, al operar con los distintos significados que pueden tener las letras en álgebra y con base a esos resultados, establecer su ubicación dentro de alguna de las cuatro categorías de entendimiento en el uso y significado de las letras en álgebra que propone Küchemann (2014, pág. 1545).

La muestra de la investigación fue en total 194 estudiantes de primer curso universitario, del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México, cuyas edades oscilaron entre 18 y 20 años, de las carreras de Licenciatura en Nutrición, Licenciatura en Administración de Empresas, Técnico Superior en Electrónica y Mecánica Automotriz, Ingeniería en Procesos y Comercio Internacional, Ingeniería en Teleinformática e Ingeniería en Recursos Naturales y Agropecuarios. El desarrollo del estudio se llevó a cabo entre septiembre y diciembre de 2012 y se basó en la categorización de los distintos usos de las letras propuestos por Küchemann (1980).

Con respecto a la metodología y resultados de la investigación, el instrumento de recolección de datos fue el diseñado originalmente por Küchemann (1980). Se aplicó en sesiones de 50 minutos y, una vez analizadas las respuestas, se realizaron entrevistas semi-estructuradas a una muestra de 10 estudiantes, "con el objetivo de profundizar en la búsqueda de las fuentes de los errores mediante las respuestas expresadas de manera incorrecta". Según los autores, los resultados muestran que más de la mitad de los estudiantes de este nivel educativo no manifiestan dificultades al evaluar las letras, manejarlas como objetos o considerar su presencia, sin embargo, si revelan deficiencias en el discernimiento para comprender el uso y significado de *las letras como incógnitas de valor específico, números generalizados y como variables.*

En la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense, en Nicaragua, William Oswaldo Flórez López, Máster en Investigación Didáctica de las Ciencias Experimentales y Matemática, realizó la investigación titulada "Los problemas asociados a la comprensión del álgebra en estudiantes universitarios" (Flórez, 2015). Según Flórez el fin de la investigación era "profundizar en la comprensión de las dificultades a las cuales se enfrentan los estudiantes que ingresan a las carreras de Ciencias Administrativas e Informática para la solución de problemas algebraicos", porque según él, citando a Gil, R

(2011) “Los resultados de los exámenes de admisión y los cursos propedéuticos de las Universidades Nicaragüenses muestran que sus conocimientos de álgebra son insuficientes”.

En la metodología y resultados, la investigación fue cualitativa, la aplicación del cuestionario se llevó a cabo con una muestra de 258 estudiantes de primer semestre, en las carreras de Administración de Empresas, Contabilidad Pública y Auditoria e Informática Administrativa de la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense. El instrumento de recolección de datos fue el cuestionario de problemas de comprensión del álgebra de Küchemann (1980), el cual según Flórez (2015), le permitió “analizar los problemas relacionados a los niveles de comprensión del álgebra a través de dimensiones que posibilitan reconocer niveles de desarrollo de los estudiantes” (2015, pág. 12).

Un aspecto sobresaliente de esta investigación fue la rigurosidad de métodos estadísticos para evaluar la confiabilidad del cuestionario de Küchemann, así como juicios de expertos donde concluyen que dicho instrumento evalúa efectivamente el uso e interpretación de la letra en álgebra. Según los resultados de la investigación la proporción de estudiantes universitarios que resolvieron el cuestionario obtuvieron puntuaciones entre 0.15 a 0.82 (Base 1). Con respecto a las medias de las puntuaciones en los niveles de comprensión del álgebra, el nivel 1 obtuvo una puntuación de 5.4767, en cambio, el nivel dos incrementa a 6.7829, sin embargo, los niveles 3 y 4 presentan una puntuación de 7.4612 y 7.7752, es decir, un aumento en las puntuaciones con respecto a los otros niveles. En este contexto sobresalen los estudiantes de contabilidad pública y auditoría con mejores puntuaciones en los niveles de comprensión del álgebra.

En Londres, Inglaterra, entre 2008 y 2012 se realizó la investigación titulada “Incremento en La Competencia y Confianza Estudiantil en Álgebra y Estructuras Multiplicativas” (ICCAMS). En el proyecto participaron un equipo de investigación del King's College de Londres y la Universidad de Durham junto con ocho profesores-investigadores de cuatro escuelas. El proyecto consiste en una encuesta a gran escala de estudiantes entre 11-14 años sobre entendimiento del álgebra y del razonamiento multiplicativo (Hodgen, Kuchemann, Brown, & Coe, 2009). Según la página web oficial del proyecto (iccams-maths.org), el objetivo de este era investigar maneras de incrementar los resultados académicos y el compromiso de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y el razonamiento multiplicativo.

En la primera fase de la investigación, se administró un test a nivel nacional a 7,000 estudiantes de noveno año, que examina el uso e interpretación de la letra en álgebra, y su respectiva clasificación en niveles de comprensión, mismo instrumento que se administró por primera vez en 1976 en el CSMS, y cuyos resultados actuales proporcionaron evidencia de una disminución en la comprensión que manejan los estudiantes. Los resultados de esta investigación, así como las conclusiones pormenorizadas, fueron presentados en el IV Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática (Hodgen, Kuchemann, Brown, & Coe, 2009) , en el XII Congreso Internacional de Matemática Educativa (Brown, Hodgen, & Küchemann, 2012) y en VIII Congreso Británico de Matemática Educativa (Hodgen, Coe, Brown, & Küchemann, 2014).

Entre los principales hallazgos y vacíos que se pueden mencionar de las investigaciones anteriores se pueden destacar:

a) En la investigación realizada en Bogotá Colombia, los investigadores hacen un análisis comparativo, pero sólo a nivel de octavo grado, administrando el test de Küchemann a principio y final del año escolar. Dicha investigación no analiza las tendencias en los estudiantes de clasificar en los diferentes niveles de comprensión de acuerdo con el grado que cursan.

b) En cuanto a las investigaciones realizadas en Autlán México y Costa Caribe Nicaragua, las edades de los estudiantes están desfasadas de acuerdo con los planteamientos originales de Küchemann. Ambas investigaciones se desarrollaron a nivel universitario, lo cual presenta una inconsistencia dado que Küchemann considera los estadíos de desarrollo cognitivo para estudiantes cuyas edades oscilen entre 13.3 y 15.3 años.

2.2 La Enseñanza de La Matemática y Los Niveles de Comprensión del Álgebra.

2.2.1 Primeras Aplicaciones de la Psicología a la Enseñanza de la Matemática.

La Psicología de los Ejercicios y de La Práctica.

El trabajo de Edward Lee Thorndike, Psicólogo y Pedagogo Estadunidense, justificó y potenció el uso de las largas guías de ejercicios y práctica como herramienta para el aprendizaje efectivo en las matemáticas que aún persisten en la actualidad. Thorndike fue el fundador de la "psicología para la instrucción matemática" (Bonilla, 1991). Según Chaplin y Krawiec, "Thorndike le ofreció al mundo psicológico el primer sistema en miniatura del aprendizaje, sistema que tuvo influencia profunda en el curso de la teoría de aprendizaje durante la siguiente mitad del siglo" (1978, pág. 158).

Thorndike se enfocó en explicar el aprendizaje basado en el "estimulo-respuesta", también de buscar aplicaciones de los resultados de sus experimentos a situaciones de enseñanza en el aula. La teoría de aprendizaje de Thorndike está basada en la relación que existe entre la frecuencia con la que un animal realiza una acción como respuesta a un estímulo, y seguido de esta acción existe una recompensa satisfactoria o fastidiosa. Thorndike lo explica en su ley del efecto:

> Cuando se realiza una conexión modificable entre una situación y una respuesta, y dicha conexión está acompañada o seguida de un estado de cosas satisfactorias, se aumenta la fuerza de dicha conexión; cuando se realiza y está acompañada o seguida de un estado de cosas molestas, su fuerza disminuye (Thorndike, 1913, pág. 4 citado en Resnick & Ford, 1991, pág. 27).

En 1922 Thorndike publica su obra "Psicología de la Aritmética", donde explica su teoría de aprendizaje basada en "vínculos", cada uno de estos es el resultado de aparejar iteradamente un estímulo y su respuesta correspondiente (Donde, por ejemplo: "7+ 3" es el estímulo y "10" la respuesta), (Bonilla, 1991). Para Resnick y Ford (1991), Thorndike entendía que toda conducta humana, sea pensamiento u obra, se podría analizar en términos de estímulos, es decir, sucesos exteriores a la persona, y respuestas, o sea lo que hacían las personas como reacción a dichos sucesos exteriores, y que dicha teoría podía aplicarse al proceso de aprendizaje en la escuela. Según Thorndike:

> Los objetivos de la educación elemental, cuando se definan plenamente, serán la producción de cambios en la naturaleza humana representados por una lista casi innumerable de conexiones o vínculos por los cuales el alumno piensa, siente o actúa de cierta manera en respuesta a las situaciones que la escuela ha organizado y está influenciado a pensar, sentir y actuar de manera similar a situaciones similares cuando la vida fuera de la escuela lo enfrenta con ellos (Thorndike, 1922, pág. xi).

Según Resnick y Ford, Thorndike pensaba que, como los estudiantes de escuela primaria aún no están en capacidad de abstraer propiedades o axiomas de la aritmética partiendo de ejemplos y de reglas previas, la misión de la enseñanza era dar forma cuidadosamente a los vínculos y los hábitos necesarios que les permitirían llevar a cabo cálculos y resolver problemas. "Lo que proponía Thorndike, como psicólogo, era analizar estas capacidades con mayor profundidad, hasta llegar a establecer un conjunto detallado de hábitos o de conexiones mentales, cada uno de los cuales se convertirá en candidato para su formación y refuerzo" (Resnick & Ford, 1991, pág. 28).

Las guías de ejercicios y práctica sirven para formar y reformar los vínculos adecuados que requiera la enseñanza. Según Thorndike, "Aquí un buen sistema de ejercicios y de práctica requiere presentar los vínculos de forma cuidadosamente programada, para que los vínculos más importantes se practiquen con más frecuencia, y los menores, con menos frecuencia" (Resnick & Ford, 1991, pág. 29). Los vínculos llamados "propedéuticos", que sólo se utilizan para facilitar el aprendizaje de conceptos nuevos, se practicarían de forma temporal para irse abandonando más adelante por falta de uso, Thorndike Advierte:

> Cada vínculo formado debe formarse con la debida consideración de cualquier otro vínculo que haya sido o vaya a formarse; Toda habilidad debe ser practicada en las relaciones más efectivas posibles con otras habilidades (Thorndike, 1922, pág. 140).

Sobre la base de los trabajos de Thorndike e Iván Pavlov se fundó propiamente el Conductismo y sus variantes, pasando por John Watson, Burrhus Skinner y otros.

Los Ejercicios De Práctica como una Oposición a La Enseñanza Con Significado.

William Arthur Brownell psicólogo experimental de la Universidad de investigación de Duke en Estados Unidos, se oponía a la teoría de aprendizaje por estímulo-respuesta de Thorndike y a su método de ejercicios por varios motivos (Bonilla, 1991), pues consideraba consecuencias directas de la teoría de los vínculos. Los motivos de la oposición de Brownell son básicamente dos:

a) La teoría de los vínculos no consideraba las diferencias cualitativas entre los cálculos de los niños y los de los adultos, llegando a la conclusión de que los ejercicios sirven simplemente para adquirir velocidad en los cálculos y práctica en la aplicación de estrategias descubiertas por los niños (cuestionables en ocasiones), en lugar de fomentar el recuerdo libre que utilizan los adultos. (Pastells, 2001, pág. 9).
b) El método basado en ejercicios supone una comprensión distorsionada de los objetivos de la enseñanza, puesto que parte de la repetición mecánica y no de la comprensión (Pastells, 2001, pág. 9).

Según Resnick y Ford (1991), el criterio que apoya Brownell para medir la habilidad aritmética no es el de ser capaz de resolver efectivamente todos los problemas de una larga lista, sino la capacidad del estudiante de pesar en forma cuantitativa. Brownell explica: “Para practicar con éxito el pensamiento cuantitativo, hay que disponer de un fondo de significados, no de una gran colección de respuestas automáticas… los ejercicios no sirven para desarrollar significados. La repetición no lleva a la comprensión” (1935, pág. 10 citado en Resnick & Ford, 1991, pág. 32). El método de significados prácticos (como el del recuerdo libre de los adultos) de Brownell, conseguiría algo más importante que el de Thorndike. Serviría para “ayudar a los alumnos a organizar y unificar su conocimiento del número, a desarrollar su facilidad de manejo de los números, y a comprender los principios de las combinaciones numéricas” (Brownell, 1928, pág. 211 citado en Resnick & Ford, 1991, pág. 33).

Sí la educación no está diseñada para enseñar significados prácticos, en los que se puede mostrar las relaciones entre los contenidos, entonces las guías de ejercicios y prácticas sólo servirán para que los estudiantes asimilaran las matemáticas “como una masa de elementos no relacionados entre sí y de datos independientes”, como explica Brownell en palabras de Resnick y Ford:

> Dada una comprensión adecuada de los conceptos matemáticos, los estudiantes serían más capaces de aplicar su conocimiento en situaciones nuevas. También que los ejercicios de práctica sólo tendrían que consistir en una "costumbre significativa", no en una simple repetición, la práctica sólo valdría la pena si incluyese ejercicios que sirvieran para mejorar la comprensión. Si el aprendizaje de las matemáticas sólo consistía en crear vínculos y cada vínculo se tenía que enseñar de forma independiente (como en la suma) entonces la tarea de la enseñanza era de una inmensidad absurda (1991, pág. 33).

Al igual que Brownell, existieron otros psicólogos a lo largo de la historia que se opusieron a considerar al aprendizaje como un mero conjunto organizado de conductas automatizadas, y presentaron teorías y planteamientos que explican maneras diferentes de adquirir el conocimiento. Así se aparecieron teorías como "La Representación Cognoscitiva" de Jerome Bruner, "Teoría Jerárquica del Aprendizaje" de Robert Gagné, "La Estructura y Aprendizaje por Insight" del grupo de psicólogos Alemanes Gestalt, "Desarrollo de Estructuras Cognitivas" de Jean Piaget y otros.

2.2.2 La Teoría del Desarrollo Cognitivo de Jean Piaget.

Según Maldonado, el desarrollo cognitivo "es el conjunto de transformaciones que se producen en las características y capacidades del pensamiento en el transcurso de la vida (…), por el cual aumenta los conocimientos y habilidades para percibir, pensar, comprender y manejarse en la realidad" (2011, pág. 8). Jean Piaget, biólogo suizo, estudió y dividió el desarrollo cognitivo en cuatro etapas o estadíos en intervalos de edades aproximadas, estas son: etapa sensoriomotora, etapa preoperacional, etapa de las operaciones concretas y etapa de las operaciones formales (Meece, 2001). Además de suponer que el pensamiento del niño es cualitativamente distinto en cada etapa, Piaget sostiene que el desarrollo cognoscitivo consiste en "transformaciones radicales de cómo se organiza el conocimiento" (Meece, 2001, pág. 102). Según esta teoría, entrando en una nueva etapa, el individuo no regresará a una manera anterior de razonar.

Según Gerrig y Zimbardo (2005, pág. 325), "Piaget llamó esquemas a las estructuras mentales que permiten a los individuos interpretar el mundo. Los esquemas son bloques de construcción de los cambios del desarrollo". Mientras los niños se desarrollan, se forman esquemas nuevos, los esquemas antecesores que se ponen en práctica iteradamente, pueden modificarse y, posiblemente, coordinarse entre sí para formar estructuras cognitivas. “Buena parte de la teoría de Piaget está dedicada al desarrollo de las estructuras cognitivas que gobiernan el razonamiento lógico, y que Piaget denominó operaciones” (Ormrod, 2005, pág. 188).

Etapas o Estadíos del Desarrollo Cognitivo.

I- Estadío Sensoriomotor (del nacimiento a los 2 años).

En esta etapa el niño desarrolla la permanencia de objeto y el inicio del pensamiento simbólico. Según Gerrig y Zimbardo, que interpretan a Piaget expresan:

> Durante los primeros meses, gran parte de la conducta del bebé se basa en un conjunto limitado de esquemas innatos, como succionar, observar, asir y empujar. Durante el primer año, las secuencias sensoriomotrices mejoran, se combinan, se coordinan e integran (por ejemplo, succionar y asir, observar y manipular); se vuelven más variadas conforme el bebé descubre que sus actos tienen un efecto en los eventos externos. La adquisición cognoscitiva más importante del periodo de la infancia, es la habilidad de formar representaciones mentales de objetos ausentes, aquellos con los que el niño no tiene un contacto sensoriomotriz directo (2005, pág. 325).

La permanencia del objeto hace referencia a “la comprensión de que los objetos existen y se comportan con independencia de sus actos o conciencia” (Gerrig & Zimbardo, 2005, pág. 325). Según explica Gerrig y Zumbardo, durante los primeros meses de vida, los niños siguen los objetos con la mirada, pero cuando éstos desaparecen de su vista, reaccionan “como si los objetos también desaparecieran de su mente”. A los tres meses aproximadamente, los niños continúan mirando el lugar en donde desapareció el objeto, y de cinco a nueve meses más tarde, los niños inician la búsqueda de los objetos desaparecidos. “A los dos años, los niños ya tienen la certeza de que los objetos que están fuera de su vista continúan existiendo” (Gerrig & Zimbardo, 2005, pág. 325).

II- Estadío Preoperacional (de los 2 a los 7 años).

El pensamiento del niño está marcado por el egocentrismo y la centración. El niño tiene mejores habilidades para utilizar el pensamiento simbólico. Gerrig y Zimbardo, interpretando a Piaget respecto a esta etapa describen:

> El gran avance cognoscitivo en esta etapa del desarrollo es la capacidad de representar en la mente objetos que no están físicamente presentes. Con excepción de este desarrollo, Piaget caracteriza a la etapa preoperacional de acuerdo con lo que el niño no puede hacer. Por ejemplo, él creía que el pensamiento preoperacional de los niños pequeños estaba marcado por el egocentrismo, la incapacidad de asumir la perspectiva de otra persona. Tal vez usted haya notado el egocentrismo al escuchar la conversación de un niño de dos años con otros niños. A esta edad, parece que están hablando consigo mismos y no interactuando. Los niños en esta etapa también experimentan la centración, que es la tendencia por dirigir su atención a las características perceptuales más relevantes de los objetos. La centración también se ilustra mediante la demostración clásica de Piaget de la incapacidad del niño de comprender que la cantidad de líquido no cambia en función del tamaño y forma de su contenedor (2005, pág. 326).

III- Estadío de Las Operaciones Concretas (de los 7 a los 11 años).

Según Collis, “los procesos de pensamiento en los niveles operatorios concretos forman un sistema limitado pero integrado que está ligado a las experiencias empíricas del niño” (1982, pág. 44). El niño en esta etapa es capaz de aislar y de pensar cierto número de dimensiones de una situación o problema, pero no puede prever situaciones o resultados que sean divergentes de su experiencia. El término “concreto” se emplea en este caso, para referirse a la idea de que las estructuras del pensamiento del niño dependen de sus experiencias anteriores, por tanto, su pensamiento está ligado a la realidad concreta.

Según Gerrig y Zimbardo, en este estadío los niños ya adquirieron lo que Piaget llamó conservación: “saben que las propiedades físicas de los objetos no cambian si no se les añade o quita algo, aun cuando la apariencia del objeto varíe” (2005, pág. 326). Pero la conservación es afrontada gracias a la adquisición de la reversibilidad. “La reversibilidad es la comprensión del niño de que las acciones físicas y las operaciones mentales pueden ser revertidas" (Gerrig & Zimbardo, 2005, pág. 326). De acuerdo con Collis (1982), en este período el niño desarrolla estructuras de pensamiento, que le permiten clasificar materiales, desglosar grupos en subgrupos, colocar en orden una serie, emparejar elementos correspondientes y sustituir elementos equivalentes "Las capacidades para ejecutar estas operaciones completan un sistema lógico y capacitan al niño para formar conceptos que se relacionan directamente con su experiencia, pero no le capacitan para manipular relaciones entre abstracciones" (Collis, 1982, pág. 44).

IV- Estadío de Las Operaciones Formales (de los 11 a los 12 años y en delante).

En este estadío el niño desarrolla la capacidad del razonamiento abstracto y del pensamiento hipotético. Según Collis, "El pensamiento formal manifiesta la capacidad de establecer y comprobar hipótesis y de abstraer principios comunes a partir de datos o experiencias concretas" (1982, pág. 45). El individuo que opera a nivel formal puede centrar su atención a la forma de una situación e ignorar el contenido particular, lo que le permite ir más allá de lo concreto y anticipar las posibles formas que pueda tomar la realidad. Collis también señaló lo que a su parecer es "el punto más importante en el estadio de las operaciones formales":

> El punto importante es que el planteamiento operacional formal concibe la realidad no sólo en términos de lo que es, sino también en términos de lo que podría ser. En el pensamiento formal, las dimensiones del problema se abstraen y combinan lógicamente, llegando así a su resultado que podría no haber sido de hecho observado o no ser relacionable con la experiencia pero que es lógicamente posible. De este modo, el pensamiento formal es más flexible, se encuentra libre de las restricciones de la realidad inmediata y puede, por tanto, oscilar hacia atrás y hacia adelante según consideramos puramente lógicas (Collis, 1982, pág. 46).

2.2.3 El Aprendizaje de la Matemática y los Estadíos de Desarrollo Cognitivo.

Kevin Francis Collis (1982), aborda la teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget y lo transcribe al contexto del aprendizaje de las matemáticas escolares. Los trabajos de Collis se ocuparon principalmente de tratar los niveles de pensamiento concreto y formal del estudiante, dado que, según él, estos ocupan un lugar importante para la programación educativa y el trabajo psicopedagógico. Según Collis es importante considerar el desarrollo cognitivo de los estudiantes para poder fortalecer la comprensión de la matemática que estos posean, dado que, en gran medida esta estará limitada por el nivel cognitivo alcanzado por los mismos. Según Collis:

> Si deseamos elaborar una estructura de comprensión de las matemáticas es preciso trabajar en este marco. Pero el problema por supuesto, es que los distintos niveles del funcionamiento cognitivo ponen límites a la sofisticación que pueda esperarse en distintos estadíos del desarrollo. (Collis, 1982, pág. 42)

Caracterización de los Estadíos de Desarrollo Cognitivo y el Aprendizaje de las Matemáticas.

Las investigaciones de Collis (Collis y Biggs, 1977 citado en Collis, 1982) se enfocaron en identificar las características del funcionamiento cognitivo del niño subdividiendo los estadíos de operaciones concretas y formales. Según Collis, dichas características fueron obtenidas de la cuidadosa observación de las repuestas infantiles a tareas asignadas (problemas relacionados a un concepto matemático específico). Estas investigaciones permitieron describir características relativamente estables de las respuestas que puede proporcionar un individuo según el estadío de desarrollo en el que se encuentre.

Collis excluyó en su labor de relacionar, el desarrollo cognitivo del niño con conceptos matemáticos, lo que correspondía al estadío sensoriomotriz (por obvias razones), y el preoperatorio. Collis considera la matemática escolar "como un sistema o estructura lógica de relaciones cuya base formada por un conjunto definido de elementos y un método claramente definido para operar en ellos" (1982, pág. 40). Según explica Collis "puede verse que, para los niños en el estadío de desarrollo preoperatorio, las matemáticas, tal como las definimos en la primera parte de este artículo, no constituyen un estudio que pueden abordar con posibilidades reales de éxito" (pág. 51). A continuación, se presentan la caracterización de las respuestas según los estadíos de desarrollo cognitivo.

a) Estadío De Desarrollo Temprano De Las Operaciones Concretas.

Las respuestas en este estadío son típicamente uniestructurales, es decir, se centran en determinado aspecto de los datos reales y seleccionan un aspecto que consideren relevante y responde sobre esta base. Según Collis "En matemáticas este fenómeno se manifiesta en la capacidad para trabajar significativamente con operaciones simples sobre elementos concretos" (1982, pág. 51). Por ejemplo, en aritmética puede representarse por utilizar una de las cuatro operaciones con cantidades pequeñas, y poder relacionar esa operación a alguna aplicación física o del entorno. En este estadío el niño siempre tendrá la necesidad de que exista una "respuesta final" o de "cerrar" la operación. Por ejemplo, ellos no son capaces de identificar la equivalencia entre 4+6 y 7+3, a menos que realicen las sumas por separado, incluso identificando que las respuestas son iguales no garantiza que estos concluyan que 4+6 = 7+3.

b) Estadío De Desarrollo Medio De Las Operaciones Concretas.

En este estadío las respuestas son típicamente multiestructurales, el niño aun presenta la necesidad de que exista una "respuesta final" o clausura de la operación. Ahora el niño es capaz de considerar más de un aspecto o piezas de la información relevante para tomar como base para responder, por tanto, puede enfrentarse a proposiciones equivalentes con cantidades pequeñas. Por ejemplo, estos niños pueden decidir en esta etapa que 4+6 = 7+3 sin recurrir a la clausura. Por otro lado, si las cantidades son grandes tales que se dificulte la visualización física, el niño regresa a la clausura, es decir, cierra cada parte por separado y luego compara. La capacidad de considerar más de un aspecto para dar solución o formular su respuesta, le despierta el presentimiento que sus análisis deben tener consistencia o lógica de acuerdo con los datos que le proporcionan.

c) Estadío último de operaciones concretas. (Formal temprano o de generalización concreta).

Las respuestas que se dan en este nivel demuestran que el sujeto ha tenido en consideración todos los aspectos de los datos y las interrelaciones existentes entre ellos. El individuo puede manejar ciertas operaciones masivamente, incluso con cantidades grandes siempre que sean clausurables y, de hecho, continúa exigiendo que se llegue a esta. La necesidad de clausurar o de llegar a una decisión, genera una tendencia a generalizar sobre los escasos ejemplos específicos proporcionados en los datos. También son capaces de manejar conceptos abstractos, según Collis:

> Los niños cuyas respuestas en matemáticas se sitúan en este nivel, pueden manejar lo que puede presentarse como conceptos abstractos, esto es, elementos como variables que no tienen contacto directo con su realidad física pero que, una vez investigados, resultan ser números generalizados (Collis, 1982, pág. 53).

La capacidad de enfocarse en las interrelaciones de las proposiciones que se encuentran en los datos permite al niño buscar consistencia en el sistema que se está enfocando. Normalmente el niño busca consistencia en los sistemas simples que se basan en un aspecto concreto. Esta consistencia le puede servir para operaciones matemáticas múltiples en diversas combinaciones, considerando que debe llegar siempre a una clausura. Aun a este nivel los niños tienen problemas para manejar conceptos matemáticos que implican nociones abstractas de razón y proporción, pero son capaces de aplicar fórmulas dadas para obtener soluciones concretas.

d) Estadío de Operaciones Formales.

Este nivel se caracteriza porque sus respuestas, además de tener en cuenta todas las interconexiones en los datos facilitados, también buscan en estas relaciones, proposiciones y estrategias implícitas que sean deducibles lógicamente de los datos proporcionados. En este estadío los alumnos formulan y comprueban hipótesis considerando múltiples posibilidades mientras evalúan sus implicaciones. No toman decisiones o clausuran de manera inmediata basándose en la realidad que conocen, sino que evalúan las posibilidades en torno a un sistema lógico producto de sus propias proposiciones deducidas de los datos.

El alumno también es capaz de trabajar con un sistema matemático abstracto, construido por definiciones, relaciones, variables, operaciones y reglas. La clausura la abordarán hasta el final de la comprobación de todas las posibilidades. Pueden operar con problemas que implican cálculo elemental o cálculo de lugar geométrico. Son capaces de identificar las relaciones de las operaciones con sus respectivas operaciones inversas y trabajar con estas. Exigen consistencia en los sistemas lógico-matemáticos establecidos para resolver problemas y pueden identificar las inconsistencias. En conclusión, en este estadío los estudiantes están listos para todas las rigurosidades y formalidades matemáticas. Según Collis, “En suma, es razonable sugerir que los alumnos que se encuentran en este estadío de desarrollo están listos para trabajar con el sistema formal abstracto de estructura que, para el matemático, constituye la esencia de las matemáticas” (1982, pág. 54).

En las investigaciones de Collis (1975a y 1975b citado en Collis, 1882) se eligieron ciertos conceptos matemáticos, y diseñaron ítems que se adapten específicamente a los diferentes estadíos del desarrollo cognitivo de la teoría de Piaget, es decir, que sean manejables para los alumnos según el estadío de desarrollo en el que se encuentren. Según Collis (1982), los conceptos matemáticos seleccionados están relacionados con la matemática escolar elemental. Este tipo de investigaciones permiten hacer deducciones sobre los estadíos de desarrollo cognitivo que pueden aportar información importante para el diseño curricular escolar de matemáticas y los métodos de enseñanza de la asignatura. Los conceptos seleccionados por Collis para tal tarea fueron: Números y operaciones, Combinaciones y operaciones, Sustitución Pronumeral, Operación Inversa, Conclusión y Sistemas Matemáticos.

2.2.4 Niveles de Comprensión del Álgebra.

Dietmar Erich Küchemann se apoyó en las investigaciones e informes de Kevin Francis Collis (1972, 1974, 1975a y 1975b, citado en Collis, 1982), y en los resultados del proyecto CSMS, para proponer su teoría de niveles de comprensión del álgebra. Los trabajos de Collis abordan la teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget y lo transcribe al contexto del aprendizaje de las matemáticas escolares y, además, en estos se documentan las diferentes maneras que los estudiantes interpretan las letras empleadas como símbolos matemáticos. Collis también diseñó una lista de ítems que se adaptan (en teoría), a los diferentes estadíos del desarrollo cognitivo de la teoría de Piaget, es decir, que son manejables para los alumnos según el estadío de desarrollo en el que se encuentren.

Según Küchemann (1978), el proyecto “Conceptos en Ciencias y Matemáticas en Secundaria” o CSMS (del que él formaba parte como investigador) se realizó con estudiantes ingleses en Chelsea en 1976. Las pruebas se realizaron con 3,000 estudiantes de segundo, tercero y cuarto secundario y cuyas edades promedio eran 13.3, 14.3 y 15.3, respectivamente. El instrumento de recolección de datos fue diseñado para examinar las diferentes formas en que los estudiantes interpretan las letras en aritmética generalizada (álgebra). Dicho instrumento (un test), se construyó considerando las etapas y sub etapas de los estadios de desarrollo concreto y formal de la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget.

2.2.5 Formas de Interpretar la Letra en Álgebra.

Gracias al proyecto CSMS y sus resultados, Küchemann constató seis formas que tienen los estudiantes de secundaria (sistema Ingles de educación), de interpretar y usar la letra en álgebra. Según Küchemann (1978), el propósito de la investigación del proyecto CSMS, era tener una mejor idea de la forma en que los estudiantes aprenden con ciertos aspectos matemáticos y mejorar la concordancia entre la comprensión de los niños y las demandas matemáticas que se imponen en la escuela. Además, las pruebas podrían proporcionar algún tipo de marco dentro del cual los profesores pueden interpretar los esfuerzos de sus alumnos. Esta noción se convirtió en el punto focal de la investigación del álgebra escolar, llevando eventualmente a Küchemann a la formación de seis categorías para describir la interpretación y uso que hacen los estudiantes de la letra en álgebra. Küchemann (1980), identifica seis tipos de interpretación (y usos) de las letras en las matemáticas escolares de nivel secundario, estos son:

I- *Letra evaluada*:

Esta categoría aplica a las respuestas en las que se asigna a la letra un valor numérico, como cuando los niños deciden que el área del rectángulo de las dimensiones 5 por $e + 5$ es 35 por usar un código alfabético (según las vocales). Esta categoría también se puede utilizar para describir los ítems, en aquellos casos en que se solicita un valor numérico, pero donde no es necesario manipular la letra primero. Como por ejemplo calcular a sí: $a + 5 = 8$.

II- *Letra no usada*:

Aquí los estudiantes ignoran la letra, o en el mejor de los casos reconocer su existencia sin darle un significado, como cuando a los niños se les pide "sumar 4 a 3n", y escriben 7n o sólo 7, en lugar de 3n +4. Ciertos ítems pueden ser resueltos exitosamente en este camino, por ejemplo “sumar 4 a n+5”, donde todo lo que se requiere es que 4 se sume a 5, siempre y cuando la “n” no se pierda en la respuesta.

III- *Letra como objeto*:

Aquí la letra se considera como una abreviatura para un objeto, o como un objeto en su propio símbolo, como cuando se piensa en "2m + 5m" como "2 manzanas y 5 manzanas", o simplemente como “2m y 5m, lo que hace 7m en conjunto o total”. Algunas expresiones pueden ser simplificadas con éxito de esta manera, pero en otras ocasiones este uso de las letras es inapropiado, por ejemplo, cuando la letra está destinada a representar el número de objetos (como el número de manzanas), y no el objeto mismo.

IV- *Letra como incógnita especifica*.

Aquí los niños consideran la letra como un único pero desconocido número, y puede operar sobre él directamente.

V- *Letra como número generalizado*.

La letra se ve como la representación, o al menos con la capacidad, de tomar varios valores, como se requiere en $c + d = 10$, $c < d$ etc.

VI- *Letra como variable*.

La letra es vista como la representación de un rango de valores no especificados, y existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores. Un ejemplo mínimo de esto en un ítem es cuando se tiene $a = b + 3$, ¿Qué pasa con a cuando b se incrementa en 2?, cuando la relación entre a y b se interpreta como “a siempre es 3 unidades más grande que b”, en lugar de “esta particular a es 3 unidades más grande que esta particular b”, que no dice nada sobre la relación cuando b cambia.

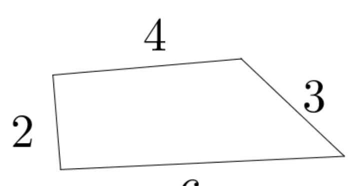
Para Küchemann los primeros tres tipos de usos de la letra (*evaluada, no usada y como objeto*) es el nivel más elemental del manejo de esta en álgebra. En cambio, cuando los estudiantes interpretan y usan *la letra como incógnita específica, número generalizado o como variable*, significa que tienen un entendimiento alto sobre el concepto de la letra en contextos algebraicos. Küchemann (1980).

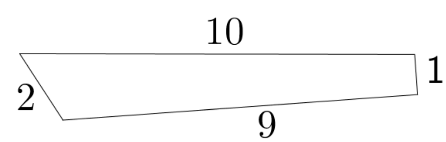
2.2.6 Caracterización de los Niveles de Comprensión En Álgebra.

Además de identificar los tipos de usos de las letras en las matemáticas escolares, Küchemann (1980), relacionó los ítems de las pruebas y las dividió en cuatro grupos según dos criterios. El primer criterio que tomo Küchemann para formar los grupos de ítems fue la interpretación suficiente de las letras para responder correctamente los ítems, y el segundo criterio fue la dimensión relacionada con la complejidad de la estructura implicada en la tarea. Partiendo de estas consideraciones, Küchemann formula lo que llamó “niveles de comprensión en álgebra”, los cuales se dividieron en cuatro grupos y son asociales a los estadios y sub estadios de operaciones concretas y formales correspondientes a la teoría cognitiva de Piaget. A continuación, se presentan la descripción de los niveles de comprensión del álgebra y las tareas que corresponden a cada nivel según Küchemann (1980).

Nivel 1: En este nivel las tareas son puramente numéricas o que tienen una estructura algebraica simple. Para poder resolver las tareas de este nivel los estudiantes tienen que ser capaces de interpretar y usar las letras evaluándola, utilizándola como objeto o en algunos casos sin usarlas en absoluto. Cuando un ítem demanda el uso de *la letra como incógnita específica*, los estudiantes tienden a evaluarlas o ignorarla para resolver dichas situaciones. Este nivel sería equivalente al estadío temprano de las operaciones concretas de Piaget. A continuación, se presenta las tareas matemáticas algebraicas que según Küchemann (1980), corresponden a este nivel.

Ítem 1.

<table>
<tr>
<td>


El perímetro de esta figura es igual 6 +3+ 4 +2, que equivale a 15.
</td>
<td>


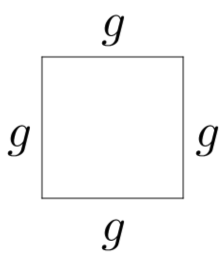
Calcular el perímetro de esta figura.
P=_________
</td>
</tr>
</table>

Ítem 2.

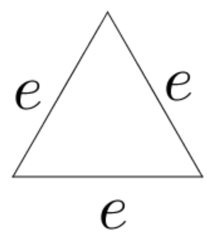
Si $a + b = 43$

$a + b + 2 = \ldots$

Ítem 3.



Este cuadrado tiene lados de longitud g, su perímetro, se puede escribir $P = 4g$



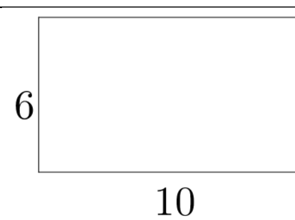
¿Cómo se puede escribir el perímetro de esta figura?

$P = \cdots$

Ítem 4.

¿Qué puede decir acerca de a, si sabe que $a + 5 = 8$?

Ítem 5.



¿Cuál es el área de esta figura?

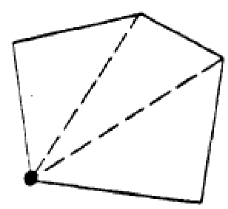
Ítem 6.

$a + 3a$ se pueden escribir simplemente como $4a$	Simplifique la siguiente expresión, siempre que sea posible $2a + 5a =$

Nivel 2: La diferencia con el nivel 1, es la estructura más compleja de los ítems, presentan mayor familiaridad con la notación algebraica permitiendo resolver problemas más complejos. Los estudiantes deben hacer frente a expresiones literales ambiguas. En este nivel existe una mayor disposición para aceptar respuestas que aparecen incompletas o ambiguas. De igual manera necesitan interpretar y usar la letra evaluándola, utilizándola como objeto o en algunos casos sin usarlas en absoluto. Este nivel sería equivalente al estadío medio de las operaciones concretas de Piaget. Las tareas matemáticas algebraicas que según Küchemann (1980), corresponden a este nivel son:

Ítem 1.

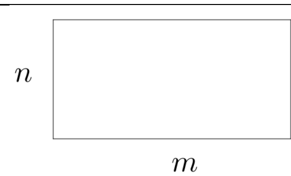
En una figura como esta



Se puede trabajar el número de diagonales que pertenecen a un mismo vértice, restando 3 al número de lados.
Así una figura con 5 lados tiene 2 diagonales.

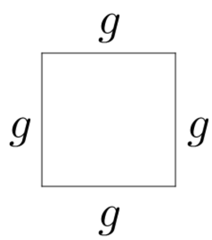
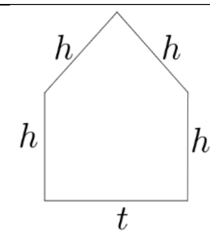
¿Cuántas diagonales tiene una figura con 57 lados?

Ítem 2.

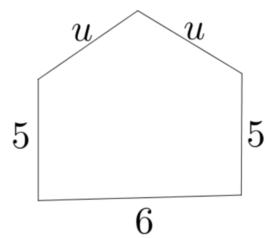


¿Cuál es el área de esta figura?

Ítem 3.

 Este cuadrado tiene lados de longitud g, su perímetro, se puede escribir $P = 4g$	 ¿Cómo se puede escribir el perímetro de esta figura? $P = \cdots$

Ítem 4.

 ¿Cómo se puede escribir el perímetro de esta figura? $P = \cdots$

Ítem 5.

¿Qué puede decir acerca de $\boldsymbol{m}$, si sabe que $\boldsymbol{m = 3n + 1}$, cuando $\boldsymbol{n = 4}$?

Ítem 6.

¿Qué puede decir acerca de $\boldsymbol{u}$, si sabe que $\boldsymbol{u = v + 3}$, cuando $\boldsymbol{v = 1}$?

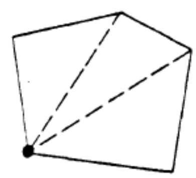
Ítem 7.

$a + 3a$ se pueden escribir simplemente como $4a$	Simplifique la siguiente expresión, siempre que sea posible $2a + 5b + a =$

Nivel 3: Para resolver estos ítems los estudiantes deben como mínimo, además de los requisitos de los niveles anteriores, interpretar y utilizar *la letra como incógnita específica*, en algunos casos *como número generalizado o como variable*. La estructura de estos ítems es simple y con cifras pequeñas. Los estudiantes deben ser capaces de distinguir que las letras no son abreviaturas de los objetos (las iniciales del nombre). El equivalente de este nivel al de la teoría de desarrollo de Piaget, es el estadío último de las operaciones concretas o temprano de las operaciones formales. Se presentan ahora las tareas matemáticas algebraicas que según Küchemann (1980), corresponden a este nivel.

Ítem 1.

En una figura como esta



Se puede trabajar el número de diagonales que pertenecen a un mismo vértice, restando 3 al número de lados.
Así una figura con 5 lados tiene 2 diagonales.

¿Cuántas diagonales posee una figura con "k" lados?

Ítem 2.

$a + 3a$ se pueden escribir simplemente como $4a$	Simplifique la siguiente expresión, siempre que sea posible $3a - b + a =$

Ítem 3.

$a + 3a$ se pueden escribir simplemente como $4a$	Simplifique la siguiente expresión, siempre que sea posible $2a + 5b =$

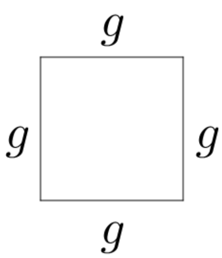
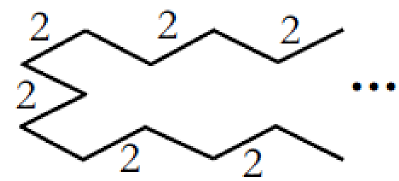
Ítem 4.

Si $e + f = 8$
$e + f + g$=

Ítem 5.

¿Qué puede decir acerca de $\boldsymbol{r}$, si sabe que $\boldsymbol{r = s + t}$ y que $\boldsymbol{r + s + t = 30}$?

Ítem 6.

 Este cuadrado tiene lados de longitud g, su perímetro, se puede escribir $P = 4g$	 Aunque la figura no está totalmente dibujada, se sabe que es un polígono, con n lados y que todos son de longitud 2 ¿Cómo se puede escribir el perímetro de esta figura? $P = \cdots$

Ítem 7.

4 sumado a n puede ser escrito n+4 ¿Cómo puede escribirse 4 sumado a $n + 5$?

Ítem 8.

Qué puedes decir sobre "c", si $c + d = 10$ y "c" es menor que d

Nivel 4: La diferencia en este nivel con el nivel 3, radica en el aumento de la complejidad de la estructura implicada para la resolución de los ítems, donde el estudiante deberá interpretar y utilizar *la letra como incógnita específica, número generalizado o como variable*. Los estudiantes deben razonar que las expresiones implicadas pueden representar diferentes valores y expresar sus respuestas de manera generalizada. La equivalencia de este nivel al de la teoría de desarrollo de Piaget, es el estadío de las operaciones formales. Las tareas matemáticas algebraicas que según Küchemann (1980), corresponden a este nivel son:

Ítem 1.

¿Cuándo es verdadera la siguiente expresión – siempre, nunca o a veces?
Subrayar la respuesta correcta

$L + M + N = L + P + N$ Siempre. Nunca A veces, Cuando ______________

Ítem 2.

$a + 3a$ se pueden escribir simplemente como $4a$	Simplifique la siguiente expresión, siempre que sea posible $(a - b) + b =$

Ítem 3.

Un pastel cuesta "c" peniques y un bollo cuesta "b" peniques.
Si compro 4 pasteles y 3 bollos.

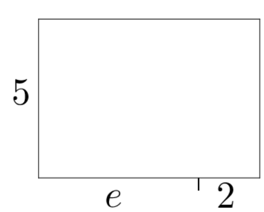
¿Que representa $4c + 3b$?

Ítem 4.

"n" multiplicado por 4 puede ser escrito como $4n$

¿Cómo puede escribirse 4 multiplicado por $n + 5$?

Ítem 5.



¿Cuál es el área de esta figura?

Ítem 6.

Si $(x+1)^3$+ x =349 es verdadera cuando x=6. ¿Qué valores de x hacen verdadera la expresión $(5x+1)^3\ +5x=349$?

Ítem 7.

Los lápices azules cuestan 5 peniques cada uno y los lápices rojos cuestan 6 peniques cada uno. Compré algunos lápices azules y algunos rojos y en conjunto me cuesta 90 peniques Si "b" es el número de lápices azules comprados, y si "r" es el número de lápices rojos comprados, ¿Qué puede escribir sobre b y r?

Ítem 8.

¿Qué es mayor $2n$ o $n+2$? Explique

Ítem 9.

El salario básico de Mary es £20 por semana. También se le pagan otros £2 por cada hora extra que trabaja. Si "h" representa el número de horas extraordinarias que trabaja, y si "w" representa su totalidad en £s. Escriba una ecuación que conecta w y h

2.2.7 Diferencias y Clasificación en los Niveles de Comprensión del Álgebra.

Según Küchemann (1980), la diferencia entre el nivel 1 y el nivel 2, y entre nivel 3 y nivel 4 es esencialmente un asunto de complejidad, y la clasificación de los estudiantes en dichos niveles asunto de solucionar correctamente cierto número de ítems. Tanto el nivel 1 y 2 se requiere de interpretar y usar la letra evaluándola, utilizándola como objeto o no usándola, pero el nivel 2 presentará ítems de estructura más compleja que el nivel 1. De manera similar ocurre con el nivel 3 y 4, donde en ambos casos se requiere la interpretación y uso de la letra como *incógnita específica, número generalizado o como variable*, pero los ítems del nivel 4 poseerán una estructura más compleja para su correcta resolución.

Para Küchemann (1980), que un estudiante se clasifique en un nivel de comprensión, dependerá si respondió correctamente dos tercios de los ítems correspondientes a dicho nivel, de hecho, el criterio es resolver correctamente 4 de 6, 5 de 7, 6 de 8 y 6 de 9 ítems correctos para los niveles del 1 al 4 respectivamente. Un estudiante se clasificará en el nivel más alto posible, si clasifico en todos los niveles inferiores correspondientes. En caso de que un estudiante no clasifique en alguno de los cuatro niveles de comprensión, Küchemann plantea un quinto nivel denominado "Nivel 0", pero no significa que el estudiante no posea conocimiento sobre la interpretación y uso de la letra, sino más bien, que según esta jerarquización no es posible clasificarlo en uno de estos niveles de comprensión del álgebra.

2.2.8 Índices de Facilidad.

Küchemann (1980), pormenorizó parte de los resultados de la investigación del proyecto CSMS, utilizando un índice de facilidad aplicado a cada ítem. El índice de facilidad se define como la frecuencia relativa con la que un estudiante responde correctamente un ítem. El análisis pormenorizado en índices de facilidad puede servir para identificar cuáles son los ítems en los que los estudiantes presentan mayor dificultad. Aunque el índice de facilidad es una herramienta sencilla, resulta altamente útil para identificar las formas de interpretar y usar la letra en las que los estudiantes presentan mayores dificultades, y a las cuales hay que aplicarles refuerzos.

2.3 El Álgebra en el Sistema Educativo de El Salvador desde la última Reforma Educativa.

2.3.1 El Álgebra En La Enseñanza De La Matemática Desde La Reforma Educativa De 1995.

Desde la reforma educativa de 1995, el sistema educativo salvadoreño tiene una organización curricular por niveles educativos, grados y áreas (Ministerios de Educación de El Salvador, 1994). La organización curricular del sistema educativo salvadoreño a cargo del Ministerio de Educación (MINED), se divide en los niveles de educación inicial, educación parvularia, educación básica y educación media, siendo el nivel de educación básica el de mayor extensión temporal. La educación básica se organiza en tres ciclos de complejidad creciente y comprende nueve años de estudio, dichos ciclos son nombrados: primer ciclo, segundo ciclo y tercer ciclo (Ministerios de Educación de El Salvador, 1994). El tercer ciclo representa el último ciclo de la educación básica y comprende los últimos tres años de estudio de dicho nivel, distribuidos en los cursos escolares anuales o grados, de séptimo, octavo y noveno. En tercer ciclo se imparten diferentes áreas curriculares o asignaturas, estas son: Lenguaje, Ciencia salud y medio ambiente, Estudios sociales, Educación artística, Educación física, Inglés y Matemática.

Según el plan curricular original de la reforma educativa de 1995, la asignatura de Matemática, a nivel de tercer ciclo, estaba organizada por unidades de aprendizaje que pertenecía a uno de cuatro bloques de contenidos de aprendizaje, estos bloques eran: Estadística, Números y Operaciones, Geometría y Medidas. En cuanto al álgebra los contenidos estaban inmersos en las unidades del bloque de Números y Operaciones, y según el MINED, dicho bloque "está orientado, en un primer momento, a iniciar el conocimiento sobre el significado y uso del lenguaje algebraico. En un segundo momento, se desarrollan habilidades relacionadas con la transformación de expresiones algebraicas sencillas y ecuaciones de primer grado" (Ministerio de Educación de El Salvador, 2002, pág. 37).

Junto con la organización del sistema educativo que trajo la reforma de 1995, El MINED diseñó los Dominios Curriculares Básicos (DCB). Los dominios curriculares básicos se definen como "el conjunto de aprendizajes significativos, constituidos por los conocimientos, habilidades y actitudes que promueven el desarrollo personal y social de los educandos, en un determinado ciclo y/o nivel de escolaridad" (Ministerio de Educación de El Salvador, 2002, pág. 10). La función de los DCB era orientar el perfil del educando que se pretende alcanzar al finalizar cada ciclo o nivel de escolaridad. Según el MINED, el objetivo de guiar el proceso de enseñanza aprendizaje mediante dominios curriculares básicos era "estandarizar los aprendizajes básicos de la población escolar salvadoreña". Según los DCB, los conocimientos que debía adquirir el educando al finalizar tercer ciclo de educación básica, para el área curricular de matemática en los contenidos de álgebra eran:

- Internalización del significado y uso del lenguaje algebraico para representar números, relaciones, enunciados verbales y fórmulas.
- Reconocimiento de expresiones algebraicas: monomios, binomios y trinomios.
- Adquisición de los procesos para factorizar y operar expresiones algebraicas.
- Internalización del significado de ecuación y los procesos para resolverla.

Según los DCB (Ministerio de Educación de El Salvador, 2002, pág. 50), las habilidades y destrezas que debía adquirir el educando al finalizar tercer ciclo de educación básica, para el área curricular de matemática en los contenidos de álgebra eran:

- Utilización de símbolos algebraicos en forma adecuada.
- Traducción del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico.
- Interpretación y utilización del lenguaje algebraicos en diferentes contextos.
- Facilidad al efectuar operaciones simples de suma, resta, multiplicación y división, con expresiones algebraicas.
- Agilidad al factorizar binomios y trinomios.
- Resolución de ecuaciones de primer grado hasta con dos incógnitas.
- Representación geométrica de resultados algebraicos.
- Toma de decisiones en la elección de estrategias para la resolución de problemas numéricos.

Se observa que los DCB para los contenidos de álgebra son generalistas y poco detallados, considerando que representan el perfil que debe adquirir el estudiante durante tres años de estudio en el área de álgebra. Según el MINED, los conocimientos, habilidades y actitudes que representaban los DCB deberían ser alcanzados por los educandos mediante el desarrollo del plan de estudio de matemáticas para tercer ciclo. A continuación, se presenta el plan de estudio de la asignatura de matemática para los grados que corresponden al nivel de tercer ciclo de educación básica, según la reforma educativa de 1995.

Tabla 1. *Plan de estudio de Matemáticas para tercer ciclo de educación básica, Reforma 1995.*

Unidad / Grado	**Séptimo grado.**	**Octavo grado**	**Noveno grado.**
Unidad 1.	Tratamiento de la información estadística.	Tratamiento de la información.	Tratamiento de la información.
Unidad 2.	Números naturales.	Conjuntos numéricos.	**Ecuaciones lineales.**
Unidad 3.	Números enteros.	Números reales.	**Potenciación y radicación.**
Unidad 4.	Números fraccionarios.	**Introducción al álgebra.**	**Ecuaciones cuadráticas.**
Unidad 5.	Números decimales.	**Operaciones algebraicas.**	Introducción a la geometría.
Unidad 6.	Proporcionalidad.	**Factorización.**	Rectas y segmentos de recta.
Unidad 7.	Potenciación.	**Fracciones.**	Triángulos, cuadriláteros y circunferencia.
Unidad 8.	Radicación.	**Ecuaciones.**	Perímetro y área de figuras planas.
Unidad 9.	Geometría.	Cuerpos geométricos.	Áreas y volúmenes de sólidos.

Fuente: MINED (1996).
En negrito unidades de estudio de álgebra.

Se observa en el Plan de Estudio de Matemática para tercer ciclo (Tabla 1), que el estudio del álgebra se inicia a nivel de octavo grado, en grupos de unidades de estudio de álgebra que se desarrollan ininterrumpidamente. El estudio del álgebra se inicia en la unidad cuatro de octavo grado, y la secuencia de unidades de álgebra sigue continua hasta la unidad 8. En noveno grado se retoma el estudio del álgebra en la unidad dos, y sigue continuamente hasta la unidad 4. Considerando la teoría de jerarquía de aprendizaje de Robert Gagné (Resnick & Ford, 1991), la secuencia en las unidades con contenidos de álgebra, sugieren una correcta jerarquía y recurrencia, donde cada unidad contiene los fundamentos algebraicos necesarios para que el estudiante aborde con éxito los contenidos de la siguiente unidad.

2.3.2 El Álgebra En La Enseñanza De La Matemática Desde El Plan Nacional de Educación 2021.

Al finalizar el “Plan Decenal de Educación” que conllevaba la reforma educativa de 1995, se han ejecutado hasta la fecha, un conjunto de planes nacionales de educación que implicaron cambios en las políticas y la organización educativa nacional. Así se desarrolló en el año 2008 el plan nacional de educación 2021 “El país que todos queremos”, en 2009 el plan social educativo “Vamos a la escuela”, en 2014 el plan nacional de educación “En función de la Nación”. Al año 2017 en el sistema educativo salvadoreño, funcionaban paralelamente aspectos de estos últimos tres planes educativos nacionales, persistiendo los planes de estudio propuestos originalmente en el plan 2021.

Los planes de estudio del plan nacional de educación 2021, determinan enfoques de aprendizaje según cada asignatura y nivel educativo, y orienta el currículo educativo nacional al aprendizaje desarrollando competencias en los estudiantes (Ministerio de Educación de El Salvador, 2008a). Para el tercer ciclo de educación básica, el enfoque que orienta el desarrollo de la asignatura de matemática es el de *resolución de problemas*, asegurando el aprendizaje mediante el desarrollo de las competencias; Razonamiento lógico matemático, Comunicación con lenguaje matemático y Aplicación de la matemática al entorno (Ministerio de Educación de El Salvador, 2008a).

El programa de estudio de tercer ciclo de educación básica se organiza en componentes curriculares y presenta los indicadores de logro. Los componentes curriculares del programa de estudio son: los objetivos de aprendizaje por unidad, los contenidos de aprendizaje y la evaluación de los aprendizajes. Los contenidos de aprendizaje se dividen en contenidos conceptuales (hechos, conceptos, sistemas conceptuales), procedimentales (habilidades, técnicas, métodos, estrategias) y actitudinales (actitudes, normas y valores) (Ministerio de Educación de El Salvador, 2008b). Los nuevos programas de estudio abandonan los dominios curriculares básicos para incorporar los indicadores de logro, dichos indicadores precisan el desempeño que deben alcanzar los estudiantes a nivel de grado, asignatura, unidad y contenidos. Según el MINED:

> Los indicadores de logro son evidencias del desempeño esperado en relación con los objetivos y contenidos de cada unidad. Su uso para la evaluación de los aprendizajes

es muy importante debido a que señalan los desempeños que debe evidenciar el alumnado y que deben considerarse en las actividades de evaluación y de refuerzo académico (Ministerio de Educación de El Salvador, 2008b).

El MINED también diferenció de entre los indicadores de logro, los indicadores de logro priorizados, y reconoció al álgebra como bloque de contenido individual. Los indicadores de logro priorizados se refieren a los principales o más relevantes logros que se pretenden alcanzar en los y las estudiantes, y que son claves para la evaluación formativa y/o sumativa (Ministerio de Educación de El Salvador, 2008b). También, con el plan nacional de educación 2021, se reordenó el plan de estudio de la asignatura de matemáticas para tercer ciclo y se clasificaron las unidades de aprendizaje en cuatro bloques de contenidos, a saber, Números y operaciones, Medidas y geometría, Estadística y Álgebra (Ministerio de Educación de El Salvador, 2008b). Obsérvese como el álgebra toma protagonismo, y se presenta como un bloque individual y no como un conjunto de contenidos presentes en el bloque de números y operaciones como lo era anteriormente.

Los indicadores de logro se pueden relacionar a las diferentes formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra propuestas por Küchemann, considerando los contenidos de aprendizaje que conlleva el indicador y la estructura del mismo. A continuación, se presentan algunos ejemplos:

Tabla 2. *Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de la letra Evaluada.*

Ind.	Tipo de Uso: *Letra Evaluada.*	Grado
6.4	Establece y explica con interés, el “valor numérico” que puede tomar la parte literal.	Séptimo
6.16	Interpreta y explica con interés el valor numérico de un monomio	Séptimo
6.17	Utiliza el valor numérico en el desarrollo de ejercicios.	Séptimo
6.18	Resuelve con precisión y orden problemas de valor numérico.	Séptimo
2.2	Determina el valor numérico de un polinomio con precisión.	Octavo
2.3	Resuelve problemas aplicando el valor numérico con confianza.	Octavo
6.13	Determina con autonomía y confianza el valor numérico de fracciones algebraicas.	Octavo

Fuente: Elaboración Propia, Indicadores de logro de MINED (2008).

Tabla 3. *Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de la letra No Usada.*

Ind.	**Tipo de Uso: *Letra No Usada.***	**Grado**
6.11	Simplifica con seguridad términos semejantes.	Séptimo
6.14	Resuelve con confianza ejercicios de reducción de términos semejantes.	Séptimo
6.15	Resuelve problemas utilizando la reducción de términos semejantes.	Séptimo
8.3	Resuelve con satisfacción operaciones combinadas de sumas y diferencias de monomios.	Séptimo
8.14	Resuelve con seguridad problemas algebraicos utilizando operaciones combinadas entre monomios.	Séptimo
2.6	Resuelve problemas con confianza aplicando las sumas y restas de polinomios.	Octavo
9.5	Identifica y reduce con seguridad radicales semejantes.	Noveno

Fuente: Elaboración Propia, Indicadores de logro de MINED (2008).

Tabla 4. *Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de la letra Como Objeto*.

Ind.	**Tipo de Uso: *Letra Como Objeto.***	**Grado**
6.2	Interpreta, aplica y explica con interés el uso de la parte literal como parte de la nomenclatura algebraica.	Séptimo
6.6	Resuelve problemas utilizando nomenclatura algebraica.	Séptimo
9.3	Explica la relación y uso del lenguaje común con el lenguaje algebraico valorando su importancia, en la construcción de ecuaciones de primer grado.	Octavo.
9.4	Construye y explica con interés ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.	Octavo.
9.7	Construye y explica con interés ecuaciones de primer grado con una incógnita con denominadores monomios.	Octavo.
9.9	Construye y explica con interés ecuaciones de primer grado con una incógnita con denominadores compuestos.	Octavo.

Fuente: Elaboración Propia, Indicadores de logro de MINED (2008).

Tabla 5. *Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de la letra Como Número Generalizado.*

Ind.	**Tipo de Uso: *Número Generalizado*.**	**Grado**
6.1	Determina y explica valorando la importancia de utilizar letras como elementos generalizadores.	Séptimo
6.3	Interpreta y utiliza letras para generalizar propiedades observadas o fórmulas matemáticas.	Séptimo
2.13	Demuestra geométricamente el cuadrado de la suma de dos términos, con seguridad y confianza	Noveno
2.16	Demuestra geométricamente el cuadrado de la diferencia de dos términos, con seguridad y confianza.	Noveno
2.19	Demuestra geométricamente el cubo de la suma de dos términos, con seguridad y confianza.	Noveno
2.22	Demuestra geométricamente el cubo de la suma de dos términos, con seguridad, interés y confianza.	Noveno
2.25	Demuestra geométricamente el producto de la suma de dos términos por su diferencia	Noveno
4.1	Interpreta explica y aplica con seguridad la factorización como la transformación de una suma en un producto indicado	Noveno
5.7	Deduce y explica con interés la formula general que desarrolla ecuaciones de segundo grado a partir de una ecuación cuadrática.	Noveno

Fuente: Elaboración Propia, Indicadores de logro de MINED (2008).

Tabla 6. *Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de la letra Como Incógnita Especifica.*

Ind.	**Tipo de Uso: *Letra Como Incógnita Específica*.**	**Grado**
9.6	Resuelve problemas utilizando ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita, en colaboración con sus compañeros.	Octavo
9.8	Soluciona con interés ecuaciones fraccionarias con denominadores monomios de primer grado con una incógnita.	Octavo.
1.7	Resuelve ejercicios y problemas utilizando las ecuaciones con radicales transformables en ecuaciones de primer grado.	Noveno
2.10	Resuelve con curiosidad sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas.	Noveno
5.3	Resuelve ecuaciones cuadráticas incompletas, puras y mixtas, trabajando con orden y limpieza.	Noveno
5.8	Calcula las soluciones para ecuaciones cuadráticas, aplicando la fórmula general con orden y seguridad.	Noveno
7.2	Interpreta, aplica y explica los métodos de solución para sistemas lineales de tres incógnitas.	Noveno

Fuente: Elaboración Propia, Indicadores de logro de MINED (2008).

Tabla 7. *Ejemplo de indicadores de logro relacionados a la interpretación y uso de la letra Como Variable.*

Ind.	Tipo de Uso: *Letra Como Variable.*	Grado
9.12	Grafica con precisión ecuaciones lineales.	Octavo
2.1	Identifica con seguridad los elementos de un sistema de coordenadas cartesianas.	Noveno
2.2	Identifica y coloca con seguridad las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.	Noveno
2.3	Utiliza y valora el uso de la fórmula de la pendiente de la recta conocido dos puntos por donde pasa.	Noveno
2.7	Utiliza la ecuación $y = mx + b$ para construir la gráfica de la línea recta y calcula correctamente el valor de la pendiente y el intercepto	Noveno
2.8	Resuelve con perseverancia problemas de la ecuación pendiente intercepto.	
2.12	Resuelve con seguridad y precisión el trazo de un sistema de ecuaciones usando el método gráfico	Noveno

Fuente: Elaboración Propia, Indicadores de logro de MINED (2008).

En esta ocasión los indicadores de logro, a diferencia de los dominios curriculares básicos, detallan más información acerca del perfil que deben adquirir los educandos, no sólo al finalizar tercer ciclo, sino, al finalizar el estudio de cada unidad de aprendizaje y cada contenido. Si los estudiantes pudiesen alcanzar, al menos, los indicadores de logros priorizados para las unidades de contenidos de álgebra, se puede conjeturar una aproximación idealizada sobre los conocimientos, habilidades y destrezas de las que disponen para abordar la solución de problemas que exigen abordaje algebraico. Según el MINED, los indicadores de logros deberían ser alcanzados por los educandos mediante el desarrollo del plan de estudio de matemáticas para tercer ciclo. A continuación, se presenta el plan de estudio de la asignatura de matemática para los grados que corresponden al nivel de tercer ciclo de educación básica, según el plan nacional de educación 2021.

Tabla 8. *Plan de estudio de Matemáticas para Tercer Ciclo de Educación Básica, 2008.*

Unidad / Grado	**Séptimo grado.**	**Octavo grado**	**Noveno grado.**
Unidad 1.	Apliquemos los números enteros.	Trabajemos con números reales.	**Utilicemos ecuaciones con radicales.**
Unidad 2.	Utilicemos unidades de superficie y agrarias.	**Operemos con polinomios.**	**Resolvamos sistemas de dos ecuaciones lineales.**
Unidad 3.	Operemos con números racionales.	Midamos y construyamos con triángulos.	Calculemos la dispersión
Unidad 4.	Calculemos áreas circulares y utilicemos medidas.	**Aprendamos a factorizar.**	Midamos ángulos.
Unidad 5.	Utilicemos proporcionalidad.	Trabajemos con áreas de figuras planas.	**Resolvamos ecuaciones de segundo grado.**
Unidad 6.	**Conozcamos y utilicemos el álgebra.**	**Operemos fracciones algebraicas.**	Apliquemos técnicas de conteo.
Unidad 7.	Utilicemos los Exponentes.	Calculemos el área y el volumen de cuerpos geométricos.	**Resolvamos sistemas de ecuaciones.**
Unidad 8.	**Operemos con monomios.**	Utilicemos la información.	**Utilicemos potencias algebraicas.**
Unidad 9.	Conozcamos y apliquemos los radicales.	**Trabajemos con ecuaciones**	**Utilicemos radicales.**

En negrito unidades correspondientes al bloque de álgebra.
Fuente: MINED (2008b).

El plan de estudio de la asignatura de matemática para tercer ciclo de educación básica, según el plan nacional de educación 2021 (tabla 8), presenta el estudio del álgebra desde grados más tempranos y una interpolación de unidades de aprendizaje de diferentes bloques. Obsérvese que en el nuevo plan de estudio, la enseñanza aprendizaje del álgebra se aborda desde séptimo grado y no en octavo grado como lo sugiere el plan anterior, novedosamente la introducción al estudio del álgebra se realiza en la unidad seis y ocho de séptimo. Una característica sobresaliente de este plan de estudio es el orden en el que aparecen las unidades de aprendizaje, principalmente en octavo y noveno grado, donde estas no se ordenan por bloques de contenidos ni atienden a una jerarquía o recurrencia de aprendizaje, sino más bien, es una interpolación de unidades de diferentes bloques de contenidos.

Gracias a los cambios que sufrió el plan de estudio de la asignatura de matemática para tercer ciclo de educación básica, en el marco del plan nacional de educación 2021, se hace posible realizar un estudio sobre los niveles de comprensión del álgebra, congruente a los planteamientos de Küchemann. El primer indicador es la alta concentración de contenidos algebraicos. Hay que señalar que el programa de estudio de matemáticas para tercer ciclo del plan 2021, posee una alta concentración de contenidos algebraicos, considerando que dicha asignatura está constituida por cuatro bloques de contenidos, y que sólo el bloque de álgebra para séptimo grado, representa el 22.5% del total de horas clase al año, 57.5% en octavo grado y el 72.5 % en noveno grado (Ministerio de Educación de El Salvador, 2008b).

En segunda instancia, los nuevos y detallados indicadores de logro, que sustituyeron los dominios curriculares básicos para los contenidos de álgebra, permiten ver la compatibilidad del desempeño esperado en los estudiantes de tercer ciclo, y las formas de interpretar y usar la letra en álgebra que Küchemann identificó. De ese modo podemos asociar cada una de las formas de interpretar y usar la letra con una variedad de indicadores de logro correspondientes a las unidades de aprendizaje de los bloques de álgebra, lo que permite apreciar la viabilidad de la investigación en el plan de estudio de matemática para tercer ciclo de educación básica vigente al año escolar 2017.

Por último, explorar los niveles de comprensión del álgebra alcanzados por los estudiantes, puede considerarse una estrategia de evaluación de contenidos conceptuales aprobada en el diseño curricular actual. Según el MINED para la evaluación de contenidos conceptuales “la comprensión de un concepto determinado no debe basarse en la repetición de definiciones. Se deben reconocer grados o niveles de profundización y comprensión, así como la capacidad para utilizar los conceptos aprendidos” (Ministerio de Educación de El Salvador, 2008b, pág. 17). De seguir vigente los planes de estudio de la reforma de 1995, la investigación de niveles de comprensión del álgebra en estudiantes de tercer ciclo sería más ajustada y escueta.

Capítulo III.

Marco Metodológico.

3.1 Tipo de Investigación.

La investigación es de tipo cualitativa y de alcance descriptivo (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014), y se fundamentó en los niveles de comprensión del álgebra propuestos por Küchemann (1980). La investigación de niveles de comprensión del álgebra y su respectivo test, centran su interés en la interpretación y el uso que los alumnos de tercer ciclo de educación básica hacen de la letra en la resolución de problemas que exigen un abordaje algebraico. A diferencia de otros modelos de investigación cualitativa que requieren contrastar datos recolectados de diferentes instrumentos, la interpretación y el uso que los estudiantes hacen de la letra en álgebra, se identifica y extrae directamente de las soluciones propuestas por los mismos para resolver problemas de tipo algebraico, que requieren una interpretación mínima de la letra para su correcta resolución. Por lo que no fue necesario hacer triangulación de datos obtenidos de otras fuentes.

3.2 Universo.

El universo de la investigación lo constituyeron todos los alumnos que cursan algún grado de tercer ciclo de educación básica en los centros escolares: INSA**,** Tomás Medina, José Mariano Méndez y Colonia San Luis del Municipio de Santa Ana en el año 2017. La edad de los estudiantes de tercer ciclo oscila entre 12 y 16 años aproximadamente. El universo de la investigación fue de 1522 estudiantes, y la distribución por secciones a nivel de tercer ciclo de educación básica era la siguiente:

Tabla 9. *Matrícula efectiva Centro Escolar INSA 2017*.

Matricula en Tercer ciclo	Séptimo Grado.	Octavo Grado.	Noveno Grado.
Sección “A”:	26	39	38
Sección “B”:	27	35	39
Sección “C”:	29	39	39
Sección “D”:	28	38	37
Sección “E”:	27	38	38
Sección “F”:	26	38	39
Sección “G”:	27	36	37
Sección “H”:	27	37	37
Sección “I”:	27	37	39
Sección “J”:	26	39	35
Total por grado:	**270**	**376**	**383**
Total en Tercer Ciclo:		**1024**	

Fuente: Secretaría Centro Escolar INSA.

Tabla 10. *Matrícula efectiva Centro Escolar Tomás Medina 2017.*

Matricula en Tercer ciclo	Séptimo Grado.	Octavo Grado.	Noveno Grado.
Sección "A":	28	33	34
Sección "B":	32	33	32
Sección "C":	40	20	26
Sección "D":	33	20	25
Total por grado:	**133**	**106**	**117**
Total en Tercer Ciclo:		**356**	

Fuente: Subdirección Centro Escolar Tomas Medina.

Tabla 11. *Matrícula efectiva Centro Escolar José Mariano Méndez 2017.*

Matricula en Tercer ciclo	Séptimo Grado.	Octavo Grado.	Noveno Grado.
Sección "A":	27	23	15
Sección "B":	16	8	15
Total por grado:	**43**	**31**	**30**
Total en Tercer Ciclo:		**104**	

Fuente: Dirección Centro Escolar José Mariano Méndez.

Tabla 12. *Matrícula efectiva Centro Escolar Colonia San Luis 2017.*

Matricula en Tercer ciclo	Séptimo Grado.	Octavo Grado.	Noveno Grado.
Sección "A":	11	20	7
Total por grado:	**11**	**20**	**7**
Total en Tercer Ciclo:		**38**	

Fuente: Dirección Centro Escolar Colonia San Luis.

3.3 Muestra.

Dado que la población de la investigación era muy grande para optar por una muestra cualitativa convencional, se acordó auxiliarse de una muestra probabilística. Con el fin de obtener una muestra representativa de la población y hacer generalizaciones significativas, se calculó la muestra por un método aleatorio de la siguiente manera:

- El universo de estudio es de 1522 estudiantes de tercer ciclo de educación básica, por tanto $N = 1522$.
- Sea p porcentaje de la población que tiene el atributo deseado.
- Sea q porcentaje de la población que no tiene el atributo deseado ($p + q = 100$).

- Como no se tienen marcos de muestreos previos en las características de esta población sobre su clasificación en niveles de comprensión del álgebra entonces: $p = 50\%\ y\ q = 50\%$.
- Utilizando un nivel de confianza del 95%, entonces $Z = 1.96$
- Error máximo aceptado del 5%, por tanto $e = 5\%$
- "n" será la muestra de la investigación.

Utilizando la fórmula de la muestra probabilística:

$$n = \frac{Z^2pqN}{e^2(N-1) + Z^2pq}$$

Sustituyendo:

$$n = \frac{(1.96)^2(0.5)(0.5)(1522)}{(0.05)^2(1521) + (1.96)^2(0.5)(0.5)}$$

$$n = 306.90$$

Por tanto, con nivel de confianza del 95% y un error máximo del 5%, la muestra para esta investigación será de 307 estudiantes.

3.4 Recolección y tratamiento de datos.

3.4.1 Naturaleza de los datos.

Los datos se obtuvieron a partir de la administración del test propuesto por Küchemann (1980), para determinar los niveles de comprensión del álgebra. El test presenta 30 tareas o problemas que exigen cierta interpretación mínima y uso de la letra en álgebra para poder resolverlos correctamente, y a su vez, se exigen resolver un número determinado de dichas tareas para clasificar en uno de los cuatro niveles de comprensión del álgebra. En resumen, los datos proporcionados por el instrumento de recolección de datos de esta investigación son los índices de facilidad por ítems y el nivel de comprensión del álgebra en el que clasifica el estudiante según la jerarquización de Küchemann.

3.4.2 Procedimientos e instrumentos.

3.4.2.1 Pilotaje de Instrumentos.

Con el fin de calibrar el instrumento de recolección de datos, se administraron quince test el 4 de julio, es decir una semana antes de iniciar la colecta general de datos, lo que constituyó el pilotaje de instrumentos. Los test de pilotaje fueron administrados a los estudiantes de tercer ciclo de educación básica del Centro Escolar General Francisco Menéndez, del municipio de Atiquizaya en el departamento de Ahuachapán, y se administraron cinco test por cada grado. Posteriormente se analizaron las respuestas obtenidas y se modificaron parte de dos ítems del test.

3.4.2.2 Instrumento de recolección de datos.

El instrumento de recolección de datos de esta investigación fue el propuesto por Küchemann (1980), en el marco del macroproyecto de investigación “Conceptos en Ciencias y Matemáticas en Secundaria” o CSMS. Dicho instrumento fue diseñado para examinar las diferentes formas en que los estudiantes interpretan las letras en aritmética generalizada (álgebra). El instrumento que se administró para la recolección de datos es el siguiente:

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
UNIDAD DE PROYECTOS ACADÉMICOS ESPECIALES

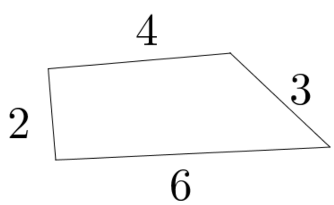
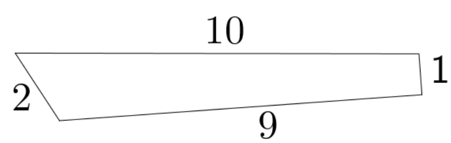
Instrumentos de recolección de información referente a los niveles de comprensión del álgebra.

Objetivo: Identificar las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra que manifiestan los estudiantes de tercer ciclo de educación básica.

Indicación: Lea detenidamente cada ítem y resuelva de manera clara y ordenada considerando los ejemplos presentados. El test el individual y puede utilizar calculadora.

Centro Escolar:____
Nombre:____
Edad:________________**Grado:**__________________ **Sección:**_________________

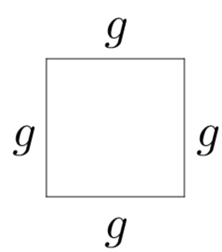
ÍTEM 1

 El perímetro de esta figura se calcula sumando 6 +3+ 4 +2, que es igual a 15.	 Calcular el perímetro de esta figura. P=________

ÍTEM 2

Si $a + b = 43$ $a + b + 2$=…

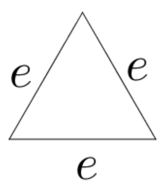
ÍTEM 3



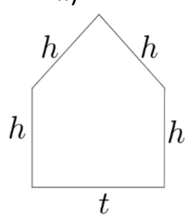
Este cuadrado tiene lados de longitud g, su perímetro (P), se puede escribir $P = 4g$

b) ¿Cómo se puede escribir el perímetro de las siguientes figuras?

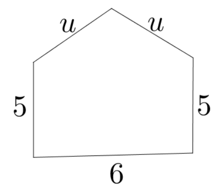
i)



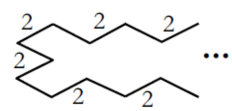
ii)



iii)



iv)



Aunque la figura no está totalmente dibujada, se sabe que es un polígono, con "n" lados y que todos son de longitud 2.

P=____________ P=______________ P=______________ P=____________

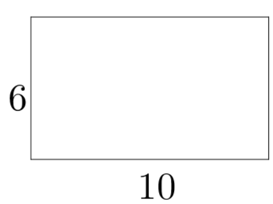
ÍTEM 4

¿Qué puede decir acerca de a, si sabe que $a + 5 = 8$?

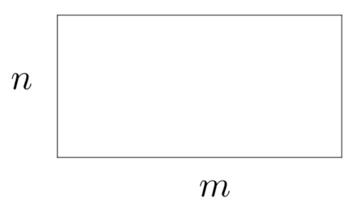
ÍTEM 5

¿Cuál es el área de las siguientes figuras?

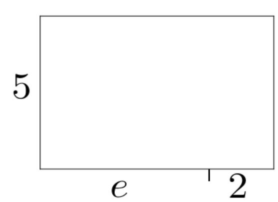
i)



ii)



iii)



A=_______ A=_______ A=__________

ÍTEM 6

$a\ + 3a$ se pueden escribir simplemente como $4a$

Simplifique las siguientes expresiones, siempre que sea posible

i) $2a + 5a =$

ii) $2a + 5b + a =$

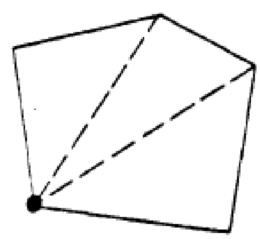
iii) $3a - b + a =$

iv) $2a + 5b =$

v) $(a - b) + b =$

ÍTEM 7

En una figura como esta:



Se puede calcular el número de diagonales que no se cortan, restando 3 al número de lados.
Así una figura con 5 lados tiene 2 diagonales que no se cortan.

i) ¿Cuántas diagonales que no se cortan tiene una figura con 57 lados?

ii) ¿Cuántas diagonales que no se cortan tiene una figura con "k" lados?

ÍTEM 8

i) ¿Qué puede decir acerca de $\boldsymbol{m}$, si sabe que $\boldsymbol{m = 3n + 1}$, cuando $\boldsymbol{n = 4}$?

ii) ¿Qué puede decir acerca de $\boldsymbol{u}$, si sabe que $\boldsymbol{u = v + 3}$, cuando $\boldsymbol{v = 1}$?

ÍTEM 9

Si $e + f = 8$

$e + f + g$=

ÍTEM 10

¿Qué puede decir acerca de $\boldsymbol{r}$, si sabe que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}$ y que $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{30}$?

ÍTEM 11

4 sumado a n puede ser escrito $n + 4$

¿Cómo puede escribirse 4 sumado a $n + 5$?

ÍTEM 12

Qué puedes decir sobre "c", si $c + d = 10$ y "c" es menor que d

ÍTEM 13

¿Cuándo es verdadera la siguiente expresión – siempre, nunca o a veces?
Subrayar la respuesta correcta.

$L + M + N = L + P + N$ Siempre. Nunca A veces, Cuando _______________

ÍTEM 14

Un pastel cuesta "c" dólares y un bollo cuesta "b" dolares.
Si compro 4 pasteles y 3 bollos.

¿Que representa $4c + 3b$?

ÍTEM 15

"n" multiplicado por 4 puede ser escrito como $4n$

¿Cómo puede escribirse 4 multiplicado por $n + 5$?

ÍTEM 16

Si $(x + 1)^3 + x = 349$ es verdadera cuando $x = 6$.
¿Qué valores de x hacen verdadera la expresión $(5x + 1)^3 + 5x = 349$?

ÍTEM 17

Los lapiceros azules cuestan 5 dólares cada uno y los lapiceros rojos cuestan 6 dólares cada uno. Compré algunos lapiceros azules y algunos rojos y en conjunto me cuesta 90 dólares.

Si "b" es el número de lapiceros azules comprados, y si "r" es el número de lapiceros rojos comprados, ¿Qué puede escribir sobre b y r?

ÍTEM 18

¿Qué es mayor $2n$ o $n + 2$?
Explique

ÍTEM 19

El salario básico de Mary es $20 por semana.
También se le pagan otros $2 por cada hora extra que trabaja.
Si "h" representa el número de horas extraordinarias que trabaja, y si "w" representa su totalidad en $.

Escriba una ecuación que conecta w y h

3.4.2.3 Procedimiento Estadístico y Vaciado de Datos.

3.4.2.3.1 Procedimiento para los Índices de Facilidad.

Luego de administrar el instrumento de recolección de datos, se calcularon a partir de los resultados, los índices de facilidad por ítems, y posteriormente se calcularon los promedios de los índices de facilidad por tipo de interpretación y uso de la letra en álgebra. Para dicho propósito se utilizaron tablas de distribución (ver anexo 1 y 2). Para la interpretación gráfica de los promedios de índices de facilidad por tipo de interpretación y uso de la letra, se utilizaron gráficas de barras agrupadas (ver en análisis de resultados gráfico 1).

3.4.2.3.2 Procedimiento para los Niveles de Comprensión del Álgebra.

Posteriormente se inició el proceso de clasificación de los participantes en los diferentes niveles de comprensión del álgebra. Para que el alumno clasifique en uno de los niveles de comprensión del álgebra es necesario que resuelva correctamente $2/3$ del total de ítems por nivel, además, clasificará en el nivel más alto posible, sí clasificó en todos los niveles inferiores correspondientes. En caso de que un estudiante no clasifique en alguno de los cuatro niveles de comprensión, se registrará en el nivel 0 de comprensión para efecto de tratamiento estadístico y análisis. La cantidad de ítems por nivel y el número mínimo para clasificar en estos se describe en la siguiente tabla:

Tabla 13. *Número de ítems resueltos requeridos para clasificar en cada nivel.*

Nivel	Total de ítems por nivel	Número de ítems para clasificar.
1	6	4
2	7	5
3	8	6
4	9	6

Fuente: Küchemann (1980).

Al clasificar cada estudiante en uno de los niveles de comprensión del álgebra, se agruparon los totales por cada nivel y se organizaron los porcentajes por grado en totalidad de la muestra en una tabla de distribución (ver anexo 3). Para una mejor interpretación en forma gráfica de los resultados generales de los niveles de comprensión del álgebra, se construyeron gráficas de barra agrupadas, en estas se expresan los porcentajes en las clasificaciones por niveles y grados (ver en análisis de resultados Gráfico 2).

3.4.2.3.3 Procedimientos para la Pormenorización de Resultados por Institución.

Para cada institución participante se realizó nuevamente el tratamiento y análisis de información que se practicó en los resultados generales. De igual manera se utilizaron para los índices de facilidad, promedios de índices de facilidad y los porcentajes de niveles de comprensión del álgebra tablas de distribución y gráficos de barras agrupadas. Atendiendo únicamente a los niveles de comprensión del álgebra, se registraron los resultados generales haciendo diferencia entre las instituciones que participaron en la investigación. Dichos resultados se representaron a través de una gráfica de barras agrupadas que donde se verifique la institución y los porcentajes de estudiante clasificados en los diferentes niveles de comprensión del álgebra (ver en análisis de resultados gráfico 11).

3.4.3 Formas de Administración.

El test se administró adentro de los centros escolares en horas de la jornada (matutina, vespertina), que le corresponda asistir al estudiante, fue de tipo individual y se permitió el uso de calculadora. El número de participantes por sección en la muestra se corresponde al porcentaje que representan la totalidad de la sección en el universo de estudio. La distribución de los participantes fue la siguiente:

Tabla 14. *Distribución de la muestra de estudio.*

Sección/Grado	**Séptimo Grado.**	**Octavo Grado.**	**Noveno Grado.**
Centro Escolar:		INSA	
Sección “A”:	5	8	8
Sección “B”:	5	7	8
Sección “C”:	6	8	8
Sección “D”:	6	8	7
Sección “E”:	6	8	8
Sección “F”:	5	8	8
Sección “G”:	6	7	7
Sección “H”:	5	7	7
Sección “I”:	5	7	8
Sección “J”:	5	8	7

Centro Escolar:		Tomás Medina	
Sección “A”:	6	7	7
Sección “B”:	6	7	6
Sección “C”:	8	4	5
Sección “D”:	7	4	5
Centro Escolar:		José Mariano Méndez	
Sección “A”:	5	5	3
Sección “B”:	3	2	3
Centro Escolar:		Colonia San Luis	
Sección “A”:	2	4	2
Total por Grado:	**91**	**109**	**107**
Total:		**307**	

Fuente: Elaboración propia.

3.4.4 Sobre el Análisis de Resultados.

El análisis de los resultados está enfocado en responder las preguntas de investigación propuestas al inicio de este documento. Se presentan e identifican en los índices de facilidad, las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra en las que los estudiantes presentaron mayores dificultades. También se hacen interpretaciones de los porcentajes de estudiantes que clasificaron en cada nivel de comprensión del álgebra, se proponen posibles tendencias y las diferencias existentes según el grado que se analiza. Finalmente se comparan los resultados institucionales y se identifican las principales divergencias entre centros escolares. Los análisis realizados están apoyados en las tablas de datos y los gráficos resultantes del tratamiento de datos recolectados.

Capítulo IV.
Análisis
de Resultados.

4.1 Resultados Generales de Índices de Facilidad.

De una muestra de estudio de 307 estudiantes de tercer ciclo de educación básica, administrándoles un test de 30 tareas algebraicas, se obtuvieron los siguientes resultados en los índices de facilidad por ítems.

Tabla 15. *Resultados Generales de Índices de Facilidad*.

Índice de Facilidad Por Ítems		**Resultados Generales**		
Interpretación mínima requerida	Ítems/ Grado	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Como letra evaluada.	4	71.43%	77.06%	80.37%
	8i	1.10%	8.26%	33.64%
	8ii	19.78%	27.52%	47.66%
Como letra no usada.	1	95.60%	98.17%	96.26%
	2	86.81%	92.66%	87.85%
	5i	71.43%	86.24%	77.57%
	7i	19.78%	29.36%	41.12%
Letra como objeto.	3i	68.13%	89.91%	88.79%
	3ii	40.66%	68.81%	59.81%
	3iii	2.20%	16.51%	19.63%
	5ii	20.88%	77.98%	57.01%
	6i	58.24%	83.49%	88.79%
	6ii	5.49%	23.85%	23.36%
Letra como incóg- -nita específica.	10	1.10%	2.75%	11.21%
	16	0%	0%	0%
Letra como número generalizado.	3iv	5.49%	3.67%	1.87%
	5iii	0%	0.92%	1.87%
	6iii	1.10%	27.52%	23.36%
	6iv	7.69%	22.94%	15.89%
	6v	6.59%	10.09%	17.76%
	9	2.20%	2.75%	16.82%
	11	34.07%	58.72%	56.03%
	12	20.88%	55.05%	49.53%
	15	13.19%	42.20%	35.51%
	18	0%	0%	0.93%
Letra como variable.	7ii	1.10%	0.92%	9.35%
	13	25.27%	18.35%	18.69%
	14	3.30%	23.85%	14.95%
	17	1.10%	11.93%	14.95%
	19	0%	0%	3.74%

Fuente: Elaboración propia.

Hallazgos: En la tabla 21, se verifica que solamente en 10 de las 30 tareas del test se alcanzaron índices de facilidad de más del 50% en algunos de grados, dichas tareas (1, 2, 3i, 3ii, 4, 5i, 5ii, 6i, 11 y 12), corresponden a las interpretaciones de la letra como: *Letra Evaluada*, *Letra no Usada*, *Letra como Objeto y Letra como Número Generalizado*. Hay que destacar que ningún participante resolvió el ítem 16 que corresponde al uso de la *letra como Incógnita Especifica*.

4.2 ¿Cuáles son los promedios en los índices de facilidad de los estudiantes en cada forma de interpretar y utilizar la letra en álgebra?

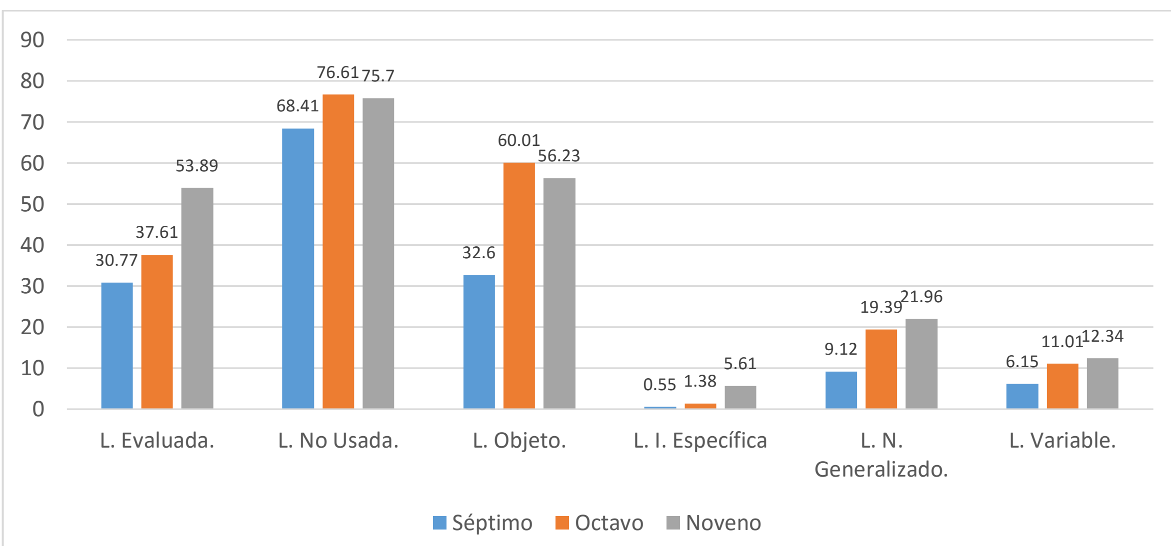
A continuación, se muestra en la tabla 22 y su respectivo gráfico, los promedios de los índices de facilidad que manifestaron los estudiantes según cada forma de interpretar y utilizar la letra en álgebra.

Tabla 16. *Resultados Generales de Promedios de los Índices de Facilidad.*

Tipo de interpretación y uso de la letra	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Letra Evaluada	30.77%	37.61%	53.89%
Letra no Usada	68.41%	76.61%	75.70%
Letra como Objeto	32.60%	60.01%	56.23%
Letra como Incógnita Especifica	0.55%	1.38%	5.61%
Letra como Número Generalizado	9.12%	19.39%	21.96%
Letra como Variable	6.15%	11.01%	12.34%

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 1. *Promedio de Índices de Facilidad Resultados Generales en Porcentajes.*



Análisis:

Las formas de interpretar y utilizar la letra que alcanzaron un promedio de por lo menos un 50% en los índices de facilidad, en al menos un grado, son las de *letra evaluada*, *letra no usada y letra como objeto*. Esto significa que la mayoría de los estudiantes resolvieron los ítems que les fueron posibles, asignando a la letra un valor numérico sin manipularla primero. También resolvieron considerando la posibilidad de no utilizar la letra o trabajar sólo con expresiones semejantes, y además de ser necesario, consideraron la letra como una abreviatura para un objeto o como un objeto con su propio símbolo. Por lo contrario, las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra que muestran los promedios más bajos fueron las de la *letra como incógnita específica, número generalizado y letra como variable*.

Los promedios de los índices de facilidad permiten identificar los contenidos e indicadores de logro con los que los estudiantes evidencian facilidad en el aprendizaje. Considerando dicha relación, los resultados en los promedios de los índices de facilidad obtenidos reflejan que a nivel general, los contenidos con los que los estudiantes presentan mayor facilidad de aprendizaje son los relacionados con temas como: Valor numérico de una expresión algebraica, que se relaciona a la interpretación y uso de *la letra evaluada*, Simplificación y Operaciones con expresiones algebraicas semejantes, que está relacionada a la interpretación y uso de la *letra no usada,* Nomenclatura y lenguaje algebraico, y Construcción de expresiones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje común, que están relacionados con la interpretación y uso de *la letra como objeto*.

Por lo contrario, para los contenidos de la asignatura matemática ligados a temas como: Resolución de ecuaciones, relacionado a la interpretación y uso de *la letra como incógnita específica*, Generalización de fórmulas, que se relaciona a la interpretación y uso de *la letra como número generalizado,* e Identificación de relaciones y funciones, que está relacionado a la interpretación y uso de *la letra como variable*, los estudiantes muestran grandes dificultades del aprendizaje. Dicha situación es observable dados los promedios en los índices de facilidad menores al 22% en cualquiera de las últimas tres formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra para cualquier grado.

4.3 Resultados Generales de Niveles de Comprensión del Álgebra.

De una muestra de estudio de 307 estudiantes de tercer ciclo de educación básica, correspondientes a 4 centros escolares, se obtuvieron los siguientes resultados en la clasificación de dichos estudiantes en niveles de comprensión del álgebra:

Tabla 17. *Resultados Generales Niveles de Comprensión del Álgebra*.

Nivel/Grado	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado	Total
Nivel 0	18	5	10	33
Nivel 1	72	95	68	235
Nivel 2	1	8	23	32
Nivel 3	0	1	6	7
Nivel 4	0	0	0	0
Total	91	109	107	**307**

Hallazgos: Séptimo grado clasificó el mayor porcentaje de estudiantes en nivel 0, este es un 19.78%. Entre el 63.55% y el 87.16% de cada grado se clasificó en el nivel 1 de comprensión del álgebra, siendo en este nivel en el que se clasificó la mayor parte. Noveno grado fue el que clasificó el mayor porcentaje de estudiantes en el nivel 2 y 3, y solamente octavo y noveno grado clasificaron alumnos en el nivel 3. Ningún estudiante clasificó en el nivel 4.

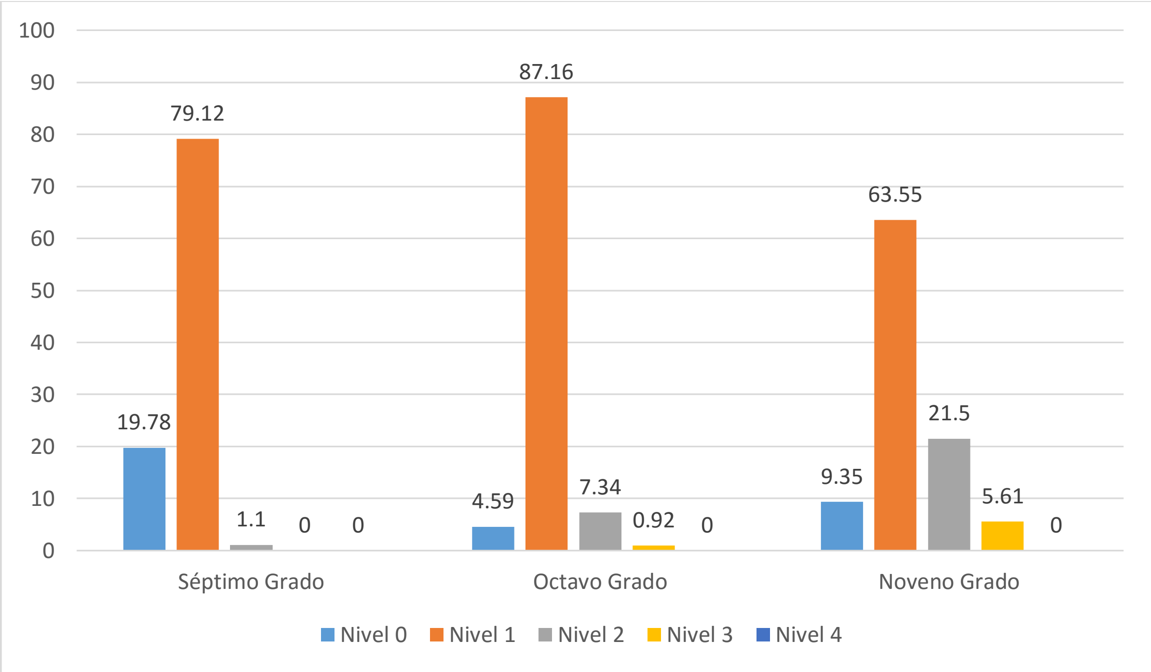
4.4 ¿Qué porcentaje de estudiantes clasifica en cada nivel de comprensión del álgebra?

Según la muestra de estudio, un 10.75% clasificó en el nivel 0 de comprensión del álgebra, un 76.55% en el nivel 1, un 10.42% en el nivel 2, sólo un 2.28% en el nivel 3, mientras que un 0% en el nivel 4. Al considerar los porcentajes a nivel de grados los resultados son los siguientes:

Tabla 18. *Resultados Generales Distribución de Porcentajes en Niveles de Comprensión del Álgebra.*

Nivel/Grado	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Nivel 0	19.78%	4.59%	9.35%
Nivel 1	79.12%	87.16%	63.55%
Nivel 2	1.10%	7.34%	21.50%
Nivel 3	0%	0.92%	5.61%
Nivel 4	0%	0%	0%

Gráfico 2. *Niveles de Comprensión del Álgebra. Resultados Generales en Porcentajes.*



Análisis:

Un 10.75 % de la muestra de estudio no logró clasificar en algún nivel de comprensión del álgebra, lo que significa que no resolvió al menos dos tercios de los ítems que corresponden a cada nivel, o clasificaron en un nivel sin clasificar en los niveles inferiores inmediatos. Los estudiantes que no clasificaron en algún nivel de comprensión del álgebra por sus méritos fueron clasificados en el nivel 0 de comprensión. Por tanto, este 10.75% de estudiantes clasificados en el nivel 0 tienen dificultades en dominar todas las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra, incluso a niveles básicos con operaciones concretas, o no se pueden clasificar de acuerdo con la jerarquización propuesta por Küchemann.

A nivel general, más de tres cuartas partes (76.55%), de los estudiantes clasificaron en el nivel 1 de comprensión del álgebra. Esto, además de significar que tienen cierto dominio sobre la interpretación y usos de la *letra en álgebra evaluándola, no usándola o utilizándola como objeto*, tiene implicaciones sobre la complejidad con la que son capaces de utilizarlas. Haber clasificado en el nivel 1 significa que son capaces de resolver tareas puramente numéricas o de estructura algebraica simple, esto se verifica en respuestas uniestructurales, trabajo sobre elementos concretos y la clausura en las operaciones algebraicas.

Un 10.42% clasificó en el nivel 2, lo que implica que hubo más alumnos clasificados en el nivel 0 que en el nivel 2. Estos estudiantes clasificados en el nivel 2 de comprensión del álgebra, poseen dominio sobre la interpretación y usos de la letra evaluándola, *no usándola o utilizándola como objeto* superior a los clasificados en el nivel 1. Los estudiantes clasificados en el nivel 2 poseen las habilidades en interpretación y uso de la letra que manejan los clasificados en el nivel 1 y además son capaces de resolver problemas algebraicos multiestructurales y de buscar e identificar consistencia lógica en la estructura del problema o situación que se le presenta.

Solamente un 2.28% de los estudiantes clasificó en el nivel 3 de comprensión del álgebra. Estos pocos estudiantes poseen las habilidades algebraicas de los clasificados en el nivel 1 y 2, y además, lograron interpretar y utilizar la letra en álgebra como *incógnita específica, como número generalizado y como variable*, aunque a un nivel básico. Por tanto, este 2.28% de estudiantes clasificados en nivel 3 han tenido una consideración multirrelacional de los problemas, poseen nociones de como generalizar algebraicamente un suceso y tienen manejo de ciertos conceptos matemáticos abstractos.

Finalmente, ningún estudiante clasificó en el nivel 4 de comprensión del álgebra. Lo que significa que ningún estudiante ha desarrollado habilidades de búsqueda de relaciones, proposiciones y estrategias implícitas ni pensamiento hipotético sin clausura inmediata. No son capaces de construir un sistema lógico producto de sus proposiciones o de trabajar en un sistema matemático abstracto, todo esto aplicado a las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y principalmente para trabajar en estructuras complejas con las formas de interpretar y utilizar la letra como *incógnita específica, como número generalizado y como variable.*

4.5 Resultados Institucionales.

A continuación, se presentan los resultados por institución de los índices de facilidad y niveles de comprensión del álgebra:

- Los estudiantes participantes de tercer ciclo de educación básica del Centro Escolar INSA constituyeron un 67.1% de la muestra de estudio, los resultados son los siguientes:

Tabla 19. *Resultados de los índices de facilidad por ítems del Centro Escolar INSA.*

Interpretación mínima requerida	Ítems/ Grado	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Como letra evaluada.	4	75.93%	88.16%	86.84%
	8i	1.85%	9.21%	43.42%
	8ii	11.11%	31.58%	57.89%
Como letra no usada.	1	92.59%	98.68%	94.74%
	2	83.33%	94.74%	92.11%
	5i	70.37%	93.42%	89.47%
	7i	18.52%	32.89%	39.47%
Letra como objeto.	3i	64.81%	86.84%	89.47%
	3ii	38.89%	72.37%	67.79%
	3iii	1.85%	18.42%	21.05%
	5ii	20.37%	86.84%	69.74%
	6i	61.11%	86.84%	92.11%
	6ii	9.26%	26.32%	30.26%
Letra como incóg- -nita específica.	10	1.85%	3.95%	14.47%
	16	0%	0%	0%
Letra como número generalizado.	3iv	9.26%	3.95%	2.63%
	5iii	0%	1.32%	2.63%
	6iii	1.85%	30.26%	43.42%
	6iv	12.96%	26.32%	21.05%
	6v	7.41%	13.16%	19.74%
	9	3.70%	1.32%	22.37%
	11	37.04%	60.53%	69.74%
	12	33.33%	76.32%	64.47%
	15	16.67%	51.32%	47.37%
	18	0%	0%	0%
Letra como variable.	7ii	1.85%	1.32%	13.16%
	13	35.19%	26.32%	22.37%
	14	1.85%	28.95%	17.11%
	17	0%	14.47%	14.47%
	19	0%	0%	5.26%

Fuente: Elaboración propia.

- Los estudiantes participantes de tercer ciclo de educación básica del Centro Escolar Tomás Medina constituyeron un 23.45% de la muestra de estudio, los resultados son los siguientes:

Tabla 20. *Resultados de los índices de facilidad por ítems del Centro Escolar Tomás Medina.*

Interpretación mínima requerida	**Ítems/ Grado**	**Séptimo Grado**	**Octavo Grado**	**Noveno Grado**
Como letra evaluada.	4	55.56%	36.36%	60.87%
	8i	0%	0%	4.35%
	8ii	29.63%	4.55%	13.04%
Como letra no usada.	1	100%	95.45%	100%
	2	81.48%	81.82%	73.91%
	5i	66.67%	54.55%	34.78%
	7i	25.93%	13.64%	39.13%
Letra como objeto.	3i	66.67%	100%	86.96%
	3ii	33.33%	50%	52.17%
	3iii	0%	9.09%	0%
	5ii	18.52%	50%	13.04%
	6i	48.15%	63.64%	73.91%
	6ii	0%	4.55%	0%
Letra como incóg- -nita específica.	10	0%	0%	4.35%
	16	0%	0%	0%
Letra como número generalizado.	3iv	0%	4.55%	0%
	5iii	0%	0%	0%
	6iii	0%	4.55%	0%
	6iv	0%	4.55%	0%
	6v	3.70%	0%	8.70%
	9	0%	0%	0%
	11	22.22%	40.91%	13.04%
	12	3.70%	4.55%	17.39%
	15	0%	9.09%	0%
	18	0%	0%	0%
Letra como variable.	7ii	0%	0%	0%
	13	14.81%	0%	13.04%
	14	0%	4.55%	8.70%
	17	0%	0%	8.70%
	19	0%	0%	0%

Fuente: Elaboración propia.

- Los estudiantes participantes de tercer ciclo de educación básica del Centro Escolar José Mariano Méndez constituyeron un 6.84% de la muestra de estudio, los resultados son los siguientes:

Tabla 21. *Resultados de los índices de facilidad por ítems del Centro Escolar José Mariano Méndez.*

Interpretación mínima requerida	Ítems/ Grado	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Como letra evaluada.	4	100%	85.71%	66.67%
	8i	0%	28.57%	33.33%
	8ii	37.50%	42.86%	50%
Como letra no usada.	1	100%	100%	100%
	2	100%	100%	50%
	5i	87.50%	100%	83.83%
	7i	12.50%	28.57%	83.83%
Letra como objeto.	3i	87.50%	85.71%	83.83%
	3ii	87.50%	85.71%	66.67%
	3iii	12.50%	14.29%	50%
	5ii	37.50%	71.43%	66.67%
	6i	75%	100%	100%
	6ii	0%	28.57%	33.33%
Letra como incóg- -nita específica.	10	0%	0%	0%
	16	0%	0%	0%
Letra como número generalizado.	3iv	0%	0%	0%
	5iii	0%	0%	0%
	6iii	0%	42.86%	33.33%
	6iv	0%	14.29%	16.67%
	6v	12.50%	14.29%	33.33%
	9	0%	28.57%	16.67%
	11	37.50%	71.43%	66.67%
	12	0%	14.29%	0%
	15	12.50%	57.14%	33.33%
	18	0%	0%	16.67%
Letra como variable.	7ii	0%	0%	0%
	13	0%	0%	0%
	14	25%	42.86%	16.67%
	17	12.50%	28.57%	50%
	19	0%	0%	0%

Fuente: Elaboración propia.

- Los estudiantes participantes de tercer ciclo de educación básica del Centro Escolar Colonia San Luis constituyeron un 2.61% de la muestra de estudio, los resultados son los siguientes:

Tabla 22. *Resultados de los índices de facilidad por ítems del Centro Escolar Colonia San Luis.*

Interpretación mínima requerida	**Ítems/ Grado**	**Séptimo Grado**	**Octavo Grado**	**Noveno Grado**
Como letra evaluada.	4	50%	75%	100%
	8i	0%	0%	0%
	8ii	50%	50%	50%
Como letra no usada.	1	100%	100%	100%
	2	100%	100%	100%
	5i	100%	100%	100%
	7i	0%	50%	0%
Letra como objeto.	3i	100%	100%	100%
	3ii	0%	75%	100%
	3iii	0%	25%	100%
	5ii	0%	75%	50%
	6i	50%	100%	100%
	6ii	0%	75%	0%
Letra como incóg- -nita específica.	10	0%	0%	0%
	16	0%	0%	0%
Letra como número generalizado.	3iv	0%	0%	0%
	5iii	0%	0%	0%
	6iii	0%	75%	0%
	6iv	0%	75%	0%
	6v	0%	0%	0%
	9	0%	0%	0%
	11	100%	100%	2%
	12	0%	0%	0%
	15	100%	75%	0%
	18	0%	0%	0%
Letra como variable.	7ii	0%	0%	0%
	13	0%	0%	0%
	14	0%	0%	0%
	17	0%	0%	0%
	19	0%	0%	0%

Fuente: Elaboración propia.

4.6 ¿Cuáles fueron los resultados institucionales según cada grado examinado?

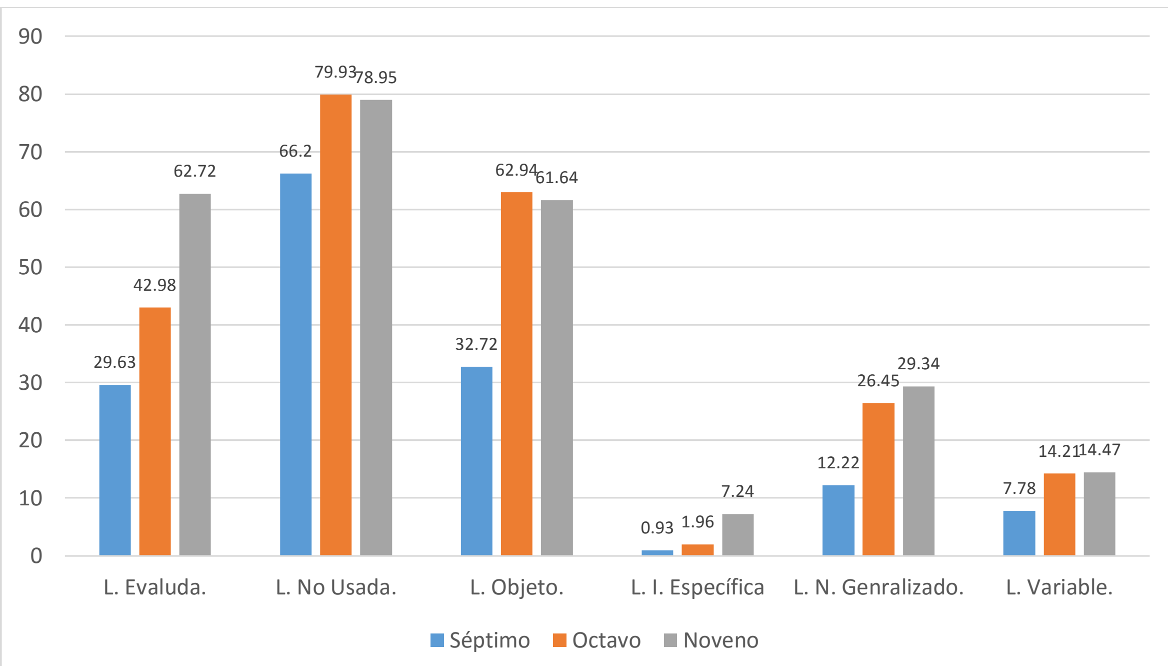
A continuación, se muestran los resultados de los promedios de los índices de facilidad y los niveles de comprensión del álgebra según cada Centro Escolar participante del estudio.

Tabla 23. *Promedios de los índices de facilidad según cada tipo de interpretación y uso de la letra en álgebra, en el Centro Escolar INSA.*

Tipo de interpretación y uso de la letra	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Letra Evaluada	29.63%	42.98%	62.72%
Letra no Usada	66.20%	79.93%	78.95%
Letra como Objeto	32.72%	62.94%	61.74%
Letra como Incógnita Especifica	0.93%	1.96%	7.24%
Letra como Número Generalizado	12.22%	26.45%	29.34%
Letra como Variable	7.78%	14.21%	14.47%

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 3. *Promedio de Índices de Facilidad en Porcentajes. Centro Escolar INSA*



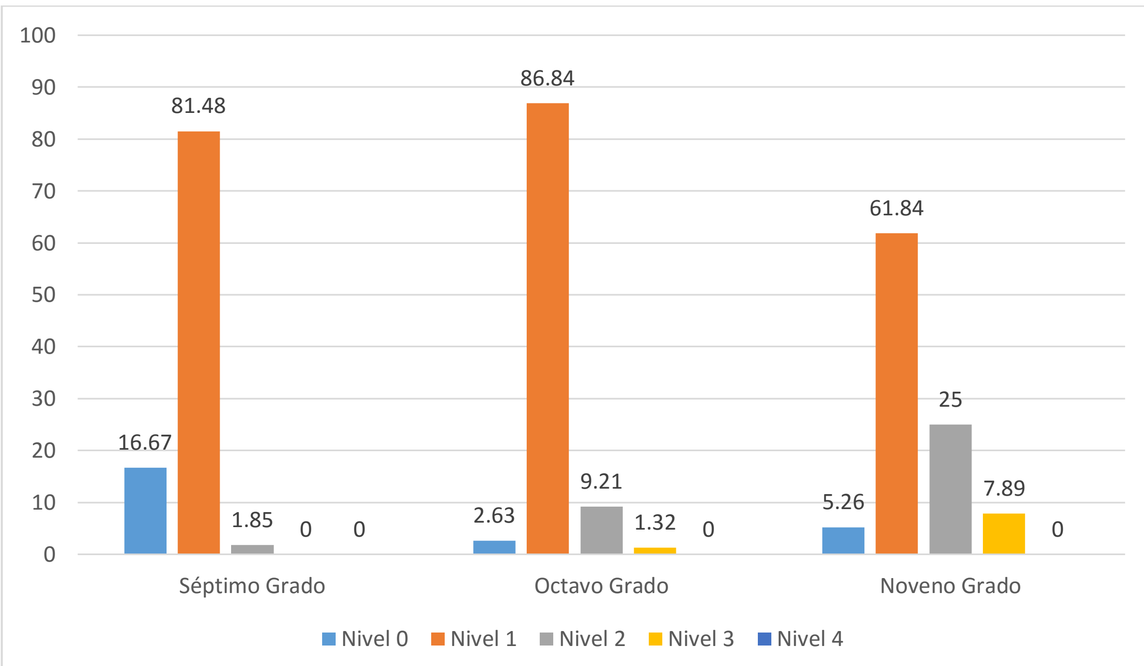
Hallazgos: La *letra evaluada* fue la única forma de interpretar y utilizar la letra donde el séptimo grado alcanzó un promedio de índice de facilidad superior al 50%, todas las demás formas de interpretar y utilizar la letra tienen un promedio de índices de facilidad inferior al 33%. El octavo grado manifestó un 79.93% y 62.94% de promedio en los índices de facilidad para *la letra no usada y letra como objeto* respectivamente, todas las otras formas de interpretar y utilizar la letra tienen un promedio inferior al 43%. El noveno grado logró promedios de 62.72%, 78.95% y 61.74% para las primeras tres formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra respectivamente, todas las demás formas manifiestan promedios inferiores al 30%. El noveno grado manifiesta una leve disminución en el promedio de los índices de facilidad de *la letra no usada y la letra como objeto* en comparación con los promedios de octavo grado.

Tabla 24. *Niveles de Comprensión del Álgebra en el Centro Escolar INSA.*

Nivel/Grado	Séptimo Grado.	Octavo Grado.	Noveno Grado.
Nivel 0	16.67%	2.63%	5.26%
Nivel 1	81.48%	86.84%	61.84%
Nivel 2	1.85%	9.21%	25%
Nivel 3	0%	1.32%	7.89%
Nivel 4	0%	0%	0%

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4. *Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Centro Escolar INSA.*



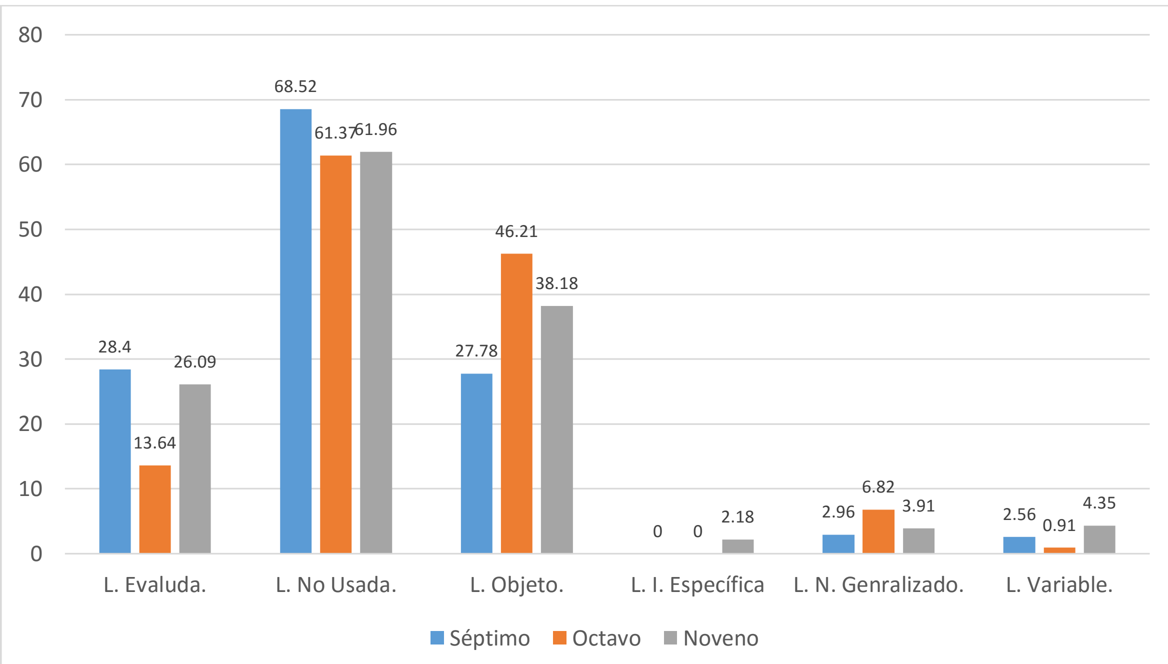
Hallazgos: El séptimo fue el grado que manifestó el mayor porcentaje de estudiantes no clasificados en algún nivel (o clasificados en nivel 0), con un 16.67%, un 81.48% de los estudiantes clasificó en el nivel 1 y sólo un 1.85% clasificó en el nivel 2. Ningún estudiante de séptimo grado clasifico en el nivel 3 o 4. Octavo grado clasificó el menor porcentaje de estudiantes en nivel 0, un 86.84% en el nivel 1, 9.21% en el nivel 2 y logró clasificar un 1.32% en el nivel 3. Noveno grado clasificó un 61.84% en el nivel 1 y fue el grado que clasifico el mayor porcentaje de alumnos en el nivel 2 y 3, un 25% y 7.89% respectivamente. Ningún estudiante de noveno grado clasificó en el nivel 4.

Tabla 25. *Promedios de los índices de facilidad según cada tipo de interpretación y uso de la letra en álgebra, en el Centro Escolar Tomás Medina.*

Tipo de interpretación y uso de la letra	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Letra Evaluada	28.40%	13.64%	26.09%
Letra no Usada	68.52%	61.37%	61.96%
Letra como Objeto	27.78%	46.21%	38.18%
Letra como Incógnita Especifica	0%	0%	2.18%
Letra como Número Generalizado	2.96%	6.82%	3.91%
Letra como Variable	2.56%	0.91%	4.35%

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 5. *Promedio de Índices de Facilidad en Porcentajes. Centro Escolar Tomás Medina.*



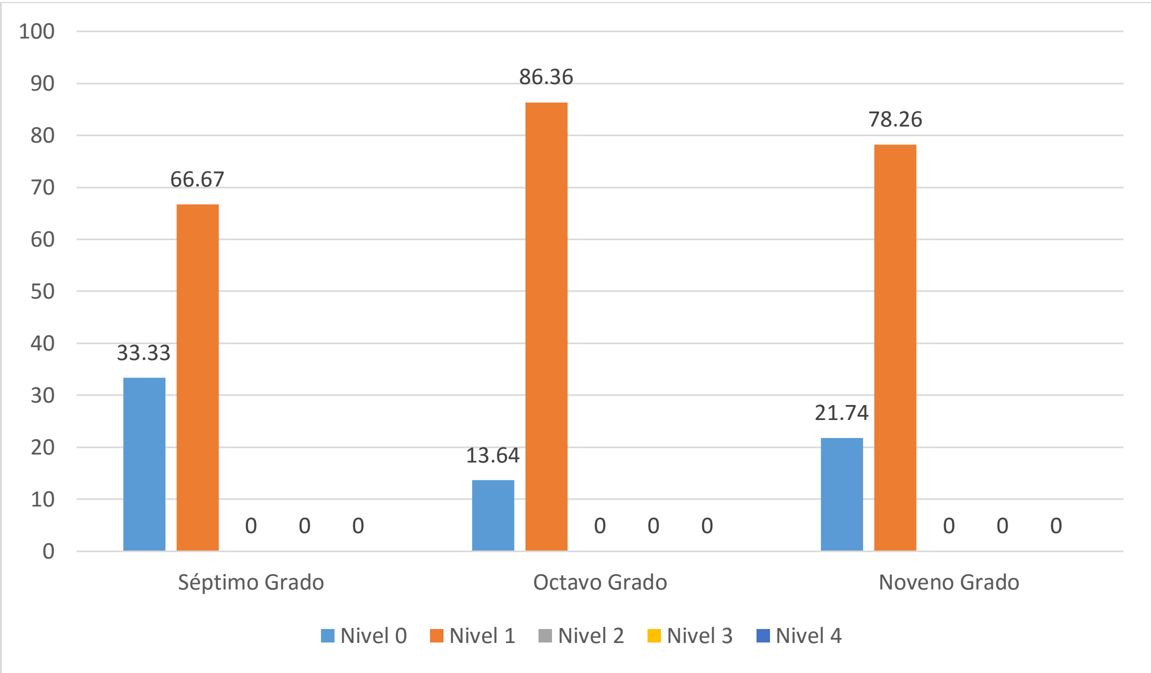
Hallazgos: *La letra no usada* fue la única forma de interpretar y utilizar la letra donde el séptimo grado alcanzó un promedio de índice de facilidad superior al 50%, todas las demás formas de interpretar y utilizar la letra tienen un promedio de índices de facilidad inferior al 29%, el séptimo grado obtuvo el mejor promedio en el uso de la *letra evaluada* (28.4%). El octavo grado manifestó un 61.37 % de promedio en el índice de facilidad para *la letra no usada*, todas las otras formas de interpretar y utilizar la letra tienen un promedio inferior al 47%. El noveno grado logró promedios de 61.94% para *la letra no usada*, todas las demás formas manifiestan promedios inferiores al 39%. El noveno grado presenta disminución en el promedio de los índices de facilidad de la *letra evaluada* y la *letra como objeto* en comparación con los promedios de octavo grado.

Tabla 26. *Niveles de Comprensión del Álgebra en el Centro Escolar Tomas Medina.*

Nivel/Grado	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Nivel 0	33.33%	13.64%	21.74%
Nivel 1	66.67%	86.36%	78.26%
Nivel 2	0%	0%	0%
Nivel 3	0%	0%	0%
Nivel 4	0%	0%	0%

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 6. *Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Centro Escolar Tomás Medina.*



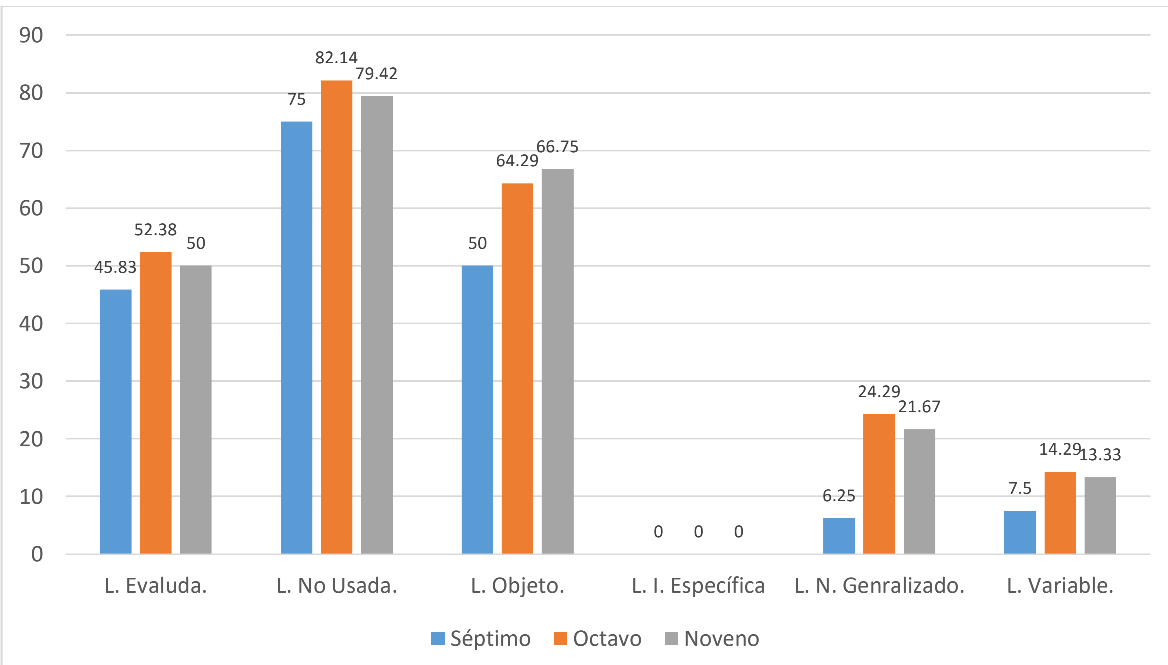
Hallazgos: Séptimo grado clasificó un tercio de sus estudiantes participantes en el nivel 0 y dos tercios en el nivel 1, con esto, el séptimo es el grado que clasificó el mayor porcentaje de estudiantes en el nivel 0. Un 86.36% de octavo grado clasificó en el nivel 1, el resto se clasificaron en el nivel 0. Para noveno grado un 78.26% clasificó en el nivel 1 y el resto en el nivel 0. El octavo fue el grado que clasificó el mayor porcentaje de estudiantes en el nivel 1. Ningún estudiante clasificó en el nivel 2, 3 o 4.

Tabla 27. *Promedios de los índices de facilidad según cada tipo de interpretación y uso de la letra en álgebra, en el Centro Escolar José Mariano Méndez.*

Tipo de interpretación y uso de la letra	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Letra Evaluada	45.83%	52.38%	50%
Letra no Usada	75%	82.14%	79.42%
Letra como Objeto	50%	64.29%	66.75%
Letra como Incógnita Especifica	0%	0%	0%
Letra como Número Generalizado	6.25%	24.29%	21.67%
Letra como Variable	7.50%	14.29%	13.33%

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 7. *Promedio de Índices de Facilidad en Porcentajes. Centro Escolar José Mariano Méndez.*



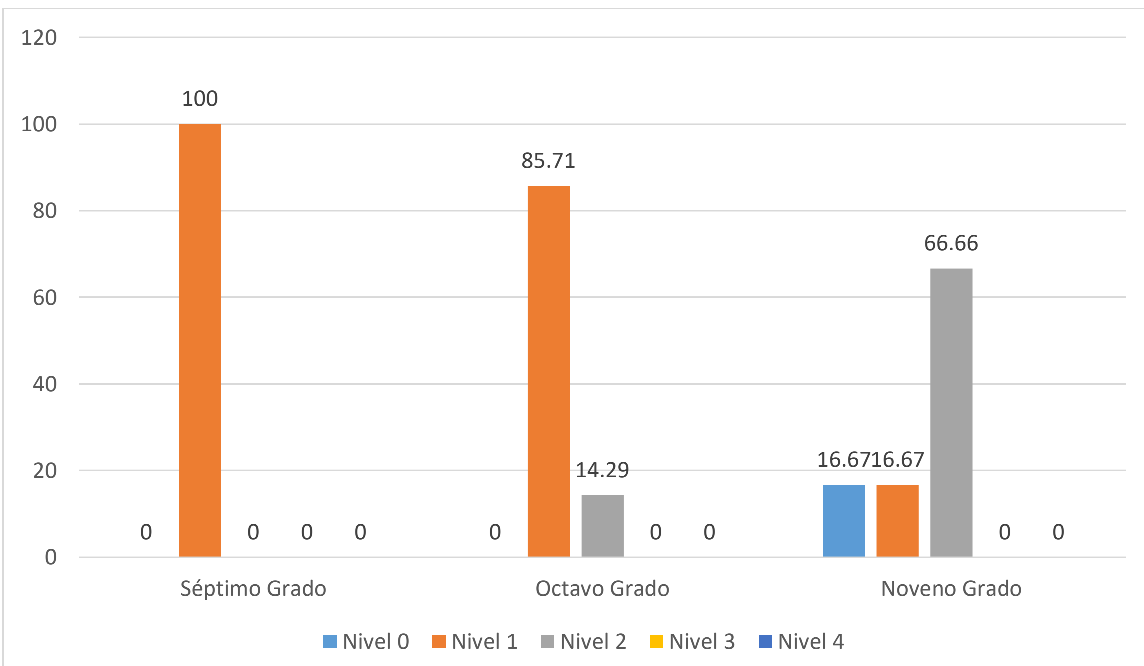
Hallazgos: El séptimo grado obtuvo promedios de 45.83%, 75% y 50% en los índices de facilidad para las primeras tres formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra respectivamente, las demás formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra manifiestan un promedio inferior al 8%. El octavo grado presenta promedios arriba del 52% para las primeras tres formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra e inferior al 25% en el resto de las formas. Noveno grado obtuvo promedios iguales o superiores al 50% en las primeras tres formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra, e inferiores al 22% para el resto de las formas. Noveno grado manifiesta una disminución en los promedios de los índices de facilidad para la *letra evaluada, letra no usada, letra como número generalizado y letra como variable* en comparación a los promedios de octavo grado. Todos los grados obtuvieron un promedio del 0% en los índices de facilidad de la *letra como incógnita específica*.

Tabla 28. *Niveles de Comprensión del Álgebra en el Centro Escolar José Mariano Méndez.*

Nivel/Grado	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Nivel 0	0%	0%	16.67%
Nivel 1	100%	85.71%	16.67%
Nivel 2	0%	14.29%	66.66%
Nivel 3	0%	0%	0%
Nivel 4	0%	0%	0%

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 8. *Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Centro Escolar José Mariano Méndez.*



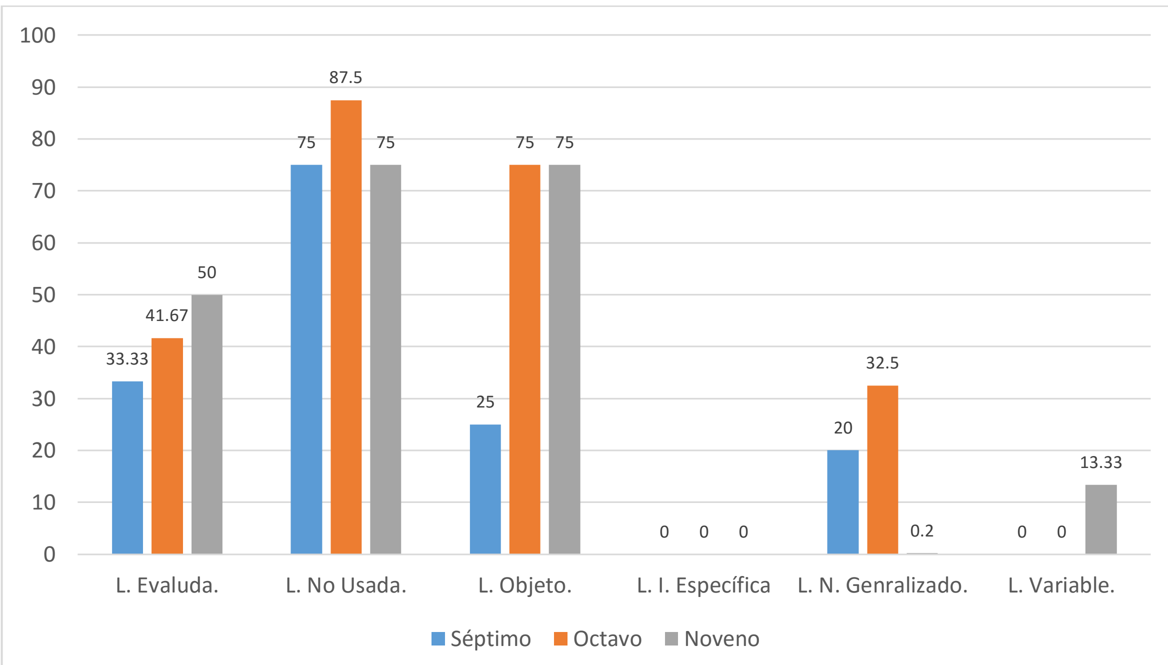
Hallazgos: El 100% de los estudiantes participantes de séptimo grado clasificaron en el nivel 1. Para octavo grado el 85.71% clasificó en el nivel 1 y el 14.29% en el nivel 2, ningún estudiante de octavo grado clasificó en el nivel 0. En noveno grado igual porcentaje de estudiantes clasificaron en el nivel 0 y 1 (16.67%), y un 66.66% clasificaron en el nivel 2, siendo noveno grado el que clasificó el mayor porcentaje de estudiante en el nivel 2. Ningún estudiante clasificó en el nivel 3 o 4.

Tabla 29. *Promedios de los índices de facilidad según cada tipo de interpretación y uso de la letra en álgebra, en el Centro Escolar Colonia San Luis.*

Tipo de interpretación y uso de la letra	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Letra Evaluada	33.33%	41.67%	50%
Letra no Usada	75%	87.50%	75%
Letra como Objeto	25%	75%	75%
Letra como Incógnita Especifica	0%	0%	0%
Letra como Número Generalizado	20%	32.5%	0.20%
Letra como Variable	0%	0%	0%

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 9. *Promedio de Índices de Facilidad en Porcentajes. Centro Escolar Colonia San Luis.*



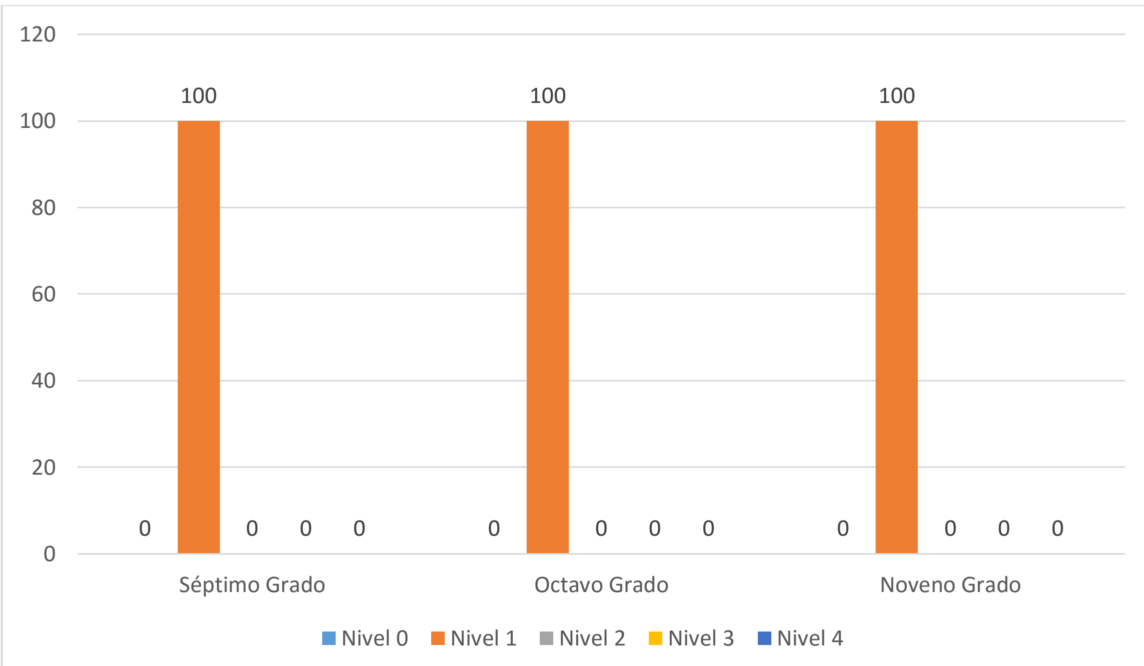
Hallazgos: Los estudiantes participantes del séptimo grado obtuvieron un promedio en los índices de facilidad del 75% para *la letra no usada*, el resto de las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra manifiestan promedios inferiores al 34%. El octavo grado alcanzó promedios en los índices de facilidad iguales o superiores al 75% en los usos de *la letra como no usada y como objeto*, e inferiores al 42% en el resto de las formas. Noveno grado manifestó promedios iguales o superiores al 50% en las primeras tres formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra, pero inferiores al 1% en el resto de las formas. Todos los grados obtuvieron promedios de 0% en los usos de *la letra como incógnita específica y como variable.*

Tabla 30. *Niveles de Comprensión del Álgebra en el Centro Escolar Colonia San Luis.*

Nivel/Grado	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Nivel 0	0%	0%	0%
Nivel 1	100%	100%	100%
Nivel 2	0%	0%	0%
Nivel 3	0%	0%	0%
Nivel 4	0%	0%	0%

Fuente: Elaboración propia.

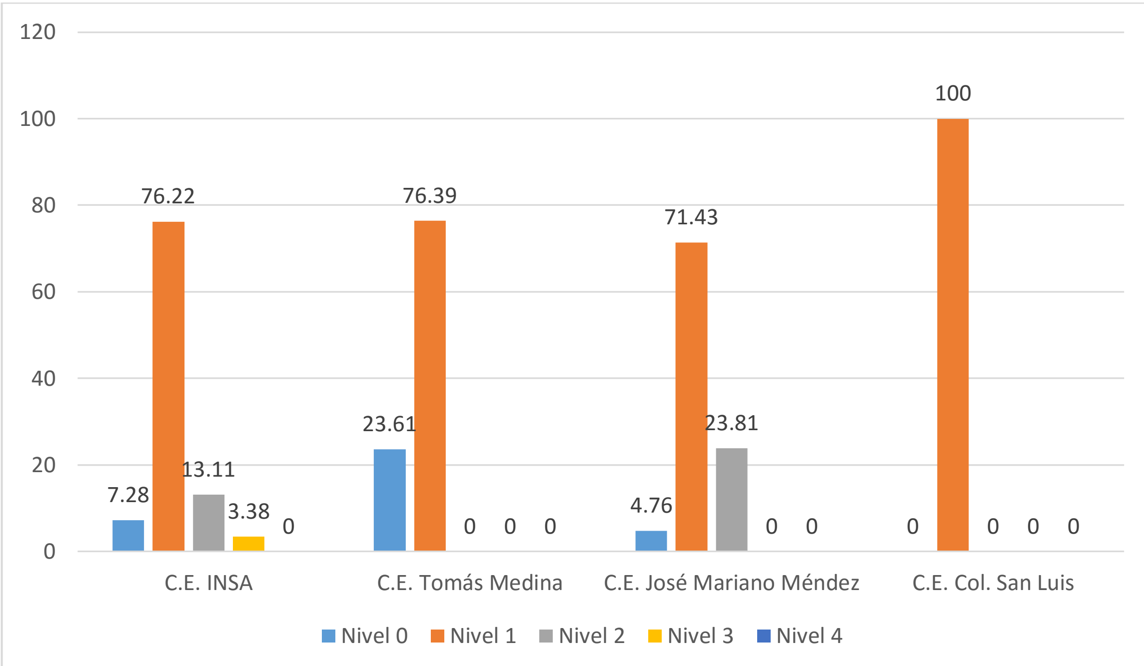
Gráfico 10. *Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Centro Escolar Colonia San Luis.*



Hallazgos: El 100% de los estudiantes participantes del Centro Escolar Colonia San Luis clasificaron en el nivel 1 de comprensión del álgebra.

Análisis de Resultados Institucionales.

Gráfico 11. *Niveles de Comprensión del Álgebra en Porcentajes. Resultados por Institución.*



Análisis:

En el Centro Escolar INSA, para el séptimo grado, *la letra evaluada* fue la única forma de interpretar y utilizar la letra en álgebra, con un promedio en índices de facilidad superior al 50% (66.20%), es decir, la mayoría de estudiantes de este curso dominan contenidos relacionados al *Valor numérico de una expresión algebraica*. El octavo grado manifestó un 79.93% y 62.94% como mejores promedios superiores al 50% en los índices de facilidad para *la letra no usada* y *letra como objeto* respectivamente, lo que sugiere cierto dominio de contenidos relacionados a *Simplificación y Operaciones con expresiones algebraicas semejantes, Nomenclatura y lenguaje algebraico, y Construcción de expresiones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje común*. El noveno grado logró sus mejores promedios superiores al 50% para las primeras tres formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra, por tanto, manifiesta dominio sobre el *Valor numérico de una expresión algebraica, Simplificación y Operaciones con expresiones algebraicas semejantes, Nomenclatura y* *lenguaje algebraico, y Construcción de expresiones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje común*.

El séptimo fue el grado que manifestó el mayor porcentaje de estudiantes no clasificados en algún nivel (16.67%), es decir, que dicho porcentaje de estudiantes no resolvió al menos dos tercios de los ítems que corresponden a cada nivel de comprensión del álgebra, o resolvieron los ítems necesarios sin clasificar en los niveles inmediatos inferiores. Ningún estudiante de séptimo grado clasificó en el nivel 3 o 4, lo que demuestra poco dominio en la interpretación y uso de la letra *como incógnita específica, número generalizado y como variable*. Octavo grado clasificó el menor porcentaje de estudiantes en nivel 0. Noveno fue el grado que clasificó el mayor porcentaje de alumnos en el nivel 2 y 3, un 25% y 7.89% respectivamente.

Los estudiantes que clasificaron en el nivel 2, muestran habilidad para resolver problemas algebraicos multiestructurales y de buscar e identificar consistencia lógica en la estructura del problema o situación que se le presentan para los usos de *la letra evaluada, no usada y letra como objeto*. Los que clasificaron en el nivel 3 han tenido una consideración multirrelacional de los problemas, poseen nociones de como generalizar algebraicamente un suceso y tiene manejo de ciertos conceptos matemáticos abstractos, todo esto aplicado en la interpretación y uso de l*a letra como incógnita específica, número generalizado y como variable.* Ningún estudiante de noveno grado clasificó en el nivel 4, lo que significa un manejo inferior en la búsqueda de relaciones, proposiciones y estrategias implícitas, pensamiento hipotético sin clausura inmediata, construcción de un sistema lógico producto de sus proposiciones y capacidad de trabajar en un sistema matemático abstracto.

Para el Centro Escolar Tomás Medina, *la letra no usada* fue la única forma de interpretar y utilizar la letra donde todos los grados alcanzaron un promedio en los índices de facilidad superior al 50%, y consiguientemente muestran facilidad en la solución de problemas relacionados a *Simplificación y Operaciones con expresiones algebraicas semejantes.* Séptimo, octavo y noveno grados clasificaron un 66.66%, 86.36% y 78.26% respectivamente en el nivel 1, estas mayorías tienen dominio en la interpretación y uso de la *letra evaluándola, no usándola o como objeto* en problemas puramente numéricos o de estructura algebraica simple, de trabajo sobre elementos concretos y con la posibilidad de clausurar la operación. Ningún estudiante clasificó en el nivel 2, 3 o 4 de comprensión del álgebra, lo que demuestra deficiencia en la interpretación y uso de la letra en álgebra al momento de resolver problemas algebraicos multiestructurales y buscar e identificar consistencia lógica en la estructura del problema o situación que se les presentan, y una casi inexistente habilidad para interpretar y usar *la letra como incógnita específica, número generalizado y como variable.*

Para el Centro Escolar José Mariano Méndez, El séptimo grado obtuvo los mejores promedios de 75% y 50% en los índices de facilidad para las formas de interpretar y utilizar la letra *no usándola* y *letra como objeto* respectivamente, lo que manifiesta dominio sobre problemas que impliquen *Simplificación y Operaciones con expresiones algebraicas semejantes, Nomenclatura y lenguaje algebraico, y Construcción de expresiones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje común*. El octavo y noveno grado presenta promedios iguales o superiores al 50% para las primeras tres formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra, lo que manifiestan habilidad para resolver problemas relacionados a los temas de *Valor numérico de una expresión algebraica*, *Simplificación y Operaciones con expresiones algebraicas semejantes, Nomenclatura y lenguaje algebraico, y Construcción de expresiones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje común*.

El 100% y 85.71% de los estudiantes participantes del séptimo y octavo grado respectivamente, clasificaron en el nivel 1, lo que implica que poseen la habilidad para resolver problemas puramente numéricos o de estructura algebraica simple, de trabajo sobre elementos concretos y con la posibilidad de clausurar la operación para las formas de interpretar y utilizar la *letra evaluándola y no usándola*. Dos tercios de los estudiantes participantes de noveno grado clasificaron en el nivel 2, por tanto, dichos estudiantes son capaces de resolver problemas algebraicos multiestructurales y de buscar e identificar consistencia lógica en la estructura del problema o situación que se les presentan en tareas que exigen la interpretación y uso de *la letra evaluándola, no usándola y utilizándola como objeto*. Ningún estudiante clasificó en el nivel 3 o 4, lo que implica deficiencia en el uso de *la letra como incógnita específica, como número generalizado y como variable*.

Para el Centro Escolar Colonia San Luis, Los estudiantes participantes del séptimo grado obtuvieron el mejor promedio en los índices de facilidad para la *letra no usada (*75%), lo que explica dominio en la resolución de problemas relacionados a S*implificación y Operaciones con expresiones algebraicas semejantes.* El octavo grado alcanzó promedios en los índices de facilidad iguales o superiores al 75% en los usos de la *letra no usada y como objeto*, que se relacionan a la capacidad de resolver problemas de Simplificación y Operaciones con expresiones algebraicas semejantes, Nomenclatura y lenguaje algebraico, y Construcción de expresiones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje común. Noveno grado manifestó promedios iguales o superiores al 50% en las primeras tres formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra.

El 100% de los estudiantes participantes del Centro Escolar Colonia San Luis clasificaron en el nivel 1 de comprensión del álgebra, por tanto, todos los estudiantes están en la posibilidad de resolver problemas algebraicos uniestructurales y de buscar e identificar consistencia lógica en la estructura del problema o situación que se les presentan en tareas que exigen la interpretación y uso de la *letra evaluándola, no usándola* y utilizándola *como objeto.* Todos los grados obtuvieron promedios de 0% en los usos de *la letra como incógnita específica y como variable*, por tanto, muestran grandes dificultadas a la hora de resolver problemas relacionados a la Resolución de ecuaciones e Identificación de relaciones y funciones.

Capítulo V. Conclusiones y Recomendaciones.

5.1 Conclusiones.

En general:

Como resultado de este trabajo de investigación, es posible concluir que, en los niveles de comprensión del álgebra alcanzados por los estudiantes de tercer ciclo de educación básica, el nivel 1 es el alcanzado con mayor frecuencia por los estudiantes. El 76.55% de los estudiantes clasificaron en el nivel 1 de comprensión del álgebra, lo que implica que dicho porcentaje de estudiantes maneja las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra como *letra evaluada, letra no usada y letra como objeto*, pero sólo son capaces de hacer uso correcto de estas formas de interpretar y utilizar la letra, para resolver tareas de estructura algebraica simple, concretas y proporcionando respuestas uniestructurales.

En los niveles 0, 2 y 3 se distribuye el 23.45% restante de los estudiantes que no clasificaron en el nivel 1 de comprensión del álgebra, y sólo un 12.70% de los estudiantes alcanzaron niveles superiores al nivel 1. De esto se puede inferir que un 87.3% de los estudiantes presentan dificultades para soluciones problemas multiestructurales relacionados a las seis formas de usar e interpretar la letra en álgebra. En consecuencia, ese 87.3% de los estudiantes aún no están preparados para resolver problemas multiestructurales, que requieren construir e identificar consistencia lógica en la estructura del problema, nociones de como generalizar algebraicamente un suceso, manejo de ciertos conceptos matemáticos abstractos, identificación de relaciones y estrategias implícitas en el problema, pensamiento hipotético y trabajar en un sistema matemático abstracto.

a) **Respecto a las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra que manifiestan los estudiantes de tercer ciclo de educación básica.**

Se ha identificado que las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra que mejor aplican los estudiantes de tercer ciclo de educación básica, con promedios en índices de facilidad cercanos al 50%, son: *La letra evaluada, La letra no usada y la Letra como objeto*. Dichos resultados representan la facilidad que tienen los estudiantes para trabajar y resolver problemas algebraicos en temas relacionados a: El valor numérico de una expresión algebraica, simplificación y operaciones con expresiones algebraicas, nomenclatura y lenguaje algebraico, y construcción de expresiones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje común.

Desde otro punto de vista, las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra donde los estudiantes presentan mayor dificultad, con índices de facilidad por abajo del 22%, son: *La letra como incógnita específica, la letra como número generalizado y la letra como variable*. En consecuencia, los estudiantes presentan dificultad para resolver problemas algebraicos relacionados a: Formulación y resolución de ecuaciones, generalización y modelación de fenómenos en fórmulas, e identificación y operación con relaciones y funciones.

b) Respecto a los porcentajes de estudiantes que clasifican en cada nivel de comprensión del álgebra.

Según la muestra de estudio, se ha determinado que un 10.75% de los estudiantes clasificó en el nivel 0 de comprensión del álgebra, un 76.55% en el nivel 1, un 10.42% en el nivel 2, sólo un 2.28% en el nivel 3, mientras que un 0% en el nivel 4. En consecuencia, a los porcentajes anteriores, el 10.75% de los estudiantes no pudieron resolver correctamente dos tercios de los ítems propuestos por cada nivel de comprensión del álgebra, lo que implica grandes deficiencias para interpretar y utilizar la letra en álgebra en todas sus formas.

Además, 76.55% de los estudiantes son capaces de resolver sólo problemas algebraicos de estructura simple, aplicando *la letra evaluándola*, *no usándola* o usándola *como objeto*. Un 10.42% de los estudiantes logran resolver tareas algebraicas de estructura algebraica múltiple aplicando *la letra evaluándola*, *no usándola* o usándola *como objeto*, y un 2.28% de los estudiantes presentan habilidades para problemas algebraicos de estructura múltiple aplicando *la letra evaluándola*, no usándola o *usándola como objeto*, y aplicando en estructura algebraica simple *la letra como incógnita específica, número generalizado y como variable*. Ningún estudiante demuestra capacidad para resolver problemas algebraicos de estructura múltiple aplicando las seis formas de utilizar e interpretar la letra en álgebra.

c) **Respecto a los resultados institucionales según cada grado examinado.**

En el Centro Escolar INSA.

El séptimo grado únicamente manifiesta la habilidad para interpretar y utilizar la letra en álgebra, con un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *la letra no usada*, además, un 81.48% de estudiantes clasificaron en el nivel 1 de comprensión del álgebra y un 1.85% clasificaron en el nivel 2. Lo anterior implica que el 98.15% del séptimo grado muestra déficit para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados directamente a las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra en contenidos de aprendizaje como: El valor numérico de una expresión algebraica, simplificación y operaciones con expresiones algebraicas, nomenclatura y lenguaje algebraico, y construcción de expresiones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje común, formulación y resolución de ecuaciones, generalización y modelación de fenómenos en fórmulas, e identificación y operación con relaciones y funciones.

El octavo grado posee la capacidad para interpretar y utilizar la letra en álgebra, con un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *La letra evaluada y la letra no usada*, también, un 86.84% de estudiantes clasificaron en el nivel 1 de comprensión del álgebra, un 9.21% en el nivel 2 y solamente un 1.32% en el nivel 3. Por lo tanto, el 89.47% del octavo grado presenta deficiencias para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

El noveno grado ostenta la destreza para interpretar y utilizar la letra en álgebra, con un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *La letra evaluada, la letra no usada y la letra como objeto*, asimismo, un 61.84% de estudiantes clasificados en el nivel 1 de comprensión del álgebra y un 25% en el nivel 2 y un 7.89% en el nivel 3. En consecuencia, un 67.11% del noveno grado tienen dificultad para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

En el Centro Escolar Tomas Medina.

El séptimo grado únicamente muestra la habilidad para interpretar y utilizar la letra en álgebra, en un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *la letra no usada*, además, un 33.33% de estudiantes clasificados en el nivel 0 de comprensión del álgebra y un 66.67% clasificados en el nivel 1. De esta manera, el 100% de los estudiantes del séptimo grado presentan dificultades para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

El octavo grado únicamente presenta la capacidad para interpretar y utilizar la letra en álgebra, en un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *la letra no usada*, también, un 13.64% de estudiantes clasificados en el nivel 0 de comprensión del álgebra y un 86.36% clasificados en el nivel 1. En consecuencia, el 100% de los estudiantes del octavo grado presentan dificultades para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

El noveno grado únicamente demuestra destreza para interpretar y utilizar la letra en álgebra, en un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *la letra no usada*, asimismo, un 21.74% de estudiantes clasificados en el nivel 0 de comprensión del álgebra y un 78.26% clasificados en el nivel 1. Por lo tanto, el 100% de los estudiantes del noveno grado presentan dificultades para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

En el Centro Escolar José Mariano Méndez.

El séptimo grado manifiesta la habilidad para interpretar y utilizar la letra en álgebra, en un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *la letra no usada y la letra como objeto*, además, el 100% de estudiantes clasificados en el nivel 1 de comprensión del álgebra. En consecuencia, el 100% de los estudiantes del séptimo grado presentan dificultades para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

El octavo grado posee la destreza para interpretar y utilizar la letra en álgebra, en un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *La letra evaluada, la letra no usada y la letra como objeto*, también, un 85.71% de estudiantes clasificados en el nivel 1 de comprensión del álgebra y un 14.29% clasificados en el nivel 2. En consideración a lo anterior, el 85.71% de los estudiantes del octavo grado presentan dificultades para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

El noveno grado ostenta la capacidad para interpretar y utilizar la letra en álgebra, en un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *la letra evaluada, la letra no usada y la letra como objeto*, asimismo un 16.67% de estudiantes clasificados en el nivel 1 de comprensión del álgebra y un 66.66% clasificados en el nivel 2. De esta manera, sólo el 33.34% de los estudiantes del octavo grado presentan dificultades para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

En el Centro Escolar Colonia San Luis.

El séptimo grado únicamente muestra habilidad para interpretar y utilizar la letra en álgebra, en un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *la letra no usada*, además, el 100% de estudiantes clasificados en el nivel 1 de comprensión del álgebra. Por lo tanto, el 100% de los estudiantes del séptimo grado presentan dificultades para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

El octavo grado presenta la capacidad para interpretar y utilizar la letra en álgebra, en un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *la letra no usada y la letra como objeto*, también, el 100% de estudiantes clasificados en el nivel 1 de comprensión del álgebra. En consecuencia, el 100% de los estudiantes del octavo grado presentan dificultades para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

El noveno grado demuestra destreza para interpretar y utilizar la letra en álgebra, en un promedio de índices de facilidad superior al 50%, en *la letra evaluada, la letra no usada* *y la letra como objeto*, asimismo, el 100% de estudiantes clasificados en el nivel 1 de comprensión del álgebra. De esta manera, el 100% de los estudiantes del noveno grado presentan dificultades para resolver problemas algebraicos multiestructurales relacionados con las seis formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra y los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

Considerando los resultados institucionales (ver gráfico 11) se puede destacar que, respecto a un rango entre el 71.43% y el 100% de los estudiantes según cada institución, están clasificando en el nivel 1 de comprensión del álgebra. Esto implica que estos estudiantes tienen la habilidad para resolver problemas de estructura algebraica simple aplicando la interpretación de *la letra evaluada, letra no usada y letra como objeto*, y esto se puedo verificar en la facilidad que tiene los estudiantes para tratar con contenidos de aprendizaje como: El valor numérico de una expresión algebraica, simplificación y operaciones con expresiones algebraicas, nomenclatura y lenguaje algebraico, y construcción de expresiones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje común.

También hay que destacar que sólo en dos instituciones con rangos entre el 13.11% y 23.81% de los estudiantes alcanzan el nivel 2 de comprensión del álgebra, por tanto, estos estudiantes logran resolver problemas multiestructurales aplicando la interpretación de *la letra evaluada, letra no usada y letra como objeto* en los contenidos de aprendizaje relacionados a estas.

Para concluir, entre el 96.62% y el 100% de los estudiantes de cada institución no logro clasificar en los niveles 3 y 4 de comprensión del álgebra. Esto evidencia una deficiencia significativa de los estudiantes en la resolución de problemas de estructura algebraica simple y compleja aplicando *la letra como incógnita específica, número generalizado y como variable*, lo que se traduce en problemas para tratar con contenidos de aprendizaje como: formulación y resolución de ecuaciones, generalización y modelación de fenómenos en formulas, e identificación y operación con relaciones y funciones.

5.2 Recomendaciones.

Al Ministerio de Educación:

a) Realizar investigaciones en el contexto salvadoreño enfocadas a identificar y solventar el origen de la deficiencia que manifiestan los estudiantes de tercer ciclo de educación básica, en la interpretación y uso de *la letra en álgebra como incógnita específica, como número generalizado y como variable*.

b) Diseñar textos que sirvan de apoyo a los profesores de matemática para el proceso de enseñanza y aprendizaje del uso de la letra en álgebra, enfocándose en la interpretación y utilización de *la letra como incógnita específica, número generalizado y como variable.* Dichos textos pueden abarcar temas como la construcción y solución de ecuaciones, construcción de expresiones algebraicas como elementos generalizados, generalizar propiedades y fórmulas matemáticas, construcción de ecuaciones que relacionen sistemáticamente dos conjuntos de valores o fenómenos y todo lo relacionado a la introducción al estudio de funciones.

c) Ejecutar capacitaciones para los docentes de matemática que tengan por objetivo desarrollar habilidades y herramientas didácticas relacionadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las diferentes formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra, especialmente de *la letra como incógnita específica, letra como número generalizado y letra como variable*.

A los docentes de Matemática:

a) Apoyar el diseño de las clases de álgebra en libros e investigaciones que aborden la didáctica del álgebra o las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra, entre estos se tienen: La Transición Aritmética-Álgebra editorial Gaia, El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas revista Bolema, Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros, Didáctica de la Matemática editorial Bonum, La Enseñanza de Las Matemáticas y sus Fundamentos Psicológicos de editorial Paidós y otros.

b) Diseñar actividades para la clase que ayuden a los estudiantes a comprender y diferenciar las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra. Esto se puede lograr presentando ejercicios que exijan una determinada forma de interpretar y utilizar la letra para su correcta resolución, dicha tarea deberá estar acompañada de su respectiva explicación sobre el uso que se le dio a la letra y la diferencia con las otras formas de utilizarla.

c) Monitorear el desempeño de los estudiantes respecto a los indicadores de logro relacionados a los contenidos de aprendizaje afines a las formas de interpretar y utilizar la letra en álgebra, especialmente en *la letra como incógnita específica, como número generalizado y como variable*.

Bibliografía

Bonilla, E. (1991). La Enseñanza y Aprendizaje de Las Matemáticas Visto Desde Afuera de Las Matemáticas. *Ciencias*(21), 23-28.

Brown, M., Hodgen, J., & Küchemann, D. (2012). *CHANGING THE GRADE 7 CURRICULUM IN ALGEBRA AND MULTIPLICATIVE THINKING AT CLASSROOM LEVEL IN RESPONSE TO ASSESSMENT DATA.* Seúl: COEX.

Canjura Linares, C. M. (2014). Líneas estratégicas de un plan nacional de educación en la funcion de la nación. *Revista de Humanidades y Ciencias Sociales*(6), 26-29.

Chaplin, J., & Krawiec, T. (1978). *PSICOLOGíA: SISTEMAS Y TEORíAS.* México: Interamericana.

Collis, K. (1982). La matemática escolar y los estadios de desarrollo. *Infancia y Aprendizaje*, 39-74.

Flórez, W. (2015). Los Problemas Asociados a La Comprensión del Álgebra en Estudiantes Universitarios. *Horizontes Pegagógicos*(17), 8-23.

García, G., & Gema. (2010). El Texto Descriptivo. Características y Comentario. *Temas Para La Educación*(6), 1-5.

Gerrig, R. J., & Zimbardo, P. G. (2005). *Psicología y Vida.* México: Pearson .

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* México D.F.: McGRAW-HILL.

Hodgen, J., Coe, R., Brown, M., & Küchemann, D. (2014). *Improving students understanding of algebra and multiplicative reansoning: Did the ICCAMS intervention work?* Inglaterra: Pope.

Hodgen, J., Kuchemann, D., Brown, M., & Coe, R. (2009). CHILDREN´S UNDERTANDINGS OF ALGEBRA 30 YEARS ON: WHAT HAS CHANGED? *Acta del IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (págs. 539-548). Lyon France: INRP.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El Aprendizaje Del Álgebra Escolar Desde Una Perspectiva Psicológica. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS*(3), 229-240.

Kieran, C., Booke, G., Filloy, E., Vergnaund, G., & Wheeler, D. (1990). Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra. En I. Studies, *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 96-112). Cambridge: Cambridge University Press.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1980). *The Understanding of Generalised Aritmetic (Algebra) by Secondary School Children.* (Tesis de Doctorado).Universidad de London, Chelsea.

Maldonado Alvarado, H. P. (2011). *Evaluación de un programa para el desarrollo del pensamiento formal de los estudiantes del Décimo año de educación básica del centro escolar Alborada de la ciudad de Cuenca.* (Tesis de Maestría). Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador.

Meece, J. (2001). *Desarrollo del niño y del adolescente.* México: McGrawHill.

Ministerio de Educación de El Salvador. (1996). *Programa de estudio de séptimo grado.* San Salvador.

Ministerio de Educación de El Salvador. (2002). *DOMINIOS CURRICULARES BASICOS: Educación Parvularia, Básica y Media.* San Salvador.

Ministerio de Educación de El Salvador. (2008a). *CURRÍCULO AL SERVICIO DEL APRENDIZAJE: Aprendizaje por competencias.* San Salvador: Menta.

Ministerio de Educación de El Salvador. (2008b). *Programas de Estudio Matematica: Tercer Ciclo.* San Slavador, El Salvador.

Ministerios de Educación de El Salvador. (1994). *Fundamentos curriculares de la educación nacional.* San Salvador.

Ormrod, J. E. (2005). *Aprendizaje Humano.* Madrid: Pearson.

Pastells, A. (2001). *La Intervención de La Memoria de Trabajo en El Aprendizaje del Cálculo.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Resnick, L., & Ford, W. (1991). *La Enseñanza de Las Matemáticas y sus Fundamentos Psicológicos.* Barcelona: Paidós.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E., & Mora, L. (1999). *La Transición Aritmética-Álgebra.* Bogotá: Gaia.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher*(6), 418-450.

Suárez, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. (2014). El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *Bolema*(50), 1545-1566.

Thorndike, E. (1922). *La Psicología de la Aritmética.* Toronto: MACMILLAN.

Usisken, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and uses Of Variables. En N. S.-B. Publications, *Algebraic Thinking, Grades K–12* (págs. 7-14). Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S. (1983). What Are These Things Called Variables? *The Mathematics Teacher*(7), 474-479.

Anexos.

Anexo 1.

Tabla de distribución utilizada para los resultados generales de índice de facilidad por ítems (ejemplo).

Índice de Facilidad Por Ítems		**Resultados Generales**		
Interpretación mínima requerida	Ítems/ Grado	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Como letra evaluada.	4			
	8i			
	8ii			
Como letra no usada.	1			
	2			
	5i			
	7i			
Letra como objeto.	3i			
	3ii			
	3iii			
	5ii			
	6i			
	6ii			
Letra como incóg- -nita específica.	10			
	16			
Letra como número generalizado.	3iv			
	5iii			
	6iii			
	6iv			
	6v			
	9			
	11			
	12			
	15			
	18			
Letra como variable.	7ii			
	13			
	14			
	17			
	19			

Anexo 2.

Tabla de distribución utilizada para los resultados generales de promedio de índices de facilidad (Ejemplo).

Promedios de Índices de Facilidad.	**Resultados Generales.**		
Tipo de interpretación y uso de la letra	Séptimo Grado	Octavo Grado	Noveno Grado
Letra Evaluada			
Letra no Usada			
Letra como Objeto			
Letra como Incógnita Especifica			
Letra como Número Generalizado			
Letra como Variable			

Anexo 3.

Tabla de distribución utilizada para la clasificación de los estudiantes en niveles de comprensión del álgebra en los resultados generales (Ejemplo).

Nivel/Grado	**Séptimo Grado**	**Octavo Grado**	**Noveno Grado**
Nivel 0	19.78%	4.59%	9.35%
Nivel 1	79.12%	87.16%	63.55%
Nivel 2	1.10%	7.34%	21.50%
Nivel 3	0%	0.92%	5.61%
Nivel 4	0%	0%	0%

Anexo 4.

Test de Niveles de comprensión del Álgebra de Dietmar Erick Küchemann en el Proyecto CSMS (página siguiente).

CHELSEA DIAGNOSTIC MATHEMATICS TESTS

ALGEBRA

Name: ______________________ Today's date: ______________________

School: ______________________ Class: ______________________

Date of birth: ______________________

	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4
Criterion	4/6	5/7	5/8	6/9
Pupil's score				
Levels passed (✓)				

Highest level attained

Comments:

NFER-NELSON

Published by The NFER-NELSON Publishing Company Ltd, Darville House,
2 Oxford Road East, Windsor, Berkshire SL4 1DF
ISBN 0-7005-0622-5
First published 1984
Printed in Great Britain
Code 4482 01 4
1(11.84)

1. Fill in the gaps:

$x \longrightarrow x + 2$

$6 \longrightarrow$ ....

$r \longrightarrow$ ....

$x \longrightarrow 4x$

$3 \longrightarrow$ ....

2. Write down the smallest and the largest of these:

$n + 1, \quad n + 4, \quad n - 3, \quad n, \quad n - 7$

smallest .... largest ....

3. Which is the larger, $2n$ or $n + 2$? ....

Explain: 3 4

4. **4 added to *n* can be written as $n + 4$.** Add 4 onto each of these:

8	$n + 5$	$3n$
....	....	....

***n* multiplied by 4 can be written as $4n$.** Multiply each of these by 4:

8	$n + 5$	$3n$
....	....	....

4(c) 3

4(e) 4

5. If $a + b = 43$, $a + b + 2 =$ ....

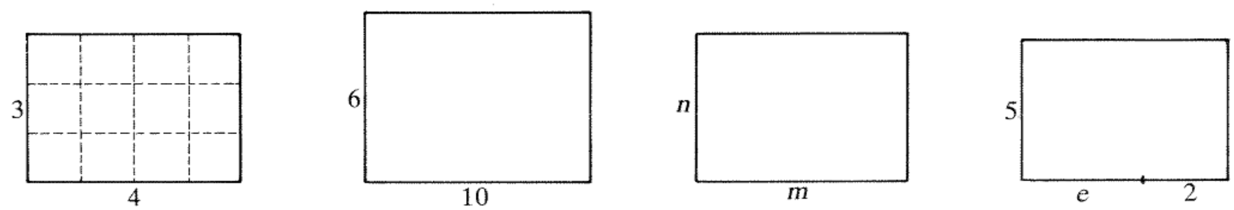
If $n - 246 = 762$, $n - 247 =$ ....

If $e + f = 8$, $e + f + g =$ .... 5(a) 1 5(c) 3

6. What can you say about a if $a + 5 = 8$ .... 6(a) 1

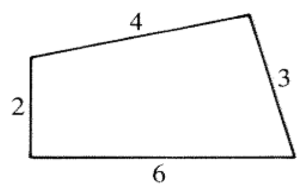
What can you say about b if $b + 2$ is equal to $2b$ ....

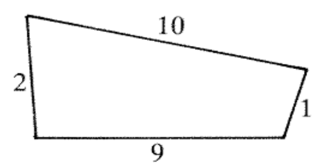
7. What are the areas of these shapes?



A = ... A = ... A = ... A = ...

7(b) 1
7(c) 2
7(d) 4

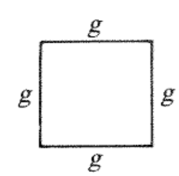




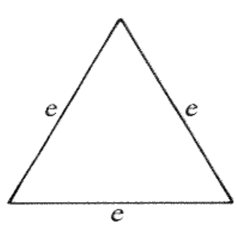
8. The perimeter of this shape is equal to 6 + 3 + 4 + 2, which equals 15.

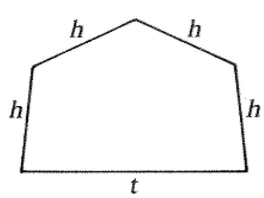
Work out the perimeter of this shape. P = ... 8 1

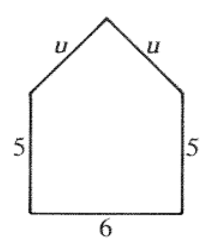
9. This square has sides of length g.
So, for its perimeter, we can write P = $4g$.

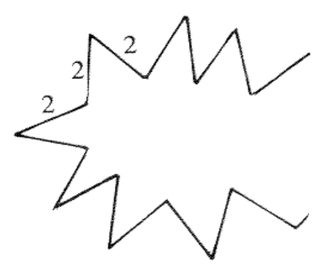


What can we write for the perimeter of each of these shapes?









Part of this figure is not drawn. There are n sides altogether, all of length 2.

P = ... P = ... P = ... P = ...

9(a) 1
9(b) 2
9(c) 2
9(d) 3

10. Cabbages cost 8 pence each and turnips cost 6 pence each.

If c stands for the **number** of cabbages bought
and t stands for the **number** of turnips bought,
what does $8c + 6t$ stand for? ....

What is the total number of vegetables bought? ....

11. What can you say about u if $u = v + 3$
and $v = 1$ .... 11(a) 2

What can you say about m if $m = 3n + 1$
and $n = 4$ .... 11(b) 2

12. If John has J marbles and Peter has P marbles, what could
you write for the number of marbles they have altogether? ....

13. $\boldsymbol{a + 3a}$ can be written more simply as $\boldsymbol{4a}$.

Write these more simply, where possible:

$2a + 5a =$ .... 13(a) 1

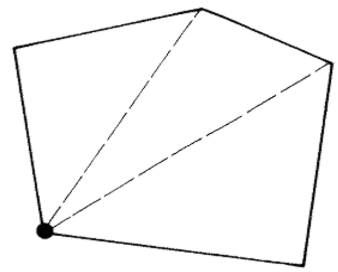
$2a + 5b =$ .... $3a - (b + a) =$ .... 13(b) 3

$(a + b) + a =$ .... $a + 4 + a - 4 =$ .... 13(d) 2

$2a + 5b + a =$ .... $3a - b + a =$ .... 13(e) 4

$(a - b) + b =$ .... $(a + b) + (a - b) =$ .... 13(h) 3

14. What can you say about r if $r = s + t$
and $r + s + t = 30$ 14 3



15. In a shape like this
you can work out the number of diagonals by
taking away 3 from the number of sides.

So, a shape with 5 sides has 2 diagonals;

a shape with 57 sides has .... diagonals; 15(a) 2

a shape with k sides has .... diagonals. 15(b) 3

16. What can you say about c if $c + d = 10$
and c is less than d 16 3

17. Mary's basic wage is £20 per week.
She is also paid another £2 for each hour of overtime that she works.

If h stands for the number of hours of overtime that she works, and
if W stands for her **total** wage (in £s),
write down an equation connecting W and h: .... 17(a) 4

What would Mary's total wage be if she
worked 4 hours of overtime? ....

18. When are the following true – always, never, or sometimes?
Underline the correct answer:

$A + B + C = C + A + B$ Always Never Sometimes, when ....

$L + M + N = L + P + N$ Always Never Sometimes, when .... 18(b) 4

19. $a = b + 3$. What happens to a if b is increased by 2? ....

$f = 3g + 1$. What happens to f if g is increased by 2? ....

20. Cakes cost c pence each and buns cost b pence each.

If I buy 4 cakes and 3 buns,
what does $4c + 3b$ stand for? .... 20 $\boxed{4}$

21. If this equation is true when $x = 6$, $\quad (x + 1)^3 + x = 349$

then what value of x will make this equation true? $\quad (5x + 1)^3 + 5x = 349$

x = ... 21 $\boxed{4}$

22. Blue pencils cost 5 pence each and red pencils cost 6 pence each.
I buy some blue and some red pencils and altogether it costs me 90 pence.

If b is the number of blue pencils bought, and
if r is the number of red pencils bought,
what can you write down about b and r? .... 22 $\boxed{4}$

23. You can feed any number into this machine:

$$\rightarrow \boxed{+\ 10} \longrightarrow \boxed{\times\ 5} \rightarrow$$

Can you find another machine that has the same overall effect?

$$\rightarrow \boxed{\times \ldots\ldots\ldots} \longrightarrow \boxed{+ \ldots\ldots\ldots} \rightarrow$$

Practice Item 1

1. What number does $a + 4$ stand for if $a = 2$ ....

if $a = 5$ ....

What number does $4a$ stand for if $a = 2$ ....

if $a = 5$ ....

Practice Item 2

2. Fill in the gaps:

Work down the page

$x \longrightarrow 3x$
$2 \longrightarrow 6$
$5 \longrightarrow$ ....

$x \longrightarrow x + 3$
$5 \longrightarrow 8$
$4 \longrightarrow$ ....
$n \longrightarrow$ ....

$x \longrightarrow 7x$
$2 \longrightarrow$ ....

$x \longrightarrow x + 8$
$3 \longrightarrow$ ....