



UNIVERSIDAD DE BELGRANO

# Documentos de Trabajo

Facultad de Ingeniería

Variación de las aberraciones introducidas por  
una lente oftálmica monofocal al modificar  
la pupila

N° 265

Silvia A. Comastri  
Gabriel Martín  
Arturo Bianchetti

Departamento de Investigaciones  
Marzo 2011

Universidad de Belgrano  
Zabala 1837 (C1426DQ6)  
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina  
Tel.: 011-4788-5400 int. 2533  
e-mail: [invest@ub.edu.ar](mailto:invest@ub.edu.ar)  
url: <http://www.ub.edu.ar/investigaciones>

Silvia A. Comastri<sup>1</sup>, Gabriel Martin<sup>2</sup>, Arturo Bianchetti<sup>3</sup>

1. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas; Grupo de Óptica y Visión-Facultad de Ingeniería-Universidad de Buenos Aires; Facultad de Ingeniería-Universidad de Belgrano-Buenos Aires
2. Reichert Inc-USA; Grupo de Óptica y Visión-Facultad de Ingeniería-Universidad de Buenos Aires
3. Grupo de Óptica y Visión-Facultad de Ingeniería-Universidad de Buenos Aires

**Palabras clave:** aberraciones, variación de pupila, lente oftálmica

## Resumen

Generalmente, la imagen formada por cualquier sistema óptico no es idéntica al objeto. Para cada posición del punto objeto y cada pupila, las diferencias entre la imagen ideal y real se cuantifican mediante la aberración del frente de ondas. Esta función suele evaluarse expandiéndola en polinomios Zernike y hallando los coeficientes del desarrollo mediante trazado de rayos. La lente oftálmica que corrige miopía, hipermetropía, etc. es un sistema óptico de uso corriente. Para el sistema gafa-ojo, la componente que limita la apertura del haz que llega a la retina (denominada diafragma de apertura) es el iris y su anti-imagen a través del sistema, es la pupila de entrada. Esta pupila no es fija pues sus parámetros varían al cambiar la excentricidad del punto de fijación, la ubicación relativa entre componentes, la iluminación, la acomodación, el estado psicofísico, etc. En artículos previos obtenemos fórmulas para calcular coeficientes Zernike para cierta pupila en función de los computados para una pupila dilatada y descentrada. Estas fórmulas permiten evaluar los correspondientes diagramas de puntos (siendo cada punto la intersección de un rayo con el plano imagen). En el presente artículo, considerando un sistema gafa monofocal estándar-diafragma, un objeto en el eje óptico de la lente y diferentes diafragmas ficticios, validamos los diagramas de puntos que surgen de nuestras fórmulas comparándolos con los obtenidos mediante trazado de rayos.

## Abstract

Usually, the image formed by any optical system is not identical to the object. For each object point position and each pupil, the differences between the ideal and real image are quantified by the wavefront aberration. This function is often evaluated expanding it in Zernike polynomials and finding the expansion coefficients by means of ray tracing. The ophthalmic lens which corrects myopia, hyperopia, etc. is an optical system of current use. For the system ophthalmic lens-eye, the component that limits the aperture of the beam reaching the retina (termed aperture stop) is the iris and its anti-image through the system is the entrance pupil. This pupil is not fixed since its parameters vary when the fixation point eccentricity, the relative location of components, the illumination, the accommodation, the psychophysical state, etc. vary. In previous articles we obtain formulas to calculate Zernike coefficients for a given pupil in terms of those computed for another dilated and decentered pupil. These formulas enable the computation of the corresponding spot diagrams (each point being the intersection of a ray with the image plane). In the present article, considering a system monofocal standard ophthalmic lens-stop, an object lying on the lens optical axis and different fictitious stops, we validate the spot diagrams that result from our formulas comparing them to those obtained via ray tracing.

## 1. Introducción

Las lentes existen desde épocas remotas, por ejemplo, en Creta se tallaron lentes de cristal de distintos aumentos (Siglos XXX a XX AC) y en la Basílica de San Nicolo-Venecia se pintó un fresco en el que aparece un caballero utilizando gafas (1352 DC). En las últimas décadas, los avances tecnológicos posibilitaron la fabricación a gran escala de gafas monofocales (para miopes, hipermétropes y/o ojos astigmáticos); bifocales y progresivas (para présbitas); etc. (Figura 1 (a)). Hace unos 10 años, comenzó a emplearse la tecnología Freeform (tallado punto a punto) que facilita la manufactura de gafas tanto estándar como personalizadas.

Para el sistema gafa-ojo, solo llega a la retina la luz que pasa a través del diafragma de iris el cual actúa como diafragma de apertura (Figura 1 (b)). Este diafragma o, equivalentemente, la pupila de entrada (Figura 1 (c)) o la pupila de salida (que es la imagen de la pupila de entrada a través del sistema) influye en el tipo de imperfección (inclinación, distorsión y/o borronero) presente en la imagen proporcionada por la gafa. Las imperfecciones se cuantifican mediante la aberración del frente de ondas. Para un punto objeto y una pupila fijos, el análisis de esta función se simplifica considerándola una suma ponderada de polinomios Zernike de distintos órdenes asociados a desenfoque, astigmatismo, coma, aberración esférica, etc. (Figura 1 (d)). Los coeficientes del desarrollo suelen hallarse mediante la técnica de trazado rayos con PC<sup>1-5</sup>. En varias situaciones se evalúan coeficientes mediante trazado de rayos para una dada pupila (denominada original) e interesa conocer los correspondientes a otra pupila (denominada

nueva) en términos de los originales<sup>6-8</sup>. Nosotros implementamos<sup>9-12</sup> un método analítico y uno gráfico para transformar coeficientes al contraer, descentrar y/o rotar una pupila circular.

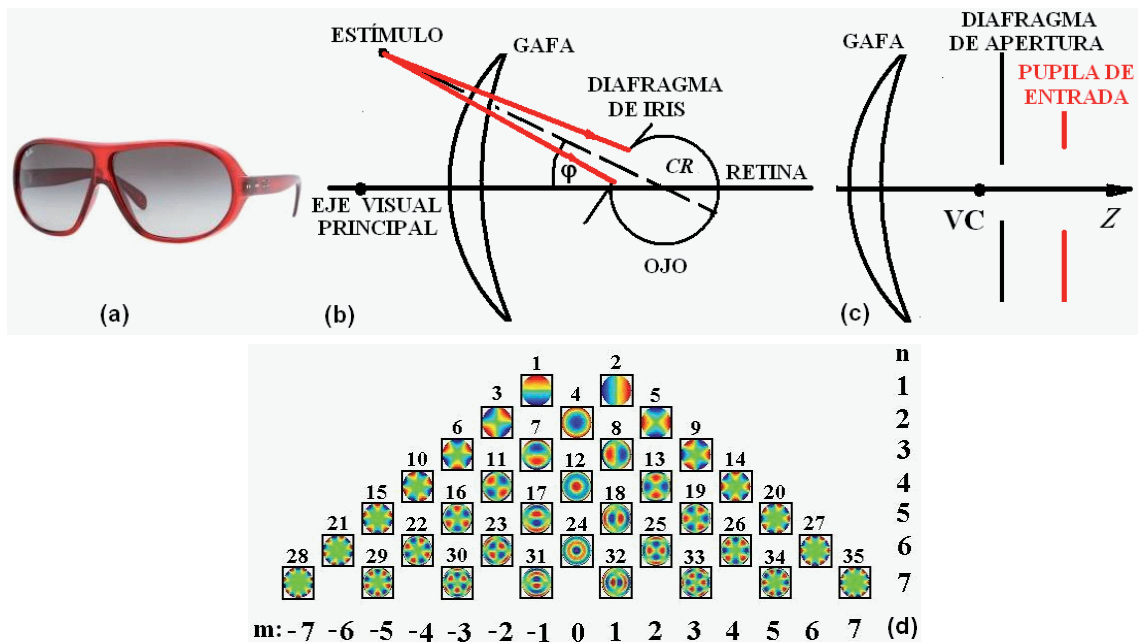


Figura 1. (a) Gafa. (b) Ojo rotado mirando un estímulo fuera del eje visual principal (VC: vértice corneal; CR: centro de rotación a 13 mm de VC). (c) Sistema gafa-diafragma de apertura. (d) Polinomios Zernike de hasta orden  $n=7$

El estudio de cómo y cuanto varían las aberraciones introducidas por una gafa utilizada por un sujeto al cambiar la excentricidad del objeto y/o la pupila se complica debido a propiedades oculares. El ojo rota al variar el ángulo ( $\phi$ ) que subtende el punto objeto con el eje visual principal, dicho punto es extra-axial para la gafa y axial para el ojo siendo la pupila de entrada del sistema gafa-ojo diferente para cada  $\phi$ . Además, desplazamientos involuntarios de la gafa respecto de su ubicación correcta hacen que las aberraciones varíen; el ojo percibe estímulos foveales y extra-foveales simultáneamente y el tamaño y centrado del iris dependen de factores tales como acomodación, estado psicofísico, etc.<sup>13-17</sup>. Adicionalmente, por ejemplo para una lente progresiva estándar, las aberraciones pueden ser muy diferentes para su zona superior, central e inferior asociadas respectivamente a objeto lejano, a distancia intermedia y cercano.

Como etapa previa al estudio de las variaciones que pueden sufrir las aberraciones introducidas por gafas monofocales o progresivas al variar la excentricidad del estímulo y/o la pupila, en este trabajo (cuyos resultados preliminares presentamos en AFA2010<sup>18</sup>) validamos la precisión de nuestro método analítico para transformar coeficientes Zernike. Nos limitamos a considerar un objeto axial lejano y un sistema compuesto por una gafa estándar de 7D y un diafragma 15mm atrás de ella, de tamaño y descentrado ficticio y ubicado en un plano que sería el de la pupila de entrada ocular si la gafa estuviese siendo usada por un sujeto. En la Sección 2 sintetizamos nuestro método analítico y en la 3 describimos el sistema gafa-diafragma. En la Sección 4, para diferentes pupilas y planos imagen, comparamos entre sí los diagramas de punto obtenidos mediante nuestro método analítico y usando trazado de rayos.

## 2. Desarrollo Zernike de la función aberración del frente de ondas y transformación de coeficientes para diferentes pupilas

La aberración del frente de ondas,  $W$ , es el camino óptico a lo largo de un rayo desde el frente de ondas ideal en la pupila de salida (denominado esfera de referencia) al real ( $W=[UU]$  en Figura 2 (a)). Para un punto objeto,  $W$  puede considerarse una función de coordenadas polares normalizadas en la esfera

de referencia en la pupila de salida,  $(\rho, \theta)$ . Si  $C_n^m$  son coeficientes, la expansión de  $W(\rho, \theta)$  en polinomios Zernike  $Z_n^m(\rho, \theta)$  es<sup>1,5</sup>

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=-n}^n C_n^m Z_n^m(\rho, \theta)$$

El orden  $n$  (con  $n \geq 0$  y  $n_{\max} \geq n \geq 0$ ) y la frecuencia  $m = -n + 2k$  (con  $k$  entero y  $0 \leq k \leq n$ ) son enteros y las aberraciones son de alto orden si  $n \geq 3$ . Denominando  $R_n^{|m|}(\rho)$  a los polinomios radiales de Zernike;  $f^m(\theta)$  a una función angular tal que  $f^m(\theta) = \cos(m\theta)$  si  $m \geq 0$  y  $f^m(\theta) = \sin(|m|\theta)$  si  $m < 0$  y  $N_n^m$  a los factores de normalización propuestos por OSA<sup>5</sup>, tenemos  $Z_n^m(\rho, \theta) = N_n^m R_n^{|m|}(\rho) f^m(\theta)$ . Cada  $Z_n^m$  está asociado a una aberración de orden  $n$  balanceada con otras de orden inferior (como ejemplo en la Figura 2 (b) mostramos la aberración esférica) de modo de maximizar la intensidad normalizada en el pico de difracción o cociente de Strehl (cociente entre las alturas de picos de la PSF real y la limitada por difracción). Para aberraciones no muy grandes, esto corresponde a minimizar la raíz cuadrática media del error del frente de ondas<sup>1</sup>,  $RMS = (\sum C_j^2)^{1/2}$  (con  $j = [n(n+2)+m]/2$ ). Adicionalmente, si  $R$  es el radio de la esfera de referencia en la pupila de salida y  $n$  el índice de refracción del espacio imagen, la aberración transversal,  $(\Delta\xi, \Delta\eta)$ , es<sup>1-3</sup>

$$\Delta\xi = (-R/n) \partial W / \partial X \quad \Delta\eta = (-R/n) \partial W / \partial Y \tag{2}$$

Por otra parte, en nuestro método analítico para transformar coeficientes Zernike originales en nuevos<sup>9-12</sup>, consideramos que los modos originales corresponden a una pupila de radio  $a$  y los coeficientes asociados,  $C_j$ , son los elementos de un vector columna  $\mathbf{C}$  que suponemos se han evaluado mediante trazado de rayos. Los modos nuevos corresponden a una pupila de radio  $b$  descentrada y los coeficientes nuevos,  $C'_j$ , son los elementos de un vector columna  $\mathbf{C}'$ . En la pupila original consideramos coordenadas cartesianas  $(X, Y)$ ; cartesianas normalizadas  $(x, y) = (X/a, Y/a)$  y polares  $(\rho, \theta)$  (con  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $\cos(\theta) = x/\rho$  y  $\sin(\theta) = y/\rho$ ) y, en la pupila nueva, coordenadas análogas pero primadas. Para un corrimiento  $(d, g)$  del origen pupilar, resulta

$$X = X' + d \quad Y = Y' + g \quad f = (d^2 + g^2)^{1/2} \tag{3}$$

Definiendo  $B = b/a$ ,  $D = d/a$ ,  $G = g/a$  y  $F = f/a$  (con  $B \leq 1$  y  $F < 1 - B$ ) y si  $\mathbf{T}$  es la matriz transformación cuyos elementos expresamos en función de  $B$ ,  $D$  y  $G$  en Ref. 11, resulta

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}(B, D, G) * \mathbf{C} \tag{4}$$

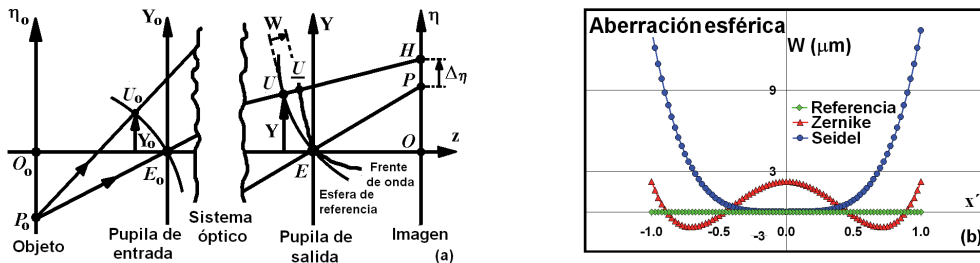


Figura 2. (a) Función aberración ( $W$ ) y aberración transversal ( $\Delta\eta$ ). (b) Aberración esférica pura (Seidel) y de Zernike

### 3. Parámetros del sistema gafa-diafragma

El sistema óptico que consideramos consiste en una lente oftálmica estándar y un diafragma ubicado en un plano que coincidiría con el de la pupila de entrada ocular si la gafa estuviese siendo usada por un sujeto y el objeto es axial y centrado en el punto O (Figura 3 (a)).

- Lente oftálmica:** La lente es un menisco positivo fabricado de diámetro  $v_G=50\text{mm}$ , índice de refracción  $n_G=1.502$  y espesor en el borde  $e_{\text{bor}}=1.3\text{mm}$  y el diámetro del armazón es  $v_m=42.2\text{mm}$ . Los radios de la 1<sup>er</sup> y 2<sup>da</sup> cara,  $R_1$  y  $R_2$ , son positivos<sup>4</sup> y el parámetro de forma<sup>3</sup>  $u=(R_2+R_1)/(R_2-R_1)$  es positivo. Midiendo potencias en dioptrías y distancias en milímetros en todo lo que sigue, la potencia de la lente supuesta delgada (indicada con subíndice t) es  $\Phi_{Gt}=\Phi_1+\Phi_2=7\text{ D}$  ( $\Phi_1=1000(n_G-1)/R_1$  y  $\Phi_2=1000(1-n_G)/R_2$ ) y, considerando  $R_1=60\text{mm}$ , evaluamos  $R_2=367.3\text{mm}$ . Mediante la fórmula paraxial para la potencia de lentes gruesas<sup>19</sup>,  $\Phi_G=\Phi_{Gt}-\Phi_{Ad}$  (con  $\Phi_{Ad}=\Phi_1\Phi_2e_{\text{ax}}/(1000n_G)$ ), obtenemos el espesor axial  $e_{\text{ax}}=5.9\text{mm}$  y  $\Phi_{Ad}=-0.04\text{ D}$  ( $\Phi_{Ad}\ll\Phi_{Gt}$ ).

- Objeto e imagen:** El objeto es axial y está en infinito ( $s=-99999999\text{mm}$ ) y su imagen paraxial está en el foco imagen de la lente a distancia  $s'=f^{(1)}=143.18\text{mm}$  de su primer cara.

- Diafragma y pupila de salida del sistema (PS):** El diafragma está en el plano de la pupila de entrada ocular y actúa como pupila de salida del sistema. Considerando una distancia de vértice típica ( $D_G=12\text{mm}$ ) y la distancia entre el vértice corneal (VC) y la pupila de entrada del ojo esquemático de Le Grand ( $s'_1=3.04\text{mm}\approx 3\text{mm}$ ), la distancia desde la 2<sup>da</sup> cara de la lente al diafragma es  $p=D_G+|s'_1|=15\text{mm}$  y desde la 1<sup>er</sup> cara es  $Z_{PS}=p+e_{\text{ax}}=20.9\text{mm}$ .

- Pupila de entrada del sistema (PE):** PE es la anti-imagen del diafragma y, considerando aproximación paraxial y lente gruesa, su distancia a la 1<sup>er</sup> cara de la lente es  $Z_{PE}=22.07\text{mm}$ .

- Tamaños y centrados de las pupilas:** Denotamos  $V$  (o  $V'$ ) al diámetro y  $g$  al descentrado de PS y  $V_o$  (o  $V'_o$ ) al diámetro y  $g_o$  al descentrado de PE. Consideramos 3 pupilas de salida ficticias, una original y dos nuevas (Figura 3 (b)). La pupila original está centrada en el eje óptico y su diámetro es  $V=2a=36\text{mm}$  que es el necesario para no recortar rayos que pasan por el armazón (o sea  $v_m=V s' / (s' - Z_{PS})$ ) y, en aproximación paraxial, resulta  $V_o/2=20.9\text{mm}$ . Las pupilas nuevas tienen diámetro  $V'=2b=6\text{mm}$  (que podría corresponder a un ojo real), una está centrada en el eje óptico y la otra está descentrada con  $g=-14.9\text{mm}$  (levemente inferior a la máxima posible) y, en aproximación paraxial, resulta  $V'_o/2=3.48\text{mm}$  y  $g_o=-17.3\text{mm}$ . Consecuentemente, la pupila original es centrada de radio  $a=18\text{mm}$  y las 2 pupilas nuevas tienen radio  $b=3\text{mm}$  y consideramos los 2 siguientes casos.

Caso (i):  $B=b/a=0.17$ ;  $D=G=0$  (pupila centrada)

Caso (ii):  $B=b/a=0.17$ ;  $D=0$ ;  $G=g/a=-0.83$  (pupila desplazada verticalmente con  $g=-14.9\text{mm}$ )

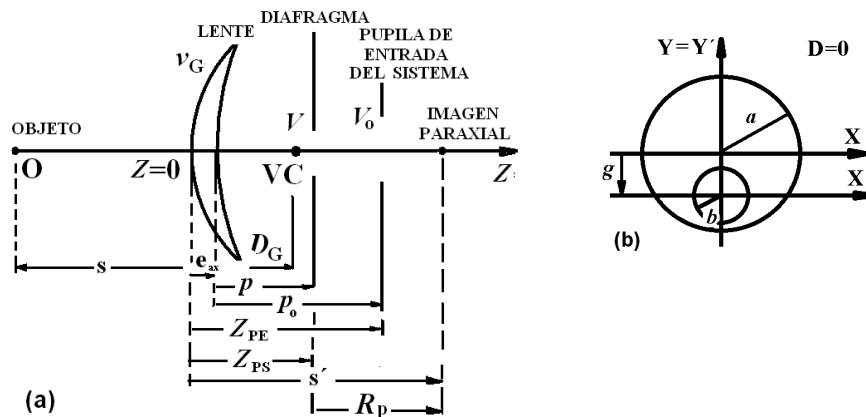


Figura 3. (a) Lente convergente y diafragma que actúa como pupila de salida. El origen de Z es la 1<sup>er</sup> cara de la lente y  $v_G$ ,  $V$  y  $V_o$  denotan los diámetros de lente, diafragma y pupila de entrada. (b) Escalado y descentrado de la pupila.

## 4. Metodologías para obtener los diagramas de puntos y resultados

A continuación describimos las dos metodologías que empleamos para el sistema gafa-diafragma para obtener diagramas de puntos y comparamos los resultantes diagramas entre sí.

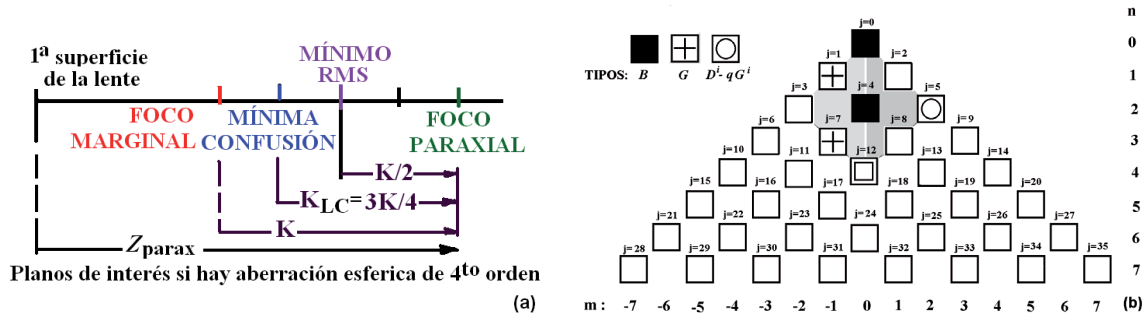


Figura 4. (a) Planos imagen característicos cuando hay aberración esférica de 4º orden. (b) Modos nuevos al escalar y descentrar la pupila verticalmente para el caso de aberración original tal que  $C_{12} \neq 0$  y  $C_j = 0$  si  $j \neq 12$

### 4.1 Diagramas de puntos a partir de nuestro método de transformación de coeficientes

Consideramos las expansiones Zernike de la aberración del frente de ondas; las aberraciones transversales y los diagramas de puntos para la pupila original y las 2 nuevas.

#### 4.1.1 Aberraciones del frente de ondas y coeficientes para las pupilas original y nuevas

- Aberraciones originales:** Como el objeto es axial y la lente y el diafragma están centrados, las únicas aberraciones posibles son desenfoque y aberración esférica y, para la lente tenida en cuenta, la aberración esférica es positiva (el foco marginal está más cerca de la lente que el paraxial). Entonces, considerando el plano imagen que anula el desenfoque y despreciando las aberraciones esféricas de orden superior al 4º (o sea  $C_j = 0$  si  $j \neq 12$ ), de ec.(1), W es tal que

$$W = C_{12} Z_{12} \quad C_{12} > 0 \quad (5)$$

Para un sistema con aberración esférica de 4º orden hay 4 planos imagen típicos<sup>1-3</sup> (Figura 4 (a)). El plano del foco paraxial corresponde a rayos que subtienden ángulos pequeños; el del foco marginal corresponde a rayos que pasan por el borde del diafragma de apertura; el de mínima confusión corresponde a la mínima mancha circular y está ubicado a 3/4 de la distancia desde el foco paraxial al marginal y, finalmente, el de mínima RMS. Este último plano corresponde al foco de difracción<sup>1</sup>; está ubicado a mitad de camino entre el foco paraxial y marginal y es el considerado en la expansión Zernike de la aberración del frente de ondas.

- Aberraciones nuevas:** Según nuestro método gráfico<sup>10-11</sup> de transformación de coeficientes (Figura 4 (b)), si la pupila se contrae ( $D=G=0$ ), la aberración esférica original genera modos tipo B (pistón, desenfoque y aberración esférica) mientras que si la pupila se contrae y descentra verticalmente ( $D=0$ ;  $G=-0.83$ ), se agregan modos tipo G y tipo  $D^l-qG^i$  (tilt, astigmatismo y coma). Según nuestro método analítico<sup>11</sup>, dejando de lado pistón (que es constante y carece de interés) y tilt (que solo desplaza la imagen), los coeficientes que pueden ser no nulos son

$$\begin{aligned} C'_4 &= C_{12} (15)^{1/2} B^2 (4F^2 + B^2 - 1) & C'_5 &= C_{12} 2 (30)^{1/2} B^2 (D^2 - G^2) \\ C'_7 &= C_{12} 2 (10)^{1/2} B^3 G & C'_{12} &= C_{12} B^4 \end{aligned} \quad (6)$$



Por simplicidad, definimos un coeficiente adimensional,  $C'_j{}^{[1]}$ , que es numéricamente igual al valor que tendría el coeficiente  $j$ -ésimo si se tuviese coeficiente  $j=12$  unitario (es decir  $C_{12}{}^{[1]}=1$ ), entonces tenemos  $C'_j/C_{12}{}^{[1]}=C'_j{}^{[1]}/C_{12}{}^{[1]}$  y expresamos cada coeficiente nuevo en la forma

$$C'_j = C_{12} C'_j{}^{[1]} \quad (7)$$

Reemplazando la ec.(7) en (1), la aberración del frente de ondas nueva es

$$W' = C_{12} ( C'_0{}^{[1]} Z'_0 + C'_1{}^{[1]} Z'_1 + C'_4{}^{[1]} Z'_4 + C'_5{}^{[1]} Z'_5 + C'_7{}^{[1]} Z'_7 + C'_{12}{}^{[1]} Z'_{12} ) \quad (8)$$

Para el caso (i), de las ecs.(6), la aberración esférica nueva es muy pequeña y tenemos

$$C'_4{}^{[1]}|_{G=0} = -0.105 \quad C'_{12}{}^{[1]}|_{G=0} = 0.001 \quad (9)$$

Para el caso (ii), las aberraciones dominantes son desenfoque y astigmatismo y resulta

$$C'_4{}^{[1]} = 0.194 \quad C'_5{}^{[1]} = -0.211 \quad C'_7{}^{[1]} = -0.024 \quad C'_{12}{}^{[1]} = 0.001 \quad (10)$$

#### 4.1.2 Aberraciones transversales para pupilas original y nueva

- **Pupilas nuevas:** Para la coordenada normalizada  $x'=X'/b$ , se tiene  $\partial W'/\partial X'=(1/b)\partial W'/\partial x'$  y, de ec.(2), resulta  $\Delta\xi_j=(-R/(nb)) \partial W'/\partial x'$  (análogamente para  $y'=Y'/b$ ). El término correspondiente al modo  $j$ -ésimo de la función aberración (ec.(1)) es  $W'_j(\rho',\theta')=C'_j Z'_j(\rho',\theta')$  y, definiendo<sup>11</sup>

$$\beta = R / (n b) \quad (11)$$

tenemos  $\Delta\xi_j/\beta = -C'_j \partial Z'_j / \partial x'$  y  $\Delta\eta_j/\beta = -C'_j \partial Z'_j / \partial y'$ . Utilizando la ec.(7) y definiendo el parámetro  $\kappa$  mediante

$$\kappa = C_{12} \beta = C_{12} R / (n b) \quad (12)$$

consideramos la aberración transversal adimensionalizada,  $(\Delta\xi_j/\kappa, \Delta\eta_j/\kappa)$ , que es tal que

$$\Delta\xi_j/\kappa = -C'_j{}^{[1]} \partial (Z'_j) / \partial x' \quad \Delta\eta_j/\kappa = -C'_j{}^{[1]} \partial (Z'_j) / \partial y' \quad (13)$$

( $\Delta\eta_j, \Delta\xi_j, \kappa, C_{12}, R$  y  $b$  se miden en milímetros). Derivamos cada  $Z'_j(\rho',\theta')$  de Ref.5 considerando, por un lado, que  $\partial\rho'/\partial x'=x'/\rho'$  y  $\partial\rho'/\partial y'=y'/\rho'$  y, por el otro, relaciones entre las coordenadas polares y cartesianas (por ejemplo  $\rho'\cos(\theta')=x'$ ;  $\rho'\sin(\theta')=y'$ ;  $\rho'^2=x'^2+y'^2$ ; etc.).

- **Pupila original:** Las coordenadas cartesianas normalizadas son  $x=X/a$  e  $y=Y/a$  y, despreciando la variación de  $R$  al desplazar el plano imagen, en vez de  $\beta$ , definimos<sup>11</sup>  $\alpha$  mediante  $\alpha=R/(na)$ . Resulta  $\Delta\xi_{12}/\alpha=-C_{12} \partial Z_{12} / \partial x$  y  $\Delta\eta_{12}/\alpha=-C_{12} \partial Z_{12} / \partial y$  y, teniendo en cuenta que  $\kappa=C_{12}\beta=C_{12}\alpha/B$ , por conveniencia, consideramos la aberración transversal adimensionalizada:

$$\Delta\xi_{12}/\kappa = -B \partial Z_{12} / \partial x \quad \Delta\eta_{12}/\kappa = -B \partial Z_{12} / \partial y \quad (14)$$

#### 4.1.3 Diagramas de puntos a partir de nuestro método analítico

Cada punto de un diagrama corresponde a un rayo que intersecta la pupila de salida en uno de los puntos de la malla radial de Figura 5 (a) siendo la aberración transversal adimensionalizada una medida de cuanto se aparta el punto considerado del diagrama del punto imagen de referencia. Aunque los diagramas de puntos que se obtienen directamente a partir del desarrollo Zernike de  $W$  corresponden al plano imagen de mínima RMS original, variando el coeficiente de desenfoque, pueden obtenerse diagramas en cualquier otro plano<sup>2</sup>.



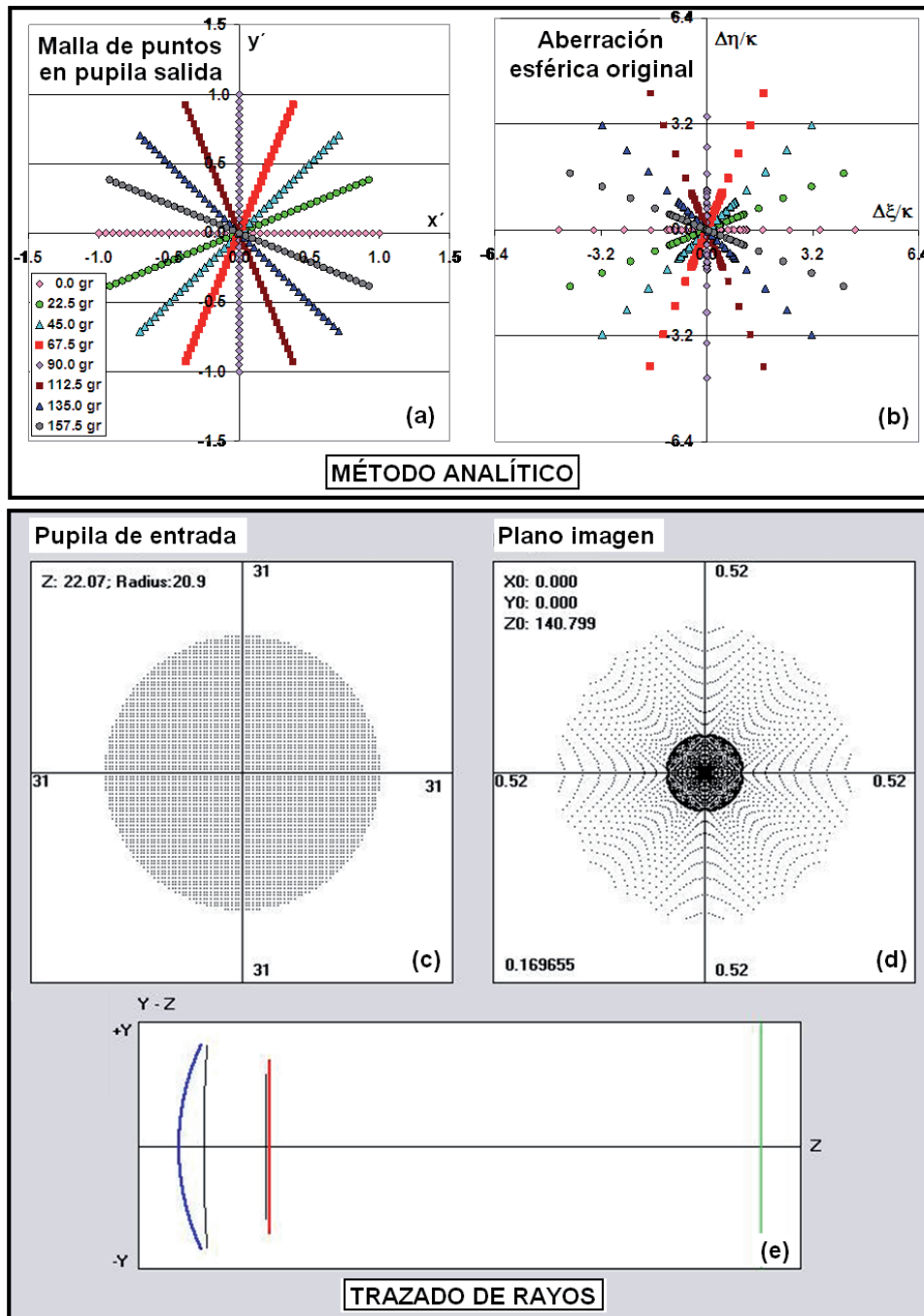


Figura 5. Diagramas de punto para la pupila original de semi-diámetro  $a=18\text{mm}$ . (a) Malla de puntos considerada en la pupila de salida para el cálculo analítico (gr indica grados). (b) Diagrama de puntos en el plano de mínima RMS que surge del cálculo analítico. (c) Malla de puntos considerada en la pupila de entrada para el trazado de rayos. (d) Diagrama de puntos obtenido mediante trazado de rayos. (e) Esquema del sistema óptico considerado.

- **Pupila original:** En el plano de mínima RMS original, utilizando la ec.(14), obtenemos el diagrama de puntos correspondiente a aberración esférica de Figura 5 (b).

- **Pupilas nuevas:** Para el caso (i) solo hay desenfoque y aberración esférica. Para el caso (ii), en el plano de mínima RMS original y utilizando la ec.(13), obtenemos los diagramas de puntos para cada aberración por separado de Figura 6 (a)-(d) en la cual la escala es 100 veces menor para aberración esférica y 10 veces menor para coma que para desenfoque y astigmatismo. En la Figura 6 (f) mostramos el diagrama de puntos para la aberración total que, de acuerdo con ec.(10), está dominada por desenfoque y astigmatismo representados juntos en Figura 6 (e).

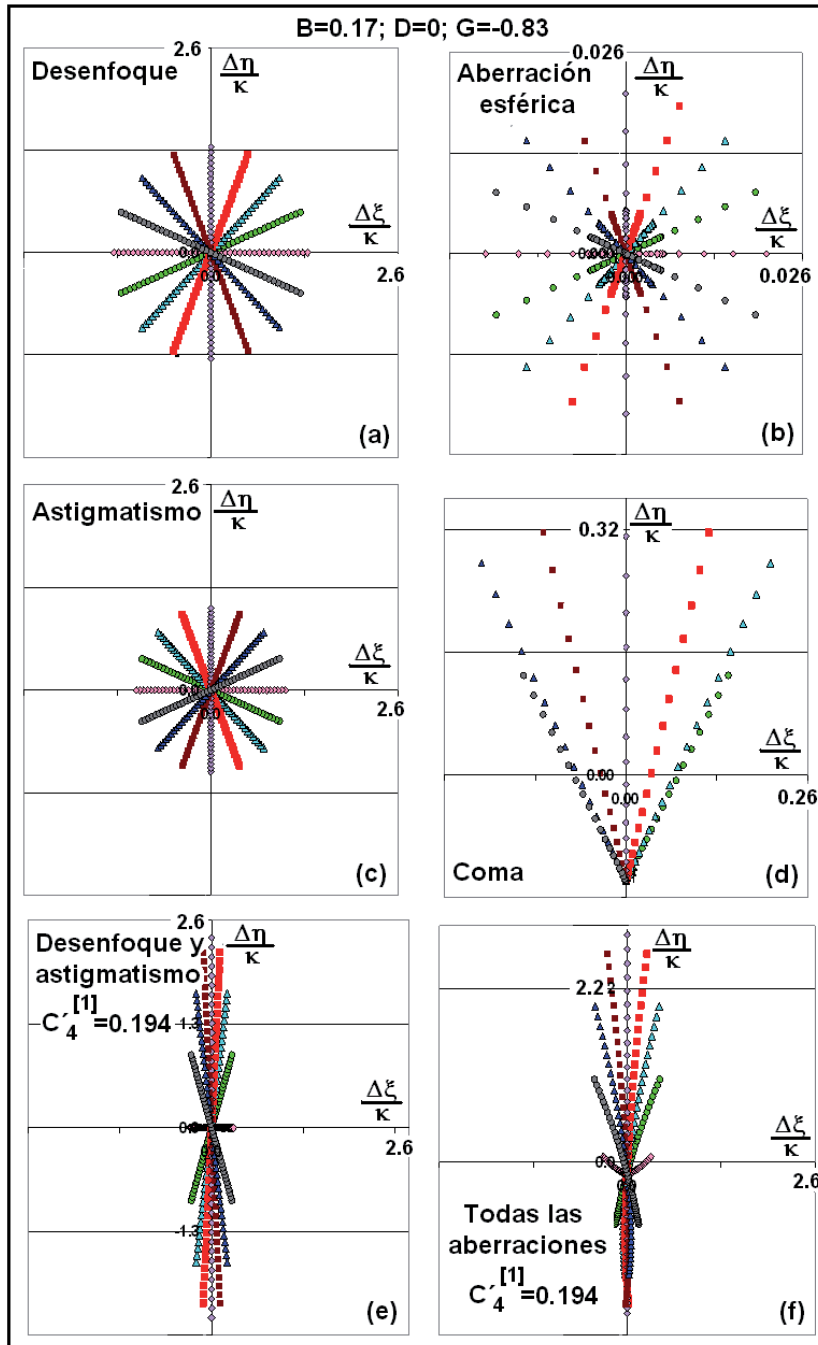



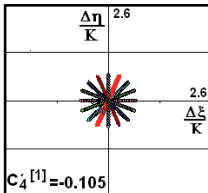
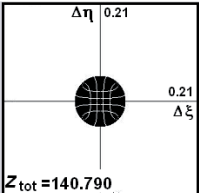
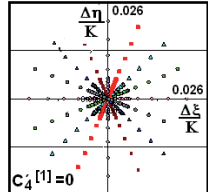
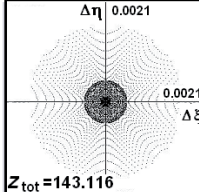
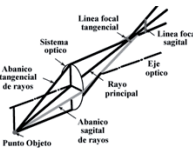
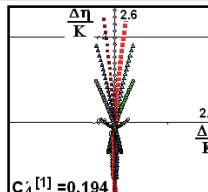
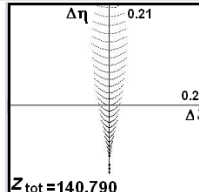
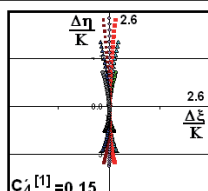
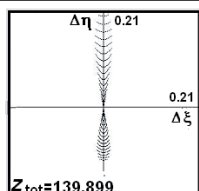
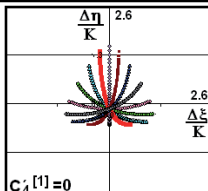
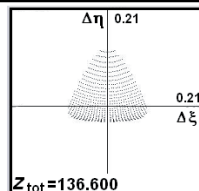
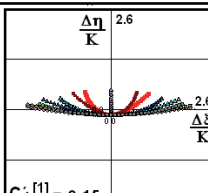
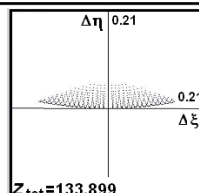
Figura 6. Diagramas de puntos analíticos para el caso (ii) y plano imagen en el de mínima RMS original.

#### 4.2 Comparación de diagramas de puntos analíticos con obtenidos por trazado de rayos

Implementamos un programa de computadora para trazado de rayos, denominado GMRT, que suministra el diagrama de puntos en el plano imagen que se desee. Para comparar estos diagramas con los analíticos, tenemos en cuenta que, variar el plano de enfoque (caracterizado por su distancia longitudinal  $Z_{tot}$  medida desde la 1<sup>er</sup> cara de la lente) al trazar rayos equivale a modificar el coeficiente  $C_4^{[1]}$  respecto al valor que resulta en el plano de mínima RMS al utilizar el método analítico. Para verificar el correcto funcionamiento de GMRT, antes de realizar esta comparación, trazamos rayos paraxiales (es decir correspondientes a una pupila muy pequeña) obteniendo que el plano imagen paraxial está a distancia  $f^{(1)}=143.18\text{mm}$  de la 1<sup>er</sup> cara de la gafa la cual coincide con la calculada en Sección 3. En lo que sigue, describimos brevemente el modo en que GMRT traza rayos y; analizando cuales son los planos imagen de interés, mostramos los diagramas de puntos obtenidos comparándolos con los del método analítico.

4.2.1 Rayos trazados

Nuestro programa GMRT obtiene cada diagrama de puntos trazando rayos mediante la utilización de la ley de Snell<sup>1-4</sup> vectorial y hallando la intersección de los rayos con el plano imagen deseado. Para definir los rayos a trazar, en la pupila de entrada del sistema consideramos una malla compuesta por puntos distribuidos en disposición cuasi-rectangular (Figura 5 (c)) siendo su espaciado angular,  $\Delta\vartheta$ , constante ( $\vartheta$  es el ángulo de apertura y los puntos que componen la malla resultan estar equiespaciados para objeto en infinito).

| TABLA 1: Diagramas de puntos para pupilas nuevas (casos (i) y (ii))  |               |             |                |  |  |
|--|---------------|-------------|----------------|--|--|
| Casos  |               |             |                | Diagramas analíticos   | Diagramas via trazado de rayos   |
| Pupila   | Plano imagen  | $C_4^{[1]}$ | $Z_{tot}$ (mm) |  |  |
| <b>B=0.17</b><br><b>G=0</b><br><br>ABERRACION ESFERICA DE CUARTO ORDEN | Min RMS(a)    | -0.105      | 140.79         | <br>Escala: 2.6    | <br>Escala: 0.21    |
|  | Min RMS(b)    | 0           | 143.12         | <br>Escala: 0.026 | <br>Escala: 0.0021 |
| <b>B=0.17</b><br><b>G=-0.83</b><br><br>ASTIGMATISMO DE SEGUNDO ORDEN  | Min RMS(a)    | 0.194       | 140.79         | <br>Escala: 2.6  | <br>Escala: 0.21  |
|  | L. Sagital    | 0.15        | 139.90         | <br>Escala: 2.6  | <br>Escala: 0.21  |
|  | Min RMS(b,g)  | 0           | 136.60         | <br>Escala: 2.6  | <br>Escala: 0.21  |
|  | L. Tangencial | -0.15       | 133.90         | <br>Escala: 2.6  | <br>Escala: 0.21  |

### 4.2.2 Diagramas de puntos obtenidos mediante ambos métodos

Eligiendo convenientemente los planos imagen en los cuales computar diagramas de puntos, denominamos  $\delta\eta$  al apartamiento a lo largo del eje  $\eta$  de un punto de un diagrama respecto al punto central. En el diagrama obtenido por trazado de rayos,  $\delta\eta^{(ray)}$  denota la aberración transversal,  $\Delta\eta$  mientras que en el del método analítico,  $\delta\eta^{(ana)}$  denota la aberración transversal adimensional de ec.(13),  $\Delta\eta/\kappa$ . Además, consideramos que el apartamiento máximo,  $\delta\eta_{max}$ , es el largo total del diagrama a lo largo del eje  $\eta$  dividido 2.

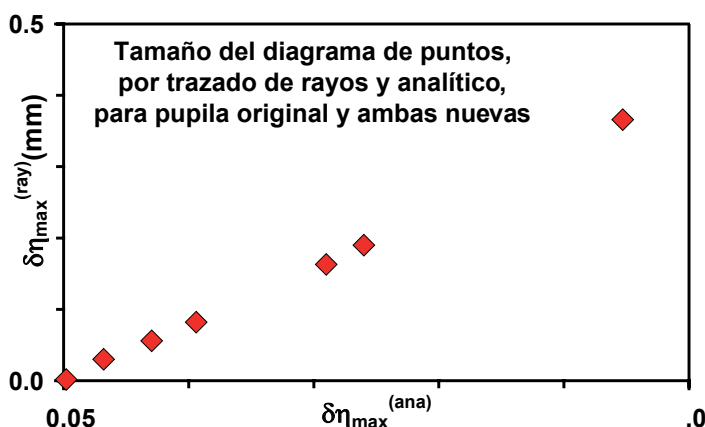
- **Pupila original:** Un plano de interés es el de mínima RMS ( $Min\ RMS_{(a)}$ ) que resulta estar en  $Z_{tot}=140.79$  mm. El diagrama de puntos consiste en un círculo central con alta densidad de puntos de semidiámetro  $\delta\eta_{int}^{(ray)}$  rodeado por un halo tal que  $\delta\eta_{max}^{(ray)}=0.366$ mm (Figura 5 (d)). Mediante trazado de rayos resulta  $(\delta\eta_{max}/\delta\eta_{int})^{(ray)}=3.6$  y, analíticamente,  $(\delta\eta_{max}/\delta\eta_{int})^{(ana)}=3.66$  y esta coincidencia indica que, como supusimos, las aberraciones de 6º orden son despreciables.

- **Pupilas nuevas:** En la Tabla 1 se muestran valores de  $C'_4^{[1]}$  y la distancia desde la 1ª cara de la lente al plano imagen ( $Z_{tot}$ ), los diagramas de puntos y las escalas para los casos (i) y (ii).

Para el caso (i), como solo puede haber desenfoque y aberración esférica, 2 planos de interés son los de mínima RMS para la pupila original ( $Min\ RMS_{(a)}$ ) y nueva ( $Min\ RMS_{(b)}$ ), el segundo corresponde a anular el coeficiente de desenfoque presente en el primero. La mancha central (sin considerar el halo) resulta ser unas 100 veces menor en  $Min\ RMS_{(b)}$  lo cual muestra cuanto disminuyen las aberraciones al enfocar la imagen alejando 2.3 mm el plano imagen.

Para el caso (ii), dejando de lado el desenfoque, la aberración dominante es astigmatismo que es tal que<sup>2,3</sup> el círculo de mínima confusión está en la mitad entre las líneas sagital y tangencial y es el mejor foco, o sea, el de mínima RMS (Tabla 1). Obtenemos 4 diagramas, el 1º en el plano de mínima RMS original; el 2º en el plano correspondiente a la línea astigmática sagital (L.Sagital), el 3º en el plano de mínima RMS para la pupila nueva ( $Min\ RMS_{(b,g)}$ ) y el 4º en el plano correspondiente a la línea astigmática tangencial (L.Tangencial).

Para las 3 pupilas consideradas, la escasa diferencia entre los diagramas de punto obtenidos mediante trazado de rayos y analíticamente nos permite validar nuestro método mostrando su confiabilidad para predecir el tamaño y la forma de la mancha de aberraciones en la imagen.



| Pupila    | Plano imagen             | $\delta\eta_{max}^{(ana)}$ | $\delta\eta_{max}^{(ray)}$ |
|-----------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a=18mm    | Min RMS <sub>(a)</sub>   | 4.47000                    | .3660                      |
| B=0.17    | Min RMS <sub>(a)</sub>   | 0.70400                    | .0560                      |
|           | Min RMS <sub>(b)</sub>   | 0.02100                    | .0016                      |
| B=0.17    | Min RMS <sub>(a)</sub>   | 2.40000                    | .1900                      |
|           | L. Sagital               | 2.10000                    | .1630                      |
| G=(-0.83) | Min RMS <sub>(b,g)</sub> | 1.06000                    | .0820                      |
|           | L. Tangencial            | .32000                     | .0300                      |

Figura 7. Gráfico  $\delta\eta_{max}^{(ray)}$  versus  $\delta\eta_{max}^{(ana)}$

Además, en el plano  $Min\ RMS_{(a)}$ , según ecs.(9) y (10)), tenemos  $C'_4^{[1]}|_{G=0}=-0.105$  para  $G=0$  y  $C'_4^{[1]}=0.194$  para  $G=-0.83$  y la diferencia entre los signos de estos coeficientes está de acuerdo con el hecho que los

correspondientes planos de mínima RMS para pupila nueva hallados mediante trazado de rayos están ubicados a sendos lados del plano de mínima RMS original. Por otro lado, en concordancia con lo predicho por la teoría de aberraciones de Seidel<sup>3</sup>, las cuasi-líneas sagital y tangencial presentes para  $G=-0.83$  casi equidistan del círculo de mínima confusión. Finalmente, graficando para la pupila original y las nuevas de los casos (i) y (ii),  $\delta\eta_{\max}^{(\text{ray})}$  versus  $\delta\eta_{\max}^{(\text{ana})}$  obtenemos que, como era de esperar dado que  $\kappa=C_{12}R/(nb)$  es una constante, hay una dependencia casi lineal entre  $\eta_{\max}^{(\text{ray})}$  y  $\delta\eta_{\max}^{(\text{ana})}$  (Figura 7 y Tabla 2).

## Comentarios finales

Analizamos cómo la contracción y el descentrado pupilar afectan las aberraciones de un sistema iluminado por un objeto axial lejano y compuesto por una gafa de 7 D y un diafragma ubicado en la pupila de entrada ocular. Validamos los diagramas de puntos obtenidos a partir de nuestro método analítico para transformar los coeficientes Zernike de la expansión de la aberración del frente de ondas, comparándolos con los que surgen trazando rayos con PC.

## Agradecimientos

Agradecemos los subsidios ANPCyT PICT 2006 N°1920, CIUNT 26/E410 y PIP N° 0308.

## Bibliografía

1. M. Born and B. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon, Oxford, 1987)
2. W. J. Smith, *Modern Optical engineering* (Mc Graw-Hill, New York, 1966)
3. R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics* (Longman, London, 1973)
4. M.S. Millán, J. Escofet, E. Perez, *Óptica Geométrica* (Ariel, Barcelona, 2004)
5. L. N. Thibos, R. A. Applegate, H.C. Howland, D.R. Williams, P. Artal, R. Navarro, M. C. Campbell, J.E. Greivenkamp, J. T. Schwiegerling, S. A. Burns, D. A. Atchinson, G. Smith, E.J. Sarver, "A VSIA-sponsored effort to develop methods and standards for the comparison of the wave-front aberration structure of the eye between devices and laboratories", *Vis. Sci. and its Appl.* **1**, OSA Tech. Digest Series, 236-239 (1999)
6. C. E. Campbell, "Matrix method to find a new set of Zernike coefficients from an original set when the aperture radius is changed", *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 209-217 (2003)
7. S. Bara, J. Arines, J. Ares, P. Prado, "Direct transformation of Zernike eye aberration coefficients between scaled, rotated and/or displaced pupils", *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 2061-2066 (2006)
8. L. Lundström, P. Unsbo, "Transformation of Zernike coefficients: scaled, translated and rotated wave-fronts with circular and elliptical pupils", *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 569-577 (2007)
9. S. A. Comastri, L. I. Perez, G. D. Pérez, G. Martin, K. Bastida, "Zernike expansion coefficients: rescaling and decentering for different pupils and evaluation of corneal aberrations", *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **9**, 209-221 (2007)
10. S. A. Comastri, K. Bastida, A. Bianchetti, L. Perez, G. D. Pérez, G. Martin, "Zernike aberrations when pupil varies: selection rules, missing modes and graphical method to identify modes", *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **11** 085302 <http://stacks.iop.org/1464-4258/11/085302> (2009)

11. S. A. Comastri, L. Perez, G. Martin, A. Bianchetti, G.D. Pérez, "Zernike modes when pupil is contracted, decentered and rotated: analytical and graphical methods", ([www.sedoptica.es](http://www.sedoptica.es)) *Óptica Pura y Aplicada* **42**, 163-176 (2009)
12. S. A. Comastri, K. Bastida, G. Martin y A. Bianchetti, "Aberrometrías oculares y de otros sistemas ópticos: transformación de coeficientes Zernike al contraer y desplazar transversalmente la pupila", Universidad de Belgrano-Buenos Aires) Documento de Trabajo N° **208**,1-17, [http://www.ub.edu.ar/investigaciones/dt\\_nuevos/208\\_comastri.pdf](http://www.ub.edu.ar/investigaciones/dt_nuevos/208_comastri.pdf) (2008)
13. M. Wilson, M. Campbell, P. Simonet, "Changes of pupil centration with change of illumination and pupil size", *Opt. Vis. Sci.* **69**, 129-136 (1992)
14. M. Rynders, B. Lidkea, W. Chisholm, L. N. Thibos, "Statistical distribution of foveal transverse chromatic aberration, pupil centration and angle  $\psi$  in a population of young adult eyes", *J. Opt. Soc. Am A* **12**, 2348-2357 (1995)
15. P. Artal, S. Marcos, I. Iglesias, D.G. Green, "Optical modulation transfer and contrast sensitivity with decentered small pupils in the human eye", *Vis. Research* **36**, 3575-3586 (1996)
16. J. Porter, A. Guirao, I. G. Cox, D. Williams, "Monochromatic aberrations of the human eye in a large population", *J. Opt. Soc. Am A* **18**, 1793-1803 (2001)
17. J. Taberero, A. Benito, E. Alcón, P. Artal, "Mechanism of compensation of aberrations in the human eye", *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 3274-3283 (2007)
18. S. A. Comastri, J. Matranga, A. Bianchetti, G. Martin, "Transformación de coeficientes Zernike que sintetizan la aberración al variar la pupila: aplicación a una lente oftálmica", 95° Reunión Nacional de Física, Libro de Resúmenes **p.276**, Malargüe (28 Sep-1 Oct 2010)
19. S. A. Comastri, J. Matranga, K. Bastida, L. Issolio, E. Colombo, "Influence of ophthalmic lenses in the illuminance originated at a peripheral glare source and reaching the eye", <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijleo.2009.03.008>, *Optik* **120**, 860-872 (2009)