Semigrupos y el teorema de Hille-Yosida

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad
Zaragoza
1542

Roberto Mazo Paz
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: D. Pedro José Miana Sanz
26 de junio de 2022

Abstract

The aim of this Final Degree Project is to prove the Hille-Yosida Theorem for C_0-semigroup of contractions , which characterize the generators of strongly continuous semigroups. Additionally semigroups theory will be developed. Also basic notions about linear operators and spectral analysis are included.

Semigroup theory was born to answer Cauchy's abstract problem, i.e., given a Banach space X and a closed operator A find the solution of

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = \xi, \end{cases}$$

where $\xi \in X$. The solution of this problem is given by

$$u(t) = T(t)\xi, \quad t \geq 0,$$

where T is an operator on $\mathscr{L}(X)$. This equation take on special importance in dynamical systems and differential equations theory. Actually, if the operator T represents a dynamical system, then the following property must be fulfilled

$$T(s+t) = T(t)T(s) \quad t,s \geq 0.$$

This property is known as Semigroup Law. Furthermore, the Cauchy's abstract problem and the Semigroup Law are closely related. The solutions of the problem verifying the Semigroup Law on the scalar case of a dynamical system are exponential functions e^{at}, where $a \in \mathbb{C}$, and matrix exponentials e^{tA}, where $A \in M_n(\mathbb{C})$, on the n-dimensional case. These solutions and the relation between the abstract Cauchy's problem and the Semigroup Law will be discussed at the beginning of Chapter 2. The transition from the n-dimensional space case to an arbitrary Banach space X case behaves well enough to extend these solutions to X. Extend the notion of matrix exponential will be the main part of Chapter 2. This will lead to the definition of semigroup, infinitesimal generator and properties. Finally, after having developed a sufficiency of semigroups theory, Hille-Yosida Theorem for C_0-semigroup of contractions can be stated.

Theorem (Hille-Yosida for C_0-semigroup of contractions)**.** A linear operator $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ is the infinitesimal generator of a C_0-semigroup of contractions if and only if

(i) A is densely defined and closed and

(ii) $(0,+\infty) \subseteq \rho(A)$ and for each $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda;A)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

The proof of the theorem is included in Chapter 3. The goal of this Final Degree Project is achieved. Lastly, to ilustrate semigroups, two important examples are included: multiplication and left translation semigroups.

Índice general

Notación

$\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos.
$C(\Omega)$ es el conjunto de las funciones continuas definidas en Ω.
$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon \subset \Omega$ compacto tal que $|f(s)| < \varepsilon\ \forall s \in \Omega \setminus K_\varepsilon\}$.
$\mathscr{C}^{1)}(\Omega)$ es el conjunto de las funciones de clase C^1 en definidas Ω.
$\mathscr{C}^{n)}(\Omega)$ es el conjunto de las funciones de clase C^n en definidas Ω.
$C_{ub}(\Omega)$ es el espacio de todas las funciones acotadas y uniformemente continuas de Ω en $\mathbb{R}$.
$\mathscr{L}(X)$ es el conjunto de todos los operadores lineales acotados de X en X.
$M_n(\mathbb{C})$ es el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.
$\|\cdot\|$ es la norma en el espacio X.
$\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X)}$ es la norma de operadores en el espacio $\mathscr{L}(X)$.
$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
$\mathbb{N}^*$ es el conjunto de los números naturales positivos: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.
$\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}^*$ es el conjunto de los números reales sin el cero.
$\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los números reales no negativos.

Capítulo 1

Operadores lineales y análisis espectral

Dedicaremos esta sección a presentar los conceptos necesarios para comprender el texto, comenzando por la noción de operador lineal y avanzando hacia elementos del análisis espectral como resolvente o espectro. Para ello nos basaremos en [4] y [9]. En toda la sección consideraremos un espacio de Banach X sobre un cuerpo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ dotado de una norma $\|\cdot\|$. Comenzamos con el concepto más básico, el de operador lineal.

Definición 1.0.1. Sea D un subespacio de X y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ una aplicación lineal, entonces A se llama operador lineal en X y el conjunto $D = D(A)$ se dice dominio de A. El operador A se dice acotado si $\sup\{\|Ax\|;\ x \in D(A),\ \|x\| \leq 1\} < +\infty$. En otro caso A es no acotado.

Introducimos la noción de operador cerrado. Esta aparecerá repetidamente a lo largo del texo.

Definición 1.0.2. Un operador $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ es cerrado si su grafo es cerrado, es decir, el conjunto $\{(x, Ax) \mid x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$. Equivalentemente, dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ y $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ entonces $x \in D(A)$ y $Ax = y$.

Recordar que podemos agrupar todos los operadores lineales acotados en un mismo conjunto formando un espacio normado y completo.

Definición 1.0.3. El conjunto de todos los operadores lineales acotados de X en X se denota por $\mathscr{L}(X)$ y se define la norma

$$\|A\|_{\mathscr{L}(X)} = \sup\{\|Ax\|;\ x \in D(A),\ \|x\| \leq 1\},$$

para cada $A \in \mathscr{L}(X)$. La topología dada por la norma en $\mathscr{L}(X)$ se llama topología uniforme de operadores.

Consideraremos que el espacio $\mathscr{L}(X)$ siempre está equipado con la norma $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X)}$, de este modo omitiremos la mención explícita de $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X)}$ en la mayoría de las ocasiones. Además el espacio $\mathscr{L}(X)$ es completo.

Teorema 1.0.4. *El espacio $\mathscr{L}(X)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Se puede consultar en [4, p.23]. □

El conjunto $\mathscr{L}(X)$ no solo es un espacio de Banach sino que forma una estructura algebraica si se escogen las operaciones oportunas.

Definición 1.0.5. Un álgebra normada $\mathscr{A}$ es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{K}$ con una segunda operación interna $(x, y) \mapsto xy,\ \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$, tal que

(i) $x(yz) = (xy)z$,

(ii) $x(y+z) = xy + xz$,

(iii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$

y $\|xy\| \leq K\|x\|\|y\|$ con $K > 0$, $x,y,z \in \mathscr{A}$, y $\lambda \in \mathbb{K}$. Un álgebra de Banach es un álgebra normada completa.

Si consideramos $\mathscr{L}(X)$ con la operación composición de operadores $(A \circ T) := A(T(x))$ con $x \in X$ y $A, T \in \mathscr{L}(X)$, entonces nótese que

$$\|A \circ T\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \|A\|_{\mathscr{L}(X)}\|T\|_{\mathscr{L}(X)}$$

y $\mathscr{L}(X)$ es un álgebra con identidad. Denotamos por I la identidad en X.

Recordar que decimos que un operador $A \in \mathscr{L}(X)$ es invertible si existe un operador $T \in \mathscr{L}(X)$ tal que $AT = I$ y $TA = I$. En ese caso escribiremos $T = A^{-1}$. Esta definición de operador inverso es en sentido topológico, puesto que imponemos la continuidad del operador inverso.

Los conceptos definidos a continuación aparecen repetidamente a lo largo del texto.

Definición 1.0.6. Se denomina conjunto resolvente de A a el conjunto de todos los valores $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador $\lambda I - A$ es invertible. Este conjunto se denota por $\rho(A)$ y sus elementos se llaman valores regulares del operador A. Además para cada $\lambda \in \rho(A)$ se define $R(\lambda; A) := (\lambda I - A)^{-1}$. Los valores no regulares de A se denominan valores espectrales de A y al conjunto de todos ellos se denomina espectro de A, denotado por $\sigma(A)$.

Tras esta definición y lo visto hasta ahora, tiene sentido preguntarse bajo qué condiciones un operador como $(\lambda I - A)^{-1}$ existe y cómo se puede expresar en términos conocidos. Esto lo resuelve el siguiente teorema.

Teorema 1.0.7. *Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathscr{L}(X)$ tal que $\|A\|_{\mathscr{L}(X)}1$. Entonces $I - A$ es invertible y se tiene*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

en $\mathscr{L}(X)$ siendo $\|(I-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \dfrac{1}{1-\|A\|_{\mathscr{L}(X)}}$, $A^0 = I$ y $A^n = A \circ \cdots^n \circ A$.

Demostración. Como X es un espacio de Banach, $\mathscr{L}(X)$ es de Banach, es decir, toda serie absolutamente convergente es convergente. Además $\mathscr{L}(X)$ es un álgebra con la operación composición por tanto $\|A^n\| \leq \|A\|\|A^{n-1}\| \leq \cdots \leq \|A\|^n$, luego basta probar que

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n_{\mathscr{L}(X)} < +\infty$$

para concluir que $T = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ es convergente en $\mathscr{L}(X)$. Primero notar que

$$T(I-A) = T - TA = A^0 = I \quad \text{y} \quad (I-A)T = T - AT = A^0 = I,$$

por tanto $(I-A)^{-1} = T$. Seguidamente observar que

$$\|(I-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} = \|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n_{\mathscr{L}(X)} = \frac{1}{1-\|A\|_{\mathscr{L}(X)}}.$$

Así $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ es convergente y $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$, probando el resultado. □

Podemos extender este resultado a $(\lambda I - A)^{-1}$ para $\lambda \in \mathbb{K}$.

Teorema 1.0.8. *Sea X un espacio de Banach, $A \in \mathscr{L}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\|A\| < |\lambda|$. Entonces $\lambda I - A$ es invertible con*

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Demostración. Notar que $\|\frac{A}{\lambda}\| < 1$, entonces $(I - \frac{A}{\lambda})$ es invertible con inversa

$$(I - \frac{A}{\lambda})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}.$$

Pero

$$(I - \frac{A}{\lambda})^{-1} = \left(\frac{\lambda I - A}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda(\lambda I - A)^{-1},$$

luego $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$, como se quería probar. □

Capítulo 2

Semigrupos de operadores lineales

Para introducir el tema principal de este trabajo y dar una motivación del estudio de semigrupos necesitamos indagar en los orígenes de estos. Para ello nos apoyaremos en la exposición de [3]. Para comenzar considerar la siguiente ecuación

$$f(t+s) = f(t)f(s), \tag{EF}$$

a la que llamaremos ecuación funcional exponencial. Esta ecuación expresa la idea detrás de las reglas de cálculo. Una idea que fue explotada por primera vez por John Napier (1550-1617) con su desarrollo de los logaritmos y la cual fue cobrando importancia desde entonces. Esta ecuación no fue tratada de forma sistemática hasta la aparición del prolífico matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857), quien en 1821 planteó en su *Cours d'Analyse* la siguiente pregunta:

Déterminer la fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs réelles des variables x et y

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y).^{1}$$

Cauchy consiguió resolver el problema para todo $t \in \mathbb{R}$ en 1821 y N. H. Abel, cinco años más tarde, logró simplificar la demostración en 1826 (ver [3, p.500]). Concluyeron que las únicas posibles soluciones complejas continuas son las del tipo $\varphi(t) := e^{ta}$ con $a \in \mathbb{C}$.

Cabe mencionar que condiciones más débiles que la continuidad son suficientes para asegurar el resultado anterior. Por ejemplo, el teorema dado por S. Banach y W. F. Sierpiński en 1920 asegura que es suficiente con que la función φ sea medible en la recta real. Esto se puede ver en [2] y [6].

Por último la cuestión acerca de si existen otras soluciones las cuales estén exentas de la condición de continuidad o medibilidad, fue resuelta por Georg Hamel (1897–1954) en 1905 (ver [3, p.501]). Hamel, considerando $\mathbb{R}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, obtuvo soluciones f de otra ecuación funcional,

$$f(t+s) = f(t) + f(s), \tag{2.1}$$

que no eran continuas. Así aplicando la función exponencial a ambos lados de (2.1) se obtiene una solución $\varphi := exp \circ f$ no continua de (EF). Esta solución no puede ser medible por el resultado dado por Banach y Sierpiński.

[1] Determinar la función $\varphi(x)$ de tal manera que permanece continua entre dos limites reales arbitrarios de la variable x, y que, para todos los valores reales de las variables x e y se tiene que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

2.1. Ecuación funcional exponencial

Volviendo a la pregunta, podemos reescribirla con notación moderna del siguiente modo.

Problema 2.1.1. Encontrar todas las aplicaciones continuas $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfaciendo la ecuación funcional exponencial

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s), & \text{para todo } t,s \geq 0, \\ T(0) = 1. \end{cases} \tag{EF}$$

Claramente las funciones exponenciales

$$t \longmapsto e^{ta}, \tag{EXP}$$

satisfacen la ecuación (EF) para cualquier $a \in \mathbb{C}$. Así, Cauchy sugirió que estas soluciones canónicas debían ser todas las soluciones de (EF). Estas funciones tienen interesantes cualidades que nos llevarán a resolver el Problema 2.1.1.

Proposición 2.1.2. *Sea $T(t) := e^{ta}$ para algún $a \in \mathbb{C}$ y todo $t \geq 0$. Entonces la función $T(\cdot)$ es diferenciable y satisface el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}T(t) = aT(t), & \textit{para todo } t \geq 0, \\ T(0) = 1. \end{cases} \tag{PVI}$$

Recíprocamente, la función $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $T(t) := e^{ta}$ para algún $a \in \mathbb{C}$ es la única función diferenciable que satisface (PVI). *Además $a = \frac{d}{dt}T(t)|_{t=0}$.*

Demostración. Es evidente que $T(t) := e^{ta}$ satisface (PVI). Recíprocamente, sea $S(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ otra función diferenciable satisfaciendo (PVI). Entonces la función $Q(\cdot) : [0,t] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$Q(s) := T(s)S(t-s) \quad \text{para } 0 \leq s \leq t,$$

para algún t fijo es diferenciable con derivada $\frac{d}{ds}Q(s) \equiv 0$. Por tanto

$$T(t) = Q(t) = Q(0) = S(t),$$

para cualquier $t > 0$. Esto termina la demostración. □

Esta proposición expone que la ecuación diferencial (PVI) tiene una solución dada por una familia de aplicaciones satisfaciendo (EF). Por el contrario, el siguiente resultado muestra que dada una solución $t \longmapsto T(t)$ de la ecuación funcional exponencial (EF), es suficiente exigir continuidad para obtener diferenciabilidad.

Proposición 2.1.3. *Sea $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua satisfaciendo* (EF). *Entonces $T(\cdot)$ es diferenciable y existe una único $a \in \mathbb{C}$ tal que se verifica*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}T(t) = aT(t), & \textit{para todo } t \geq 0, \\ T(0) = 1. \end{cases} \tag{PVI}$$

Demostración. Análoga a 2.3.7. □

Combinando ambos resultados obtenemos una respuesta para el Problema 2.1.1

Teorema 2.1.4. *Sea $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua satisfaciendo* (EF). *Entonces existe una único $a \in \mathbb{C}$ tal que*

$$T(t) = e^{ta},$$

para todo $t \geq 0$.

Es claro que la función del teorema anterior puede ser extendida para todo $t \in \mathbb{R}$ e incluso para todo $t \in \mathbb{C}$ satisfaciendo la ecuación (EF) para todo $t, s \in \mathbb{C}$. En otras palabras, esta extensión se convierte en un homomorfismo del grupo aditivo $(\mathbb{C}, +)$ en el grupo multiplicativo $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Es importante recordar que la ecuación funcional exponencial (EF) no solo es una identidad formal, sino que adquiere importancia en la descripción de sistemas dinámicos. Si identificamos $\mathbb{C}$ con el espacio $\mathscr{L}(\mathbb{C})$, podemos comprobar que la aplicación $T(\cdot)$ satisfaciendo (EF) describe la evolución temporal (para $t \geq 0$) de un sistema dinámico lineal en $\mathbb{C}$. Concretamente, sea $x_0 \in \mathbb{C}$ el estado inicial del sistema, es decir, en $t = 0$. Entonces

$$x(t) := T(t)x_0,$$

es el estado en el tiempo $t \geq 0$. Luego (EF) implica que dejar evolucionar el sistema un tiempo $t + s$, es decir

$$x(t+s) = T(t+s)x_0 = T(t)T(s)x_0 = T(t)x(s),$$

es equivalente a dejar evolucionar el sistema un tiempo s y a este nuevo estado del sistema dejarlo evolucionar un tiempo t.

2.2. Semigrupos matriciales

En la sección anterior hemos visto que la función e^{ta} resuelve el caso escalar de la ecuación funcional exponencial (EF). En esta nueva sección trataremos de generalizar la situación anterior al caso de espacios vectoriales finitos $X := \mathbb{C}^n$. El espacio $\mathscr{L}(X)$ será identificado con el espacio de todas las matrices complejas $n \times n$, denotado por $M_n(\mathbb{C})$. A su vez el sistema dinámico lineal vendrá dado por la aplicación matricial

$$T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_n(\mathbb{C}),$$

satisfaciendo la ecuación funcional exponencial

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s), & \text{para todo } t, s \geq 0, \\ T(0) = I. \end{cases} \tag{EF}$$

De manera análoga que en el caso escalar, podemos dar la misma interpretación sobre la evolución del sistema dinámico lineal. En esta nueva situación podemos reescribir el Problema 2.1.1 sin dificultad de la siguiente forma.

Problema 2.2.1. Enontrar todas las aplicaciones continuas $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ satisfaciendo la ecuación funcional exponencial (EF).

Al igual que en la sección anterior, en la cual las soluciones eran funciones exponencial, en esta cabe esperar algo semejante. Fue G.Peano en 1887 quien dio una definición precisa de la exponencial matricial. En notación moderna, se enunciaría como sigue.

Definición 2.2.2. Para cualquier $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $t \in \mathbb{R}$ la exponencial matricial e^{tA} se define como

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \tag{2.2}$$

Nota 2.2.3. La serie en (2.2) es siempre convergente. En efecto, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| \frac{t^k}{k!} A^k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|t| \|A\|)^k}{k!} = e^{|t| \|A\|} < +\infty.$$

Además $\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$ para todo $t \geq 0$.

No es casualidad que estas aplicaciones satisfagan la ecuación funcional exponencial.

Proposición 2.2.4. *Para cualquier $A \in M_n(\mathbb{C})$ la aplicación*

$$t \longmapsto e^{tA} \in M_n(\mathbb{C}),$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ es continua y satisface

$$\begin{cases} e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, & \text{para todo } t,s \geq 0, \\ e^{0A} = I. \end{cases} \tag{EF}$$

Demostración. La demostración es similar a la dada en 2.3.7. Aún así puede ser consultada en [3, p.8]. □

Llegado este punto es interesante entender el significado de la ecuación funcional exponencial (EF) en términos de operadores lineales de $\mathbb{C}^n$. Recordar que un semigrupo es una estructura algebraica del tipo $(\mathscr{U},\cdot)$ donde $\mathscr{U}$ es un conjunto no vacío sobre el cual se define una operación binaria interna

$$\begin{aligned} \mathscr{U} \times \mathscr{U} &\longrightarrow \mathscr{U} \\ (x,y) &\longmapsto xy, \end{aligned}$$

con la propiedad de ser asociativa. Claramente, la imagen de la función $t \longmapsto T(t) := e^{tA}$ en $M_n(\mathbb{C})$ es un semigrupo conmutativo de matrices que dependen continuamente del parámetro $t \in \mathbb{R}_+$. De hecho, esto es una consecuencia directa de la siguiente propiedad:

La aplicación $t \longmapsto T(t)$ es un homomorfismo del semigrupo aditivo $(\mathbb{R}_+,+)$ en el semigrupo multiplicativo $(M_n(\mathbb{C}),\cdot)$.

Con este propiedad, podemos introducir la siguiente definición que, en cierto modo, sirve de preámbulo para las siguientes dos secciones.

Definición 2.2.5. Llamamos a $(e^{tA})_{t\geq 0}$ el semigrupo generado por la matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Volviendo al Problema 2.2.1, podemos enunciar la proposición 2.1.2 en este nuevo contexto del siguiente modo.

Proposición 2.2.6. *Sea $T := e^{tA}$ para alguna matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$. Entonces $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ es diferenciable satisface la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}T(t) = AT(t), & \text{para todo } t \geq 0, \\ T(0) = I. \end{cases} \tag{PVI}$$

Recíprocamente, toda función diferenciable $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ satisfaciendo (PVI) *es de la forma $T(t) = e^{tA}$ para algún $A \in M_n(\mathbb{C})$. Además $A = \dfrac{d}{dt}T(t)|_{t=0}$.*

Demostración. Se puede ver en [3, p.11]. □

Tras este resultado ya podemos dar respuesta al Problema (2.2.1).

Teorema 2.2.7. *Sea $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ una aplicación continua satisfaciendo* (EF). *Entonces existe $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que*

$$T(t) = e^{tA},$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Se da en [3, p.11]. □

Con este teorema quedan caracterizados todos lo semigrupos en $\mathbb{C}^n$ como exponenciales matriciales e^{tA}.

2.3. Semigrupos uniformemente continuos

En este apartado queremos ampliar nuestro estudio a un espacio más general, concretamente a cualquier espacio de Banach, manteniendo las condiciones de la ecuación funcional exponencial (EF) sobre los operadores lineales. La definición 2.2.5 nos hace vislumbrar que aquellos operadores verificando (EF) forman un conjunto especial, sobre el cual pondremos nuestra atención. Para ello recogeremos algunos de los resultados mas importantes de [5] y [9].

En lo que acontece el espacio X será un espacio de Banach y consideraremos la integral del Bochner. Esta integral se puede ver en detalle en [3, pp.522-524] y [9, pp.4-12].

Definición 2.3.1. Una familia de operadores lineales acotados $\{T(t);\, t \geq 0\}$ en $\mathscr{L}(X)$ se dirá semigrupo de operadores lineales, o sencillamente semigrupo, si:

(i) $T(0) = I$.

(ii) $T(t+s) = T(t)T(t)$ para cada $t, s \geq 0$.

Si además satisface la condición de continuidad en $t = 0$, es decir

$$\lim_{t \to 0} T(t) = I,$$

en $\mathscr{L}(X)$, el semigrupo se dirá uniformemente continuo.

La primera buena propiedad de este nuevo conjunto de operadores, en el caso de que sean uniformemente continuos, es la invertibilidad de los mismos.

Proposición 2.3.2. *Si $\{T(t);\, t \geq 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo entonces para cada $t \geq 0$ $T(t)$ es invertible.*

Demostración. Dado que $\lim_{t \to 0} T(t) = I$ en $\mathscr{L}(X)$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(t) - I\|_{\mathscr{L}(X)} < 1$ para todo $t \in (0, \delta]$. Por lo tanto $T(t)$ es invertible para todo $t \in (0, \delta]$. Sea $t > \delta$, existen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\eta \in [0, \delta)$ tales que $t = n\delta + \eta$, luego $T(t) = T(n\delta + \eta) = T(\delta)^n T(\eta)$ donde $T(\delta)$ y $T(\eta)$ son invertibles. En consecuencia $T(t)$ es invertible. $\square$

El conjunto de operadores $T(t)$ está restringido a aquellos $t \geq 0$, aunque puede ser extendido a toda la recta real, como ya hemos comentado en el caso escalar tras el Teorema 2.1.4.

Definición 2.3.3. Una familia de operadores $\{G(t);\, t \in \mathbb{R}\}$ se dice que es un grupo de operadores lineales en X si:

(i) $G(0) = I$.

(ii) $G(t+s) = G(t)G(s)$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$.

Nota 2.3.4. Observar que todo semigrupo $\{T(t);\, t \geq 0\}$ uniformemente continuo puede ser extendido a un grupo uniformemente continuo. Concretamente existe un grupo $\{G(t);\, t \in \mathbb{R}\}$ cumpliendo que $G(t) = T(t)$ para todo $t \geq 0$ ya que gracias a la Proposición 2.3.2 se puede definir $G(t) : X \longrightarrow X$ como

$$G(t) = \begin{cases} (T(-t))^{-1}, & \text{si } t < 0, \\ T(t), & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

La familia $\{G(t);\, t \in \mathbb{R}\}$ forma un grupo uniformemente continuo que extiende a $\{S(t);\, t \geq 0\}$.

A continuación incluimos un resultado que nos será de utilidad más adelante.

Proposición 2.3.5. *Si $\{T(t);\, t \geq 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo entonces la aplicación $t \longrightarrow T(t)$ es continua de $[0, +\infty)$ en $\mathscr{L}(X)$.*

Demostración. Sea $\{G(t);\ t\in\mathbb{R}\}$ el grupo uniformemente continuo que extiende a $\{T(t);\ t\geq 0\}$, que existe por 2.3.4, y sea $t>0$. Entonces

$$\lim_{h\to 0}\|T(t+h)-T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}=\lim_{h\to 0}\|T(t)(G(h)-I)\|_{\mathscr{L}(X)}\leq\lim_{h\to 0}\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\|G(h)-I\|_{\mathscr{L}(X)}=0,$$

ya que $\{G(t);\ t\in\mathbb{R}\}$ es uniformemente continuo. Esto concluye la demostración. □

Si en el caso matricial, dada $A\in M_n(\mathbb{C})$ y el operador $T(t)=e^{tA}$, se tenía que

$$A=\frac{d}{dt}T(t)|_{t=0},$$

en esta nueva situación vamos a seguir una idea similar para definir una pieza fundamental en nuestro estudio de semigrupos, tanto uniformemente continuos como de otros más generales, el generador infinitesimal. Muchos de los resultados de semigrupos pueden ser enunciados en torno a este nuevo operador.

Definición 2.3.6. El generador infinitesimal, o simplemente generador, de un semigrupo de operadores lineales $\{T(t);\ t\geq 0\}$ es el operador $A:D(A)\subseteq X\longrightarrow X$ definido por

$$D(A):=\{x\in X\mid\exists\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(T(t)x-x\right)\},$$

y

$$Ax:=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(T(t)x-x\right).$$

Se dice que A genera $\{T(t);\ t\geq 0\}$.

A partir esta definición es claro que el semigrupo $\{T(t);\ t\geq 0\}$ tiene un único generador infinitesimal A.

El siguiente teorema ([9, pp.38-40]) es el resultado principal de esta sección sobre semigrupos uniformemente continuos ya que caracteriza estos semigrupos a través de sus generadores infinitesimales. Probamos que estos operadores tienen como dominio todo el esapacio y además son lineales y continuos, es decir, están acotados.

Teorema 2.3.7. *Un operador lineal $A:D(A)\subseteq X\longrightarrow X$ es el generador de un semigrupo uniformemente continuo si y solo si $D(A)=X$ y $A\in\mathscr{L}(X)$.*

Demostración. Sea $\{T(t);\ t\geq 0\}$ un semigrupo uniformemente continuo. Notar que por la continuidad de $T(t)$ en $t=0$ existe $\delta>0$ tal que para cualquier $0\leq t\leq\delta$ se tiene que

$$\|T(t)-I\|_{\mathscr{L}(X)}<1.$$

Así, dado $0<\rho\leq\delta$ se sigue que

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(t)dt-I\|_{\mathscr{L}(X)}&=\|\frac{1}{\rho}\int_0^\rho(T(t)-I)dt\|_{\mathscr{L}(X)}\\ \leq\frac{1}{\rho}\int_0^\rho\|(T(t)-I)\|_{\mathscr{L}(X)}dt&\leq\max_{0\leq x\leq\rho}\|T(t)-I\|_{\mathscr{L}(X)}<1,\end{aligned}$$

esto es, el operador $\frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(t)dt$ es invertible. En consecuencia, el operador $\int_0^\rho T(t)dt$ también es invertible.

Sea $\varepsilon>0$, observar que

$$\frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^\rho T(t)dt=\frac{1}{h}\int_0^\rho T(t+h)dt-\frac{1}{h}\int_0^\rho T(t)dt.$$

Haciendo el cambio $s = t + h$ en la primera integral del miembro derecho

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^\rho T(t)dt &= \frac{1}{h}\int_h^{\rho+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^\rho T(t)dt \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{\rho+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(t)dt.\end{aligned}$$

Pero el lado derecho de la igualdad converge cuando $h \to 0^+$ y por tanto el lado izquierdo también debe hacerlo. Como la convergencia en la norma de operadores de $\mathscr{L}(X)$ implica convergencia puntual, haciendo $h \to 0^+$ se deduce que

$$A = (T(\rho)-I)\left(\int_0^\rho T(t)dt\right)^{-1},$$

ya que por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Bochner

$$\|\frac{1}{h}\int_h^{\rho+h} T(s)ds - S(\rho)\|_{\mathscr{L}(X)} = \|\frac{1}{h}\left[\int_0^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds\right] - T(\rho)\|_{\mathscr{L}(X)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0,$$

y antes se había probado que

$$\|\frac{1}{h}\int_0^h T(t)dt - I\|_{\mathscr{L}(X)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0.$$

Por tanto $A \in \mathscr{L}(X)$.

Recíprocamente, sean $A \in \mathscr{L}(X)$ y $t \geq 0$. Sea también $T(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$. Observar que la familia $\{T(t);\, t \geq 0\}$ satisface la definición de semigrupo uniformemente continuo. En efecto, se tiene que

$$T(0) = A^0 = I,$$

y que, dado que la serie $T(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$ es convergente, por el producto de Cauchy de series y la fórmula binomial

$$T(t)\cdot T(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}A^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{n-k}A^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{s^kA^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t+s)^n}{n!}A^n = T(t+s). \tag{2.3}$$

Para probar que es uniformemente continuo notar que

$$\begin{aligned}\|T(t)-I\|_{\mathscr{L}(X)} = \|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n - I\|_{\mathscr{L}(X)} = \|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n\|_{\mathscr{L}(X)} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\|A^n\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\leq t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}\|A\|^n_{\mathscr{L}(X)} \leq t\|A\|_{\mathscr{L}(X)}e^{t\|A\|_{\mathscr{L}(X)}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0,\end{aligned}$$

esto es

$$\lim_{t\to 0} T(t) = I,$$

en $\mathscr{L}(X)$, por tanto se concluye que $\{T(t);\, t \geq 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo. Finalmente falta probar que el operador A es el generador de este semigrupo. Para ello basta ver que

$$\lim_{t\to 0}\|\frac{1}{t}(T(t)-I) - A\|_{\mathscr{L}(X)} = 0.$$

Pero esto se sigue inmediatamente de

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{t}(T(t)-I) - A\|_{\mathscr{L}(X)} = \|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}A^n - A\|_{\mathscr{L}(X)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}A^n &\leq t\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}}{n!}\|A\|^n_{\mathscr{L}(X)} \\ &\leq t\|A\|^2_{\mathscr{L}(X)}e^{t\|A\|} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

Queda probado el teorema. □

El resultado anterior asegura que la familia $\{e^{tA};\ t \geq 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo y recíprocamente, todo grupo uniformemente continuo con generador A es de la forma $\{e^{tA};\ t \geq 0\}$. Aunque ya hemos dado resultados de unicidad para el caso escalar, la unicidad, en general, del semigrupo uniformemente continuo generado por el operador A puede ser deducida gracias a un resultado de la siguiente sección. En ese caso será para C_0-semigrupos, los cuales incluyen a los semigrupos uniformemente continuos.

2.4. Semigrupos fuertemente continuos

En esta sección trataremos de generalizar el concepto de semigrupo uniformemente continuo. Para ello sustituiremos la condición de continuidad en $t = 0$ por otra más fuerte.

Definición 2.4.1. Un semigrupo de operadores lineales $\{T(t);\ t \geq 0\}$ se dice semigrupo fuertemente continuo o C_0-semigrupo[2] si para cada $x \in X$

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x.$$

Nota 2.4.2. Todo semigrupo uniformemente continuo es un C_0-semigrupo. El recíproco no es cierto. Para comprobarlo basta tomar $X = C_{ub}(\mathbb{R}_+)$, el espacio de todas las funciones acotadas y uniformemente continuas de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}$, equipado con la norma del supremo y considerar el semigrupo de traslaciones a izquierda $\{T(t);\ t \geq 0\}$ dado por $(T(t)f)(s) = f(t+s)$ para cada $f \in X$ y $t, s \in \mathbb{R}_+$. Como se puede ver 3.1.7, estos operadores forman un C_0-semigrupo, en cambio,no forman un semigrupo uniformemente continuo, dado que, en este caso, la equicontinuidad (ver [9, p.307]) en la bola unidad de X es equivalente a la continuidad uniforme del semigrupo y el semigrupo no es equicontinuo en la bola unidad de X([9, p.41]).

Los semigrupos fuertemente continuos tienen buenas propiedades.

Teorema 2.4.3. *Si $\{T(t);\ t \geq 0\}$ es un C_0-semigrupo entonces existen $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tales que para cada $t \geq 0$*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{t\omega}.$$

Demostración. Primero se probará que existe $\eta > 0$ y $M \geq 1$ tales que para todo $t \in [0, \eta]$

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M.$$

Para ello suponer que es falso. Así existe al menos un C_0-semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ cumpliendo que para cada $\eta > 0$ y $M \geq 1$ existe $t_{\eta,M} \in [0, \eta]$ tal que

$$\|T(t_{\eta,M})\|_{\mathscr{L}(X)} > M.$$

Tomando $\eta = 1/n$ y $M = n$ y denotando $t_{\eta,M} = t_n$ con $n \in \mathbb{N}^*$ la desigualdad anterior se reescribe como

$$\|T(t_n)\|_{\mathscr{L}(X)} > n, \tag{2.4}$$

donde $t \in [0, 1/n]$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Observando que para cada $x \in X$,

$$\lim_{n \to \infty} T(t_n)x = x,$$

se sigue que la familia $\{T(t_n);\ n \in \mathbb{N}^*\}$ de operadores lineales acotados está acotada puntualmente, esto es, para cada $x \in X$ el conjunto $\{T(t_n)x;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ está acotado. Por el teorema de Banach-Steinhaus (ver [4, p.74]) esta familia está acotada uniformemente en $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X)}$, lo que contradice (2.4). Por tanto deben existir $\eta > 0$ y $M \geq 1$ tales que para todo $t \in [0, \eta]$

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M.$$

[2] El símbolo C_0 es la abreviatura de "Sumable Cesàro de orden 0".

A continuación sea $t > 0$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}^*$ y $\delta \in [0, \eta)$ tales que $t = n\eta + \delta$ y se tiene que

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} = \|T(n\eta)T(\delta)\|_{\mathscr{L}(X)} = \|T(\eta)^n T(\delta)\|_{\mathscr{L}(X)} = \|T(\eta)\|^n_{\mathscr{L}(X)} \|T(\delta)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq MM^n.$$

Pero $n = \frac{t-\delta}{\eta} \leq \frac{t}{\eta}$ y por tanto

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq MM^n \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{t\omega},$$

donde $\omega = \frac{1}{\eta}\log(M)$. Esto completa la demostración. □

Presentamos a continuación los semigrupos sobre los cuales será enunciado el Teorema de Hille-Yosida, los C_0-semigrupos de contracciones.

Definición 2.4.4. Un C_0-semigrupo $\{T(t);\, t \geq 0\}$ se dice exponencialmente acotado o de tipo (M, ω) con $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ si para cada $t \geq 0$

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{t\omega}.$$

Concretamente si el semigrupo cumple esta definición en el caso $M = 1$ y $\omega = 0$ se dice C_0-semigrupo de contracciones, esto es, para todo $t \geq 0$

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 1.$$

Gracias al Teorema 2.4.3 es fácil probar el siguiente resultado que nos será de utilidad más adelante.

Corolario 2.4.5. *Si $\{T(t);\, t \geq 0\}$ es un C_0-semigrupo entonces $(t, x) \longrightarrow T(t)x$ es una aplicación continua de $[0, +\infty) \times X \longrightarrow X$ con la topología producto.*

Demostración. Sean $t \geq 0$, $x, y \in X$ y $h \in \mathbb{R}^*$ con $t + h \geq 0$.

- Si $h > 0$ entonces

$$\begin{aligned}\|T(t+h)y - T(t)x\| &\leq \|T(t+h)y - T(t+h)x\| + \|T(t+h)x - T(t)x\| = \|T(t+h)(y-x)\| \\ &+ \|T(t)(T(h)x - x)\| \leq Me^{(t+h)\omega}\|x-y\| + \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\|T(h)x - x\| \xrightarrow[(h,y)\to(0,x)]{} 0,\end{aligned}$$

  donde $\|T(h)x - x\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ ya que $\{T(t);\, t \geq 0\}$ es un C_0-semigrupo.

- Si $h < 0$ entonces

$$\begin{aligned}\|T(t+h)y - T(t)x\| &= \|T(t+h)y - T(t+h)T(-h)x\| \leq \|T(t+h)\|_{\mathscr{L}(X)}\|y - T(-h)x\| \\ &\leq Me^{(t+h)\omega}(\|x-y\| + \|x - T(-h)x\|) \xrightarrow[(h,y)\to(0,x)]{} 0.\end{aligned}$$

□

Definimos el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de manera análoga que en el caso de semigrupos uniformemente continuos. Véase la Definición 2.3.6. En el siguiente teorema presentamos algunas propiedades asociadas a dicho generador.

Teorema 2.4.6. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t);\, t \geq 0\}$. Entonces:*

(i) Para cada $x \in X$ y $t \geq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)x\,d\tau = T(t)x. \tag{2.5}$$

(ii) *Para cada $x \in X$ y $t > 0$*

$$\int_0^t T(\tau)x d\tau \in D(A) \quad y \quad A\left(\int_0^t T(\tau)x d\tau\right) = T(t)x - x. \tag{2.6}$$

(iii) *Para cada $x \in D(A)$ y $t \geq 0$ se tiene que*

$$T(t)x \in D(A). \tag{2.7}$$

Además la aplicación $t \longrightarrow T(t)x$ es de clase $\mathscr{C}^{1)}([0,+\infty))$ y

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{2.8}$$

(iv) *Para cada $x \in D(A)$ y $0 \leq s \leq t < +\infty$*

$$\int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = T(t)x - T(s)x. \tag{2.9}$$

Demostración. (i) Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por el corolario 2.4.5 existe $\delta > 0$ tal que si $|\tau - t| < \delta$ entonces $\|T(\tau)x - T(t)x\| < \varepsilon$. Observar que

$$\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)x d\tau - T(t)x\| = \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}[T(\tau)x - T(t)x]\,d\tau\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|T(\tau)x - T(t)x\| d\tau,$$

y dado que $\tau \in (t, t+h)$, tomando $h \to 0$, se tiene que $|\tau - t| < \delta$. En consecuencia

$$\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)x d\tau - T(t)x\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\varepsilon d\tau = \varepsilon.$$

(ii) Sean $x \in X$ y $t, h > 0$. Notar que

$$\frac{1}{h}(T(h) - I)\int_0^t T(\tau)x d\tau = \frac{1}{h}\int_0^t T(\tau + h)x d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t T(\tau)x d\tau.$$

Haciendo el cambio $\tau + h = s$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(T(h) - I)\int_0^t T(\tau)x d\tau &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)x d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t T(\tau)x d\tau \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x d\tau.\end{aligned}$$

Observar que la integral $\displaystyle\int_0^t T(\tau)x d\tau$ no depende de h. Así, tomando límite cuando h tiende a cero y teniendo en cuenta la propiedad anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned}A\left(\int_0^t T(\tau)x d\tau\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(h) - I)\int_0^t T(\tau)x d\tau &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x d\tau\right) \\ &= T(t)x - T(0)x = T(t)x - x.\end{aligned}$$

Se sigue por la definición de $D(A)$ que $\displaystyle\int_0^t T(\tau)x d\tau \in D(A)$.

(iii) Sean $x \in D(A)$, $t \geq 0$ y $h > 0$. Entonces, dado que $T(t)$ está acotado

$$\|\frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t)x) - T(t)Ax\| \leq \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\|\frac{1}{h}(T(h)x - x) - Ax\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

por definición de Ax. Esto prueba que $T(t)x \in D(A)$ y que la aplicación $t \longrightarrow T(t)x$ es diferenciable por la derecha. Además basta probarlo para $AT(t)x$ ya que

$$T(t)Ax = T(t)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(h)x - x)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(h)T(t)x - T(t)x) = AT(t)x.$$

Por tanto

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = T(t)Ax = AT(t)x. \tag{2.10}$$

Por otra parte, sean $t > 0$ y $h < 0$ tales que $t+h \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t)x) - T(t)Ax\| &= \|\frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t+h)T(-h)x) - T(t+h)T(-h)Ax\| \\ &= \|T(t+h)\|_{\mathscr{L}(X)}\|\frac{1}{h}(x - T(-h)x) - T(-h)Ax\| \\ \leq \|T(t+h)\|_{\mathscr{L}(X)}\| &\left(\|\frac{-1}{h}(T(-h)x - x) - Ax\| + \|Ax - T(-h)Ax\|\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

Luego la aplicación $t \longrightarrow T(t)x$ es diferenciable por la izquierda y con el mismo límite que por la derecha. Así de la igualdad (2.10) y de la continuidad de la aplicación $t \longrightarrow T(t)Ax$ en $[0,+\infty)$ se sigue que $t \longrightarrow T(t)x$ es de clase $\mathscr{C}^{1)}([0,+\infty))$.

(iv) Basta integrar de s a t en ambos lados de (2.10).

Esto concluye la demostración. □

Seguidamente probamos las siguientes tres propiedades de los generadores de C_0-semigrupos: que son operadores cerrados, que su dominio es denso en X y que engendran un único semigrupo. Esto quedará, en parte, recogido por el Teorema de Hille-Yosida.

Teorema 2.4.7. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t);\, t \geq 0\}$. Entonces $D(A)$ es denso en X y A es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por (2.5) y (2.6) se tiene que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(\tau)x d\tau \in D(A) \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(\tau)x d\tau = x.$$

Luego $x \in \overline{D(A)}$ y por tanto $D(A)$ es denso en X. Para ver que A es cerrado sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Ax_n = y.$$

Por el teorema (2.9)

$$T(h)x_n - x_n = \int_0^h T(\tau)Ax_n d\tau \tag{2.11}$$

donde $n \in N^*$ y $h > 0$. El integrando del lado derecho de la igualdad (2.11) converge a $T(s)y$ uniformemente en intervalos acotados. Así, pasando al límite

$$T(h)x - x = \int_0^h T(\tau)y d\tau.$$

Nuevamente por (2.5) existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(\tau)x d\tau = x.$$

Entonces

$$Ax = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(h)x - x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(\tau)x d\tau = y.$$

En resumen $x \in D(A)$ y $Ax = y$. □

La unicidad del semigrupo generado por el operador A se sigue del siguiente resultado.

Teorema 2.4.8. *Si $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ es el generador infinitesimal de dos C_0-semigrupos $\{S(t);\, t \geq 0\}$ y $\{T(t);\, t \geq 0\}$, entonces $S(t) = T(t)$ para cada $t \geq 0$.*

Demostración. Sea $x \in D(A)$, $t > 0$ y $f : [0,t] \longrightarrow X$ dada por $f(s) = S(t-s)T(s)x$ para cada $s \in [0,t]$. Por (2.8) la aplicación f es diferenciable en $[0,t]$ con derivada

$$f'(s) = -AS(t-s)T(s)x + S(t-s)AT(s)x = -S(t-s)AT(s)x + S(t-s)AT(s)x = 0.$$

Luego f es constante con valor $T(s)x = f(t) = f(0) = S(t)x$ para todo $x \in D(A)$. Por último como $D(A)$ es denso en X y $S(t)$ y $T(t)$ están acotados se sigue que $S(t)x = T(t)x$. En efecto, sea $x \in X$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Así,

$$\begin{aligned}\|S(t)x - T(t)x\| &\leq \|S(t)x - S(t)x_n\| + \|S(t)x_n - T(t)x_n\| + \|T(t)x_n - T(t)x\| \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\|x - x_n\| + 0 + \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\|x - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Esto finaliza la demostración. □

El Teorema 2.4.8 y (2.8) aseguran que, para cada $\xi \in D(A)$, la función $u : [0,+\infty) \longrightarrow X$ dada por $u(t) = T(t)\xi$ es la única solución clásica del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = \xi, \end{cases}$$

donde $\{T(t);\, t \geq 0\}$ es el semigrupo generado por A. Más aún, este mismo problema pero de orden n también tiene solución única y diferenciable.

Definición 2.4.9. Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal y $n \in \mathbb{N}$. Definimos la n-ésima potencia de A como

$$\begin{cases} D(A^0) = X \\ A^0 = I \end{cases}, \begin{cases} D(A^1) = D(A) \\ A^1 = A, \end{cases}$$

y para $n \geq 2$

$$\begin{cases} D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) \mid A^{n-1}x \in D(A)\}, \\ A^n x = AA^{n-1}x, \quad x \in D(A^n). \end{cases}$$

Teorema 2.4.10. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t);\, t \geq 0\}$. Entonces $\bigcap_{n\geq 0} D(A^n)$ es denso en X. Además para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\xi \in D(A^n)$ y $t \geq 0$ se tiene que $T(t)\xi \in D(A^n)$ y la función $u : [0,+\infty) \longrightarrow X$ dada por $u(t) = T(t)\xi$ es de clase $\mathscr{C}^{n)}([0,+\infty))$ y es la única solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = A^n u(t), \quad \textit{para } t \geq 0 \\ u^{(k)}(0) = A^k \xi, \quad \textit{para } k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Demostración. La demostración de este resultado puede ser consultada en [9, pp. 46-48]. □

Capítulo 3

El teorema de Hille-Yosida

A lo largo del capítulo anterior hemos podido comprobar que los generadores de semigrupos cumplen varias condiciones, como ser necesariamente cerrados o estar densamente definidos, pero estas no son suficientes para asegurar que son generadores de C_0-semigrupos. Veamos un ejemplo ([3, p.71]).

Ejemplo 3.0.1. Sea el espacio

$$X := \{f \in C_0(\mathbb{R}_+) : \ f \text{ continuamente diferenciable en } [0,1]\},$$

equipado con la norma

$$\|f\| := \sup_{s\in\mathbb{R}_+} |f(s)| + \sup_{s\in[0,1]} |f'(s)|.$$

Considerar el operador A definido por

$$Af := f' \text{ con } D(A) := \{f \in C_0^1(\mathbb{R}_+) : \ f' \in X\}.$$

Entonces A es cerrado y está densamente definido. Asumir que A genera un C_0-semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ en X. Para $f \in D(A)$ y $s,t \geq 0$ se define la función diferenciable

$$\xi(\tau) := (T(t-\tau)f)(s+\tau), \quad \geq \tau \geq t,$$

con derivada

$$\frac{d}{d\tau}\xi(\tau) = -(T(t-\tau)Af)(s+\tau) + \left(T(t-\tau)f'\right)(s+\tau) = 0.$$

Por tanto la función $\xi(\tau)$ es constante con valor

$$(T(t)f)(s) = \xi(0) = \xi(t) = f(s+t).$$

Así $\{T(t);\ t \geq 0\}$ debe ser el semigrupo de traslaciones a izquierda, pero en este caso los operadores de traslación no llevan X a X.

Para abordar este problema nos volvemos a fijar en las soluciones que hemos dado en los casos escalar y matricial para la ecuación funcional exponencial de Cauchy. Así podemos pensar el semigrupo generado por el operador A como una "función exponencial". Para esta función podemos dar un fórmula concreta en el caso de que el operador A esté acotado

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Nos gustaría generalizar esta fórmula para el caso de espacios de Banach infinito-dimensionales y en particular para operadores no acotados, aunque parece poco realista esperar que la serie anterior converja si el operador A es no acotado. En cambio, en el caso unidimensional tenemos las siguientes conocidas fórmulas.

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}A\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}A\right)^{-n}.$$

Mientras que la primera fórmula involucra potencias del operador no acotado A, que raramente convergen, la segunda puede ser reescrita utilizando el operador $R(\lambda;A)$ del siguiente modo

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t},A\right)\right)^{n}.$$

Así se obtiene una fórmula que involucra exclusivamente potencias de operadores acotados. La idea de E. Hille fue utilizar esta fórmula y probar que, bajo ciertas condiciones, el límite existe y define un semigrupo fuertemente continuo.

Por otra parte, dado que es posible definir la exponencial matricial para operadores acotados, podemos tratar de aproximar el operador A mediante un sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores acotados y esperar que

$$e^{tA} := \lim_{n\to\infty} e^{tA_n},$$

exista y defina un semigrupo fuertemente continuo. Esta fue la idea de K. Yosida, la cual seguiremos para demostrar el teorema de ille-Yosida para C_0-semigrupos de contracciones. Seguiremos la exposición dada en [5].

Teorema 3.0.2 (Teorema de Hille-Yosida para C_0-semigrupos de contracciones)**.** *Un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ no necesariamente acotado es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones $\{T(t);\, t \geq 0\}$ si y solo si*

(i) A está densamente definido y es cerrado y

(ii) $(0,+\infty) \subseteq \rho(A)$ y para cada $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda;A)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

La demostración quedará dividida en dos partes. Primero probaremos la condición necesaria.

Demostración. (Necesidad). Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrupos de contracciones $\{T(t);\, t \geq 0\}$. El conjunto $D(A)$ es denso en X y A es cerrado por el Teorema 2.4.7, luego se tiene (i). Para probar (ii) sea $\lambda > 0$ y $x \in X$ y sea

$$R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)x dt. \tag{3.1}$$

Notar que para cada $a,b \geq 0$ con $a \leq b$ se tiene que

$$\|\int_a^b e^{-\lambda t}T(t)xdt\| \leq \int_a^b e^{-\lambda t}\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\|x\|dt \leq \int_a^b e^{-\lambda t}\|x\|dt = \frac{e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}}{\lambda}\|x\|,$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho de que $\{T(t);\, t \geq 0\}$ es de contracciones. Por consiguiente se cumplen las condiciones del criterio de Cauchy ([8, Sección 7.5]) y la integral en (3.1) es convergente.

Es inmediato comprobar que

$$R(\lambda)(x+y) = R(\lambda)x + R(\lambda)y,$$

y además

$$\|R(\lambda)x\| = \|\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt\| \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\|x\|dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|.$$

Por tanto $R(\lambda) \in \mathscr{L}(X)$ y

$$\|R(\lambda)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

A continuación se probará que $R(\lambda)$ coincide exactamente con $R(\lambda;A)$, para ello será suficiente comprobar que $R(\lambda)$ es la inversa a izquierda y a derecha de $\lambda I - A$.

Sea $x \in X$, $\lambda > 0$ y $h > 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(T(h)-I)R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda(s)}T(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda(s)}T(s)xds \\
-\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda(s)}T(s)xds \\
&\quad - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda(s)}T(s)xds,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde se ha hecho el cambio de variable $s = t + h$. Observar que por definición de derivada

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{\lambda h}-1}{h} = (e^{\lambda h})'_{|h=0} = \lambda,$$

y que por la propiedad (2.5)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(s)}T(s)xds = x,$$

por tanto el lado derecho de (3.2) converge a $\lambda R(\lambda)x - x$ cuando $h \to 0$. En consecuencia, por definición de generador infinitesimal, $R(\lambda)x \in D(A)$ y

$$AR(\lambda) = \lambda R(\lambda)x - x$$

o bien

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I.$$

Esto prueba que $R(\lambda)$ es la inversa de $\lambda I - A$ por la derecha.

Sea ahora $x \in D(A)$. Entonces integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned}
R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}(T(t)x)dt = \left[e^{-\lambda t}T(t)x\right]_0^\infty + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(e^{-\lambda t}T(t)x\right) - e^{-\lambda t}T(t)x|_{t=0} + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = \lambda R(\lambda)x - x,
\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-\lambda t}T(t)x\right) = 0,$$

dado que $T(t)$ está acotado. La igualdad anterior se puede reescribir como

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = I.$$

Por tanto $R(\lambda)$ es también la inversa por la izquierda de $\lambda I - A$ y por tanto $R(\lambda;A) = R(\lambda)$, como se quería probar. □

Para probar que las condiciones (i) y (ii) de 3.0.2, además de necesarias, son suficientes es necesario la introducción del concepto de aproximación de Yosida y de dos resultados previos.

Definición 3.0.3. Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal satisfaciendo las condiciones (i) y (ii) de 3.0.2 y sea $\lambda > 0$. El operador $A_\lambda : X \longrightarrow X$ definido por

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda;A)$$

se dice una aproximación de Yosida.

Lema 3.0.4. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal que satisface las condiciones (i) y (ii) de 3.0.2. Entonces*

(i) Para cada $x \in X$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda;A)x = x. \tag{3.3}$$

(ii) Para cada $x \in X$
$$A_\lambda x = \lambda^2 R(\lambda;A)x - \lambda x. \tag{3.4}$$

(iii) Para cada $x \in D(A)$
$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax. \tag{3.5}$$

Demostración. (i) Sea $x \in D(A)$ y λ. Se tiene

$$\|\lambda R(\lambda;A)x - x\| = \|AR(\lambda;A)x\| = \|R(\lambda;A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0,$$

para cada $x \in D(A)$. Dado que el conjunto $D(A)$ es denso en X y $\|\lambda R(\lambda;A)\| \leq 1$ se sigue el resultado para todo $x \in X$.

(ii) Basta notar que

$$\lambda^2 R(\lambda;A) - \lambda I = \lambda^2 R(\lambda;A) - \lambda(\lambda I - A)R(\lambda;A) = \lambda AR(\lambda;A) = A_\lambda.$$

(iii) Si $x \in D(A)$, por el apartado (i) se tiene

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda;A)x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda;A)x = Ax.$$

Esto concluye la demostración. □

Bajo las condiciones (i) y (ii) de 3.0.2 es fácil comprobar que $R(\lambda;A)$ es lineal y está acotado, esto es $R(\lambda;A) \in \mathscr{L}(X)$, en consecuencia es inmediato que $A_\lambda \in \mathscr{L}(X)$ por (3.4).

Lema 3.0.5. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal que satisface las condiciones (i) y (ii) de 3.0.2. Si A_λ es una aproximación de Yosida, entonces A_λ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones uniformemente continuo $\{e^{tA_\lambda}; t \geq 0\}$. Además para cada $x \in X$ y $\lambda, \mu > 0$ se cumple que*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad t > 0. \tag{3.6}$$

Demostración. Como $A_\lambda \in \mathscr{L}(X)$ se sigue que A_λ genera un semigrupo uniformemente continuo $\{e^{tA_\lambda}; t \geq 0\}$ por el Teorema 2.3.7. Aplicando la propiedad (3.4) se tiene

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathscr{L}(X)} = \|e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)x - t\lambda x}\|_{\mathscr{L}(X)} &\leq \|e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)x}\|_{\mathscr{L}(X)}\|e^{-t\lambda x}\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\leq e^{t\lambda^2\|R(\lambda;A)\|_{\mathscr{L}(X)}}e^{-t\lambda} \leq e^{t\lambda}e^{-t\lambda} = 1,\end{aligned}$$

por tanto el semigrupo $\{e^{tA_\lambda}; t \geq 0\}$ es de contracciones. Por último, dado que $A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu}$ conmutan por definición, se sigue que

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}\| = \|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}x)ds\| &\leq \int_0^1 \|(tA_\lambda x - tA_\mu x)(e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}x)\|ds \\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|,\end{aligned}$$

ya que el semigrupo es de contracciones. Esto prueba el resultado. □

Tras haber probado estos dos resultados, disponemos de las herramientas necesarias para probar la condición suficiente del teorema de Hille-Yosida.

Demostración. (Suficiencia). Sea $x \in D(A)$. Entonces por 3.0.5 se tiene que

$$\sup_{t\in[a,b]} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \le b\|A_\lambda x - A_\mu x\| \le b\|A_\lambda x - Ax\| + b\|Ax - A_\mu x\| \xrightarrow[\lambda,\mu\to\infty]{} 0,$$

por (3.5) y la convergencia es uniforme en suconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$. En consecuencia, la red $(e^{tA\lambda}x)_{\lambda>0}$ es de Cauchy para todo $x \in D(A)$ y dado que X es un espacio de Banach, esta admite límite en X. Denotar $T(t)x$ dicho límite. Dado que el conjunto $D(A)$ es denso en X y $\|e^{tA\lambda}\| \le 1$ por 3.0.5, se sigue que

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \tag{3.7}$$

para todo $x \in X$ y uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$. De esta última igualdad es fácil comprobar que $T(t)$ satisface la definición de semigrupo ya que para todo $x \in X$

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}x = T(s)x = y \in X,$$

y

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}y = T(t)y,$$

uniformemente y por tanto

$$T(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}y = T(t)y = T(t)T(s)x.$$

Además es claro que $T(0) = I$ y que $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \le 1$ por 3.0.5. Observar que $\{e^{tA_\lambda}; t \le 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo y en consecuencia fuertemente continuo, es decir, cumple la condición de continuidad de la Definición 2.4.1. Por tanto como la aplicación $t \longrightarrow T(t)x$ es continua para $t \ge 0$ por ser límite uniforme de las aplicaciones continuas $t \longrightarrow e^{tA_\lambda}x$, se sigue que $\{S(t);\ t \ge 0\}$ es un C_0-semigrupo de contracciones.

Sea $B : D(B) \subseteq X \longrightarrow X$ el generador infinitesimal de $\{T(t);\ t \ge 0\}$. Para finalizar la demostración basta ver que A coincide con el generador infinitesimal B de $\{T(t);\ t \ge 0\}$. Para ello sea $x \in D(A)$ y $h > 0$. Se tiene que

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}A_\lambda x = T(t)Ax,$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{R}_+$. En efecto,

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - T(t)Ax\| &\le \|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - e^{tA_\lambda}Ax\| + \|e^{tA_\lambda}Ax - T(t)Ax\| \\ &\le \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathscr{L}(X)}\|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{tA_\lambda}Ax - T(t)Ax\|,\end{aligned}$$

y la convergencia se sigue por los resultados (3.5) y 3.0.5 y la igualdad (3.7). Nuevamente por (3.5) y junto con lo anterior se obtiene

$$T(h)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}\left(e^{hA_\lambda} - x\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^h e^{tA_\lambda}A_\lambda x dt = \int_0^h \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}A_\lambda x dt = \int_0^h T(t)Ax dt, \tag{3.8}$$

por la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$. Dividiendo por h y tomando $h \to 0^+$ en (3.8) se deduce que $Bx = Ax$ y $x \in D(B)$ por definición de generador infinitesimal y la propiedad (2.5). Por último queda por probar que $D(A) = D(B)$. Pero dado que B es el generador de un C_0-semigrupo, de la necesidad de 3.0.2, se sigue que $1 \in \rho(B)$. Así $I - B$ es invertible y $(I-B)^{-1}X = D(B)$. Como $(I-B)D(A) = (I-A)D(A)$ y por la hipótesis (ii) de 3.0.2 se tiene $1 \in \rho(A)$ y por tanto $(I-B)D(A) = (I-A)D(A) = X$. Esto implica que $D(B) = (I-B)^{-1}X = D(A)$, luego $D(A) = D(B)$. Se concluye que $A = B$. Esto termina la demostración. □

De este teorema se desprenden algunas consecuencias sencillas. El siguiente resultado encaja perfectamente con lo comentado al inicio del capítulo.

Corolario 3.0.6. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones $\{T(t);\ t \geq 0\}$. Si A_λ es una aproximación de Yosida de A, entonces*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x, \tag{3.9}$$

para cualquier $x \in X$.

Demostración. De la parte de suficiencia de la demostración del Teorema 3.0.2 se tiene que la parte derecha de (3.9) define un C_0-semigrupo de contracciones, $\{S(t);\ t \geq 0\}$, cuyo generador es A. Por el Teorema 2.4.8 se sigue que $T(t) = S(t)$. □

El Teorema de Hille-Yosida para contracciones se puede generalizar al caso de C_0-semigrupos de tipo (M,ω). Debido a las límitación del número de hojas solo lo enunciamos.

Teorema 3.0.7 (Teorema de Hille-Yosida)**.** *Un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de $\{T(t);\ t \geq 0\}$ de tipo (M,ω) si y solo si*

(i) A está densamente definido y es cerrado y

(ii) $(\omega,+\infty) \subseteq \rho(A)$ y para cada $\lambda > \omega$ y cada $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|R(\lambda;A)^n\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}.$$

Demostración. Se puede revisar en [9, pp.56-58]. □

3.1. Ejemplos de semigrupos

3.1.1. Semigrupo de multiplicación

Para este ejemplo considerar $X = C_0(\Omega)$ con la norma infinito y Ω un espacio localmente compacto. Por simplicidad tomar $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Dada cualquier función continua $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, asociamos a dicha función q un operador lineal M_q definido en su "dominio maximal" $D(M_q)$ en $C_0(\Omega)$. En estas condiciones tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1.1. Se define el operador de multiplicación M_q inducido en $C_0(\Omega)$ por una función continua $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$M_q f := q \cdot f \quad \text{para toda } f \in D(M_q)$$

y

$$D(M_q) := \{f \in C_0(\Omega) :\ q \cdot f \in C_0(\Omega)\}.$$

La ventaja de estos operadores es que la mayoría de las propiedades de M_q pueden ser caracterizadas a través de propiedades similares de q (véase [3, pp.25-29]).

Proposición 3.1.2. *Sea M_q el operador de multiplicación inducido en $C_0(\Omega)$ por una función continua q. Entonces*

(i) El operador M_q es cerrado y está densamente definido.

(ii) El operador M_q está acotado con $D(M_q) = C_0(\Omega)$ si y solo si la función q está acotada. En ese caso

$$\|M_q\|_{\mathscr{L}(X)} = \|q\| := \sup_{s\in\Omega} |q(s)|. \tag{3.10}$$

(iii) El espectro de M_q es

$$\sigma(M_q) = \overline{q(\Omega)}. \tag{3.11}$$

Demostración. Se puede consultar en [3, pp.25-27]. □

Ahora a cualquier función continua $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ le asociamos la función exponencial de la siguiente manera:

$$e^{tq} : s \longmapsto e^{tq(s)} \quad \text{para } s \in \Omega,\ t \geq 0.$$

Es inmediato que los operadores

$$T_q(t)f := e^{tq}f, \quad f \in C_0(\Omega),$$

satisfacen la ecuación funcional exponencial (EF) de 2.2.1. Para obtener un semigrupo $\{T_q(t);\, t \geq 0\}$ en $C_0(\Omega)$ basta ver que los operadores $T_q(t)$ están acotados en $C_0(\Omega)$. Por (3.10) esto se da si y solo si

$$\sup_{s\in\Omega} |e^{tq(s)}| = \sup_{s\in\Omega} e^{t\operatorname{Re} q(s)} = e^{t \sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s)} < \infty.$$

Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.1.3. Sea $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que

$$\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty.$$

Entonces el semigrupo $\{T_q(t);\, t \geq 0\}$ dado por

$$T_q(t)f := e^{tq}f,$$

para $t \geq 0$ y $f \in C_0(\Omega)$, se llama semigrupo de multiplicación generado por q en $C_0(\Omega)$.

Asimismo de (3.10) se deduce que el semigrupo $\{T_q(t);\, t \geq 0\}$ es de contracciones si y solo si

$$\|M_q\|_{\mathscr{L}(X)} = e^{t \sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s)} \leq 1 \quad \text{si y solo si} \quad \operatorname{Re} q(s) \leq 0.$$

Bajo ciertas condiciones podemos asegurar la continuidad de las aplicaciones $t \longmapsto T_q(t)f$, es decir, podemos asegurar que el semigrupo de multiplicación es un C_0-semigrupo.

Proposición 3.1.4. *Sea $\{T_q(t);\, t \geq 0\}$ un semigrupo de multiplicación generado por la función continua $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$\omega := \sup_{s\in\Omega} Re\, q(s) < \infty.$$

Entonces las aplicaciones

$$\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto T_q(t)f = e^{tq}f \in C_0(\Omega),$$

son continuas para toda función $f \in C_0(\Omega)$.

Demostración. Sea $f \in C_0(\Omega)$ con $\|f\| \leq 1$ y $\varepsilon > 0$. Tomar $K \subset \Omega$ un compacto tal que $|f(s)| \leq \dfrac{\varepsilon}{e^{|\omega|}+1}$ para todo $s \in \Omega \setminus K$. Dado que la función exponencial es continua y K es compacto, entonces es uniformemente continua en K y por tanto existe $t_0 \in (0,1]$ tal que

$$|e^{tq(s)} - 1| \leq \varepsilon,$$

para todo $s \in K$ y $0 \leq t \leq t_0$. Así

$$\|e^{tq}f - f\| \leq \sup_{s\in K} \left(|e^{tq}-1| \cdot |f|\right) + \left(e^{|\omega|}+1\right) \cdot \sup_{s\in\Omega\setminus K} |f(s)| \leq 2\varepsilon, \tag{3.12}$$

para todo $0 \leq t \leq t_0$. Esto prueba el resultado. □

Sean $m_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ con $t \geq 0$ funciones continuas acotadas formando el semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ de operadores acotados dados por $T(t)f := m_t \cdot f$, entonces asumiendo la continuidad de 3.1.4 se puede probar que existe $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua con $\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$ tal que $m_t(s) = e^{tq(s)}$(ver [3, p.28]). En resumen, los semigrupos de multiplicación fuertemente continuos en $C_0(\Omega)$ son multiplicaciones por e^{tq} para $t \geq 0$ y una función continua $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Más aún, estas funciones q nos dan el generador del semigrupo.

Lema 3.1.5. *El generador A de un semigrupo de multiplicación fuertemente continuo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ en $C_0(\Omega)$ definido por*

$$T_q(t)f := e^{tq}f, \quad f \in C_0(\Omega) \text{ y } t \geq 0,$$

viene dado por el operador de multiplicación

$$Af = M_q f := q \cdot f,$$

con dominio $D(A) = D(M_q) := \{f \in C_0(\Omega) : qf \in C_0(\Omega)\}$.

Demostración. Sea $f \in D(A)$. Entonces el límite

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tq(s)}f(s) - f(s)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tq(s)} - 1}{t} f(s) = q(s)f(s) \in C_0(\Omega),$$

existe para todo $s \in \Omega$. Esto prueba que $D(A) \subseteq D(M_q)$ y $Af = M_q f$. Ahora de (3.1) se tiene que $R(\lambda; A) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$ y recordar que todo semigrupo fuertemente continuo verifica que $\|T(t)\| \leq Me^{t\omega}$, entonces si $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ utilizando que

$$\left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) ds \right\| \leq M \int_0^t e^{\omega - \operatorname{Re} \lambda s} ds \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega},$$

se sigue que $\lambda \in \rho(A)$. Por tanto $\lambda I - A$ es invertible para λ suficientemente grande. También $I\lambda - M_q$ es invertible para λ suficientemente grande por (3.11). Esto implica que $A = M_q$. En efecto, sea $D(A) \subseteq D(M_q)$ y $Af = M_q f$ con $f \in D(A)$. Si existe $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(M_q)$, entonces $(\lambda I - A)$ y $(\lambda I - M_q)$ son invertibles y por tanto $(\lambda I - A)^{-1}X = D(A)$ si y solo si $X = (\lambda I - A)D(A)$. Además $X = (\lambda I - A)D(A) = (\lambda I - M_q)D(A)$ ya que coinciden en $D(A)$. Pero $(\lambda I - M_q)$ es invertible luego $D(A) = (\lambda I - M_q)^{-1}X = D(M_q)$. Por tanto $A = M_q$, como se quería probar. □

3.1.2. Semigrupo de traslaciones

En otras secciones ya hemos mencionado el semigrupo de traslaciones a izquierda. A continuación probamos que forman un semigrupo fuertemente continuo en $L^p(\mathbb{R})$ y damos su generador infinitesimal.

Definición 3.1.6. Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función y $t \geq 0$, el operador

$$(T_l(t)f)(s) := f(s+t), \quad s \in \mathbb{R},$$

se dice traslación a izquierda (de f por t).

Es inmediato comprobar que los operadores $T_l(t)$ cumplen las dos condiciones de la definición de (semi)grupo. En efecto, sean $t, u \in \mathbb{R}$

$$T_l(t+u)f(s) = f(s+t+u) = f((s+t)+u) = T_l(u)f(s+t) = T_l(t)T_l(u)f(s),$$

y es claro que $T_l(0) = I$. Así forman un (semi)grupo que llamaremos (semi)grupo de traslaciones a izquierda.

Proposición 3.1.7. *El grupo de traslaciones a izquierda $\{T_l(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ es fuertemente continuo en $L^p(\mathbb{R})$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Es claro que $\|T_l\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 1$, por tanto $\{T_l(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ está acotado uniformemente en $\mathbb{R}$. Tomar f una función continua de soporte compacto en $\mathbb{R}$ y sea $K := \text{sop}(f)$. Observar que f es uniformemente continua, luego

$$\lim_{t \to 0} \|T_l(t)f - f\|_\infty = \lim_{t \to 0} \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(t+s) - f(s)| = 0.$$

Como $L^\infty(K) \subseteq L^p(K)$ se sigue que

$$\lim_{t \to 0} \|T_l(t)f - f\|_p = 0.$$

Dado que el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto es denso en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$ se tiene el resultado. □

Calculamos el generador infinitesimal del semigrupo de traslaciones a izquierda.

Proposición 3.1.8. *El generador del semigrupo de traslaciones a izquierda $\{T_l(t);\ t \geq 0\}$ en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$ viene dado por*

$$Af := f',$$

con dominio

$$D(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) :\ f \text{ absolutamente continua y } f' \in L^p(\mathbb{R})\}.$$

Demostración. Sea $B : D(B) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$ el generador de $\{T_l(t);\ t \geq 0\}$ y $f \in D(B)$. Como la integración sobre intervalos es continua en $L^p(\mathbb{R})$, obtenemos que para cada $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(s)ds - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(s)ds = \frac{1}{h}\int_a^b \frac{f(s+h) - f(s)}{h} ds,$$

la parte derecha converge a $\int_a^b Bf(s)ds$ cuando $h \to 0$. Por otra parte, la parte derecha converge a $f(b) - f(a)$ para casi todo a, b ([7, p.416]). Redefiniendo f en un conjunto de medida nula se tiene que

$$f(b) = f(a) + \int_a^b Bf(s)ds,$$

es decir, f es absolutamente continua con derivada Bf en casi todo punto ([1, pp.129-130]). Esto prueba que $D(B) \subseteq D(A)$ y $A|_{D(B)} = B$. Ahora $1 \in \rho(B)$ por el Teorema de Hille-Yosida para C_0-semigrupos de contracciones y utilizando que $R(\lambda; A)f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(s+t)dt = \int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)} f(t)dt$, se sigue que $1 \in \rho(A)$. Siguiendo un argumento análogo al del ejemplo anterior se concluye que $A = B$.

□

Bibliografía

[1] ATHREYA, K. B. Y LAHIRI, S. N. MEASURE THEORY AND PROBABILITY THEORY, Springer, 2006.

[2] BANACH, S. *Sur l'equation fonctionelle f(x+y) = f(x)+f(y)*, Fund. Math. 1, 1920, 123–124.

[3] ENGEL, K.-J Y NAGEL, R. ET AL O. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Graduate Texts in Mathematics, **194**, Springer, 1999.

[4] MIANA, P.J. *Curso de análisis funcional.* Prensas Universitarias de Zaragoza, 2006.

[5] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, **44**, Springer, 2011.

[6] SIERPIŃSKI, W. *Sur l ´equation fonctionelle f(x + y) = f(x) + f(y)*, Fund. Math. 1, 1920, 116–122.

[7] TAYLOR, A. E. *General Theory of Functions and Integration*, Dover Publications, 1985.

[8] TRENCH, W. F. *Advanced Calculus.* Harper & Row, 1978.

[9] VRABIE, I. I. *C_0-Semigroups and Applications.* North-Holland Mathematics Studies, **191**, Amsterdam, Elsevier Science, 2003.