Irracionalidad y trascendencia de e y π

Lucía Lasierra Lavilla
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Mario Pérez Riera
Junio de 2022

Abstract

The purpose of this final degree project is to see the proofs of the irrationality and transcendence of the numbers π and e, as well as the irrationality of $\zeta(3)$.

In chapter 1, where we use items [3] and [4] of the bibliography as a reference, we will focus on the study of the number e. First, we will briefly explain its history, then we will see a proof that the number e is irrational by contradiction and using the expression e^x as an infinite sum. For the study of transcendence we will see before that e is not a quadratic irrational and the Hermite identity, which is

$$e^x \int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0)e^x - F(x)$$

(f and F are polynomials, the details are omitted here). Two results that are used in the proof of transcendence, which is also carried out by contradiction. We suppose that e is an algebraic number and by the Hermite identity we arrive at an equality of the form

$$-\sum_{k=0}^{m} a_k F(k) = \sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt.$$

Taking a certain polynomial $f(x)$, it is observed that the left side of the equation is a non-zero integer while the right side is less than 1 in absolute value, thus arriving at a contradiction.

In Chapter 2 we again use items [3] and [4] of the bibliography as a reference. We focus on the number π and we look at Ivan Niven's proof of the irrationality of π. The steps of this proof are: The first thing we do is to observe that

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = \left[F'(x)\,\mathrm{sen}(x) - F(x)\cos(x)\right]_0^{\pi} = F(0) + F(\pi),$$

for suitable polynomials f and F. Thus, now assuming that π is rational and taking some $f(x)$, we see that the right side of the equation is a natural number, while the left side is strictly between 0 and 1. We see that this is a contradiction. Later we give the definition of algebraic integer and a lemma that is very useful to prove the transcendence of π. The proof is based on the Euler equation and the Hermite identity, and is also carried out by contradiction. This proof is similar to the proof that e is irrational, since once we get an identity of the form

$$-aF(0) - \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} f(t)e^{-t}dt,$$

we follow the same steps to arrive at the contradiction.

Finally, in chapter 3, where we use items [1], [2], [4] and [5] of the bibliography as a reference, we analyze the irrationality of the Riemann zeta function of the numbers 2 and 3. The first thing we do is to see the general definition that Riemann gave and some lemmas that facilitate the proofs. Next we start by proving that $\zeta(2)$ is irrational. This proof would be very easy, since in the previous chapter we saw that π is irrational and we know from the Basel problem, which was solved by Euler, that the exact sum of the inverse squares of the positive integers is $\frac{\pi^2}{6}$, but we do the proof this way to help us better understand the steps involved in the proof that $\zeta(3)$ is irrational. Both proofs are performed through integrals that are equal to either these values or to a linear transformation of them.

Índice general

Capítulo 1

Irracionalidad y trascendencia del número e

En este capítulo nuestro objetivo es estudiar la irracionalidad y trascendencia del número e. Comenzamos por dar unas definiciones para la mejor comprensión del estudio, así como también comentaremos de forma breve la historia de este número.

Un **número trascendente** es cualquier número real o complejo que no es solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales, es decir, que no es solución de una ecuación algebraica de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ donde los a_i no son todos cero.

Un **número algebraico** es cualquier número real o complejo que es solución de una ecuación algebraica.

Una vez vistas las definiciones, veamos de forma breve la historia del número e.

No es hasta principios del siglo XVII cuando se dan las primeras referencias al número e. La primera aparición de este número se da en el 1618, en una tabla que daba logaritmos naturales, publicada por John Napier en un apéndice de uno de sus trabajos. Durante los siguientes años el número e sigue apareciendo en diversas ocasiones en las publicaciones de distintos matemáticos, aunque en ninguna de estas aparece el número e como tal. Es en el 1683 cuando e se *descubre* por primera vez y no es a través de la noción de logaritmo. Jacob Bernoulli realizó un estudio del problema de interés compuesto con el que dió la primera aproximación del número e. El primer uso conocido de la constante, representado por la letra b, fue en el 1690 en una carta escrita por Leibniz a Huygens. Euler da la notación del número e, pues comenzó a utilizar esta letra para identificar la constante en el 1731 en una carta que escribió a Goldbach. En los siguientes años Euler realizó varios descubrimientos con respecto a e y es el primero en intentar probar que e no es racional. Pero fue Hermite quien demostró en el año 1873 que e no es un número algebraico, es decir, es trascendente.

1.1. Irracionalidad

Primero vamos a demostrar que el número e es irracional.

Teorema 1.1. *El número e es irracional.*

Demostración. Sabemos que el número e viene dado por la serie

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Denotamos:

$$A_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.1}$$

$$a_n = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > 0, \qquad n = 1,2,3,... \tag{1.2}$$

Así tenemos:

$$n!e = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) = A_n + a_n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
a_n = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ... \right) \\
&= \frac{n!}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... \right) \\
&< \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{n+1}, \qquad n = 1,2,...
\end{aligned}$$

Luego

$$a_n < \frac{2}{n+1}, \qquad n = 1,2,...$$

Combinando (1.2) y lo anterior, nos queda

$$0 < a_n < \frac{2}{n+1} \leq 1, \qquad n = 1,2,... \tag{1.3}$$

Así, podemos observar:

$$n!e = (A_n + a_n) \notin \mathbb{N}, \qquad n = 1,2,...$$

ya que $A_n \in \mathbb{N}$ pero acabamos de ver que a_n es un número que está entre 0 y 1, y no existe ningún número natural entre 0 y 1, por tanto $a_n \notin \mathbb{N}$.

Si e fuera racional, es decir, $e = \frac{m}{n}$ para algún n, entonces $n!e$ sería un número entero. Por lo tanto, e no es racional. □

1.2. El número *e* no es un irracional cuadrático

Veamos algunos resultados necesarios para la demostración de la trascendencia del número e. Empezamos por un resultado que tiene su propio interés.

Teorema 1.2. *e no es un irracional cuadrático.*

Demostración. Lo que se pretende demostrar es el hecho de que e no es un irracional cuadrático, dicho en otras palabras, que e no es la raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.

Vamos a hacerla por reducción al absurdo. Supongamos que e es una irracionalidad cuadrática, es decir,

$$ae^2 + be + c = 0, \qquad a,b,c \in \mathbb{Z},$$

donde a,b,c no son todos ceros. Utilizando el hecho de que e es irracional, tenemos $a \neq 0$ y $c \neq 0$ (pues si $a = 0$ tenemos $be + c = 0$ luego $e = -\frac{c}{b}$ lo que nos lleva a una contradicción con que e es irracional. Además si $c = 0$, nos queda $ae^2 + be = 0$ así, podemos dividir por e y llegamos también a una contradicción con la irracionalidad de e).

Cambiando de signo todos los coeficientes si hace falta, podemos suponer que $a > 0$. Así tenemos que

$$ae + b + ce^{-1} = 0, \qquad \text{con } a > 0 \text{ y } c \neq 0. \tag{1.4}$$

El número $\frac{1}{e}$ viene dado por la serie:

$$\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+1)}}{k!} \tag{1.5}$$

Y denotamos, para cada $n = 1, 2, ...$

$$B_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \tag{1.6}$$

Observamos que $B_n \in \mathbb{Z}$. Denotamos también

$$\begin{aligned} b_n &= n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+1)}}{k!} = n! \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + ...\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ... \end{aligned} \tag{1.7}$$

Observemos que b_n está dado por una serie alterna cuyos términos disminuyen monótonamente en valor absoluto.

$$\left|\frac{1}{n+1}\right| \geq \left|\frac{-1}{(n+1)(n+2)}\right| \geq ...$$

Por tanto:

$$0 < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} < b_n < \frac{1}{n+1} \tag{1.8}$$

Usando (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (1.6) y (1.7) tenemos:

$$\begin{aligned} n!(ae + b + ce^{-1}) &= a(A_n + a_n) + bn! + c(B_n + (-1)^{n+1} b_n) \\ &= (aA_n + bn! + cB_n) + (aa_n + (-1)^{n+1} cb_n) \\ &= C_n + c_n = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Recordemos que por (1.1) y (1.6) sabemos que $A_n \in \mathbb{N}$ y $B_n \in \mathbb{Z}$ con $n = 1, 2, ...$ luego:

$$C_n = aA_n + bn! + cB_n \in \mathbb{Z} \;\; con \;\; n = 1, 2, ... \tag{1.10}$$

Tomamos cualquier n que cumpla las desigualdades:

$$\begin{aligned} n &\geq 2a + |c|, \\ (-1)^{n+1} c &> 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Como $a > 0$ y de (1.3), (1.8) y (1.11) deducimos que:

$$0 < c_n = aa_n + (-1)^{n+1} cb_n = aa_n + |c| b_n < \frac{2a + |c|}{n+1} < 1 \tag{1.12}$$

Pero observamos que de (1.10) y (1.12) tenemos:

$$C_n = aA_n + bn! + cB_n \in \mathbb{Z},$$

$$0 < c_n < 1.$$

Y esto contradice (1.9), que nos dice:

$$C_n + c_n = 0.$$

Por tanto, hemos visto que e no es un irracional cuadrático. □

Lema 1.3. *Si $g(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$ todos los coeficientes de la k-ésima derivada $g^{(k)}(x)$ son divisibles por $k!$.*

Demostración. Dado que la derivación es una operación lineal, basta con probar el lema para el polinomio $g(x) = x^s$ con $s \in \mathbb{N}$. Notar que:

- La k-ésima derivada de $g(x) = x^s$ es cero si $k > s$.
- La k-ésima derivada de $g(x) = x^s$ es $g^{(k)}(x) = k!\binom{s}{k}x^{s-r}$, si $1 \leq k \leq s$, donde el coeficiente binomial $\binom{s}{k}$ es un entero.

Así, hemos probado el lema. □

Lema 1.4 (identidad de Hermite)**.** *Sea $f(x)$ un polinomio de grado r con coeficientes reales, y fijamos*

$$F(x) = f(x) + f'(x) + ... + f^{(r)}(x) \tag{1.13}$$

Entonces,

$$e^x \int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0)e^x - F(x) \tag{1.14}$$

donde x es un número real o complejo. Esta fórmula se llama identidad de Hermite.

Demostración. Integrando por partes $\int_0^x f(t)e^{-t}dt$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)e^{-t}dt = \begin{Bmatrix} u = f(t); & du = f'(t)dt \\ v = -e^{-t}; & dv = e^{-t}dt \end{Bmatrix} &= \left[-e^{-t}f(t)\right]_0^x + \int_0^x f'(t)e^{-t}dt \\ &= f(0) - f(x)e^{-x} + \int_0^x f'(t)e^{-t}dt\end{aligned}$$

Si repetimos el proceso $r+1$ veces, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)e^{-t}dt &= f(0) - f(x)e^{-x} + \int_0^x f'(t)e^{-t}dt \\ &= f(0) - f(x)e^{-x} + f'(0) - f'(x)e^{-x} + \int_0^x f''(t)e^{-t}dt \\ &= ... = F(0) - F(x)e^{-x} + \int_0^x f^{(r+1)}(t)e^{-t}dt = F(0) - F(x)e^{-x},\end{aligned}$$

ya que por (1.13) sabemos que $F(x) = f(x) + f'(x) + ... + f^{(r)}(x)$ y $f^{(r+1)}(t) = 0$ por ser $f(x)$ un polinomio de grado r. Así, nos queda la igualdad que queríamos conseguir:

$$e^x \int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0)e^x - F(x).$$

□

1.3. Trascendencia

Teorema 1.5. *El número e es trascendente.*

Demostración. Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Supongamos que e es un número algebraico de grado m. Entonces:

$$a_m e^m + ... + a_1 e + a_0 = 0 \tag{1.15}$$

con $a_0 \neq 0$, $a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0,1,...,m$. Suponemos $a_0 \neq 0$ ya que si no basta con dividir por e tantas veces como sea necesario para obtener un término independiente no nulo. Si fijamos $x = k$ en la identidad de Hermite, dada en (1.14), donde $k = 0,1,...,m$, obtenemos:

$$F(0)e^k - F(k) = e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt, \quad k = 0,1,...,m, \tag{1.16}$$

para cualquier polinomio $f(x)$ con coeficientes reales. Multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por a_k, y luego sumamos las ecuaciones resultantes para $k = 0,1,...,m$. Así nos queda:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k F(0)e^k - \sum_{k=0}^{m} a_k F(k) = \sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt.$$

Usando (1.15) sabemos que $a_m e^m + ... + a_1 e + a_0 = 0$, luego:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k F(0)e^k = F(0)\sum_{k=0}^{m} a_k e^k = 0$$

Luego tenemos;

$$-\sum_{k=0}^{m} a_k F(k) = \sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt. \tag{1.17}$$

La igualdad (1.17) se cumple para cualquier polinomio $f(x)$ con coeficientes reales. Fijamos

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}(x-1)^n...(x-m)^n \tag{1.18}$$

donde n es un número natural suficientemente grande que satisface algunas condiciones que se darán más adelante. Observamos que $f(x)$ es un polinomio de grado

$$(n-1) + \underbrace{n + ... + n}_{\text{m veces}} = n - 1 + nm = (m+1)n - 1.$$

Vamos a ver que el lado izquierdo de la ecuación (1.17) es un entero distinto de cero, mientras que el lado derecho es menor que 1 en valor absoluto. Esta contradicción demostrará el teorema. Vemos primero que $-\sum_{k=0}^{m} a_k F(k)$ es un entero distinto de cero. El polinomio $f(x)$ en (1.18) tiene 0 como raíz de multiplicidad $n-1$ y $1,2,...,m$ como raíces de multiplicidad n. Por tanto,

$$f^{(l)}(0) = 0, \quad l = 0,1,...,n-2 \tag{1.19}$$

$$f^{(n-1)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n, \tag{1.20}$$

luego $f^{(n-1)}(0)$ es un entero,

$$f^{(l)}(k) = 0, \quad l = 0,1,...,n-1; \quad k = 1,...,m. \tag{1.21}$$

Por el lema 1.3, la l-ésima derivada de $x^{n-1}(x-1)^n...(x-m)^n$ tiene coeficientes que son divisibles por $l!$. Esto implica que para $l \geq n$ los coeficientes de $f^{(l)}(x)$ son divisibles por n. Así que por (1.13), (1.19) y (1.20) encontramos que

$$F(0) = \sum_{l=n-1}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n + nA, \quad A \in \mathbb{Z}. \tag{1.22}$$

Si imponemos la condición

$$(n, m!) = 1$$

entonces de (1.22) deducimos que

$$(n, F(0)) = 1$$

y si además imponemos la condición

$$n > |a_0|,$$

entonces $a_0 F(0)$ no es múltiplo de n. De (1.21) también encontramos que

$$F(k) = \sum_{l=n}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(k) = nB_k, \;\; B_k \in \mathbb{Z} \;\; k = 1,...,m, \tag{1.23}$$

ya que los coeficientes de $f^{(l)}(k)$, para $l \geq n$, son múltiplos de n. Entonces, se sigue de (1.22) y (1.23) que todos los términos de la izquierda de (1.17), $-\sum_{k=0}^{m} a_k F(k)$, son números enteros. Y además la suma es distinta de cero, pues esto se daría solo si a_0 fuera múltiplo de n, cosa que no puede ocurrir ya que acabamos de imponer que $n > |a_0|$. Entonces el lado izquierdo de (1.17) es un número entero distinto de cero. En particular:

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k F(k) \right| \geq 1. \tag{1.24}$$

Veamos ahora que $\sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt$ es menor que 1 en valor absoluto. Ahora encontraremos un límite superior para el lado derecho de (1.17). En el intervalo $0 \leq x \leq m$ cada uno de los factores $x-k$ en (1.18), con $0 \leq k \leq m$, está acotado por m. Por tanto:

$$|f(x)| \leq \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!}, \quad 0 \leq x \leq m$$

y

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k \int_0^k f(t)e^{k-t}dt \right| \leq \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{m} |a_k| \int_0^k e^{k-t}dt < \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!} e^m \sum_{k=0}^{m} |a_k| = C_0 \frac{C^n}{(n-1)!} \tag{1.25}$$

donde las constantes C_0 y C no dependen de n.

De (1.17), (1.24) y (1.25) obtenemos la desigualdad:

$$1 \leq \left| \sum_{k=0}^{m} a_k F(k) \right| \leq C_0 \frac{C^n}{(n-1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

lo cual es imposible que se cumpla.

Luego llegamos a una contradicción, con lo cual concluimos que e es un número trascendente. □

Observación. Consideramos las igualdades de (1.16):

$$F(0)e^k - F(k) = e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt, \;\; k = 0,1,...,m$$

De (1.22) y (1.23) se sigue que $F(k)$, con $k = 0,1,...,m$ son enteros. Si estimamos $e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt$ de la misma manera que hicimos para el lado derecho de (1.17), vemos que se acerca a 0 cuando n tiende a ∞. Por tanto, para todo n las fracciones:

$$\frac{F(k)}{F(0)}, \;\; k = 1,...,m$$

son aproximaciones simultáneas a los valores e^k, con $k = 1,...,m$. En el fondo, se puede ver que esta demostración de que e es trascendente se basa en la construcción (usando la *identidad de Hermite*) de una sucesión de aproximaciones simultáneas de potencias de e.

Capítulo 2

Irracionalidad y trascendencia del número π

En este capítulo el objetivo es estudiar la irracionalidad y trascendencia del número π.

El número π se conoce desde la antigüedad. Los antiguos egipcios (hacia 1600 a. de C.) ya sabían que existía una relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. En la Grecia clásica sabían que la razón entre la longitud de una circunferencia cualquiera y su diámetro es siempre una constante. Fue Arquímedes (siglo II a. de C.) quien determinó que estas constantes estaban estrechamente relacionadas con π. Obtuvo la aproximación $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Arquímedes no tenía la ventaja de una notación algebraica, ni trigonométrica, ni decimal y tuvo que derivar por medios puramente geométricos. No es hasta el siglo XVII cuando aparecen fórmulas matemáticas para π. En 1716 Lambert probó que π es irracional, además en un artículo presentado a la Academia de Berlín en 1768 conjeturó que e y π eran trascendentes. Pero no es hasta el año 1873 cuando Hermite demuestra que el número e es trascendente y en la segunda mitad del siglo XIX Lindemann demostró que el número π es trascendente usando el método que Hermite había utilizado unos años antes para la demostración de la trascendencia de e con ciertas adaptaciones. De hecho, este resultado demostró que el problema de la cuadratura del círculo no tiene solución. El primero en usar π con su significado actual fue el matemático William Jones en 1706, y en el 1737 Euler adoptó el símbolo.

2.1. Irracionalidad

En esta sección vamos a demostrar que el número π es irracional mediante reducción al absurdo, pero antes de ello vamos a ver una observación que nos vendrá muy bien para la demostración.

Observación. Sea $f(x)$ un polinomio cualquiera con coeficientes reales, y sea

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \ldots$$

Observar que la suma $f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \ldots$ termina después de varios términos y que $F(x)$ es un polinomio. Además, tenemos la relación

$$\frac{d}{dx}(F'(x)\operatorname{sen}(x) - F(x)\cos(x)) = (F''(x) + F(x))\operatorname{sen}(x) = f(x)\operatorname{sen}(x).$$

Pues,

$$\frac{d}{dx}(F'(x)\operatorname{sen}(x)) = F''(x)\operatorname{sen}(x) + F'(x)\cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)\cos(x)) = F'(x)\cos(x) - F(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$(F''(x)\operatorname{sen}(x) + F'(x)\cos(x)) - (F'(x)\cos(x) - F(x)\operatorname{sen}(x)) = F''(x)\operatorname{sen}(x) + F(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$F''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) + \dots$$
$$F''(x) + F(x) = f(x)$$

Luego, $F'(x)\,\mathrm{sen}(x) - F(x)\cos(x)$ es una primitiva de la integral $\int f(x)\,\mathrm{sen}(x)dx$. Así, por el teorema fundamental del cálculo nos queda

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = \left[F'(x)\,\mathrm{sen}(x) - F(x)\cos(x)\right]_0^\pi = F(0) + F(\pi). \tag{2.1}$$

Notar que (2.1) es análoga a la identidad de Hermite (1.14) para la función $\mathrm{sen}(x)$. Se satisface para cualquier polinomio $f(x)$ con coeficientes reales.

Teorema 2.1. *El número π es irracional.*

Demostración. Supongamos que π es un número racional, es decir, lo podemos escribir de la forma $\pi = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{N}$. Sea

$$f(x) = \frac{b^n}{n!}(\pi - x)^n x^n = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n$$

donde $n \in \mathbb{N}$ grande. Vamos a demostrar que con esta elección de $f(x)$, el lado derecho de la identidad (2.1) es un número natural, mientras que el lado izquierdo satisface la desigualdad

$$0 < \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(x)dx < 1. \tag{2.2}$$

Esto nos da una contradicción, lo que demuestra el teorema.

Veamos primero que $0 < \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(x)dx < 1$. Puesto que $f(x) > 0$ y $\mathrm{sen}(x) > 0$ en el intervalo $0 < x < \pi$, entonces $f(x)\,\mathrm{sen}(x) > 0$ y es continuo, por tanto se cumple la primera desigualdad:

$$0 < \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(x)dx.$$

Además,

$$x^n(\pi - x)^n \leq \pi^{2n}, \text{ con } 0 \leq x \leq \pi.$$

Por tanto,

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = \int_0^\pi \frac{b^n}{n!}(\pi - x)^n x^n\,\mathrm{sen}(x)dx \leq \frac{b^n \pi^{2n}}{n!}\int_0^\pi \mathrm{sen}(x)dx = 2\frac{C^n}{n!}$$

con $C = \frac{a^2}{b}$. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{C^n}{n!} = 0$, se sigue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2\frac{C^n}{n!} < 1$ para todo $n \geq n_0$. Luego hemos visto que se cumple la desigualdad (2.2).

Veamos ahora que $F(0) + F(\pi)$ es un número natural. El polinomio $f(x)$ tiene el 0 como raíz de multiplicidad n, luego

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Por el lema 1.3, sabemos que la l-ésima derivada de $x^n(a - bx)^n$ tiene todos los coeficientes divisibles por $l!$. Esto implica que todas las derivadas de $f(x)$ de orden $l \geq n$ tienen coeficientes enteros. Entonces,

$$f^{(n)}(0), \dots, f^{(2n)}(0)$$

son enteros, y

$$f^{(l)}(0) \in \mathbb{Z},\ l = 0, 1, 2, \dots$$

Además, tenemos

$$f(x) = f(\pi - x),$$

entonces

$$f^{(l)}(x) = (-1)^l f^{(l)}(\pi - x),\ l = 1, 2, \dots$$

$$f^{(l)}(\pi) = (-1)^l f^{(l)}(0) \in \mathbb{Z},\ l = 0, 1, \dots$$

Por tanto, $F(0) + F(\pi) \in \mathbb{Z}$. Luego acabamos de ver por reducción al absurdo que π es irracional. □

2.2. Trascendencia

En esta sección vamos a ver que el número π es trascendente mediante una demostración que está basada en la ecuación $e^{\pi i}+1=0$ (fórmula de Euler) y en la identidad de Hermite (1.14). Primero vamos a ver varias definiciones y un lema que nos serán de gran utilidad en la demostración.

Definición. Sea α un número algebraico. Existe un único polinomio irreducible $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ con coeficiente principal 1 que tiene α como raíz. Este polinomio se llama *polinomio mínimo* de α, y su grado se llama *grado de* α.

Definición. Si α es un número algebraico de grado n, entonces las raíces $\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ del polinomio mínimo de α se denominan *conjugados* de α.

Definición. Un número algebraico α se llama *entero algebraico* si todos los coeficientes de su polinomio mínimo $f(x)$ son enteros.

Además, se puede demostrar que si α es raíz de un polinomio $\varphi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con coeficiente principal 1 (no necesariamente irreducible), entonces α es un entero algebraico.

Lema 2.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un número algebraico de grado n, es decir,* $\operatorname{grad}(\alpha)=n$ *y sean $\alpha=\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ las raíces conjugadas de α. Supongamos que:*

$$F=F(x_1,\ldots,x_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_n], \quad k \geq 0.$$

y que como polinomio en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ con coeficientes en $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_k]$, F es un polinomio simétrico en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, es decir, que no cambia cuando permutamos los α_j. Entonces

$$F(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_k]$$

y $F \in \mathbb{Q}$ para $k=0$. Además, si α es entero algebraico, esto es, con polinomio mínimo en $\mathbb{Z}[X]$, entonces

$$F=F(x_1,\ldots x_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots x_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_n], \quad k \geq 0$$

Entonces se sigue que:

$$F(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_k]$$

y $F \in \mathbb{Z}$ para $k=0$.

Demostración. Consideramos F como un polinomio en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ con coeficientes en $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_k]$. Dado que F es un polinomio simétrico en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, el *teorema fundamental de los polinomios simétricos* afirma que este polinomio se puede expresar como un polinomio en $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ con coeficientes en $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_k]$, siendo

$$\sigma_1=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$$
$$\sigma_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n$$
$$\ldots$$
$$\sigma_n=\alpha_1\ldots\alpha_n$$

Estos se llaman polinomios simétricos elementales en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, que son (excepto por el signo) los coeficientes del polinomio $(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$, es decir, son iguales (excepto en signo) a los coeficientes del polinomio mínimo del número algebraico α. Por lo tanto, $F=F(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_k]$, y $F \in \mathbb{Q}$ en el caso $k=0$. La demostración de la segunda parte del lema es similar. Usamos además el hecho de que todos los coeficientes del polinomio mínimo están en $\mathbb{Z}$. □

Teorema 2.3. *El número π es trascendente.*

Demostración. Vamos a verlo por reducción al absurdo. Supongamos que π es un número algebraico, entonces $\gamma = \pi i$ es también algebraico (observar que si $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$ y $f(\pi) = 0$ entonces $g(x) = f(ix)f(-ix) \in \mathbb{Z}[X]$ y $g(i\pi) = 0$). Sea ν el grado del polinomio mínimo de $\gamma = i\pi$ y sean $\gamma = \gamma_1, ..., \gamma_\nu$ los conjugados de γ, es decir, todas las raices del polinomio. Como $e^\gamma + 1 = 0$, tenemos:

$$\prod_{i=1}^{\nu}(1+e^{\gamma_i}) = 0$$

Expandiendo este producto, obtenemos:

$$\prod_{i=1}^{\nu}(1+e^{\gamma_i}) = \sum_{\varepsilon_1=0}^{1} ... \sum_{\varepsilon_\nu=0}^{1} e^{\varepsilon_1\gamma_1+...+\varepsilon_\nu\gamma_\nu} = 1 + e^{\gamma_1} + e^{\gamma_2} + e^{\gamma_1+\gamma_2} + ... = 0 \tag{2.3}$$

Notemos que hay 2^ν exponentes distintos y que los exponentes de la suma múltiple anterior incluyen algunos que son no nulos, (como por ejemplo; $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = ... = \varepsilon_\nu = 0$), y otros que son nulos, (como por ejemplo; $\varepsilon_1 = ... = \varepsilon_\nu = 0$). Supongamos que hay m exponentes no nulos exactamente y $a = 2^\nu - m$ que son cero, con $a \geq 1$ (al menos hay un cero, cuando $\varepsilon_i = 0$ para todo i). Luego, si denotamos $\alpha_1, ..., \alpha_m$ a los exponentes no nulos, podemos escribir la expresión (2.3) como:

$$a + e^{\alpha_1} + ... + e^{\alpha_m} = 0, \qquad a \geq 1 \tag{2.4}$$

Veamos ahora que los números $\alpha_1, ..., \alpha_m$ son el conjunto de raíces de un polinomio $\psi(x) \in \mathbb{Z}[X]$ de grado m. Para ello, observamos que el polinomio:

$$\varphi(x) = \prod_{\varepsilon_1=0}^{1} ... \prod_{\varepsilon_\nu=0}^{1} (x - (\varepsilon_1\gamma_1 + ... + \varepsilon_\nu\gamma_\nu))$$

considerado como polinomio en $\gamma_1, ...\gamma_\nu$ con coeficientes en $\mathbb{Z}[X]$, es simétrico en $\gamma_1, ...\gamma_\nu$. Por tanto, por el lema 2.2, $\varphi(x) \in \mathbb{Q}[X]$. Las raíces del polinomio $\varphi(x)$ de grado 2^ν son $\alpha_1, ..., \alpha_m$ con multiplicidad 1 y 0 con multiplicidad a. Entonces el polinomio $x^{-a}\varphi(x) = (x-\alpha_1)...(x-\alpha_m) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado m tiene como raíces $\alpha_1, ..., \alpha_m$. Si $r \in \mathbb{N}$ es el denominador común de los coeficientes de este polinomio, entonces:

$$\psi(x) = \frac{r}{x^a}\varphi(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[X], \;\; b_m > 0, \;\; b_0 \neq 0$$

también tiene como raíces $\alpha_1, ..., \alpha_m$.

En la identidad de Hermite (1.14), ponemos sucesivamente $x = \alpha_1, ..., \alpha_m$, sumamos las ecuaciones resultantes y usando (2.4) ($-a = e^{\alpha_1} + ... + e^{\alpha_m} = \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k}$) obtenemos:

$$-aF(0) - \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} f(t)e^{-t}dt \tag{2.5}$$

para cualquier polinomio f con coeficientes reales. El resto de la demostración, como vamos a ver, es similar a la demostración de la trascendencia de e.

En (2.5) tomamos

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} b_m^{mn-1} x^{n-1} \psi^n(x) = \frac{1}{(n-1)!} b_m^{(m+1)n-1} x^{n-1} (x-\alpha_1)^n ... (x-\alpha_m)^n$$

donde $n \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande y $f(x)$ es un polinomio de grado $(m+1)n-1$. Ahora vamos a probar que con esta elección de $f(x)$ la igualdad (2.5) nos lleva a una contradicción.

Veamos primero que $-aF(0) - \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k)$ es un entero distinto de cero. El polinomio $f(x)$ tiene 0 como raíz de multiplicidad $n-1$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ como raíces de multiplicidad n. Así, como en el caso del teorema 1.5, obtenemos igualdades similares a (1.19), (1.20) y (1.22):

$$f^{(l)}(0) = 0, \;\; l = 0, 1, ..., n-2,$$

$$f^{(n-1)}(0) = b_m^{mn-1} b_0^n,$$

luego $f^{(n-1)}(0)$ es un entero. Por el lema 1.3, sabemos que la l-ésima derivada de $x^{n-1}\psi^n(x)$ tiene coeficientes enteros que son divisibles por $l!$. Así, para $l \geq n$ tenemos que $f^{(l)}(0)$ es múltiplo de n. Nos queda

$$F(0) = \sum_{l=n-1}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(0) = b_m^{mn-1} b_0^n + nA, \;\; A \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

Como α_k es una raíz de $f(x)$ de multiplicidad n, obtenemos una ecuación similar a (1.21):

$$f^{(l)}(\alpha_k) = 0, \;\; l = 0, 1, ..., n-1; \;\; k = 1, ..., m. \tag{2.7}$$

Además, por el lema 1.3, la l-ésima derivada de $x^{n-1}\psi^n(x)$ tiene coeficientes enteros que son divisibles por $l!$. Así, para $l \geq n$ los coeficientes de $f^{(l)}(x)$ son enteros divisibles por $b_m^{mn-1} n$. Entonces, por (2.7) tenemos:

$$F(\alpha_k) = \sum_{l=n}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(\alpha_k) = n b_m^{mn-1} \phi(\alpha_k), \;\; k = 1, ..., m, \;\; \phi(z) \in \mathbb{Z}[z]. \tag{2.8}$$

Notamos que los números $\beta_k = b_m \alpha_k$, con $k = 1, ..., m$ son enteros algebraicos que forman el conjunto completo de raíces de un polinomio en $\mathbb{Z}[X]$ de grado m con coeficiente principal 1. Además,

$$b_m^{mn-1} \phi(\alpha_k) = H(\beta_k), \;\; con \;\; H(x) \in \mathbb{Z}[X]$$

Entonces, por el lema 2.2:

$$\sum_{k=1}^{m} b_m^{mn-1} \phi(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{m} H(\beta_k) = B, \;\; B \in \mathbb{Z} \tag{2.9}$$

De (2.6), (2.8) y (2.9) tenemos:

$$aF(0) + \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) = a b_0^n b_m^{mn-1} + n(aA + B) \tag{2.10}$$

Ahora, tomamos un número natural n que satisfaga las condiciones:

$$(n, b_0 b_m) = 1 \qquad \text{y} \qquad n > a \tag{2.11}$$

Luego, el lado derecho de (2.10) es un entero no divisible por n, y no nulo. Por tanto:

$$\left| aF(0) + \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) \right| \geq 1 \tag{2.12}$$

Ahora, vamos a encontrar una cota superior para el lado derecho de la igualdad (2.5). Supongamos que todos los puntos $\alpha_1, ..., \alpha_m$ están contenidos en el círculo $|x| \leq R$, con $R > 0$. Denotamos:

$$\max_{|x| \leq R} |b_m^m \psi(x)| = C$$

donde C no depende de n y sabemos que existe porque $b_m^m \psi(x)$ es continua y $|x| \leq R$ es un compacto. Entonces

$$\max_{|x| \leq R} |f(x)| \leq \frac{R^{n-1} C^n}{b_m (n-1)!}.$$

Así, existe un n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$ que satisfaga las condiciones (2.11) se cumple:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} f(x) e^{-x} dx \right| &\leq \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\alpha_k} \left| f(x) e^{\alpha_k - x} \right| dx \leq \frac{R^{n-1} e^R}{b_m (n-1)!} C^n \sum_{k=1}^{m} \left| \int_0^{\alpha_k} dx \right| \\ &\leq \frac{R^{n-1} e^R}{b_m (n-1)!} C^n \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \leq \frac{R^{n-1} e^R}{b_m (n-1)!} C^n m R \leq m e^R \frac{(RC)^n}{b_m (n-1)!} < 1, \end{aligned} \tag{2.13}$$

para n suficientemente grande. Luego llegamos a una contradicción con (2.12), (2.13) y (2.5). Así hemos demostrado que el número π es trascendente. □

Comentario. En las demostraciones anteriores y en otras similares, se usa en más de una ocasión el hecho elemental de que si un número entero n no es 0, entonces $|n| \geq 1$. O, de manera equivalente, si $\frac{p}{q}$ y $x = \frac{r}{q}$ son dos números racionales distintos con el mismo denominador, entonces

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| \geq \frac{1}{q}.$$

Usando argumentos sencillos, se puede ver que los números irracionales sí admiten aproximaciones de la forma

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

con q arbitrariamente grande.

Esta propiedad está detrás, por ejemplo, de las aproximaciones de

$$\pi \sim \frac{22}{7} = 3,142...$$

$$\pi \sim \frac{355}{113} = 3,141592...$$

que se conocen desde la antigüedad.

Capítulo 3

Irracionalidad de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$

En este capítulo vamos a ver la demostración de irracionalidad de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$.

La función zeta de Riemann se define como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

con $s \in \mathbb{C}$ y $\mathrm{Re}(s) > 1$.

En la primera mitad del siglo XVIII Euler considera esta función, pero utilizando solo números reales. En el 1735 demostró que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

resolviendo así el famoso problema de Basilea. En el 1737 demostró la conexión de la función zeta con la serie de números primos mediante la relación

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

La suma es sobre todos los números naturales n mientras que el producto es sobre todos los números primos. Además, en el 1739 Euler demostró para los números enteros positivos pares los valores de la función zeta de Riemann, en términos de los números de Bernoulli.

En el año 1859 Riemann definió la función zeta de Riemann considerándola como una función compleja en lugar de una real (como hacía Euler) y demostró sus propiedades básicas. Además, conjeturó que todos sus ceros no triviales cumplen que $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ (no entraremos en detalle); esta es la famosa hipótesis de Riemann.

Ya sabemos en realidad que $\zeta(2)$ es irracional, incluso trascendente, ya que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. La demostración que incluimos es otra demostración de que π es irracional, pero el verdadero motivo por el que la traemos a este trabajo es como preparación para la demostración de que $\zeta(3)$ es también irracional. Pues son demostraciones muy similares, pero el grado de dificultad aumenta en esta última. Así, viendo primero la de $\zeta(2)$ se hace más sencillo seguir los pasos utilizados para la de $\zeta(3)$.

3.1. Conceptos necesarios para las demostraciones

En esta sección vamos a ver algunos conceptos que nos serán de gran utilidad para las demostraciones de irracionalidad de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$.

Definición. El valor d_n es el mínimo común múltiplo de $1, 2, \ldots, n$.

Definición. $\pi(n)$ es la función contadora de números primos, es decir, es la cantidad de números primos menores o iguales que n.

Lema 3.1. *El valor d_n se puede estimar por*

$$d_n = \prod_{p\leq n} p^{\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \rfloor} \leq \prod_{p\leq n} p^{\frac{\log(n)}{\log(p)}} = \prod_{p\leq n} n = n^{\pi(n)} \approx e^n, \tag{3.1}$$

donde p es un número primo. En particular, para n suficientemente grande se tiene, $d_n \ll 3^n$.

Demostración. Sea p primo y $n \in \mathbb{N}$; d_n se forma multiplicando todos los primos $p \leq n$ con los mayores exponentes posibles m tales que $p^m \leq n$, es decir,

$$d_n = \prod_{p\leq n} p^m, \qquad \text{donde} \quad m = \text{máx}\{k \in \mathbb{N}; p^k \leq n\}.$$

Tomando logaritmos a ambos lados,

$$\log(p^m) \leq \log(n) \Leftrightarrow m\ \log(p) \leq \log(n) \Leftrightarrow m \leq \frac{\log(n)}{\log(p)}.$$

Dado que $m \in \mathbb{N}$ debe ser máximo, tendremos que la potencia entera más alta de p es

$$m = \lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \rfloor.$$

Así,

$$m = \lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \rfloor \leq \frac{\log(n)}{\log(p)}.$$

Luego tenemos;

$$p^{\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \rfloor} \leq p^{\frac{\log(n)}{\log(p)}} \leq e^{\log(p^{\frac{\log(n)}{\log(p)}})} = e^{\frac{\log(n)}{\log(p)}\log(p)} = e^{\log(n)} = n.$$

Así, hemos visto que

$$d_n = \prod_{p\leq n} p^m = \prod_{p\leq n} p^{\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \rfloor} \leq \prod_{p\leq n} p^{\frac{\log(n)}{\log(p)}} = \prod_{p\leq n} n = n^{\pi(n)}.$$

Además, por el teorema de los números primos sabemos que $\pi(n)$ se comporta como $\frac{n}{\log(n)}$ para n suficientemente grande, entonces;

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n)} \Rightarrow n^{\pi(n)} \approx n^{\frac{n}{\log(n)}} = e^{\log(n^{\frac{n}{\log(n)}})} = e^{\frac{n}{\log(n)}\log(n)} = e^n \Rightarrow n^{\pi(n)} \approx e^n.$$

Y como $e < 3 \Rightarrow e^n < 3^n$, así tenemos;

$$d_n = \prod_{p\leq n} p^{\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \rfloor} \leq \prod_{p\leq n} p^{\frac{\log(n)}{\log(p)}} = \prod_{p\leq n} n = n^{\pi(n)} \approx e^n < 3^n. \qquad \square$$

Lema 3.2. *Sean r y s enteros no negativos. Si $r > s$ entonces:*

(a) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dxdy$ *es un número racional, cuyo denominador es divisor de d_r^2.*

(b) $\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy} x^r y^s dxdy$ *es un número racional, cuyo denominador es divisor de d_r^3.*

Si $r = s$, entonces:

(c) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} dxdy = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} \cdots - \frac{1}{r^2}$.

(d) $\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy} x^r y^r dxdy = 2(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} \cdots - \frac{1}{r^3})$.

Demostración. Vamos a interpretar las integrales como impropias, ya que en $x = 1 = y$ el integrando no está definido. Pero hay que tener en cuenta que las integrales son convergentes y todas las manipulaciones con respecto a ellas pueden justificarse tomando el límite superior como 1-ε y tomando $\varepsilon \to 0^+$.

Supongamos que σ es cualquier número no negativo, y consideramos la integral;

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy. \tag{3.2}$$

Observamos que podemos desarrollar $\frac{1}{1-xy}$ en una serie geométrica:

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k$$

ya que $|xy| < 1$ por ser $x, y \in (0,1)$. Realizando la integral doble tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k dxdy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^{r+k+\sigma}dx \int_0^1 y^{s+k+\sigma}dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{k+r+\sigma+1}}{k+r+\sigma+1}\right)_0^1 \left(\frac{y^{k+s+\sigma+1}}{k+s+\sigma+1}\right)_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+r+\sigma+1}\frac{1}{k+s+\sigma+1}
\end{aligned}$$

Así:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+r+\sigma+1}\frac{1}{k+s+\sigma+1}. \tag{3.3}$$

Supongamos que $r > s$. Entonces podemos escribir la suma como:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+r+\sigma+1}\frac{1}{k+s+\sigma+1} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1}\right) \\
&= \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+\sigma+1} + \frac{1}{s+\sigma+2} + \ldots + \frac{1}{r+\sigma}\right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Si $\sigma = 0$, entonces:

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}dxdy = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+r+1}\frac{1}{k+s+1} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \ldots + \frac{1}{r}\right)$$

Luego:

$$I_1(d_r)^2 = \frac{(d_r)^2}{r-s}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \ldots + \frac{1}{r}\right) = \frac{d_r}{r-s}\left(\frac{d_r}{s+1} + \frac{d_r}{s+2} + \ldots + \frac{d_r}{r}\right).$$

Claramente, la última expresión es el producto de dos enteros positivos, ya que d_r es un múltiplo de $r-s$, el cual es un entero positivo menor o igual que r, así como también es múltiplo de todo entero de $s+1$ a r. Por tanto, $I_1(d_r)^2$ es un entero positivo.

Así, hemos visto que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}dxdy = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+r+1}\frac{1}{k+s+1}$$

es un número racional cuyo denominador es divisor de d_r^2. Luego la afirmación (a) se cumple.

Es fácil probar que se puede derivar dentro de la integral (3.2) con respecto al parámetro σ. Si derivamos con respecto a σ y tomamos $\sigma = 0$ en la integral, nos queda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy\right) &= \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma}\left((xy)^\sigma\frac{x^ry^s}{1-xy}\right)dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^ry^s}{1-xy}\frac{\partial}{\partial\sigma}(xy)^\sigma dxdy\\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{x^ry^s}{1-xy}(xy)^\sigma\log(xy)dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}\log(xy)dxdy\\ &\underset{\sigma=0}{=}\int_0^1\int_0^1 \frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^sdxdy.\end{aligned}$$

Entonces, la integral (3.2) se convierte en;

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^sdxdy.$$

Y la suma (3.4) se convierte en:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+\sigma+1}+\frac{1}{s+\sigma+2}+\ldots+\frac{1}{r+\sigma}\right)\right)\\ &=\frac{1}{r-s}\left(\frac{-1}{(s+\sigma+1)^2}+\frac{-1}{(s+\sigma+2)^2}+\ldots+\frac{-1}{(r+\sigma)^2}\right)\\ &=\frac{-1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+\sigma+1)^2}+\frac{1}{(s+\sigma+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(r+\sigma)^2}\right)\\ &\underset{\sigma=0}{=}-\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+2)^2}+\ldots+\frac{1}{r^2}\right).\end{aligned}$$

Así tenemos

$$I_2=\int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^sdxdy=\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+2)^2}+\ldots+\frac{1}{r^2}\right).$$

Luego,

$$I_2(d_r)^3=\frac{(d_r)^3}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1)^2}+\ldots+\frac{1}{r^2}\right)=\frac{d_r}{r-s}\left(\frac{d_r^2}{(s+1)^2}+\ldots+\frac{d_r^2}{r^2}\right).$$

Claramente, la última expresión es el producto de dos enteros positivos ya que d_r es un múltiplo de $r-s$, el cual es un entero positivo menor o igual que r, así como también es múltiplo de todo entero de $s+1$ a r. Por tanto $I_2(d_r)^3$ es un entero positivo.

Así hemos visto que:

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^sdxdy=\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+2)^2}+\ldots+\frac{1}{r^2}\right)$$

es un número racional cuyo denominador es divisor de d_r^3. Luego la afirmación (b) se cumple.

Supongamos que $r=s$. Entonces, por (3.2) y (3.3) tenemos:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{r+\sigma}}{1-xy}dxdy=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2}$$

Tomando $\sigma=0$, obtenemos:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^ry^r}{1-xy}dxdy=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1)^2}=\frac{1}{(r+1)^2}+\frac{1}{(r+2)^2}+\ldots=\zeta(2)-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\ldots-\frac{1}{r^2}$$

pues notar que $\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{r^2}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ Así hemos visto que se cumple (c). Si derivamos con respecto a σ y tomamos $\sigma=0$ de igual forma que hemos hecho para demostrar (b), entonces obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{r+\sigma}}{1-xy}dxdy\right)=\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{r+\sigma}}{1-xy}\log(xy)dxdy\underset{\sigma=0}{=}\int_0^1\int_0^1 \frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^rdxdy.$$

También aquí es fácil probar que se puede derivar con respecto al parámetro σ dentro de la serie. Entonces, también obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{(r+\sigma+1)^2}+\frac{1}{(r+\sigma+2)^2}+...\right)\underset{\sigma=0}{=}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1)^3}.$$

Así, hemos visto que

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^rdxdy=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1)^3}=-2\left(\frac{1}{(r+1)^3}+\frac{1}{(r+2)^3}+...\right)$$
$$=-2\left(\zeta(3)-\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}-...-\frac{1}{r^3}\right).$$

Por tanto

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^rdxdy=-2\left(\zeta(3)-\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}-...-\frac{1}{r^3}\right).$$

Así hemos observado que se cumple (d). □

Observación 1. En los casos (c) y (d) cuando $r=s=0$, observamos que queda solo $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$ respectivamente.

Lema 3.3. *Sea r entero no negativo. Entonces;*

(a) $\int_0^1\int_0^1\frac{x^ry^r}{1-xy}dxdy=\zeta(2)-\left(1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{r^2}\right)=\zeta(2)-\frac{A}{d_r^2}$.

(b) $\int_0^1\int_0^1-\frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^rdxdy=2\left(\zeta(3)-\left(1+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{r^3}\right)\right)=2\zeta(3)-\frac{B}{d_r^3}$.

siendo $A,B\in\mathbb{Z}$

Demostración. Para demostrarlo, vamos a comprobar que;

$$d_r^2\left(1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{r^2}\right)\in\mathbb{N}$$

Notar que

$$d_r^2\left(1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{r^2}\right)=d_r^2+\frac{d_r^2}{2^2}+...+\frac{d_r^2}{r^2}\in\mathbb{N}$$

como d_r es múltiplo de $1,2,..,r\Rightarrow d_r^2$ es múltiplo de $1^2,2^2,...,r^2$. Así, hemos demostrado el primer apartado. El segundo apartado se demuestra de forma análoga. □

Lema 3.4. *Sean $P(x)$ y $Q(y)$ polinomios de grado n con coeficientes enteros, entonces:*

(a) $\int_0^1\int_0^1\frac{P(x)Q(y)}{1-xy}dxdy=\frac{A\zeta(2)+B}{d_n^2}$.

(b) $\int_0^1\int_0^1-\frac{\log(xy)}{1-xy}P(x)Q(y)dxdy=\frac{C\zeta(3)+D}{d_n^3}$.

con $A,B,C,D\in\mathbb{Z}$.

Demostración. Sean $P(x)=\sum_{r=0}^{n}a_rx^r$ y $Q(y)=\sum_{s=0}^{n}b_sy^s$. Además, por el lema 3.2 y porque d_r divide a d_n, sabemos que

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^ry^s}{1-xy}dxdy=\frac{a}{d_n^2}$$

si $r>s$ y también si $r<s$, por simetría. Y

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^ry^r}{1-xy}dxdy=\zeta(2)-\frac{b}{d_n^2}.$$

Las constantes a y b dependen de r y s. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 \frac{P(x)Q(y)}{1-xy}dxdy &= \int_0^1\int_0^1 \sum_{r=0}^{n} a_r x^r \sum_{s=0}^{n} b_s y^s \frac{1}{1-xy}dxdy\\ &= \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} a_r b_s \int_0^1\int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}dxdy = \frac{A\zeta(2)+B}{d_n^2}.\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado la primera parte. Para la segunda sabemos que

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}x^r y^s dxdy = \frac{c}{d_n^3},$$

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}x^r y^r dxdy = 2\zeta(3) - \frac{d}{d_n^3}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}P(x)Q(y)dxdy &= \int_0^1\int_0^1 \sum_{r=0}^{n} a_r x^r \sum_{s=0}^{n} b_s y^s \frac{-\log(xy)}{1-xy}dxdy\\ &= \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} a_r b_s \int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}x^r y^s dxdy\\ &= \frac{C\zeta(3)+D}{d_n^3}.\end{aligned}$$

Así, queda demostrado el lema. □

3.2. Irracionalidad de $\zeta(2)$

Teorema 3.5. *$\zeta(2)$ es irracional.*

Demostración. Sea

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(1-x)^n$$

el polinomio de Legendre (normalizado en el intervalo $[0,1]$). Observamos que $P_n(x) \in \mathbb{Z}[X]$, es decir, tiene coeficientes enteros y es un polinomio de grado n, pues $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}x^{n-k}(1-x)^k$ (usando la fórmula de la derivada de orden n de un producto). Entonces, para un n entero positivo consideramos

$$I_n = \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-xy}P_n(x)dxdy \underset{\text{lema 3.4}}{=} \frac{A_n\zeta(2)+B_n}{d_n^2},$$

con $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$.

Para demostrar este teorema necesitamos ver:

1. $I_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. $d_n^2 I_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Si $\zeta(2)$ fuera racional, por ejemplo, $\zeta(2) = \frac{p}{q}$ entonces

$$I_n \neq 0 \Rightarrow |A_n\zeta(2)+B_n| \neq 0 \Rightarrow |A_n\zeta(2)+B_n| \geq \frac{1}{q} \Rightarrow |d_n^2 I_n| \geq \frac{1}{q}$$

y por tanto $d_n^2 I_n$ no tiende a cero. Esta contradicción nos demuestra que $\zeta(2)$ es irracional.

Usando la integración por partes respecto a x y notando que $f(x) = x^n(1-x)^n \Rightarrow f^{(j)}(0) = 0 = f^{(j)}(1)$, con $j = 0,1,...,n-1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1-xy}P_n(x)dx = \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{f^{(n)}(x)}{1-xy}dx &= \left\{ \begin{array}{c} u = \frac{1}{1-xy};\ \ du = \frac{y}{(1-xy)^2}dx \\ v = f^{(n-1)}(x);\ \ dv = f^{(n)}(x)dx \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{n!}\ \frac{1}{1-xy}f^{(n-1)}(x)\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{y}{(1-xy)^2}f^{(n-1)}(x)dx \\
&= -\frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{y}{(1-xy)^2}f^{(n-1)}(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \frac{y}{(1-xy)^2};\ \ du = \frac{2y^2}{(1-xy)^3}dx \\ v = f^{(n-2)}(x);\ \ dv = f^{(n-1)}(x)dx \end{array} \right\} \\
&= -\frac{1}{n!}\ \frac{y}{(1-xy)^2}f^{(n-2)}(x)\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{2y^2}{(1-xy)^3}f^{(n-2)}(x)dx \\
&= (-1)^2\frac{1\cdot 2}{n!}\int_0^1 \frac{y^2}{(1-xy)^3}f^{(n-2)}(x)dx \\
&= (-1)^3\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n!}\int_0^1 \frac{y^3}{(1-xy)^4}f^{(n-3)}(x)dx = ... \\
&= (-1)^n\frac{n!}{n!}\int_0^1 \frac{y^n}{(1-xy)^{n+1}}f(x)dx.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$I_n = \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-xy}P_n(x)dxdy = (-1)^n\int_0^1\int_0^1 \frac{y^n(1-y)^n x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}}dxdy.$$

Luego tenemos que $I_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que el integrando es positivo para todo $x,y \in (0,1)$.

Ahora vamos a estimar I_n.

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}\right)^n \frac{1}{1-xy}dxdy \\
&\leq \int_0^1\int_0^1 \left(\max_{[0,1)^2}\left(\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}\right)\right)^n \frac{1}{1-xy}dxdy \\
&= \left(\max_{[0,1)^2}\left(\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}\right)\right)^n \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}dxdy \\
&\underset{\text{observación 1}}{=} \xi(2)\left(\max_{[0,1)^2}\left(\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}\right)\right)^n.
\end{aligned}$$

Tomamos $g(x,y) = \frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}$ la función que tenemos que maximizar sobre $[0,1)^2$. Notar que $g(x,y) > 0$ en $[0,1)^2$ y $g(x,y) = 0$ para los puntos límite de $[0,1)^2$. Ahora, resolvemos las ecuaciones,

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = 0$$

Como $g(x,y) = g(y,x)$, la relación entre x,y dada por $\frac{\partial}{\partial x}g = 0$ es la misma que la relación entre x,y dada por $\frac{\partial}{\partial y}g = 0$. Por tanto, para el valor estacionario de $g(x,y)$ tenemos que $x = y$. Luego tenemos que maximizar la función

$$h(t) = g(t,t) = \frac{(t-t^2)^2}{1-t^2} = \frac{t^2(1-t)}{1+t}$$

Así

$$g'(t) = \frac{2(t-t^2)(1-t)}{(1-t^2)^2}((1-2t)(1+t)+t^2) = 0 \Leftrightarrow ((1-2t)(1+t)+t^2) = 0 \Leftrightarrow t^2+t-1 = 0$$

Al resolver la ecuación nos sale que el único candidato al valor máximo es $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \in (0,1)$ pues $t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin (0,1)$. Por tanto, el valor máximo de $g(x,y)$ se obtiene en $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = y$ y este valor es $g(x,y) = g(x,x) = h(x) = h\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}$. Luego hemos visto que

$$g(x,y) = \frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \leq \frac{5\sqrt{5}-11}{2}$$

para $0 \leq x < 1$ y $0 \leq y < 1$. Por tanto, tenemos que,

$$|I_n| \leq \xi(2)\left(\max_{[0,1)^2}\left(\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}\right)\right)^n = \zeta(2)\left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^n.$$

Además, como hemos visto que $I_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$0 < |I_n| = \left|\frac{A_n\xi(2)+B_n}{d_n^2}\right| \leq \zeta(2)\left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^n$$

Por tanto,

$$0 < |A_n\zeta(2)+B_n| < d_n^2\zeta(2)\left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^n \underset{\text{lema 3.1}}{<} 9^n\zeta(2)\left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^n$$
$$= \zeta(2)\left(9\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

porque $9\frac{5\sqrt{5}-11}{2} < 1$. Como ya hemos visto antes, esto lleva a una contradicción. □

3.3. Irracionalidad de $\zeta(3)$

Teorema 3.6. *$\zeta(3)$ es irracional.*

Demostración. Sea

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(1-x)^n$$

el polinomio de Legendre (normalizado en el intervalo $[0,1]$). Observamos que $P_n(x) \in \mathbb{Z}[X]$, es decir, tiene coeficientes enteros y es un polinomio de grado n. Se deduce por el lema 3.4 que la integral

$$I_n = \int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}P_n(x)P_n(y)dxdy$$

se puede expresar como

$$I_n = \frac{a_n\zeta(3)+b_n}{d_n^3}$$

con $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. Para demostrar este teorema vamos a ver que:

1. $I_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. $d_n^3 I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Esto implicará que $a_n\zeta(3)+b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y nunca es cero para ningún valor de n. Si $\zeta(3)$ fuera racional, por ejemplo, $\zeta(3)=\frac{p}{q}$ entonces $I_n \neq 0 \Rightarrow |a_n\zeta(3)+b_n| \neq 0 \Rightarrow |a_n\zeta(3)+b_n| \geq \frac{1}{q} \Rightarrow |d_n^3 I_n| \geq \frac{1}{q}$ y por tanto $d_n^3 I_n$ no tiende a cero. Esta contradicción nos demuestra que $\xi(3)$ es irracional.

Vamos a probar estas dos afirmaciones. Observamos que

$$\int_0^1 \frac{dz}{1-az} = -\frac{1}{a}\int_0^1 \frac{-a}{1-az}dz = -\frac{1}{a}\log(1-a).$$

Tomando $a=1-xy$ nos queda,

$$-\frac{\log(xy)}{1-xy} = \int_0^1 \frac{dz}{1-(1-xy)z}. \tag{3.5}$$

Podemos escribir I_n como;

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}P_n(x)P_n(y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 P_n(x)P_n(y)\left(\int_0^1 \frac{dz}{1-(1-xy)z}\right)dxdy \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz. \end{aligned}$$

Usando la integración por partes n veces con respecto a x y teniendo en cuenta que $f(x)=x^n(1-x)^n \Rightarrow f^{(j)}(0)=0=f^{(j)}(1)$, con $j=0,1,...,n-1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-(1-xy)z}dx &= \int_0^1 \frac{f^{(n)}(x)}{(1-(1-xy)z)n!}dx \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{f^{(n)}(x)}{1-(1-xy)z}dx = \left\{ \begin{array}{c} u=\frac{1}{1-(1-xy)z};\;\; du=-\frac{yz}{(1-(1-xy)z)^2}dx \\ v=f^{(n-1)}(x);\;\; dv=f^{(n)}(x)dx \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-(1-xy)z}f^{(n-1)}(x)\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\frac{yz}{(1-(1-xy)z)^2}f^{(n-1)}(x)dx\right) \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{yz}{(1-(1-xy)z)^2}f^{(n-1)}(x)dx \\ &= \left\{ \begin{array}{c} u=\frac{yz}{(1-(1-xy)z)^2};\;\; du=-\frac{2(yz)^2}{(1-(1-xy)z)^3}dx \\ v=f^{(n-2)}(x);\;\; dv=f^{(n-1)}(x)dx \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{yz}{(1-(1-xy)z)^2}f^{(n-2)}(x)\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\frac{2(yz)^2}{(1-(1-xy)z)^3}f^{(n-2)}(x)dx\right) \\ &= \frac{1\cdot 2}{n!}\int_0^1 \frac{(yz)^2}{(1-(1-xy)z)^3}f^{(n-2)}(x)dx = \ldots = \int_0^1 \frac{(yz)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}f(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dx. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-(1-xy)z}dx = \int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dx. \tag{3.6}$$

Así,

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^nP_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dxdydz.$$

Sustituyendo $w=\frac{1-z}{1-(1-xy)z}$ tenemos que $z=\frac{1-w}{1-(1-xy)w}$ y $1-(1-xy)z=\frac{xy}{1-(1-xy)w}$. Por lo tanto, $dz=\frac{-xy}{(1-(1-xy)w)^2}dw$. Así,

$$\frac{z^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} = \frac{(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^n}\frac{(1-(1-xy)w)^{n+1}}{(xy)^{n+1}} = \frac{(1-w)^n(1-(1-xy)w)}{(xy)^{n+1}}.$$

Entonces,

$$\int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dz = \int_1^0 (xy)^n(1-x)^n P_n(y)\frac{(1-w)^n(1-(1-xy)w)}{(xy)^{n+1}}\frac{-xy}{(1-(1-xy)w)^2}dw$$
$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-w)^n P_n(y)}{1-(1-xy)w}dw.$$

Por tanto,

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-w)^n P_n(y)}{1-(1-xy)w}dxdydw.$$

Cambiando x por y, z por w en (3.6) tenemos que

$$\int_0^1 \frac{P_n(y)}{1-(1-xy)w}dy = \int_0^1 \frac{(xyw)^n(1-y)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}dy.$$

Por tanto,

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}dydxdw.$$

Así, de esta expresión obtenemos claramente que $I_n > 0$, pues el integrando es positivo para todo $x,y,w \in (0,1)$.

Ahora vamos a estimar I_n. Tomamos $g(x,y,w) = \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{(1-(1-xy)w)}$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}dydxdw \\
&= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{(1-(1-xy)w)}\right)^n \frac{1}{1-(1-xy)w}dydxdw \\
&\leq \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(\max_{[0,1)^3} g(x,y,w)\right)^n \frac{1}{1-(1-xy)w}dydxdw \\
&= \left(\max_{[0,1)^3} g(x,y,w)\right)^n \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)w}dydxdw \\
&\underset{(3.5)}{=} \left(\max_{[0,1)^3} g(x,y,w)\right)^n \int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}dxdy \\
&\underset{\text{lema 3.2}}{=} \left(\max_{[0,1)^3} g(x,y,w)\right)^n 2\zeta(3).
\end{aligned}$$

Vamos a maximizar la función $g(x,y,w)$ sobre $[0,1)^3$. Notemos que $g(x,y,w) > 0$ para todo $[0,1)^3$ y $g(x,y,w) = 0$ para los puntos del borde de $[0,1)^3$. Observamos que encontrar el máximo usando las derivadas parciales es algo complicado, por tanto vamos a utilizar desigualdades. El denominador de $g(x,y,w)$ cumple,

$$1-(1-xy)w = 1-w+xyw \geq 2\sqrt{(1-w)xyw},$$

por la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica. Por tanto,

$$\frac{1}{1-(1-xy)w} \leq \frac{1}{2\sqrt{(1-w)xyw}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1-w)}}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{w}}$$

Así,

$$g(x,y,w) \leq \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{2\sqrt{(1-w)}\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{w}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}(1-x)\sqrt{y}(1-y)\sqrt{w(1-w)}$$

Ahora vamos a encontrar el máximo de la función $h_1(x) = \sqrt{x}(1-x) > 0$, con $x \in (0,1)$ y de $h_2(w) = \sqrt{w(1-w)} > 0$, con $w \in (0,1)$.

$$h_1(x) = \sqrt{x}(1-x) \Rightarrow h_1'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1-3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

El valor máximo es; $h_1(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Análogamente, $\sqrt{y}(1-y) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. De la misma manera,

$$h_2(w) = \sqrt{w(1-w)} \Rightarrow h_2'(w) = \frac{1-2w}{2\sqrt{w-w^2}} = 0 \Rightarrow 1-2w = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{2}.$$

El valor máximo es; $h_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. De esta manera hemos visto que

$$g(x,y,w) \leq \frac{1}{2}\sqrt{x}(1-x)\sqrt{y}(1-y)\sqrt{w(1-w)} \leq \frac{1}{2}\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{1}{2} = \frac{1}{27}.$$

Luego,

$$0 < I_n \leq 2\zeta(3)\left(\max_{[0,1)^3} g(x,y,w)\right)^n \leq 2\zeta(3)\left(\frac{1}{27}\right)^n.$$

Por lo tanto

$$0 < d_n^3 I_n < 2\zeta(3)\left(\frac{d_n}{3^n}\right)^3$$

y según el lema 3.1 concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} d_n^3 I_n = 0.$$

Esto termina la demostración de que $\zeta(3)$ es irracional. □

Así, hemos visto una demostración de la irracionalidad de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$. Se sabe desde hace mucho tiempo que $\zeta(s)$ es irracional cuando s es un número entero par y mayor o igual que 2. De hecho, $\zeta(2n)$ es trascendente, ya que es de la forma $a_n\pi^{2n}$, donde a_n es un número racional. Por el contrario, para la irracionalidad de los números impares se sabe muy poco. Es en el 1979 cuando Roger Apéry demostró que $\zeta(3)$ es irracional y muy recientemente, Wadim Zudilin ha probado en [5] que al menos uno de estos valores $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ es irracional.

Bibliografía

[1] M. Aigner; G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, third edition, 2004.

[2] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272.

[3] MacTutor History of Mathematics Archive. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/ (visitado en junio de 2022).

[4] A. B. Shidlovskii, *Transcendental numbers*, Walter de Gruyter, 1989, Berlin.

[5] W. Zudilin, *One of the numbers* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *is irrational*, Russian Math. Surveys **56**.(4) (2001), 774–776.