Trabajo de Fin de Grado

Teoría de distribuciones y aplicaciones

Grado en Matemáticas

Autor: Andrés Laín Sanclemente
Director: José Esteban Galé Gimeno
Área de Análisis Matemático

27 de junio de 2022

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza
1542

Índice

0. Summary

Mathematical objects that are not functions but require calculations and operations as if they were such appear naturally in the study of differential equations, in mathematical analysis in general, as well as in Physics. Generically, they are called generalised functions and in this context the Theory of Distributions stands out for its scope of application. We begin with a motivating example that comes from Physics. During a collision of two particles, the forces between them may be considered instantaneous. Nevertheless, they produce a nonzero change in linear momentum. These two properties (being only nonzero at a specific point in time and having a nonzero integral) cannot be simultaneously satisfied by functions, which means that we require a new mathematical object to describe this type of forces. As we will see, the Theory of Distributions will provide us with the necessary tools. Next, we introduce its history briefly, pointing out the work done by Sobolev and Schwartz. The objective of this work is to develop a structural description of the theory of distributions based on the theory of locally convex spaces, the concept of inductive limit and the notion of duality as key element to transfer operations form functions to distributions and to show some of its applications in the field of differential equations and in Physics.

Let E be a vector space over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. We say that (E, τ) is a **topological vector space (TVS)** when we supply E with a topology that makes the maps $(x, y) \in E \times E \to x + y \in E$ and $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E \to \lambda x \in E$ continuous. A TVS is called a **locally convex space (LCS)** if it possesses a basis of neighbourhoods consisting of convex sets. A **seminorm** on a TVS E is a map $p : E \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ that satisfies $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in E$ and $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ $\forall x \in E$ and $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. The topology of a LCS is characterised by a family of continuous seminorms. A LCS is called a **Fréchet space** if it is metrizable and complete.

The **dual** of a TVS E, which we denote by E', is the vector space of all linear and continuous maps $\Lambda : E \to \mathbb{C}$. Let A be a subset of a TVS E. The set $A^0 \coloneqq \{\Lambda \in E' : \sup_{x \in A} |\Lambda(x)| \leq 1\}$ is called **polar** of A. The polars of a family $\mathfrak{S}$ of bounded sets that satisfy $A, B \in \mathfrak{S} \implies \exists C \in \mathfrak{S}$ such that $A \cup B \subseteq C$ and $A \in \mathfrak{S}, \lambda \in \mathbb{C} \implies \exists B \in \mathfrak{S}$ such that $\lambda A \subseteq B$ provide a locally convex topology $\tau_{\mathfrak{S}}$ to the dual E'. If we take $\mathfrak{S}$ equal to the family of all bounded sets of E, we say that E' carries the **strong topology** and if we take $\mathfrak{S}$ equal to the family of all finite sets of E, $\tau_{\mathfrak{S}}$ is called the **weak topology**. Given a linear continuous map $u : E \to F$, where E and F are TVSs, we define its **transpose** ${}^t u : F' \to E'$ by ${}^t u(y') \coloneqq y' \circ u$ $\forall y' \in F'$. When E' and F' carry the strong topology, ${}^t u$ is continuous.

We present the Banach spaces $\mathcal{C}_0(X)$, $\mathcal{C}(K)$, $\mathcal{C}^m([a, b])$ and $L^p(Y, \mathrm{d}\mu)$, where X is locally compact, K is compact, $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$, $(Y, \mathcal{A}, \mu)$ is a measure space, $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ and $1 \leq p \leq \infty$, as examples of LCSs. Next, we consider non-normable spaces such as $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}^\infty([a, b])$, $\mathcal{C}^k(\Omega)$ and $\mathrm{Hol}(\Omega)$, where X is locally compact, $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is open and $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, which are still LCSs. Specially important for the theory of distributions are the spaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$, whose topology is given by the family of seminorms $||f||_{m,K} \coloneqq \max_{|\alpha| \leq m} (\max_{x \in K} |D^\alpha f(x)|)$ $\forall f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, where m varies from 0 to k and K loops through all compacts of Ω.

Afterwards, we present the notions of inductive and projective limits. Let $(E_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of LCSs such that $E_n \subseteq E_{n+1}$ and $\tau_{n+1}|_{E_n} = \tau_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Then, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ provided

with the finest locally convex topology that makes the inclusions $\iota_n : E_n \to E$ continuous is called the **strict countable inductive limit** of $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and is denoted by $\varinjlim E_n$. On the other hand, if $(F_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of LCSs such that $F_n \supseteq F_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, the $\mathbb{C}$-vector space $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ provided with the coarsest locally convex topology that makes the inclusions $J_n : F \to F_n$ continuous is called the **projective limit** of $(F_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and is denoted by $\varprojlim F_n$. We show that, if $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of Fréchet spaces such that $E_n \subsetneq E_{n+1}$ and $\tau_{n+1}|_{E_n} = \tau_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, then $E = \varinjlim E_n$ is locally convex, Hausdorff, complete and non-metrizable. Furthermore, the topology induced by E on each E_n coincides with τ_n. Lastly, its dual E' can be expressed as the proyective limit of its duals: $E' = \varprojlim E'_n$. This structure lies behind of most spaces of test functions.

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be open and $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. We introduce the spaces of test functions $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ and $\mathcal{C}^k_c(\Omega)$, where $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ is the space of all rapidly decreasing functions at infinity and $\mathcal{C}^k_c(\Omega)$ is the space of all functions of class C^k over Ω with compact support. Whereas $\mathcal{C}^k(\Omega)$ and $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ are Fréchet spaces, $\mathcal{C}^k_c(\Omega)$ is the strict countable inductive limit of the Fréchet spaces $\left(\mathcal{C}^k_c(\Omega, K_j)\right)_{j\in\mathbb{N}}$, where $\mathcal{C}^k_c(\Omega, K_j)$ is the space of all functions over Ω of class C^k whose support is contained in K provided with the topology induced by $\mathcal{C}^k(\Omega)$ and $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ is an exhaustive sequence of compacts of Ω. $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, $\mathcal{C}^k_c(\Omega)$ and $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ are usually denoted $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}^k(\Omega)$ and $\mathcal{E}(\Omega)$, respectively.

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be open. A **distribution** is an element of $\mathcal{D}'(\Omega)$, i.e., a continuous linear functional on $\mathcal{D}(\Omega)$. The elements of $\mathcal{D}^k(\Omega)'$ are called **distributions of order** k and the spaces $\mathcal{D}^k(\Omega)'$ are known as spaces of **distributions of finite order**. $\mathcal{E}'(\Omega)$ is called the space of **distributions with compact support**. Moreover, every element of $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ receives the name of **tempered distribution**. As a consequence of the Hahn-Banach theorem and the approximation results that relate the spaces of test functions presented above, we obtain the following continuous injections

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{D}'(\Omega) & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & \mathcal{D}^{k+1}(\Omega)' & \hookleftarrow & \mathcal{D}^k(\Omega)' & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & \mathcal{D}^0(\Omega)' \equiv \mathcal{C}_c(\Omega)' \\
\uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
\mathcal{E}'(\Omega) & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & \mathcal{C}^{k+1}(\Omega)' & \hookleftarrow & \mathcal{C}^k(\Omega)' & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & \mathcal{C}^0(\Omega)'
\end{array} .$$

Furthermore, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. The space $\mathcal{C}_c(\Omega)'$ can be interpreted as the space of complex Radon measures over Ω. Thus, every Radon measure is a distribution and, in particular, every locally integrable function is a distribution. Lastly, a characterisation of the convergence of a sequence of distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ is shown.

Next, we transfer by duality (via the transpose) the following operations: multiplication by a function of class C^∞, differentiation, Fourier transform and convolution product. Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be open. In this way, if $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ and $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, we define fT via $\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Similarly, given $j \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ is defined through $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Afterwards, we introduce the concept of support of a distribution and explain that all distributions are locally equal to a finite sum of derivatives of continuous functions (in the the sense of distributions). Moreover, the Fourier transform of a tempered distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ is given by $\left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle$ $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. The convolution of two distributions $T, S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, provided one of them has compact support, is defined as $T * S = S * T = {}^t\zeta_S(T) = {}^t\zeta_T(S)$, where $\zeta_S(\varphi) = \varphi * \tilde{S}$ and $\zeta_T(\varphi) = \varphi * \tilde{T}$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{}$ denotes the parity operator (symmetry with respect to the origin) and is defined via $\left\langle \tilde{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ and $\varphi * T$ is given by $\langle \varphi * T, \psi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} * \psi \rangle$ $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. All these operations extend the ones defined over the spaces of functions. For example, if a function is differentiable, its derivatives as functions and its derivatives as distributions will coincide. Most of the properties of the Fourier transform in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ and the convolution product in $L^1(\mathbb{R}^n)$ can be carried over to distributions. In particular, we study the relations between the Fourier transform and the translation, parity, scale and differentiation operators, which are very useful for practical applications.

Turning into the latter, we begin with differential equations. Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be open, $L : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ be a linear differential operator and consider the equation $L(u) = v$, where $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. G is a **fundamental solution** of $L(u) = v$ if $L(G) = \delta_0$, where δ_0 is the Dirac delta at the origin. We show that if $v * G$ exists, then the solution of $L(u) = v$ is given by $u = v * G$. This means that if the fundamental solution of a differential equation is known, we can solve all inhomogeneous equations of the form $L(u) = v$, provided $v * G$ exists. In what follows, we study the fundamental solution of the Laplace equation, the heat equation and the wave equation in dimensions one, two and three. Furthermore, all these fundamental solutions admit physical interpretations, which correspond to real life situations. For instance, the fundamental solution of the Laplace equation can be thought of as the electrostatic potential generated by a pointlike charge of value $q = \varepsilon_0$ placed on the origin of coordinates. In the case of the Laplace equation, we make use of all the presented properties of the Fourier transform to constructively find its fundamental solution. Nevertheless, for the heat and wave equations, we just check that the proposed solutions are, in fact, the fundamental solutions.

Afterwards, we present an academic problem in Quantum Mechanics, which cannot be solved without considering the theory of distributions as its solution requires the computation of the derivative of a function which is not differentiable in the usual sense and we solve it by applying the tools acquired throughout this work. Next, we generalise the concept of a distribution, allowing it to take values on a TVS E which may not be $\mathbb{C}$. These distributions are called vector-valued distributions. Lastly, we explain how operator-valued distributions may be used in Quantum Field Theory (QFT) so as to try to rigorously define what a field is. We follow the approach taken by Wightman in his attempt of axiomatisation of QFT, where a field is a tempered distribution over $\mathbb{R}^4$ with values over $\mathcal{L}(H)^n$ satisfying certain properties. Here, by $\mathcal{L}(H)$ we denote the space of linear (but not necessarily continuous) operators on a Hilbert space H. The reader should take into account that the problem of rigorously defining the fundamentals of QFT remains unsolved so far.

1. Introducción: motivación y objetivos

En el estudio de ecuaciones diferenciales y análisis matemático en general, así como en Física, aparecen de forma natural objetos matemáticos que no son funciones, pero que requieren de cálculos y operaciones como si lo fueran. Genéricamente, reciben el nombre de funciones generalizadas y en este contexto destaca por su alcance la Teoría de Distribuciones. No obstante, en la práctica, y en varios campos, esta teoría se aplica de modo algo superficial, sólo reparando en reglas formales de uso. En esta memoria se procede a mostrar, en su primera mitad, una parte significativa de la configuración intrínseca de las distribuciones para, en su segunda fase, aplicar la maquinaria resultante de tal configuración a diversos ejemplos notables tomados de la teoría de ecuaciones y de la Física.

Para concretar un poco más la motivación de este trabajo, tomemos un caso proveniente de la Física. Supongamos que tenemos dos partículas clásicas (dos bolas de billar, por ejemplo) que chocan entre sí, de modo que su colisión supone un cambio brusco de su velocidad en un cortísimo periodo de tiempo. Sea $\vec{v}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ la función que describe la velocidad de una de las partículas que chocan. Por la Segunda Ley de Newton, tenemos $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}(t)$, donde $\vec{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ es la fuerza que actúa sobre la partícula. Entonces, dado $t_0\in\mathbb{R}$, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, $\vec{v}(t)-\vec{v}(t_0)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$. Supongamos que t_0 representa un instante anterior al choque y que t constituye un instante posterior. Entonces, $\vec{v}(t)-\vec{v}(t_0)\neq\vec{0}$. El choque ocurre tan rápidamente que nos es imposible conocer la función $\vec{F}(t)$; como mucho puede intuirse que tiene que alcanzar valores muy grandes mientras se produce la colisión. Ante este desconocimiento, parece razonable suponer que $\vec{F}(t)=\vec{0}\;\forall t\neq t_c$, donde t_c denota el instante del choque. Sin embargo, esto supone un problema, porque si $\vec{F}(t)=\vec{0}\;\forall t\neq t_c$, aunque fuese $\left|\left|\vec{F}(t_c)\right|\right|_2=\infty$, se tendría $\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)\,\mathrm{d}t=0$. No obstante, sabemos que $\vec{v}(t)-\vec{v}(t_0)\neq\vec{0}$, lo que nos lleva a un absurdo. Para solventar la situación, se requiere un «objeto» que se anule en toda la recta real menos un punto, pero con integral no nula. Obviamente, no puede ser una función; de hecho, como veremos, la delta de Dirac es la distribución que cumple con estas características. Esta noción de la delta de Dirac se corresponde con la que dio el ingeniero eléctrico van der Pol [1].

Históricamente, en el siglo XVIII se conocían ya soluciones de ecuaciones diferenciales que no lo eran en el sentido clásico. A estas soluciones se les fue dando diferentes enfoques a lo largo de los siglos XIX y principios del XX, siendo muchos de ellos particulares de cada problema concreto. Paralelamente, en los campos de la Ingeniería Eléctrica (finales del XIX) y de la Mecánica Cuántica (1930) se empieza a utilizar profusamente un cálculo formal de difícil justificación matemática basado en lo que ahora conocemos como delta de Dirac, por la influencia de Heaviside en el primero y por la de Dirac en el segundo. Matemáticamente, Sobolev fue el primero que consiguió desarrollar un procedimiento para resolver el problema de Cauchy de las ecuaciones lineales hiperbólicas normales (1936), introduciendo para ello muchos de los conceptos y métodos que Schwartz emplearía más adelante en su monografía sobre la Teoría de Distribuciones (1951). Precisamente, fue Schwartz quien consiguió aunar todos los elementos aquí presentados, proporcionando una teoría completa, versátil, muy potente y de alta aplicabilidad.

En el presente trabajo, se lleva a cabo la descripción estructural de las distribuciones sobre la base de la teoría de espacios localmente convexos y del concepto de límite inductivo, junto con la noción de dualidad como elemento clave que permite trasladar operaciones sobre funciones a distribuciones (diferenciación, multiplicación, convolución (parcialmente) y transformadas de Fourier y Laplace). En segundo lugar, se exponen aplicaciones en la resolución de ecuaciones diferenciales de la Física Matemática, en Mecánica Cuántica y en Teoría Cuántica de Campos. A causa de la limitación de espacio, no podré ser exhaustivo y la teoría se centra especialmente en los resultados que luego serán explícitamente utilizados en las aplicaciones mencionadas.

2. Espacios vectoriales topológicos

En esta sección se asumen conocidas las nociones topológicas de continuidad, compacidad, completitud, metrizabilidad, Hausdorff, topología producto, topología cociente, así como sus propiedades elementales. Los espacios vectoriales con los que se trabaja se consideran siempre sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Para toda esta sección se remite al lector a [3, 7, 10].

Definición 2.0.1. Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Una topología τ en E se dice **compatible con la estructura lineal** de E si las aplicaciones $(x, y) \in E \times E \to x+y \in E$ y $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E \to \lambda x \in E$ son $(\tau \times \tau, \tau)$-continua y $(\tau_{\mathbb{C}} \times \tau, \tau)$-continua, respectivamente, donde con $\tau \times \tau$ denotamos la topología producto de $E \times E$ y $\tau_{\mathbb{C}}$ se refiere a la topología usual del cuerpo $\mathbb{C}$. El par (E, τ) se llama **espacio vectorial topológico (EVT)** (sobre $\mathbb{C}$).

2.1. Espacios localmente convexos

Recordemos que un subconjunto A de un espacio vectorial E se dice **convexo** si $\forall x, y \in A$ y $\forall t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)\, y \in A$.

Definición 2.1.1. Un EVT (E, τ) se dice **localmente convexo (ELC)** si existe una base de entornos del origen formada por conjuntos convexos.

Ejemplo 2.1.2. Todo espacio normado $(E, ||\cdot||)$ es localmente convexo. En efecto, las bolas $U_r = \{x \in E : ||x|| < r\}$ con $r > 0$ forman una base de entornos del origen en E que son convexos por la desigualdad triangular. Los ELC son, de hecho, una generalización directa de los espacios normados.

Definición 2.1.3. Sea E un espacio vectorial. Una aplicación $p : E \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ tal que $p\,(x+y) \leq p\,(x) + p\,(y)\ \ \forall x, y \in E$ y $p\,(\lambda x) = |\lambda|\, p\,(x)\ \ \forall\,(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E$ se llama **seminorma** sobre E. Nótese que si una seminorma p satisface $p\,(x) = 0 \implies x = 0$, entonces es una **norma**.

Definición 2.1.4. Sea (E, τ) un EVT. Una familia $\mathscr{P}$ de seminormas $(\tau, \tau_{\mathbb{R}^+})$-continuas (donde $\tau_{\mathbb{R}^+}$ denota la topología usual de $\mathbb{R}^+$) se llama **base de seminormas continuas sobre** E si para toda seminorma $(\tau, \tau_{\mathbb{R}^+})$-continua q sobre E, existen una seminorma continua $p \in \mathscr{P}$ y una constante $C > 0$ tales que $q\,(x) \leq Cp\,(x)\ \forall x \in E$.

Recordemos que un subconjunto A de un EVT E es **equilibrado** si $\forall x \in A$ y $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq 1$, se tiene $\lambda x \in A$. Asimismo, A se dice **absorbente** si $\forall x \in E$ existe $c_x > 0$ tal que $\lambda x \in A\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

con $|\lambda| \leq c_x$. La topología de un ELC está caracterizada por las seminormas continuas definidas sobre él según el siguiente teorema.

Teorema 2.1.5. *1. Sean E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $\{p_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia no vacía de seminormas sobre E. Sea $\mathscr{P} \coloneqq \{\text{máx}_{\alpha\in B}\, p_\alpha : B \subseteq I \text{ finito}\}$. Entonces la familia, llamada **saturada**, dada por $\mathscr{B} \coloneqq \{\lambda U_p : \lambda > 0, p \in \mathscr{P}\}$, donde $U_p = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$, forma una base de entornos del origen que dota a E de una topología localmente convexa. En consecuencia, $\mathscr{P}$ es una base de seminormas continuas sobre E.*

2. Recíprocamente, dado un EVT (E, τ), existe una base de seminormas continuas $\mathscr{P}$ tal que la familia $\mathscr{B} \coloneqq \{\lambda U_p : \lambda > 0, p \in \mathscr{P}\}$, donde $U_p = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$, es una base de entornos del origen.

Demostración. Una demostración pormenorizada de este resultado ocupa varias páginas, por lo que únicamente comentamos las ideas principales. Para demostrar 1, se comprueba que los elementos de $\mathscr{P}$ son seminormas y que $\mathscr{B}$ cumple las condiciones para ser base de entornos del origen. Es fácil ver que las seminormas de $\mathscr{P}$ son continuas en el origen y, por tanto, son continuas en todo E. Probar que $\mathscr{B}$ es base es una simple comprobación. En cuanto a 2, se demuestra que en un ELC existe una base de entornos del origen formada por conjuntos B simultáneamente cerrados, convexos, absorbentes y equilibrados (llamados toneles) y que cada B puede ponerse como $B = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$ para alguna seminorma p. El resto de la demostración se reduce a simples comprobaciones. $\mathbb{Q.E.D.}$

Corolario 2.1.6. *Sea (E, τ) un ELC y $\mathscr{P}$ una base de seminormas continuas sobre E. Entonces, $\mathscr{B} \coloneqq \{\lambda U_p : \lambda > 0, p \in \mathscr{P}\}$, donde $U_p = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$, es una base de entornos del origen.*

Demostración. Es una sencilla comprobación. $\mathbb{Q.E.D.}$

Corolario 2.1.7. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos ELCs, $\mathscr{P}_X$ una base de seminormas continuas sobre X y $\mathscr{P}_Y$ una base de seminormas continuas sobre Y. Entonces, una aplicación lineal $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $\forall p_Y \in \mathscr{P}_Y$ existen $p_X \in \mathscr{P}_X$ y $C > 0$ tales que $p_Y(f(x)) \leq C p_X(x)\ \forall x \in X$.*

Demostración. Mera comprobación. $\mathbb{Q.E.D.}$

Definición 2.1.8. Se denomina **espacio de Fréchet** a todo ELC metrizable y completo.

2.2. Dualidad en espacios localmente convexos

Definición 2.2.1. Sea (E, τ) un EVT. Llamamos **dual** de E y lo denotamos E' al conjunto de todas las aplicaciones $\Lambda : E \to \mathbb{C}$ $(\tau, \tau_{\mathbb{C}})$-continuas. Es inmediato comprobar que E' es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Notación. Para $L \in E'$ y $x \in E$ denotaremos con frecuencia $L(x) \equiv \langle L, x\rangle$, notación muy útil cuando trabajemos con la aplicación traspuesta.

El siguiente teorema es fundamental en dualidad.

Teorema 2.2.2 (Hahn-Banach)**.** *Sean (E,τ) un ELC, p una seminorma sobre E, M un subespacio vectorial de E y $f : M \to \mathbb{C}$ lineal en M tal que $|f(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in M$. Entonces, existe una aplicación $\overline{f} : E \to \mathbb{C}$ que extiende a f, es decir, $\overline{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in M$ y, además, $\left|\overline{f}(x)\right| \leq p(x)$ $\forall x \in E$.*

Nótese que, por el Teorema de Hahn-Banach, $E' \neq \{0\}$ si E es un ELC. En lo que sigue, presentamos los elementos básicos que permiten dotar de topologías al espacio dual de un ELC.

Definición 2.2.3. Sean (E,τ) un EVT y $A \subseteq E$. Se llama **polar** de A al conjunto $A^0 := \{\Lambda \in E' : \sup_{x\in A} |\Lambda(x)| \leq 1\}$.

Recuérdese que un subconjunto B de un EVT E se dice **acotado** si dado cualquier entorno U del origen, existe $\lambda \geq 0$ tal que $B \subseteq \lambda U$. Veáse [10] para una demostración de la siguiente proposición.

Proposición 2.2.4. *Sean (E,τ) un EVT y $\mathfrak{S}$ una familia no vacía de conjuntos acotados de E que satisface las siguientes dos propiedades:*

($\mathfrak{S}$1) *Si $A, B \in \mathfrak{S}$, existe $C \in \mathfrak{S}$ tal que $A \cup B \subseteq C$.*

($\mathfrak{S}$2) *Si $A \in \mathfrak{S}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, existe $B \in \mathfrak{S}$ tal que $\lambda A \subseteq B$.*

Entonces, la familia $\mathfrak{S}^0 := \left\{B^0 : B \in \mathfrak{S}\right\}$ es una base de entornos de $0 \in E'$ que dota a E' de una topología localmente convexa $\tau_{\mathfrak{S}}$.

Definición 2.2.5. Llamamos **topología fuerte** a la $\tau_{\mathfrak{S}}$ con $\mathfrak{S} = \{B \subseteq E : B \text{ acotado}\}$ y **topología débil** a la $\tau_{\mathfrak{S}}$ con $\mathfrak{S} = \{B \subseteq E : B \text{ finito}\}$.

Definición 2.2.6. Sean (E,τ_E) y (F,τ_F) dos EVTs y $u : E \to F$ lineal y continua. Se llama **traspuesta** de u a la aplicación lineal ${}^t u : F' \to E'$ dada por ${}^t u(y') := y' \circ u$ $\forall y' \in F'$.

Observación. Para cada $x \in E$, $u : E \to F$ lineal y continua e $y' \in F'$, se tiene

$$\left\langle {}^t u\left(y'\right), x\right\rangle = \left({}^t u \circ y'\right)(x) = {}^t u\left(y'(x)\right) = \left(y' \circ u\right)(x) = y'\left(u(x)\right) = \left\langle y', u(x)\right\rangle.$$

Es decir, la u pasa de un lado al otro de los ángulos trasponiéndose, lo que dota de sentido a la notación. Éste es un concepto clave en la teoría de distribuciones, puesto que va a permitir extender todas las operaciones usuales para funciones test a distribuciones.

Proposición 2.2.7. *Sean (E,τ_E) y (F,τ_F) dos EVTs y $u : E \to F$ continua. Si F' y E' portan la topología fuerte, la traspuesta ${}^t u : F' \to E'$ es continua.*

Demostración. Como ${}^t u$ es lineal, basta probar que ${}^t u$ es continua en el origen. Sea V^0 un entorno del origen de E' con V acotado. Entonces, $u(V)$ es otro acotado, por lo que se sigue que $(u(V))^0$ es un entorno del origen de F'. Sea $\Lambda \in (u(V))^0$. Como $\sup_{y\in u(V)} |\Lambda(x)| = \sup_{x\in V} |\Lambda(u(x))| = \sup_{x\in V} \left|\left({}^t u(\Lambda)\right)(x)\right|$, se deduce que ${}^t u\left((u(V))^0\right) \subseteq V^0$ y, por tanto, $\left({}^t u\right)^{-1}\left(V^0\right) \supseteq (u(V))^0$. $\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

2.3. Ejemplos

Comenzamos mostrando algunos espacios de Banach vistos en el Grado.

- Sea X un espacio localmente compacto. Denotamos por $\mathcal{C}_0(X)$ al espacio de funciones continuas en X con límite nulo cuando $x \to \infty$ equipado con la norma $||f||_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$ $\forall f \in \mathcal{C}_0(X)$. $\mathcal{C}_0(X)$ es un espacio de Banach. Su dual, $\mathcal{C}_0(X)'$ es el espacio de medidas complejas de Borel regulares sobre X [8]. Si $X = K$, siendo K un compacto de $\mathbb{R}^n$, este espacio se denota también $\mathcal{C}(K)$ y se corresponde con el conjunto de las funciones continuas sobre K.

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. El espacio $\mathcal{C}^m([a, b])$, formado por las funciones de clase C^m sobre $[a, b]$ y equipado con la norma $||f||_{(m)} := \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \text{máx}_{x\in[a,b]} \left|f^{(n)}(x)\right|$ $\forall f \in \mathcal{C}^m([a, b])$, es otro espacio de Banach.

- Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para $1 \le p < \infty$, sea $L^p(X, \mathrm{d}\mu)$ el espacio de las funciones f definidas en casi todo punto de X tales que $||f||_p := \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. $L^p(X, \mathrm{d}\mu)$ es espacio de Banach con dual linealmente homeomorfo a $L^q(X, \mathrm{d}\mu)$, siendo $1 < q \le \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $L^\infty(X, \mathrm{d}\mu)$ es el espacio de las funciones esencialmente acotadas, que también es de Banach. Su dual se corresponde con el espacio de medidas complejas acotadas y finitamente aditivas.

Proseguimos con unos ejemplos de más enjundia, puesto que son espacios no normados.

- Sean X localmente compacto y $\mathcal{C}(X)$ el conjunto de funciones continuas sobre X. Entonces, la familia de seminormas $\{||f||_K := \text{máx}_{x\in K} |f(x)| : K \subseteq X \text{ compacto}\}$ define en $\mathcal{C}(X)$ una estructura ELC de Fréchet.

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $\mathcal{C}^\infty([a, b])$ el espacio de las funciones infinitamente derivables sobre $[a, b]$. En este caso, $\mathcal{C}^\infty([a, b])$ en un espacio de Fréchet para la familia de seminormas $\left\{||f||_n := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left|\left|f^{(j)}\right|\right|_{[a,b]} \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty([a, b]) : n \in \mathbb{N}_0\right\}$.

- Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Sea $\mathcal{C}^k(\Omega)$ el espacio de todas las funciones de clase C^k sobre Ω. Recordemos que las derivadas parciales de f se denotan de la forma $D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, siendo $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. El espacio $\mathcal{C}^k(\Omega)$ es un ELC respecto a la topología definida por la familia de seminormas $\left\{||\cdot||_{m,K} : 0 \le m \le k, K \subseteq \Omega \text{ compacto}\right\}$ dadas por $||f||_{m,K} := \text{máx}_{|\alpha|\le m} \left(\text{máx}_{x\in K} |D^\alpha f(x)|\right)$ $\forall f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Esta topología $\tau_{c,k}$ recibe el nombre de topología de convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas de orden menor o igual que k. Como veremos en la subsección 3.1, $\left(\mathcal{C}^k(\Omega), \tau_{c,k}\right)$ es de Fréchet.

- Otro ELC de interés en Análisis es el espacio $\mathrm{Hol}(\Omega)$ de funciones holomorfas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto dotado de la topología $\tau_{c,0}$. Mediante la fórmula de Cauchy para polidiscos puede demostrarse que todas las topologías $\tau_{c,k}$ son equivalentes en $\mathrm{Hol}(\Omega)$ y que éste es un subespacio cerrado de $C^\infty(\Omega)$ y, por tanto, de Fréchet. Omito más detalles sobre este espacio porque la holomorfía excede el contexto de este trabajo.

2.4. Límites inductivos estrictos

En pos de la concisión, en esta subsección se presenta únicamente una particularización de los conceptos de límite inductivo y proyectivo a nuestro contexto. Para más información, véase el apéndice A y consúltense [5] y [9].

Definición 2.4.1. Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de ELCs tales que $E_n \subseteq E_{n+1}$ y $\tau_{n+1}|_{E_n} = \tau_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se llama **límite inductivo estricto contable** de $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denotado $\varinjlim E_n$, al $\mathbb{C}$-espacio vectorial $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dotado de la topología localmente convexa más fina que hace que las inclusiones $\iota_n : E_n \to E$ sean continuas. La existencia de dicha topología viene asegurada por el Lema de Zorn.

Recuérdese que un subconjunto A de un EVT se dice **absolutamente convexo** si es convexo y equilibrado.

Lema 2.4.2. *Sean E un ELC y $H \subseteq E$. Dado un entorno absolutamente convexo V del origen contenido en H, existe un entorno absolutamente convexo U del origen en E tal que $U \cap H = V$.*

Demostración. Por la definición de topología relativa, existe un entorno absolutamente convexo W del origen tal que $W \cap H \subseteq V$. Se define $U = \mathrm{Cl}\,(W \cup V)$, donde Cl denota clausura absolutamente convexa. Entonces, cualquier $z \in U$ es de la forma $\alpha x + \beta y$ con $x \in W$, $y \in V$ y $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. Si $z \in H$, debe ser $x \in H$, luego $x \in H \cap W \supseteq V$ y, por consiguiente, $z \in V$. En conclusión, como también $V \subseteq U \cap H$, se deduce que $U \cap H = V$. $\mathbb{Q.E.D.}$

Proposición 2.4.3. *Sea $E = \varinjlim E_n$ límite inductivo estricto contable de $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, la topología τ de E induce en cada E_n la topología τ_n. Si, además, E_n es Hausdorff $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces E también lo es.*

Demostración. Por 2.4.1 y aplicando inducción, es inmediato que $\tau_n|_{E_m} = \tau_m$ $\forall m \leq n$ y $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea V_n un entorno absolutamente convexo del origen en E_n. Aplicando 2.4.2 de forma reiterada, se obtiene que existe una sucesión de entornos absolutamente convexos del origen $V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq \dots$ tales que V_{n+m} es entorno del origen en E_{n+m} y $V_{n+m} \cap E_n = V_n$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Si tomamos $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{n+m}$, que es un entorno del origen de E, es claro que $U \cap E_n = V_n$, lo que muestra que $\tau|_{E_n} = \tau_n$.

Supongamos ahora que E_n es Hausdorff $\forall n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in E$ no nulo. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_n$. Como E_n es Hausdorff, existe un entorno V_n del origen en E_n tal que $x \notin V_n$. El U construido mediante el procedimiento anterior es un entorno del origen en E y satisface $x \notin U$, luego E también es Hausdorff. $\mathbb{Q.E.D.}$

Proposición 2.4.4. *Sea $E = \varinjlim E_n$ límite inductivo estricto contable de espacios $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ completos. Entonces, E es completo.*

Demostración. Sean $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy sobre E y $\mathscr{U}$ el filtro de entornos del origen. Entonces, $\mathscr{F} + \mathscr{U} = \{F + U : F \in \mathscr{F}, U \in \mathscr{U}\}$ es la base de un filtro de Cauchy sobre E que converge si y sólo si $\mathscr{F}$ converge. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la traza de $\mathscr{F} + \mathscr{U}$ sobre E_n es la base de un filtro. Si es así, como E_n es completo, dicha traza será convergente en E_n, luego $\mathscr{F}$ también convergerá en E. En caso contrario, existen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$ y una sucesión decreciente $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de entornos del origen absolutamente convexos tales que $(F_n + W_n) \cap E_n = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Es claro que $U := \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \cap E_n\right)$ es un entorno del origen en E. Veamos que $(F_n + U) \cap E_n = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $y \in E_n \cap (F_n + U)$. Entonces, $y = z_n + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$, donde $\sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \leq 1$, $x_i \in W_i \cap E_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ y $z_n \in F_n$. Por consiguiente, $y - \sum_{i=1}^{\text{mín}\{n,p\}} \lambda_i x_i = z_n + \sum_{i=n+1}^{p} \lambda_i x_i$. Como $W_i \subseteq W_n$ $\forall i > n$ y W_n es absolutamente convexo, el segundo miembro de la igualdad anterior está en $F_n + W_n$, mientras que el primer miembro está en E_n; lo cual es imposible. De esta manera, $(F_n + U) \cap E_n = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Al ser $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy, existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $F - F \subseteq U$. Sea $w \in F$. Entonces, $w \in E_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Sea $v \in F_k \cap F$. En ese caso, $w = v + (w - v) \in v + (F - F) \subseteq F_k + U$, lo que es una contradicción. $\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

Proposición 2.4.5. *Sea* $E = \varinjlim E_n$ *límite inductivo estricto contable de espacios de Fréchet* $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Entonces* E_n *es cerrado en* E $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, por 2.4.1, $\tau_{n+1}|_{E_n} = \tau_n$ y al ser E_n completo y E_{n+1} metrizable, E_n es cerrado en E_{n+1}. Aplicando inducción, es claro que E_n es cerrado en E_{n+p} $\forall n, p \in \mathbb{N}$. Veremos que $E - E_n$ es abierto. Sea $x \in E - E_n$. Entonces, como $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n+p}$. Como $x \notin E_n$ y E_n es cerrado en E_{n+p}, se deduce que existe V_{n+p} entorno abierto del origen en E_{n+p} tal que $(x + V_{n+p}) \cap E_n = \emptyset$. Por 2.4.3, existe V entorno abierto del origen en E tal que $V \cap E_{n+p} = V_{n+p}$. Por consiguiente, $(x + V) \cap E_n = \emptyset$, luego $x + V \subseteq E - E_n$. $\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

Proposición 2.4.6. *Sea* $E = \varinjlim E_n$ *límite inductivo estricto contable de espacios de Fréchet* $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Si* $E_n \neq E$ $\forall n \in \mathbb{N}$, E *no es metrizable.*

Demostración. Supongamos que E fuese metrizable. Como $E_n \subsetneq E$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se deduce que $\mathring{E}_n = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y los E_n son cerrados en E por 2.4.5. Al ser $\mathring{E} \neq \emptyset$, esto contradice el Teorema de Baire. $\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

Proposición 2.4.7. *Sea* $E = \varinjlim E_n$ *límite inductivo estricto contable de* $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Entonces, una aplicación* $u : E \to F$, *donde* F *es un EVT, es continua si y sólo si* $u|_{E_n}$ *es continua* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea ι_n la inclusión de E_n en E. Por 2.4.1, ι_n es continua. Si u es continua, como $u|_{E_n} = u \circ \iota_n$, se deduce que $u|_{E_n}$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, sean $x \in E$ y V un entorno de $u(x)$ en F. Llamaremos τ a la topología de E. Puesto que $u|_{E_n}$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\tau|_{E_n} = \tau_n$ por 2.4.3, $\forall n \in \mathbb{N}$ existe un entorno U_n de x en E tal que $u^{-1}(V) \cap E_n = \left(u|_{E_n}\right)^{-1}(V) = U_n \cap E_n$. Como $E_n \subseteq E_{n+1}$, intersecando ambos miembros de la igualdad anterior con E_m tomando $m \leq n$, se deduce que U_n no puede depender de n. Por tanto, existe U entorno de x en E tal que $u^{-1}(V) \cap E_n = U \cap E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Puesto que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$, al tomar la unión variando $n \in \mathbb{N}$ en ambos miembros, se deduce que $u^{-1}(V) = U$, es decir, $u^{-1}(V)$ también es un entorno de x en E, lo que prueba la continuidad. $\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

Lema 2.4.8. *Sean* E *un ELC y* $H \subseteq E$ *cerrado. Dados un entorno absolutamente convexo* V *del origen contenido en* H *y* $x_0 \notin H$, *existe un entorno absolutamente convexo* U *del origen tal que* $U \cap H = V$ *y* $x_0 \notin U$.

Demostración. Al ser H cerrado y gracias a 2.4.3, puede escogerse un entorno absolutamente convexo W del origen tal que $W \cap H \subseteq V$ y $(x_0 + W) \cap H = \emptyset$. Por 2.4.2, $U = \mathrm{Cl}\,(W \cup V)$ satisface $U \cap H = V$ y $x_0 \notin U$, ya que la igualdad $x_0 = \alpha x + \beta y$ con $x \in W$, $y \in V$ y $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, que es equivalente a $x_0 - \alpha x = \beta y$, contradice que $(x_0 + W) \cap H$ sea vacío. $\mathbb{Q.E.D.}$

Proposición 2.4.9. *Sea $E = \varinjlim E_n$ límite inductivo estricto contable de $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, $B \subseteq E$ está acotado en E si y sólo si B está acotado en E_n para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La suficiencia se da por 2.4.3. Recíprocamente, supóngase que B es acotado en E pero que $B \nsubseteq E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, existen $(n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tales que $x_i \in E_{n_i}$ pero $x_i \notin E_{n_{i-1}}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Al ser $E_{n_{i-1}}$ cerrado en E_{n_i} por 2.4.1 e inducción, aplicando 2.4.8, se obtiene que existe una sucesión $(V_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de entornos absolutamente convexos del origen en E_{n_i} tales que $V_{n_i} \cap E_{n_{i-1}} = V_{n_{i-1}}$ y $\frac{1}{i}x_i \notin V_{n_i}$. Entonces, $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{n_i}$ es un entorno absolutamente convexo del origen en E que no contiene a $\frac{1}{i}x_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$, lo que contradice que B sea acotado. $\mathbb{Q.E.D.}$

Definición 2.4.10. Sea $(F_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de ELCs tales que $F_n \supseteq F_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se llama **límite proyectivo** de $(F_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denotado $\varprojlim F_n$, al $\mathbb{C}$-espacio vectorial $F \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ dotado de la topología localmente convexa más gruesa que hace que las inclusiones $J_n : F \to F_n$ sean continuas. De nuevo, la existencia de dicha topología viene asegurada por el Lema de Zorn.

Teorema 2.4.11. *Sea $E = \varinjlim E_n$ límite inductivo estricto contable de $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si los E_n' portan la topología fuerte, $E' = \varprojlim E_n'$.*

Demostración. Por 2.4.1, $E_n \subseteq E_{n+1}$ y $\tau_{n+1}|_{E_n} = \tau_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, luego $E_n' \supseteq E_{n+1}'$ $\forall n \in \mathbb{N}$. De esta forma, $\varprojlim E_n'$ existe. Veamos que coincide con E'. Como $E_n \subseteq E$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se deduce que $E_n' \supseteq E'$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y, por ende, $E' \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n' = \varprojlim E_n'$. Por otra parte, dado $L \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n'$, como cada $x \in E$ debe pertenecer a algún E_n, es claro que $L\,(x)$ está bien definido $\forall x \in E$. Por 2.4.7, $L \in E'$. Así, $E' = \varprojlim E_n'$ como espacios vectoriales. Veamos que las topologías también coinciden. Sea B^0 entorno del origen en E'. Entonces, por 2.4.9, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que B está acotado en E_n, luego B^0 es entorno del origen en E_n'. Por 2.4.10, B^0 es entorno del origen en $\varprojlim E_n'$. Recíprocamente, sea B^0 entorno del origen en $\varprojlim E_n'$. Dado que, por 2.4.10, $\varprojlim E_n'$ está equipado con la topología más gruesa que hace a las $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continuas, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que B^0 es entorno del origen en E_n', luego B está acotado en E_n. Por 2.4.9, B está acotado en E y, de esta manera, B^0 es entorno del origen en E'. $\mathbb{Q.E.D.}$

En conclusión y, a modo de resumen de esta sección, supongamos que $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de espacios de Fréchet (ELC metrizable y completo) tal que $E_n \subsetneq E_{n+1}$ y $\tau_{n+1}|_{E_n} = \tau_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varinjlim E_n$ es límite inductivo contable estricto de espacios de Fréchet, que es localmente convexo (por definición), Hausdorff (por 2.4.3), completo (por 2.4.4) y no metrizable (por 2.4.6). Además, por 2.4.3, la topología inducida por E en E_n coincide con τ_n. Por último, merced a 2.4.11, su dual E' viene dado por el límite proyectivo de los duales: $E' = \varprojlim E_n'$. Como veremos en la sección 3.1, esta estructura es la quintaesencia del espacio $\mathcal{D}\,(\Omega)$ de funciones test y de su dual $\mathcal{D}'\,(\Omega)$.

3. Distribuciones

3.1. Espacios localmente convexos de base o «test»

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Retomamos el espacio $\mathcal{C}^k(\Omega)$ introducido en 2.3.

Proposición 3.1.1. *Sea* $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. $\left(\mathcal{C}^k(\Omega), \tau_{c,k}\right)$ *es de Fréchet.*

Demostración. Es inmediato por 2.1.5 que las seminormas dadas generan una topología. Es fácil comprobar que $\mathscr{P} = \left\{||\cdot||_{m,K} : 0 \leq m \leq k, K \subseteq \Omega \text{ compacto}\right\}$ es una base de seminormas continuas. Veamos que $\mathcal{C}^k(\Omega)$ es Hausdorff. Sea $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ tal que $||f||_{m,K} = 0\ \forall m \leq k$ y $\forall K \subseteq \Omega$ compacto. Entonces, tomando $m = 0$ y $K = \{x\}$ con $x \in \Omega$ cualquiera, se deduce $f \equiv 0$; es decir, $\bigcap_{m \leq k, K \subseteq \Omega \text{ compacto}} \operatorname{Ker}\left(||\cdot||_{m,K}\right) = \{0\}$. Por una caracterización de Hausdorff en un ELC, $\mathcal{C}^k(\Omega)$ es Hausdorff. A continuación, veamos que posee una base contable de entornos del origen. Sea $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión exhaustiva de compactos de Ω, es decir, $K_j \subseteq \mathring{K}_{j+1}\ \forall j \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$. Entonces, $\{||\cdot||_{m,K_j} : m \leq k, j \in \mathbb{N}\}$ es una base contable de seminormas continuas y, por 2.1.6, sus entornos asociados proporcionan una base contable de los entornos del origen. Por consiguiente, $\mathcal{C}^k(\Omega)$ es metrizable. Veamos la completitud. Como el espacio es metrizable, bastará ver que hay completitud por sucesiones. Sea $(f_l)_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^k(\Omega)$ una sucesión de Cauchy. Entonces, de 2.1.6 y de la definición de filtro de Cauchy, se deduce que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall m \leq k$ y $\forall K \subseteq \Omega$ compacto, existe $l_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\forall l, r \geq l_0$ se tiene $||f_l - f_r||_{m,K} \leq \varepsilon$. Tomando $m = 0$ y $K = \{x\}$, con $x \in \Omega$, se infiere que las sucesiones $(f_l(x))_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, son de Cauchy, luego convergentes. Esto permite definir la función límite $f(x) := \lim_{l \to \infty} f_l(x)\ \ \forall x \in \Omega$. Es claro que $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre cualquier compacto de Ω. Como el límite uniforme de funciones continuas es continuo, f ha de ser continua. Si $k = 0$, hemos terminado. Si $k > 0$, se repite un argumento análogo para las derivadas de f_l. De esta forma, se obtiene que la derivada de $D^\alpha f_l$ converge uniformemente a una función $g_\alpha \in \mathcal{C}^{k-|\alpha|}(\Omega)$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$. Sin embargo, no es evidente, en principio, que $g_\alpha = D^\alpha f$. Probaremos este hecho en el caso particular en el que f es una función de una variable y estamos interesados en su primera derivada, pero el resultado es muy fácilmente generalizable a n variables y a derivadas de mayor orden. Sea $I \subseteq \Omega$ un intervalo y escójase $a \in I$. Entonces, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, $f_l(x) - f_l(a) = \int_a^x f_l'(t)\,\mathrm{d}t\ \forall x \in I$ y $\forall l \in \mathbb{N}$. Sabemos que f_l' converge uniformemente en I cuando $l \to \infty$ a una función g. En consecuencia, tomando límites en la expresión anterior, se llega a $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\ \forall x \in I$ y esto significa que g es la derivada de f. $\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

A continuación, hacemos mención a un espacio de gran importancia en análisis de Fourier, conocido como la **clase de funciones de Schwartz** o de **decrecimiento rápido en el infinito**, que está formada por las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de clase C^∞ que satisfacen $\lim_{||x||_2 \to \infty} ||x||_2^k\, |D^\alpha f(x)| = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $\forall k \in \mathbb{N}_0$. La clase de Schwartz se denota por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 3.1.2. *La familia de seminormas* $\mathscr{P} = \left\{||\cdot||_{m,k} : m, k \in \mathbb{N}_0\right\}$*, donde*

$$||f||_{m,k} := \max_{|\alpha| \leq m} \left(\max_{x \in \mathbb{R}^n} \left((1 + ||x||_2)^k\, |D^\alpha f(x)| \right) \right) \quad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

dota al espacio $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ de una topología τ de espacio de Fréchet. Además, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ como espacios vectoriales, pero la topología de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es estrictamente más fina que la de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Por 2.1.5, las seminormas dadas generan una topología y, por tanto, $\mathscr{P}$ es una base de seminormas continuas. Es inmediato que $\bigcap_{m,k\in\mathbb{N}_0} \operatorname{Ker}\left(||\cdot||_{m,K}\right) = \{0\}$ y, por consiguiente, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es Hausdorff. Al ser $\mathscr{P}$ contable, por 2.1.6, inferimos que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es metrizable. Es claro que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces las funciones $(1+||x||_2)^k D^\alpha f_l$ convergen uniformemente a cero $\forall k \in \mathbb{N}$ y $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. En particular, tomando $k=0$, se obtiene que $D^\alpha f_l$ converge uniformemente a cero $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$; en otras palabras, f_l converge a cero en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Acabamos de demostrar que la topología de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es más fina que la de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Veamos la completitud. Al ser $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ metrizable, es suficiente comprobar la completitud por sucesiones. Si $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, también es de Cauchy en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y, como este último es completo, $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ converge a una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Puesto que $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||f_l - f_{l_0}||_{m,k} \leq 1 \; \forall l \geq l_0$, de donde se deduce que $||f_l||_{m,k} \leq 1 + \text{máx}_{r\in\{1,\dots,l_0\}} ||f_r||_{m,k} =: M_{m,k}$. Esta desigualdad también puede expresarse como $\text{máx}_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha f_l| \leq M_{m,k}(1+||x||_2)^{-k}$. Al converger $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ a f en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f_l$ converge uniformemente a $D^\alpha f$ y, en consecuencia, puede asegurarse que $\text{máx}_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha f| \leq M_{m,k}(1+||x||_2)^{-k}$, lo que garantiza que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Nótese que el hecho de que f_l converja a f es equivalente a que $f_l - f$ converja a cero. Teniendo todo esto en cuenta, terminar de demostrar la completitud se reduce a ver que si $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ converge a cero en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ también lo hace en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dado $R > 0$,

$$\begin{aligned} ||f_l||_{m,k} \leq {} & (1+R)^k \underset{|\alpha|\leq m}{\text{máx}} \underset{||x||_2\leq R}{\text{máx}} |D^\alpha f_l(x)| + \\ & + \underset{|\alpha|\leq m}{\text{máx}} \sup_{||x||_2 > R} \left[(1+||x||_2)^k |D^\alpha f_l(x) - D^\alpha f_{l_0}(x)|\right] + \\ & + \underset{|\alpha|\leq m}{\text{máx}} \sup_{||x||_2 > R} \left[(1+||x||_2)^k |D^\alpha f_{l_0}(x)|\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si se escoge l_0 suficientemente grande, puede asegurarse que $||f_l - f_{l_0}||_{m,k} < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall l \geq l_0$. Bajo estas condiciones, el segundo sumando de (1) también es $< \frac{\varepsilon}{3}$. Al ser $f_{l_0} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, puede escogerse $R > 0$ de tal forma que el tercer sumando de (1) sea $< \frac{\varepsilon}{3}$. Puesto que f_l converge a f en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, puede tomarse l lo suficientemente grande como para que el primer sumando también sea $< \frac{\varepsilon}{3}$. Por último, τ es estrictamente más fina que $\tau_{c,\infty}$ ya que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si fuese $\tau = \tau_{c,\infty}$, se tendría $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, que es claramente falso por la completitud de ambos. $\mathbb{Q.E.D.}$

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Procedemos a construir los espacios $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$. Recordemos que si (X, τ_X) e (Y, τ_X) son dos EVTs y $f : X \to Y$, se llama **soporte (cerrado)** de f al conjunto $\text{sop} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. Ahora, sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Se denota $\mathcal{C}_c^k(\Omega, K)$ al conjunto de funciones de clase C^k sobre Ω cuyo soporte está contenido en K. Claramente, $\mathcal{C}_c^k(\Omega, K)$ es un subespacio de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ y es fácil ver que es cerrado. En efecto, sea $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c^k(\Omega, K)$ una sucesión de funciones que converge a f. Entonces, $f_l|_{\Omega-K} = 0 \; \forall l \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $f|_{\Omega-K} = 0$. Por ende, $\mathcal{C}_c^k(\Omega, K)$ es un subespacio cerrado del espacio de Fréchet $\mathcal{C}^k(\Omega)$ (véase 3.1.1) y, en consecuencia, también es de Fréchet. A continuación, escójase una sucesión exhaustiva $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ de compactos de Ω, es decir, $K_j \subseteq \mathring{K}_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Si llamamos $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ al espacio de funciones de clase C^k sobre Ω de soporte compacto, es claro que $\mathcal{C}_c^k(\Omega, K_j) \subseteq \mathcal{C}_c^k(\Omega, K_{j+1})$ y $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_c^k(\Omega, K_j) = \mathcal{C}_c^k(\Omega)$ como espacios vectoriales. Ahora bien, es inmediato que la topología inducida por $\mathcal{C}_c^k(\Omega, K_{j+1})$ en $\mathcal{C}_c^k(\Omega, K_j)$ es la topología que habíamos aportado originalmente a $\mathcal{C}_c^k(\Omega, K_j)$. De los resultados de la subsección 2.4, se deduce el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3. *Sea $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. La sucesión de espacios $\left(\mathcal{C}_c^k(\Omega, K_j)\right)_{j \in \mathbb{N}}$ tiene límite inductivo topológico estricto contable, que coincide con $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ como espacio vectorial, pero que le aporta, además, una topología localmente convexa, Hausdorff, completa y no metrizable.*

Adicionalmente, el hecho de que $\mathcal{C}^k(\Omega)$ tenga una base contable de seminormas continuas de la forma dada en la subsección 2.3 y que la topología definida por esas seminormas sea independiente de la sucesión de compactos escogida asegura que la topología del límite inductivo proporcionada a $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ no depende de la sucesión $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$. El espacio $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, al que denotaremos más usualmente $\mathcal{D}(\Omega)$, juega un papel fundamental en la teoría de distribuciones. Aunque, en virtud de 3.1.3, $\mathcal{D}(\Omega)$ no es metrizable, esto no supone un obstáculo para el desarrollo de la teoría. También son importantes los espacios $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N}_0$, a los que usualmente se denotará $\mathcal{D}^k(\Omega)$. De los espacios $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$, también denotado $\mathcal{E}(\Omega)$, es el que aflora con mayor frecuencia en la teoría de distribuciones. Concluimos la subsección con un resultado de aproximación que nos será útil al estudiar la relación entre los duales de los espacios mentados y cuya demostración puede encontrase en [10].

Proposición 3.1.4. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. $\mathcal{C}^{k+1}(\Omega)$ es denso en $\mathcal{C}^k(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ es denso en cualquier $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $\mathcal{C}_c^{k+1}(\Omega)$ es denso en $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ es denso en cualquier $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ y $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ es denso en $\mathcal{C}^k(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.*

3.2. Espacios de distribuciones

Comenzamos definiendo la noción de distribución y estudiando caracterizaciones de la misma. Después, se muestran inclusiones entre espacios de distribuciones.

Definición 3.2.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Se denomina **distribución** a todo elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, a todo funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Sea $k \in \mathbb{N}_0$. Todo elemento de $\mathcal{D}^k(\Omega)'$ se conoce como **distribución de orden** k. A los espacios $\mathcal{D}^k(\Omega)'$ se los conoce como espacios de **distribuciones de orden finito**. A $\mathcal{E}'(\Omega)$ se lo llama espacio de **distribuciones de soporte compacto**. Por último, todo elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ recibe el nombre de **distribución temperada**.

Se equipará a todos los duales mencionados con la correspondiente topología fuerte definida en 2.2.5. Nótese que, merced a 2.2.4, todos son ELCs. Por el Teorema 2.4.11, en el caso de $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}^k(\Omega)'$, esta topología coincide con la que se obtiene al hacer el límite proyectivo dual del límite inyectivo que define cada uno de los espacios.

Por 2.1.7 y 2.4.7 obtenemos la siguiente caracterización de una distribución.

Proposición 3.2.2. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $L : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineal. Son equivalentes:*

1. *$L \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

2. *Para cualquier compacto K de Ω y $\forall m \in \mathbb{N}_0$ existe $C > 0$ tal que*

$$|L(\varphi)| \leq C \max_{|\alpha| \leq m} \left(\max_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, K).$$

3. *Para todo compacto K de Ω y toda sucesión de funciones test $(\varphi_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, K)$ tal que $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ converge a cero en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, se tiene $L(\varphi_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.*

Existen versiones análogas de 3.2.2 para los espacios $\mathcal{D}^k(\Omega)'$, $\mathcal{E}'(\Omega)$ y $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. El siguiente resultado se deduce del Teorema de Hahn-Banach y permite relacionar entre sí los duales de los espacios presentados en la subsección 3.1. Véase [10] para más detalle.

Proposición 3.2.3. *Sean (E, τ_E) y (F, τ_F) dos ELCs y $u : E \to F$ lineal y continua. Entonces, $u(E)$ es denso en F si y sólo si ${}^t u$ es inyectiva.*

Corolario 3.2.4. *Se dan las siguientes inclusiones continuas:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{D}'(\Omega) & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & \mathcal{D}^{k+1}(\Omega)' & \hookleftarrow & \mathcal{D}^k(\Omega)' & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & \mathcal{D}^0(\Omega)' \equiv \mathcal{C}_c(\Omega)' \\
\uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
\mathcal{E}'(\Omega) & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & \mathcal{C}^{k+1}(\Omega)' & \hookleftarrow & \mathcal{C}^k(\Omega)' & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & \mathcal{C}^0(\Omega)'
\end{array}.$$

Además, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Se deduce de las Proposiciones 2.2.7 y 3.1.4. $\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Veamos qué representación tienen los elementos de $\mathcal{C}_c(\Omega)'$. Consideramos el espacio medible $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, donde $\mathcal{B}(\Omega)$ denota los borelianos de Ω. Una medida $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to [0, \infty]$ se dice **de Radon** si es interiormente regular, es decir, si $\forall U \in \mathcal{B}(\Omega)$ se tiene $\mu(U) = \sup_{K \subseteq U \text{ compacto}} \mu(K)$, y si es localmente finita, es decir, si $\forall x \in \Omega$ existe U abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in U$ y $\mu(U) < \infty$. Una medida compleja $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{C}$ se dice **de Radon** si $(\mathrm{Re}\mu)_+, (\mathrm{Re}\mu)_-, (\mathrm{Im}\mu)_+, (\mathrm{Im}\mu)_-$ lo son. El teorema que sigue representa $\mathcal{C}_c(\Omega)'$ como espacio de medidas de Radon. Puede verse una prueba en [8].

Teorema 3.2.5 (Riesz–Markov–Kakutani)**.** *Sea $L \in \mathcal{C}_c(\Omega)'$. Entonces, existe una única medida de Radon compleja μ sobre Ω tal que $L(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\ \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$. Recíprocamente, dada una medida de Radon compleja sobre Ω, la ecuación anterior define un elemento de $\mathcal{C}_c(\Omega)'$. En particular, por 3.2.4, toda medida de Radon compleja μ tiene una distribución asociada $T_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ que satisface $\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Como consecuencia de 3.2.5, la delta de Dirac δ_a centrada en $a \in \Omega$ puede verse como un elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Su distribución asociada T_{δ_a} satisface $\langle T_{\delta_a}, \varphi \rangle = \varphi(a)\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Recordemos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice **localmente integrable** si $f \in L^1(K)\ \forall K \subseteq \Omega$ compacto. Este hecho se denotará $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Entonces, a raíz de 3.2.5, toda función $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, en particular toda $f \in L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$, puede verse como un elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Su distribución asociada T_f cumple $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si también $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $T_f = T_g$ si y sólo si $f = g$ en casi todo punto. Con frecuencia, en lo que sigue, siempre que no dé lugar a confusión, se denotará $T_\mu \equiv \mu$, $T_f \equiv f$ y $T_{\delta_a} \equiv \delta_a$.

Observación. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ abierto. El espacio dual del espacio $\text{Hol}(\Omega)$ considerado en la subsección 2.3 da lugar a la teoría de funcionales analíticos, en paralelo a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Sin embargo, ambas teorías son disjuntas. En efecto, $\mathcal{D}(\Omega) \cap \text{Hol}(\Omega) = \{0\}$ y, por tanto, no existe ninguna forma de relacionar los duales de $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\text{Hol}(\Omega)$.

También es posible definir distribuciones sobre otros espacios que no consideramos en este trabajo. Por ejemplo, $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$, donde $\mathbb{T}$ es la circunferencia unidad, constituye el espacio de las distribuciones periódicas [6]. Cabe destacar que, debido a la compacidad de $\mathbb{T}$, el desarrollo de la teoría de dichas distribuciones resulta más sencillo que la de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Por último, aunque $\mathcal{D}'(\Omega)$ no es metrizable [11], ello no constituye un serio inconveniente, pues es posible caracterizar la convergencia de una sucesión de distribuciones como expone el siguiente resultado.

Proposición 3.2.6. *Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$. Son equivalentes: 1) $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ en la topología fuerte. 2) $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ en la topología débil. 3) $T_n(\varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(\varphi) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Demostración. Véase [3] o [11] para $1 \iff 2$. Puede suponerse sin pérdida de generalidad que T es la distribución nula. Para comprender correctamente esta demostración, conviene repasar la Proposición 2.2.4. Por la hipótesis 2, dados $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $\left|T_n\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi\right)\right| \leq 1$. Como T_n es lineal, se deduce que $\left|T_n\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi\right)\right| \leq 1 \iff |T_n(\varphi)| \leq \varepsilon$, lo que demuestra 3. Por otra parte, sea ahora $B = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ cualquiera. Por 3, fijando $\varepsilon = 1$, existen $n_{1,0}, \ldots, n_{r,0} \in \mathbb{N}_0$ tales que $\forall n_l \geq n_{l,0}$ se tiene $|T_{n_l}(\varphi_l)| < 1 \ \forall l \in \{1, \ldots, r\}$. Tomando $n_0 \coloneqq \text{máx}\{n_{1,0}, \ldots, n_{r,0}\}$ se obtiene que $\text{máx}_{\varphi\in B} |T_n(\varphi)| < 1 \ \forall n \geq n_0$, lo que demuestra 2. $\mathbb{Q.E.D.}$

La Proposición 3.2.6 permite que en muchos textos aplicados como [2] no se dote al espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ de una topología y, simplemente, se emplee el apartado tercero de 3.2.6 como definición de la convergencia de una sucesión de distribuciones.

3.3. Operaciones inducidas por dualidad I

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. En esta subsección y en 3.5 se van a trasladar operaciones definidas sobre un espacio de funciones $E \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Para ello, se empleará la Proposición 2.2.7 y se seguirá el siguiente procedimiento «estándar»: 1) Se considerará una aplicación $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ continua. 2) Se hará un cálculo de ${}^t u(T_f)$ cuando $f \in E$. 3) Se tomará la definición de la nueva operación sobre $\mathcal{D}'(\Omega)$ de forma que coincida con la existente sobre E.

Comenzamos con la multiplicación de una distribución por una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. La aplicación $\Phi_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ dada por $\Phi_f(\varphi) \coloneqq f\varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ está bien definida y es lineal y continua. Además, si $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\left\langle {}^t\Phi_f(g), \varphi \right\rangle = \langle g, \Phi_f(\varphi) \rangle = \langle g, f\varphi \rangle = \int_\Omega g(x) f(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x =$

$\langle fg, \varphi \rangle$. De esta forma, la siguiente definición extiende el producto de una función $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ por una localmente intregrable a $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 3.3.1. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Llamamos **producto de f por T** a la distribución ${}^t\Phi_f(T)$, que se denotará fT.

Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Es claro que la aplicación $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ es lineal y continua. Por otra parte, dadas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivable con respecto a x_j y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, teniendo en cuenta que φ tiene soporte compacto, un cálculo sencillo de integración por partes muestra que $\left\langle {}^t\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(f), \varphi \right\rangle = \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x = \left\langle -\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle$. De esta forma, la siguiente definición extiende el concepto de derivada parcial de una función derivable a todo $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 3.3.2. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Se llama **derivada parcial de T con respecto a x_j** a la distribución $\frac{\partial T}{\partial x_j} := -{}^t\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(T)$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se define $D^\alpha T := \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, aplicando recursivamente la expresión anterior. Nótese que una distribución es siempre infinitamente diferenciable. Si $P : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ es un operador diferencial lineal y continuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ dado por $P(\varphi)(x) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x)$ $\forall x \in \Omega$ y $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donde $(c_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, se define $P(T) := \sum_{\alpha \in A} c_\alpha D^\alpha T$.

3.4. Soporte y estructura

Definición 3.4.1. Sean $U, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos tales que $U \subseteq \Omega$. Llamamos **extensión trivial de $\mathcal{D}(U)$ a $\mathcal{D}(\Omega)$** a la aplicación continua $\iota : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\iota(f)|_U = f$ y $\iota(f)|_{\Omega - U} = 0$. Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se llama **restricción de T a U** (y se denota $T|_U$) a la distribución ${}^t\iota(T) : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$.

Definición 3.4.2. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se dice que T **se anula en** $U \subseteq \Omega$ abierto si $T|_U = 0$; es decir, si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con sop$\varphi \subseteq U$.

Proposición 3.4.3. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $U \subseteq \Omega$ abierto y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Entonces, T_f se anula en U si y sólo si f se anula en casi todo punto de U.*

Demostración. Es evidente que si f se anula en casi todo punto de U, T_f se anula en U. Recíprocamente, puede definirse $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mediante $g|_U = 0$ y $g|_{\Omega - U} = f$. Por construcción, $T_g|_U = 0$ y $T_g = T_f$. Por una observación inmediatamente posterior a 3.2.5, $f = g$ en casi todo punto. $\mathbb{Q.E.D.}$

Para definir el soporte de una distribución, es preciso el siguiente resultado, que no se demuestra por ser más bien de corte topológico (véase [10]).

Proposición 3.4.4. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La unión de todos los abiertos en los que T se anula es un abierto de Ω en el que T se anula.*

Definición 3.4.5. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se llama **soporte de** T, denotado sop$T$, al complementario del mayor abierto de Ω en el que T se anula.

Ejemplo 3.4.6. El soporte de la delta de Dirac δ_a con $a \in \Omega$ es $\{a\}$.

Proposición 3.4.7. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Entonces $\mathrm{sop}T_f = \mathrm{sop}f$ salvo conjunto de medida nula.*

Demostración. Sea U el mayor abierto en el que T_f se anula. Entonces $\mathrm{sop}T_f = \Omega - U$. Por la Proposición 3.4.3, U también es el mayor abierto en el que f se anula en casi todo punto. Por tanto, $f \neq 0$ en casi todo punto de $\Omega - U$. Por consiguiente, $\mathrm{sop}T_f = (\Omega - U) \cup N$, donde $N \subseteq U$ es un conjunto de medida nula. $\mathbb{Q.E.D.}$

Concluimos esta sección con tres enunciados de caracterización de distribuciones. En concreto, el primero de ellos justifica que hayamos llamado distribuciones de soporte compacto a los elementos de $\mathcal{E}'(\Omega)$; el segundo expresa que, localmente, las distribuciones son derivadas de funciones continuas y el último es una caracterización de las distribuciones temperadas. El conjunto de ellos revela la estructura profunda de las distribuciones, aunque no son necesarios para las aplicaciones de la sección 4. Para más detalles, consúltese [3] o [10].

Teorema 3.4.8. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. $\mathcal{E}'(\Omega)$ está formado por las distribuciones cuyo soporte es compacto. Además, toda distribución de soporte compacto es de orden finito.*

Teorema 3.4.9. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

1. *Si T es de orden finito, entonces T es igual a una suma finita de derivadas (en el sentido de distribución) de funciones continuas sobre Ω.*

2. *Dado $U \subseteq \Omega$ relativamente compacto, $T|_U$ es igual a una suma finita de derivadas (en el sentido de distribución) de funciones continuas sobre U.*

Teorema 3.4.10. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. T es una distribución temperada si y sólo si es una suma finita de derivadas (en el sentido de distribución) de funciones continuas que crecen en el infinito más lentas que algún polinomio. En particular, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ $\forall 1 \leq p \leq \infty$.*

3.5. Operaciones inducidas por dualidad II

En esta sección se trasladan los conceptos de transformada de Fourier y producto de convolución a las distribuciones. Suponemos conocida la teoría de cada campo para el caso de funciones. Para más detalles, consúltese [7] o [10]. Denotamos la transformada de Fourier de una función f como $\mathcal{F}(f)$ o $\hat{f}$, indistintamente. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por la fórmula de multiplicación, $\left\langle {}^t\mathcal{F}(f), \varphi \right\rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle = \int_\Omega f(x)\, \hat{\varphi}(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \hat{f}(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \left\langle \hat{f}, \varphi \right\rangle$. Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 3.5.1. Se llama **transformada de Fourier** en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ a la traspuesta de la transformada de Fourier en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dicha traspuesta se denotará también con $\mathcal{F}$ o con $\widehat{\ }$.

Esto nos permite, en primer lugar, extender el concepto de transformada de Fourier de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y, de esta forma, por 3.4.10, a los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p \leq \infty$ y a las distribuciones de soporte compacto. Es fácil comprobar que esta extensión coincide en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con la definición usual de transformada de Fourier en ese espacio. Recordemos las definiciones de los operadores traslación, simetría con respecto al origen y escalado.

Definición 3.5.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cualquiera. Se llama operador **traslación por** $a \in \mathbb{R}^n$ a la aplicación τ_a definida por $\tau_a(f)(x) \coloneqq f(x-a)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Se conoce como operador **simetría con respecto al origen** a la aplicación $\tilde{}$ dada por $\tilde{f}(x) \coloneqq f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ y se denomina operador **escalado por** $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ a la aplicación ν_λ definida por $\nu_\lambda(f)(x) \coloneqq f(\lambda x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Es inmediato comprobar que los operadores definidos en 3.5.2 son continuos en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y en $\mathscr{S}(\Omega)$. Sean $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. El cambio de variable $y = x-a$ muestra que $\left\langle {}^t\tau_a(f), \varphi\right\rangle = \langle f, \tau_a(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x-a)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(y+a)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \langle \tau_{-a}(f), \varphi\rangle$. Por otra parte, mediante el cambio de variable $y=-x$, se llega a $\left\langle {}^t\tilde{}\,(f), \varphi\right\rangle = \langle f, \tilde{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \left\langle \tilde{f}, \varphi\right\rangle$. Por último, vía el cambio de variable $\lambda x = y$, se concluye $\left\langle {}^t\nu_\lambda(f), \varphi\right\rangle = \langle f, \nu_\lambda(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\lambda|^n} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \left\langle \frac{1}{|\lambda|^n}\nu_{\frac{1}{\lambda}}(f), \varphi\right\rangle$. De esta forma, la siguiente definición extiende los tres operadores de las funciones a las distribuciones.

Definición 3.5.3. Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Se llama **traslación por** $a \in \mathbb{R}^n$ de la distribución T a la distribución ${}^t\tau_{-a}(T)$, que se denotará $\tau_a(T)$. Se denomina **simetría con respecto al origen** de la distribución T a la distribución ${}^t\tilde{}\,(T)$, que se denotará por $\tilde{T}$. Se conoce como **escalado por** λ de la distribución T a la distribución $\frac{1}{|\lambda|^n}\,{}^t\nu_{\frac{1}{\lambda}}(T)$, que se denotará por $\nu_\lambda(T)$.

Ejemplo 3.5.4. Se tiene $\tau_a(\delta_0) = \delta_a\ \forall a \in \mathbb{R}^n$. En efecto, $\langle \tau_a(\delta_0), \varphi\rangle = \langle \delta_0, \tau_{-a}(\varphi)\rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Se cumple $\tilde{\delta}_a = \delta_{-a}\ \forall a \in \mathbb{R}^n$. Efectivamente, $\left\langle \tilde{\delta}_a, \varphi\right\rangle = \langle \delta_a, \tilde{\varphi}\rangle = \tilde{\varphi}(a) = \varphi(-a) = \langle \delta_{-a}, \varphi\rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Por último, se da $\nu_\lambda(\delta_a) = \frac{1}{|\lambda|^n}\delta_{\frac{a}{\lambda}}$. En efecto, $\langle \nu_\lambda(\delta_a), \varphi\rangle = \frac{1}{|\lambda|^n}\left\langle \delta_a, \nu_{\frac{1}{\lambda}}(\varphi)\right\rangle = \frac{1}{|\lambda|^n}\varphi\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \left\langle \frac{1}{|\lambda|^n}\delta_{\frac{a}{\lambda}}, \varphi\right\rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Notemos (es sencillo de ver) que si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y p es un polinomio, entonces $pT \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.5.5. *Considérese la transformada de Fourier* $\mathcal{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1. $\mathcal{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *es un homeomorfismo lineal.*
2. *Dados* $a \in \mathbb{R}^n$ *y* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(\tau_a(T)) = \mathrm{e}^{-2\pi i\langle a,\xi\rangle}\hat{T}$.
3. *Sea* $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ *y* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Entonces,* $\mathcal{F}(\nu_\lambda(T)) = \frac{1}{|\lambda|^n}\nu_{\frac{1}{\lambda}}\left(\hat{T}\right)$.
4. $\mathcal{F}^2 = \tilde{}$ *y* $\mathcal{F}^4 = id$.
5. *Dados* $j \in \{1,\dots,n\}$ *y* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, *se tiene* $\mathcal{F}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = 2\pi i\xi_j\hat{T}$ *y* $\frac{\partial \hat{T}}{\partial \xi_j} = -2\pi i\mathcal{F}(x_jT)$.

Demostración. Supondremos conocidos los resultados análogos en el caso de funciones de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

1. Se da porque la traspuesta de un homeomorfismo lineal es un homeomorfismo lineal.

4. $\left\langle \mathcal{F}^2(T), \varphi \right\rangle = \left\langle T, \mathcal{F}^2(\varphi) \right\rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle = \left\langle \tilde{T}, \varphi \right\rangle$. Como $\tilde{\tilde{T}} = T$, se deduce el resultado.

2. $\langle \mathcal{F}(\tau_a(T)), \varphi \rangle = \langle \tau_a(T), \hat{\varphi} \rangle = \langle T, \tau_{-a}(\hat{\varphi}) \rangle = \left\langle \mathcal{F}^4(T), \tau_{-a}(\hat{\varphi}) \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}^3(T), \mathcal{F}(\tau_{-a}(\hat{\varphi})) \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}^3(T), \mathrm{e}^{2\pi i \langle a, \xi \rangle} \tilde{\varphi} \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}^2\left(\mathrm{e}^{2\pi i \langle a, \xi \rangle} \tilde{\varphi}\right) \right\rangle = \left\langle \hat{T}, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle a, \xi \rangle} \varphi \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{-2\pi i \langle a, \xi \rangle} \hat{T}, \varphi \right\rangle$.

3. $\langle \mathcal{F}(\nu_\lambda(T)), \varphi \rangle = \langle \nu_\lambda(T), \hat{\varphi} \rangle = \left\langle T, \frac{1}{|\lambda|^n} \nu_{\frac{1}{\lambda}}(\hat{\varphi}) \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\nu_\lambda(\varphi)) \rangle = \left\langle \hat{T}, \nu_\lambda(\varphi) \right\rangle = = \left\langle \frac{1}{|\lambda|^n} \nu_{\frac{1}{\lambda}}\left(\hat{T}\right), \varphi \right\rangle$.

5. $\left\langle \mathcal{F}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \hat{\varphi} \right\rangle = \left\langle -T, \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_j} \right\rangle = \langle T, 2\pi i \mathcal{F}(x_j \varphi) \rangle = \left\langle 2\pi i \hat{T}, x_j \varphi \right\rangle = \left\langle 2\pi i x_j \hat{T}, \varphi \right\rangle$. $\left\langle \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \left\langle -\hat{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle -T, \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \right\rangle = \langle -T, 2\pi i x_j \hat{\varphi} \rangle = \langle -2\pi i x_j T, \hat{\varphi} \rangle = \langle -2\pi i \mathcal{F}(x_j T), \varphi \rangle$.

$\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

Ejemplo 3.5.6. Siguiendo [2], calculamos la transformada de Fourier de la delta de Dirac y sus derivadas. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $\left\langle \hat{\delta}_0, \varphi \right\rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_\Omega \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \langle 1, \varphi \rangle$. Por tanto, se deduce $\hat{\delta}_0 = 1$. Como $\mathcal{F}^2 = \widetilde{\ }$ por el cuarto apartado de 3.5.5 y $\tilde{\delta}_0 = \delta_0$ por el Ejemplo 3.5.4, se concluye que $\delta_0 = \tilde{\delta}_0 = \hat{\hat{\delta}}_0 = \hat{1}$. Por otra parte, dado $a \in \mathbb{R}^n$, como $\tau_a(\delta_0) = \delta_a$ por 3.5.4, aplicando el segundo apartado de 3.5.5, se obtiene $\hat{\delta}_a = \mathrm{e}^{-2\pi i \langle a, \xi \rangle}$. Vamos ahora con las derivadas. Usando el quinto apartado de 3.5.5, se tiene que $\mathcal{F}\left(\frac{\partial \delta_a}{\partial x_j}\right) = 2\pi i \xi_j \hat{\delta}_a = 2\pi i \xi_j \mathrm{e}^{-2\pi i \langle a, \xi \rangle}$. En particular, si se toma $a = 0$ y se aplica de forma reiterada el quinto apartado de 3.5.5, se llega a $\mathcal{F}(D^\alpha \delta_0) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados, se obtiene que $D^\alpha \delta_0 = \widetilde{D^\alpha \delta_0} = \mathcal{F}^2(D^\alpha \delta_0) = (2\pi i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) \iff \mathcal{F}(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) = \frac{D^\alpha \delta_0}{(2\pi i)^{|\alpha|}}$. Para concluir, aplicando la linealidad de $\mathcal{F}$ y 3.5.4, resulta sencillo obtener la transformada de Fourier del seno y del coseno. Dado $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathrm{sen}(bx)) = \mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{e}^{bix} - \mathrm{e}^{-bix}}{2}\right) = \frac{1}{2}\hat{\hat{\delta}}_{-\frac{b}{2\pi}} - \frac{1}{2}\hat{\hat{\delta}}_{\frac{b}{2\pi}} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\frac{b}{2\pi}} - \delta_{-\frac{b}{2\pi}}\right)$ y, análogamente, $\mathcal{F}(\cos(bx)) = \frac{1}{2}\left(\delta_{\frac{b}{2\pi}} + \delta_{-\frac{b}{2\pi}}\right)$.

Sea $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Hemos definido $\hat{T}$ por dualidad. Sin embargo, como $\langle T, \varphi \rangle$ está bien definido $\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{T}$ es una función que viene dada por $\hat{T}(y) = \left\langle T, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle \cdot, y \rangle} \right\rangle\ \forall y \in \mathbb{R}^n$ (véase [7]). La fórmula anterior se extiende a $z \in \mathbb{C}^n$ como $\hat{T}(z) = \left\langle T, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle \cdot, z \rangle} \right\rangle$, puesto que $\mathrm{e}^{-2\pi i \langle \cdot, z \rangle} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. De hecho, el Teorema de Paley-Wiener caracteriza $\hat{T}$ como función entera de tipo exponencial [8]. Esta versión de la transformada de Fourier se conoce como transformada de Fourier-Laplace.

Concluimos nuestro estudio y presentación de las distribuciones con la extensión a ellas del producto de convolución, que denotaremos mediante $*$. En general, no es posible definir $T * S$ cuando $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ son cualesquiera; no obstante, presentamos algunos casos particulares en los que sí lo es. Sea $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. La aplicación $\xi_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dada por $\xi_f(\varphi) = f * \varphi\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ está bien definida, es lineal y es continua. Sean $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. El cambio de variable $x - y = z$ y el Teorema de Fubini permiten ver que $\left\langle {}^t\xi_f(g), \varphi \right\rangle = \langle g, \xi_f(\varphi) \rangle = \langle g, f * \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(x - y)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - z) \varphi(z)\, \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x - z)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}z = \left\langle g * \tilde{f}, \varphi \right\rangle$. Puesto que $\tilde{\tilde{f}} = f$, la siguiente definición extiende el producto de convolución de una función $L^1(\mathbb{R}^n)$ por una $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a las distribuciones.

Definición 3.5.7. Sean $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Se define el **producto de convolución** de f y T, denotado $f * T$, como $f * T :=^t \xi_{\tilde{f}}(T)$.

Sabemos que, al trabajar con funciones, la convolución tiende a regularizarlas, es decir, si se hace la convolución de una función «mala» y otra «buena», es de esperar que la función resultante sea «buena». Algo similar ocurre en el caso del producto de una función de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ por una distribución.

Teorema 3.5.8. *Sean $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

1. *$f * T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se tiene $(f * T)(x) = \left\langle T, \tau_x\left(\tilde{f}\right)\right\rangle$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Si, además, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

2. *$D^\alpha(f * T) = (D^\alpha f) * T = f * (D^\alpha T)$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.*

Demostración. Para ver una demostración de 1, consúltese [10]. Probaremos 2. Sean $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por un lado, $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(f * T), \varphi\right\rangle = -\left\langle f * T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle = -\left\langle T, \tilde{f} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tilde{f} * \varphi\right)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \tilde{f} * \varphi\right\rangle = \left\langle f * \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi\right\rangle$. Por otra parte, $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(f * T), \varphi\right\rangle = -\left\langle T, \tilde{f} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} * \varphi\right\rangle = \left\langle T, \widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_j}} * \varphi\right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} * T, \varphi\right\rangle$. Mediante inducción, se obtiene el resultado. $\mathbb{Q.E.D.}$

A la luz del primer apartado del Teorema 3.5.8, es posible extender la definición de convolución a una función $\mathcal{C}^\infty$ y una distribución de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Para más detalles, véase [10]. A continuación, se va a definir la convolución de dos distribuciones siempre que una de ellas sea de soporte compacto. Para tal fin, resulta fundamental el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [10].

Teorema 3.5.9. *Sean $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Considérense las aplicaciones $\zeta_S, \zeta_T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dadas por $\zeta_S(\varphi) = \varphi * \tilde{S}$ y $\zeta_T(\varphi) = \varphi * \tilde{T}$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Las aplicaciones ζ_S y ζ_T están bien definidas, son lineales y continuas y, además, ${}^t\zeta_S(T) = {}^t\zeta_T(S)$.*

Definición 3.5.10. Sean $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Se define el **producto de convolución** de S y T como $S * T \equiv T * S := {}^t\zeta_S(T) =^t \zeta_T(S)$, donde ζ_S y ζ_T son las aplicaciones definidas en 3.5.9.

Proposición 3.5.11.

1. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, $f * g = T_f * T_g$.*

2. *Sean $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $f * S = T_f * S$.*

3. *Sean $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces $D^\alpha(S * T) = (D^\alpha S) * T = S * (D^\alpha T)$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.*

4. *Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $\delta_0 * T = T$.*

5. *Si $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $T * S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.*

En particular, $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), +, *, \cdot_{\text{escalar}})$ es una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa con unidad.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Se emplearán resultados de 3.5.8.

1. Por el Teorema de Fubini, $\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \left\langle T_g, \varphi * \tilde{T}_f \right\rangle = \left\langle T_g, \varphi * \tilde{f} \right\rangle =$
$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \tilde{f}(x-y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(y-x) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \langle f * g, \varphi \rangle$.

2. $\langle T_f * S, \varphi \rangle = \left\langle S, \varphi * \tilde{T}_f \right\rangle = \left\langle S, \varphi * \tilde{f} \right\rangle = \langle f * S, \varphi \rangle$.

3. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (S * T), \varphi \right\rangle = -\left\langle S * T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} * \tilde{S} \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi * \tilde{S} \right) \right\rangle =$
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi * \tilde{S} \right\rangle = \left\langle S * \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle$. Intercambiando los papeles de T y S se llega a que $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (S * T), \varphi \right\rangle =$
$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x_j} * T, \varphi \right\rangle$. Finalmente, mediante inducción se deduce el resultado.

4. $\langle \delta_0 * T, \varphi \rangle = \left\langle T, \varphi * \tilde{\delta}_0 \right\rangle = \langle T, \varphi * \delta_0 \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

5. Nos remitimos a [10].

$\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

4. Aplicaciones

4.1. Ecuaciones diferenciales

En esta sección, consideramos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la forma $L(u) = v$, donde $L : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es un operador diferencial lineal y $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ son distribuciones.

Definición 4.1.1. Se llama **solución fundamental** G de la ecuación diferencial $L(u) = v$ a toda distribución $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $L(G) = \delta_0$.

Proposición 4.1.2. *Si se conoce la solución fundamental G y existe $v * G$, entonces la solución de la ecuación $L(u) = v$ viene dada por $u = v * G$.*

Demostración. Aplicando reiteradamente el tercer apartado de la Proposición 3.5.11, así como su apartado quinto, se obtiene $L(v * G) = v * L(G) = v * \delta_0 = v$. $\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$

El concepto de solución fundamental y la Proposición 4.1.2 admiten una interpretación sencilla en el contexto de la Teoría de la Señal. Supongamos que tenemos un sistema cuyo comportamiento viene regido por una ecuación diferencial ordinaria de la forma $L(u) = v$, donde v representa la señal que entra al sistema, u es la señal que se obtiene a la salida y la variable independiente es el tiempo. En este caso, la solución fundamental G es susceptible de ser interpretada como la respuesta del sistema ante un pulso de entrada infinitamente corto, pero que transmite una cantidad no nula de energía. La Proposición 4.1.2 nos dice que si conocemos cómo reacciona el sistema a pulsos infinitamente cortos se puede encontrar la solución para cualquier señal de entrada viendo ésta como una «suma» de infinitos pulsos infinitamente cortos en diferentes instantes de tiempo (la convolución $v * G$). Después de ver esto, es natural preguntarse si existe siempre una solución fundamental. La respuesta es afirmativa y viene dada por el siguiente resultado, que puede verse en [7].

Teorema 4.1.3. *Si L es un operador diferencial de grado N, entonces existe una solución fundamental F de la ecuación $L(u) = v$ y satisface* $|E(\varphi)| \leq \frac{A}{(2\pi r)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(t + rw)| \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}w$.

Visto esto, vamos a considerar varias ecuaciones clásicas de la Física Matemática junto con su solución fundamental. Además, veremos la interpretación física que se les puede dar.

La ecuación de Poisson, que es **la ecuación de Laplace no homogénea**, aparece en la Física Clásica tanto en Electroestática como en Mecánica Gravitatoria. Si $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la densidad de carga en el espacio, entonces el potencial electroestático $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ viene dado por la ecuación $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador diferencial laplaciano y $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ es una constante que recibe el nombre de permitividad eléctrica del vacío. Análogamente si $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la densidad de masa en el espacio, entonces el potencial gravitatorio $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ satisface $\Delta\phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$, donde $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^+$ es una constante que recibe el nombre de constante de gravitación universal. Recordemos que la delta de Dirac puede verse como el límite de un conjunto de funciones de integral 1, cuya masa se va concentrando en el origen de coordenadas. Es decir, la delta de Dirac representa precisamente la idea de mantener un valor finito de la integral de una cantidad, pero en una región infinitamente pequeña del espacio. De esta forma, la solución fundamental G de la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$, que satisface $\Delta G = \delta_0$, puede interpretarse como el potencial electroestático generado por una carga puntual de valor $q = \varepsilon_0$ situada en el origen de coordenadas. Por la misma razón, también puede verse como el potencial gravitatorio generado por una masa puntual de valor $m = -\frac{1}{4\pi\mathcal{G}}$ situada en el origen de coordenadas.

A continuación, vamos a obtener la forma funcional de dicha solución fundamental. Para ello, necesitaremos una propiedad de la transformada de Fourier en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ que todavía no hemos demostrado: la transformada de Fourier de una distribución radial es radial. Es fácil ver que una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ es radial si y sólo si $f(Ax) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ y $\forall A \in \mathrm{SO}(n)$. Dada $A \in \mathrm{SO}(n)$, es claro que la aplicación $R_A : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \to L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ dada por $R_A(f)(x) = f(Ax)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ y $\forall f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ es lineal y continua en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dadas $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, mediante el cambio de variable $y = Ax$, teniendo en cuenta que $A^T = A^{-1}$ y que $\det A = 1$, se obtiene $\left\langle {}^tR_A(f), \varphi \right\rangle = \langle f, R_A(\varphi) \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(Ax)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\left(A^{-1}y\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \langle R_{A^T}(f), \varphi \rangle$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.1.4. Sea $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. T se dice **radial** si ${}^tR_A(T) = T\ \forall A \in \mathrm{SO}(n)$.

Proposición 4.1.5. *Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ es radial, entonces $\hat{T}$ también lo es.*

Demostración. Primero, dadas $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $A \in \mathrm{SO}(n)$ cualesquiera, veamos qué relación hay entre $R_A(\hat{\varphi})$ y $\mathcal{F}(R_A(\varphi))$. $R_A(\hat{\varphi})(\xi) = \hat{\varphi}(A\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i \langle x, A\xi \rangle}\mathrm{d}x$. Como $A^T = A^{-1}$, se deduce $R_A(\hat{\varphi})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i \left\langle A^{-1}x, \xi \right\rangle}\mathrm{d}x$. Haciendo el cambio de variable $y = A^{-1}x$ y teniendo en cuenta que $\det A = 1$, se concluye que $R_A(\hat{\varphi})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(Ay)\,\mathrm{e}^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle}\mathrm{d}y = \mathcal{F}(R_A(\varphi))$. De esta forma, debe ser $\left\langle {}^tR_A\left(\hat{T}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \hat{T}, R_A(\varphi) \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}(R_A(\varphi)) \rangle = \langle T, R_A(\hat{\varphi}) \rangle = \left\langle {}^tR_A(T), \hat{\varphi} \right\rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle$. $\mathbb{Q.E.D.}$

Volviendo a nuestro propósito original, queremos obtener la solución de la ecuación $\Delta G = \delta_0 \iff \iff \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \delta_0$. Supondremos que $G \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$. Tomando la transformada de Fourier a ambos lados y aplicando el apartado quinto del Teorema 3.5.5 y el Ejemplo 3.5.6, se obtiene $-4\pi^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathcal{F}(G)\equiv 1 \iff \mathcal{F}(G)\equiv\frac{-4\pi^2}{x^2+y^2+z^2}$. Veamos que $\mathcal{F}(G)$ es localmente integrable. El único problema podría estar en el origen de coordenadas. Pasando a coordenadas polares, se tiene

$$\iiint_{\{||\vec{r}||<1\}}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\underbrace{\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\theta\right)}_{<\infty}\underbrace{\left(\int_{r=0}^{1}\mathrm{d}r\right)}_{<\infty}<\infty,$$

donde $\vec{r}=(x,y,z)$. Por ende, $\mathcal{F}(G)\in L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^3\right)$ y, por el primer apartado de 3.5.5, $G=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(G))\in\mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$. Por otra parte, $\mathcal{F}(G)$ es una función radial (sólo depende de $x^2+y^2+z^2$) y es homogénea de grado -2, es decir, $\mathcal{F}(G)(\lambda\vec{r})=\frac{1}{\lambda^2}\mathcal{F}(G)(\vec{r})\ \ \forall\vec{r}\in\mathbb{R}^3-\{0\}$ y $\forall\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. Por 4.1.5 $\mathcal{F}^2(G)$ también habrá de ser radial y, por el apartado tercero de 3.5.5, dado $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ debe ser $\mathcal{F}(\nu_\lambda(\mathcal{F}(G)))\equiv\frac{1}{|\lambda|^3}\nu_{\frac{1}{\lambda}}\left(\mathcal{F}^2(G)\right)$. Como $\mathcal{F}(G)(\lambda\vec{r})=\frac{1}{\lambda^2}\mathcal{F}(G)(\vec{r})\,\forall\vec{r}\in\mathbb{R}^3-\{0\}$, se concluye que, $\forall\vec{r}\in\mathbb{R}^3-\{0\}$, $\frac{1}{|\lambda|^2}\mathcal{F}^2(G)(\vec{r})=\frac{1}{|\lambda|^3}\mathcal{F}^2(G)\left(\frac{\vec{r}}{\lambda}\right)\iff\mathcal{F}^2(G)(\lambda\vec{r})=\frac{1}{|\lambda|}\mathcal{F}^2(G)(\vec{r})$. Dicho de otra forma, $\mathcal{F}^2(G)$ es homogénea de grado -1. Estos dos hechos determinan $\mathcal{F}^2(G)$ salvo constante. Es decir, debe ser $\mathcal{F}^2(G)\equiv\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde $C\in\mathbb{C}$. Claramente, $\widetilde{\mathcal{F}^2(G)}=\mathcal{F}^2(G)$ y, por el apartado cuarto de 3.5.5, $\mathcal{F}^2(G)=G$. Es decir, hemos conseguido determinar la forma funcional de G. Para hallar la constante C será preciso sustituir en la ecuación $\Delta G=\delta_0$. Sea $\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Entonces, $\langle\Delta G,\varphi\rangle=\langle G,\Delta\varphi\rangle=C\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Delta\varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Haciendo un cambio a coordenadas esféricas, se obtiene $\langle\Delta G,\varphi\rangle=C\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}r\operatorname{sen}\theta\Delta\varphi(r,\theta,\varphi)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. Con el fin de facilitarnos las cuentas, dado que sabemos $\langle\Delta G,\varphi\rangle=\langle\delta_0,\varphi\rangle\ \ \forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right)$, supondremos φ radial. De esta forma, $\langle\Delta G,\varphi\rangle=4\pi C\int_0^\infty r\Delta\varphi(r)\,\mathrm{d}r=4\pi C\int_0^\infty\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\mathrm{d}r=4\pi C\int_0^\infty\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial r}+r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)\mathrm{d}r$, donde hemos sustituido la expresión del Laplaciano en coordenadas esféricas. Integrando por partes, $\langle\Delta G,\varphi\rangle=4\pi C\left(\left[2\varphi+r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathrm{d}r\right)=4\pi C\left[\varphi+r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]_0^\infty$. Como φ es de soporte compacto, se deduce $\langle\Delta G,\varphi\rangle=4\pi C\varphi(0)$. Por consiguiente, concluimos que $C=\frac{1}{4\pi}$ y, por tanto, $G\equiv\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, que, efectivamente, es el potencial electroestático generado por una partícula puntual de carga $q=\varepsilon_0$ y el potencial gravitatorio generado por una masa puntual de valor $m=-\frac{1}{4\pi\mathcal{G}}$.

A continuación, examinamos las ecuaciones del calor y de ondas, aunque no podremos hacerlo con el mismo nivel de detalle que la ecuación de Laplace por razones de espacio.

Si consideramos un material sólido de conductividad térmica uniforme k, **la ecuación del calor** $\frac{\partial T}{\partial t}-k\Delta T=0$, donde T es la función temperatura, rige la difusión de la energía térmica a lo largo del sólido. Su solución fundamental puede interpretarse de la siguiente forma: supongamos que tenemos una mesa de tablero fino (de manera que pueda considerarse bidimensional) de un par de metros cuadrados de área a 0ºC y un horno en el que hemos calentado un trozo de hierro de unos pocos centímetros cúbicos a una temperatura de unos 600ºC. En el instante $t=0$, apoyamos el trozo de hierro en el centro de la mesa. La función que describiría la evolución de la temperatura de la mesa con el tiempo sería aproximadamente un múltiplo de la solución fundamental de la ecuación del calor. Si n es la dimensión en la que se considera la ecuación, según [12], la solución fundamental es $G(\vec{r},t)=\left(\frac{1}{4\pi kt}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{||\vec{r}||^2}{4kt}\right)\chi_{(0,\infty)}(t)\ \ \forall(\vec{r},t)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Veámoslo. Siguiendo [4], sea $\varepsilon>0$. Claramente, G

es de clase C^∞ en $\mathbb{R}\times(\varepsilon,\infty)$ y en dicho dominio verifica la ecuación del calor. Entonces, dada $\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, $0=\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^\infty\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\Delta\right)G\mathrm{d}t\mathrm{d}\vec{r}$. Aplicando integración por partes en la integral espacial, es posible escribir $0=\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^\infty\left(\varphi\frac{\partial G}{\partial t}-Gk\Delta\varphi\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\vec{r}=\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^\infty\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi G\right)-G\frac{\partial\varphi}{\partial t}-Gk\Delta\varphi\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}\vec{r}=-\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\vec{r},\varepsilon\right)G\left(\vec{r},\varepsilon\right)\mathrm{d}\vec{r}-\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^\infty G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+k\Delta\varphi\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\vec{r}$, donde hemos empleado que φ tiene soporte compacto. Por otra parte, $\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\Delta\right)G,\varphi\right\rangle=-\left\langle G,\left(\frac{\partial}{\partial t}+k\Delta\right)\varphi\right\rangle=-\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+k\Delta\varphi\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\vec{r}=-\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+k\Delta\varphi\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\vec{r}$. Como $G\in L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ y φ tiene soporte compacto, por el Teorema de la Convergencia Dominada, es posible intercambiar límite e integral. En consecuencia, $\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\Delta\right)G,\varphi\right\rangle=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^\infty G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+k\Delta\varphi\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\vec{r}$ y, por la cuenta realizada antes, $\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\Delta\right)G,\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\vec{r},\varepsilon\right)G\left(\vec{r},\varepsilon\right)\mathrm{d}\vec{r}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{4\pi k\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{\|\vec{r}\|^2}{4k\varepsilon}\right)\varphi\left(\vec{r},\varepsilon\right)\mathrm{d}\vec{r}$. Haciendo el cambio de variable $\vec{r}=\sqrt{k\varepsilon}\,\vec{u}$, se obtiene $\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\Delta\right)G,\varphi\right\rangle=\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{\|\vec{u}\|^2}{4}\right)\varphi\left(\sqrt{k\varepsilon}\,\vec{u},k\varepsilon\right)\mathrm{d}\vec{u}$ y, aplicando de nuevo el Teorema de la Convergencia Dominada, se concluye que $\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\Delta\right)G,\varphi\right\rangle=\varphi\left(\vec{0},0\right)=\langle\delta_0,\varphi\rangle$.

Si u es una función que mide la perturbación de una magnitud física con respecto a su punto de equilibrio, es común que u satisfaga **la ecuación de ondas** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\Delta u=0$, donde c es la velocidad de propagación de las ondas en el medio. Según [12], las soluciones fundamentales de la ecuación son $G_1\equiv\frac{1}{2c}\chi_{(0,\infty)}\left(t-\left|\frac{x}{c}\right|\right)$, $G_2\equiv\frac{1}{2\pi c\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}\chi_{(0,\infty)}\left(t-\frac{\rho}{c}\right)$ y $G_3\equiv\frac{\delta_{t-\frac{r}{c}}}{4\pi r}$, donde $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ y $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y G_n es la solución fundamental de la ecuación en dimensión n. Imaginemos que dos personas sostienen sendos extremos de una cuerda tensa. En el instante $t=0$, una da un fuerte tirón de la cuerda hacia arriba y la mantiene en alto. La solución G_1 describe el incremento de la altura de la cuerda respeto a la situación existente antes de $t=0$. Por otra parte, supóngase ahora que disponemos de una sábana muy grande sujeta por sus extremos, de manera que se encuentra tensa, y en el instante $t=0$ le pegamos un puñetazo en el centro. La solución G_2 describiría el desplazamiento en la dirección vertical de la sábana. Por último, supongamos que detonamos un explosivo en el aire en el instante $t=0$. La onda de choque (de presión) generada vendría descrita por la función G_3. Dicha onda, si bien es infinitesimal, pues aparece una delta de Dirac, transmite una energía finita, que es lo que verdaderamente importa a efectos de interacción con todo aquello con lo que la onda pueda encontrarse en su camino. Siguiendo [4], comprobamos que G_1 es, en efecto, la solución fundamental. Sea $\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^2\right)$. $\left\langle\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G_1,\varphi\right\rangle=\left\langle G_1,\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi\right\rangle=\frac{1}{2c}\iint_{\left\{t>\left|\frac{x}{c}\right|\right\}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. Haciendo el cambio de variable $x=c\frac{-\xi+\eta}{2}$ y $t=\frac{\xi+\eta}{2}$, se obtiene $\left\langle\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G_1,\varphi\right\rangle=\iint_{(0,\infty)^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\left(c\frac{\eta-\xi}{2},\frac{\eta+\xi}{2}\right)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi$. Dado que φ es de soporte compacto, se concluye que $\left\langle\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G_1,\varphi\right\rangle=\int_{(0,\infty)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(-c\frac{\xi}{2},\frac{\xi}{2}\right)\mathrm{d}\xi=\varphi\left(0,0\right)=\langle\delta_0,\varphi\rangle$.

4.2. Un problema académico de Mecánica Cuántica

Ejercicio. La función de onda de una partícula viene dada por $\psi\left(x\right)=A\left(1+\frac{x}{a}\right)\chi_{(-a,0)}\left(x\right)+A\left(1-\frac{x}{b}\right)\chi_{(0,b)}\left(x\right)$, donde $a,b\in\mathbb{R}^+$ y A es una constante de normalización. Determínese el valor esperado del momento $\langle p\rangle$ y de su cuadrado $\left\langle p^2\right\rangle$.

Solución (Elaboración propia)**.** En Mecánica Cuántica en una dimensión, el operador momento lineal viene dado por $p=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Luego, para calcular $\langle p\rangle$ y $\langle p^2\rangle$ será preciso obtener $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$, pero es claro que la función ψ no es derivable en el cero. Si se considera la función ψ como si de una distribución se tratase, es posible obtener los resultados físicamente correctos. Primero, determinamos el valor de la constante de normalización A, imponiendo que la probabilidad de encontrar la partícula en algún punto del espacio sea la unidad: $1=\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x=A^2\left(\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^2\mathrm{d}x+\int_0^b\left(1-\frac{x}{b}\right)^2\mathrm{d}x\right)=A^2\left(\left[\frac{a}{3}\left(1+\frac{x}{a}\right)^3\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{b}{3}\left(1-\frac{x}{b}\right)\right]_0^b\right)=A^2\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}\right)\iff A^2=\frac{3}{a+b}$. A continuación, calculamos $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ en el sentido de distribución. Sea $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ cualquiera. Entonces, $\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial x},\varphi\right\rangle=-\left\langle\psi,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle=-\int_{\mathbb{R}}\psi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-a}^{0}\psi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^b\psi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\,\mathrm{d}x$. Como ψ es de clase C^1 en $(-a,0)$ y en $(0,b)$, integrando por partes, se llega a $\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial x},\varphi\right\rangle=\underbrace{\psi(-a)}_{=0}\varphi(-a)-\psi(0)\varphi(0)+\int_{-a}^{0}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\underbrace{\psi(b)}_{=0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(b)+\psi(0)\varphi(0)+\int_0^b\frac{\partial\psi}{\partial x}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{b}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Por tanto, se concluye que $\frac{\partial T_\psi}{\partial x}$ y $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ coinciden. Continuemos con la segunda derivada: $\left\langle\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\varphi\right\rangle=-\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle=\int_{-a}^{b}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{A}{a}\int_{-a}^{0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\,\mathrm{d}x-\frac{A}{b}\int_0^b\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{A}{a}(\varphi(0)-\varphi(-a))-\frac{A}{b}(\varphi(b)-\varphi(0))=-\frac{A}{a}\varphi(-a)+A\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\varphi(0)-\frac{A}{b}\varphi(b)=\left\langle-\frac{A}{a}\delta_a+A\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\delta_0-\frac{A}{b}\delta_b,\varphi\right\rangle$.

Antes de proceder al cálculo de los valores esperados, se requiere una generalización del concepto de un valor esperado $\langle H\rangle=\int_{\mathbb{R}}\overline{\psi}H(\psi)\,\mathrm{d}x$ que sea válido cuando ψ es una distribución. Tiene sentido definir $\langle H\rangle:=\langle\overline{\psi}H(\psi),1\rangle$, si existe. De esta forma, como en nuestro caso $\overline{\psi}=\psi$ y $\frac{\partial\psi}{\partial x}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, se tiene $\langle p\rangle=\int_{\mathbb{R}}\overline{\psi}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\mathrm{d}x=-\frac{i\hbar}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x}\left(|\psi(x)|^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{i\hbar}{2}\left[|\psi(x)|^2\right]_{-a}^{b}=0$ y $\langle p^2\rangle=\left\langle\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},1\right\rangle=\left\langle-\frac{A}{a}\psi\delta_a+A\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\psi\delta_0-\frac{A}{b}\psi\delta_b,1\right\rangle=-\frac{A}{a}\underbrace{\psi(a)}_{=0}+A\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\psi(0)-\frac{A}{b}\underbrace{\psi(b)}_{=0}=A\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\psi(0)=\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{a+b}}{ab}\psi(0)$.

4.3. Teoría Cuántica de Campos

Es posible extender el concepto de distribución a funciones que toman valores en espacios más complicados que $\mathbb{C}$. De forma general, se tiene la siguiente definición:

Definición 4.3.1. [13] Sean $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto y (E,τ) un EVT. Se llama **distribución con valores en** E a toda aplicación $T:\mathcal{D}(\Omega)\to E$ lineal y continua. A una tal aplicación también se la denomina **distribución con valores vectoriales**.

Muchas de las operaciones y propiedades que han aparecido en este trabajo pueden extenderse a las distribuciones con valores vectoriales. Para más información, consúltese [14]. Sea H un espacio de Hilbert y considérese el espacio $\mathcal{L}(H)$ de todos los operadores lineales (no necesariamente continuos) sobre H. Los «campos» que aparecen en Teoría Cuántica de Campos son en realidad distribuciones con valores en $\mathcal{L}(H)$, que se obtienen al «promocionar» los campos clásicos de la Teoría Clásica de Campos a operadores en el proceso de cuantización. Vamos a explicar en algo más de detalle a qué nos referimos. En Teoría Clásica de Campos Relativista, un campo es una función $\phi:\mathbb{R}^4\to$

$\mathbb{C}^n$ que es extremal de un funcional integral $L(\phi) = \iiiint_{\mathbb{R}^4} \mathscr{L}(\phi, \ldots, D^\alpha \phi, \ldots) \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ llamado lagrangiano, donde $\mathscr{L}$ se conoce como densidad lagrangiana. Las variables de las que depende ϕ se denotarán t, x, y, z o x_0, x_1, x_2, x_3. Por ejemplo, en el caso de un campo escalar real libre, se tiene $\mathscr{L} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 - m^2\phi^2$, donde $m \in \mathbb{R}^+$ es la masa de la partícula asociada al campo. En general, la forma del lagrangiano vendrá dada mediante el Teorema de Noether como consecuencia de las simetrías de la interacción considerada. Puede hallarse ϕ explícitamente vía las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} - \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\right)} = 0$. El campo ϕ aporta información respecto a la posición de la partícula, mientras que el campo $\Pi := \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\right)}$ se corresponde con su momento lineal. Aquí finaliza la Teoría Clásica de Campos Relativista, que está perfectamente definida desde el punto de vista matemático. Las complicaciones surgen al intentar cuantizar la teoría. El procedimiento estándar en este caso, que es el que se enseña en el Grado de Física, es pasar a considerar $\phi(t, x, y, z)$ y $\Pi(t, x, y, z)$ como operadores sobre el espacio de Hilbert H de todos los posibles estados del sistema. Por analogía con la Mecánica Cuántica No Relativista, se imponen las relaciones de conmutación o anticonmutación $[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = \pm i\delta(\vec{x} - \vec{y})$ y $[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0$, donde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Nótese que éste no es un procedimiento riguroso.

Cómo llevar a cabo de forma rigurosa el proceso de cuantización es todavía un problema abierto en Física. Existen varios intentos de solución, como el de Wightman, que pasan por axiomatizar la teoría [15, 16]. Wightman postula la existencia de un espacio de Hilbert H cuyos rayos describen todos los posibles estados del sistema y sobre el cual actúa de forma unitaria una representación del grupo de espinores de Poincaré, lo que refleja las simetrías espacio-temporales. Además, asume la existencia de un único vector unitario $|0\rangle$ en H que es invariante bajo traslaciones espacio-temporales; dicho vector se denomina estado del vacío y representa la ausencia de partículas. En este contexto, un **campo cuántico** ϕ es una distribución temperada sobre $\mathbb{R}^4$ con valores en $\mathcal{L}(H)^n$ que satisface: 1) Todas las componentes de ϕ comparten dominio de definición D. 2) D es denso en H. 3) $|0\rangle \in D$ y D es invariante bajo la acción del grupo de espinores de Poincaré. 4) $\phi_i(\varphi)(D) \subseteq D$ $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ y $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. 5) Si los soportes de ϕ_i y ϕ_j están separados tipo espacio, es decir, si $(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 < 0$ $\forall (t_1, x_1, y_1, z_1) \in \mathrm{sop}\phi_i$ y $\forall (t_2, x_2, y_2, z_2) \in \mathrm{sop}\phi_j$, entonces $\phi_i(\varphi)$ y $\phi_j(\varphi)$ o bien conmutan o bien anticonmutan $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. 6) El conjunto D_0 de las combinaciones lineales finitas de los vectores de la forma $\phi_{i_1}(\varphi_1) \ldots \phi_{i_n}(\varphi_n)|0\rangle$, donde $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $(\varphi_j)_{j=1}^n \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ y $n \in \mathbb{N}$, es denso en H.

Como consecuencia de los axiomas de Wightman, pueden demostrarse rigurosamente el Teorema de Simetría CPT (carga, paridad e inversión temporal), la conexión espín-estadística y la imposibilidad de la comunicación supralumínica. Sin embargo, también se deduce el Teorema de Haag, que implica la inexistencia de la imagen de interacción, por lo que esta teoría no puede explicar rigurosamente el desarrollo perturbativo llevado a cabo mediante diagramas de Fenyman. Además, hasta la fecha no se ha podido construir ningún ejemplo que satisfaga los axiomas de Wightman en $\mathbb{R}^4$ (aunque sí en dimensiones menores). De hecho, constituye un problema del milenio demostrar que existen teorías de calibre (*gauge*) que satisfacen los axiomas de Wightman y que presentan, además, un salto de masa.

Bibliografía

[1] Bombal, F. (1991). "Los orígenes de la Teoría de Distribuciones". *Seminario de Historia de la Matemática I*, Universidad Complutense de Madrid, pp. 211-244.

[2] Dautray, R., Lions, J.-L. (1988). *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Volume 4: méthodes variationnelles.* París: Masson.

[3] Horváth, J. (1966). *Topological Vector Spaces and Distributions.* Palo Alto: Addison-Wesley Publishing Company.

[4] Kierat W., Sztaba U. (2003). *Distributions, Integral Transforms and Applications.* Londres: Taylor and Francis.

[5] Köthe, G. (1960). *Topologische Lineare Räume I.* Berlin: Springer-Verlag GmbH.

[6] Miana Sanz, P. J. (1997). *Operadores integrales generalizados en espacios de Sobolev periódicos.* Tesina. Universidad de Zaragoza.

[7] Rudin, W. (1974). *Functional Analysis.* Ámsterdam: North-Holland Publishing Company.

[8] Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis.* Singapore: McGraw-Hill Book Co.

[9] Schaefer, H. H. (1970). *Topological Vector Spaces.* Nueva York: Springer-Verlag.

[10] Treves, F. (1967). *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Nueva York: Academic Press.

[11] Distribution (mathematics). (2022). En: *Wikipedia, the free encyclopedia.* 12 de mayo de 2022. Disponible en `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Distribution_(mathematics)&oldid=1087397697`. [Consultado 22-06-2022]

[12] Green's function. (2022). En: *Wikipedia, the free encyclopedia.* 20 de mayo de 2022. Disponible en `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Green%27s_function&oldid=1088778212`. [Consultado 15-06-2022]

[13] operator-valued distribution. (2017). En: *nLab.* 20 de diciembre de 2017. Disponible en `https://ncatlab.org/nlab/show/operator-valued+distribution`. [Consultado 15-06-2022]

[14] Vector-Valued Distributions and Fourier Multipliers. (2003). En: *Universität Zürich.* Julio de 2003. Disponible en `https://user.math.uzh.ch/amann/files/distributions.pdf`. [Consultado 15-06-2022]

[15] Wightman axioms. (2018). En: *nLab.* 9 de diciembre de 2018. Disponible en `https://ncatlab.org/nlab/show/Wightman+axioms`. [Consultado 26-06-2022]

[16] Wightman axioms. (2022). En: *Wikipedia, the free encyclopedia.* 3 de mayo de 2022. Disponible en `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Wightman_axioms&oldid=1086038733`. [Consultado 26-06-2022]

A. Límites inductivos y proyectivos

El contenido de este apéndice no resulta en modo alguno necesario para completar o apoyar lo expuesto en la memoria. Si se añade es para indicar de qué manera la teoría de EVTs o ELCs incluye conceptos de límites inductivo y proyectivo de un carácter considerablemente más abstracto que los de límites inductivo y proyectivo contables estrictos. De hecho, tales nociones pueden formularse para categorías, donde se conocen con los nombres de límite directo e inverso. Para más información en el contexto de ELCs, consúltense [5] y [9].

Definición A.0.1. Sean A un conjunto dirigido y $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ $\mathbb{C}$-espacios vectoriales tales que para cada par $\alpha<\beta$ existe una aplicación lineal $h_{\beta\alpha}: E_\alpha \to E_\beta$ que satisface $h_{\gamma\beta}\circ h_{\beta\alpha} = h_{\gamma\alpha}\ \forall \alpha<\beta<\gamma$. Se llama **límite inductivo de** $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ respecto a las aplicaciones $h_{\beta\alpha}$, denotado $\varinjlim h_{\beta\alpha}(E_\alpha)$, al $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\oplus_{\alpha\in A}E_\alpha \Big/ H_0$, donde $H_0 = \langle x_\alpha - h_{\beta\alpha}(x_\alpha) : x_\alpha \in E_\alpha,\ \alpha,\beta\in A,\ \alpha<\beta\rangle$ y $\oplus_{\alpha\in A}E_\alpha$ denota la suma directa de los $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Si los espacios $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ son ELCs con topologías $(\tau_\alpha)_{\alpha\in A}$, las aplicaciones $h_{\beta\alpha}$ son continuas y al espacio $\varinjlim h_{\beta\alpha}(E_\alpha)$ se le asigna la topología localmente convexa más fina que hace que las inclusiones $K_\alpha : E_\alpha \to \oplus_{\alpha\in A}E_\alpha \,/\, H_0$ sean continuas, entonces $\varinjlim h_{\beta\alpha}(E_\alpha)$ se dice **límite inductivo topológico** de $h_{\beta\alpha}(E_\alpha)$. La existencia de dicha topología viene asegurada por el Lema de Zorn puesto que en el caso de la topología trivial todas las $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ son continuas.

Observación. Si $E=\sum_{\alpha\in A}E_\alpha$, con $E_\alpha\subseteq E_\beta\ \forall\alpha<\beta$, entonces $E=\varinjlim I_{\beta\alpha}(E_\alpha)$ algebraicamente, donde $I_{\beta\alpha}: E_\alpha\to E_\beta$ son las inclusiones canónicas, ya que $H_0=\{0\}$. En este caso, $\varinjlim I_{\beta\alpha}(E_\alpha)$ también se denota $\varinjlim E_\alpha$. Si, además, $\tau_\beta|_{E_\alpha}$ es más gruesa que $\tau_\alpha\ \forall\alpha<\beta$, entonces la igualdad se da también en el sentido topológico.

Definición A.0.2. Un límite inductivo $E=\sum_{\alpha\in A}E_a=\varinjlim E_\alpha$ como el anterior se dice **estricto** si $E_\alpha\subseteq E_\beta$ y $\tau_\beta|_{E_\alpha}=\tau_\alpha\ \forall\alpha<\beta$.

Definición A.0.3. Sean A un conjunto dirigido y $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ $\mathbb{C}$-espacios vectoriales tales que para cada par $\alpha<\beta$ existe una aplicación lineal $g_{\alpha\beta}: E_\beta\to E_\alpha$ que satisface $g_{\alpha\beta}\circ g_{\beta\gamma}=g_{\alpha\gamma}\ \forall\alpha<\beta<\gamma$. Se llama **límite proyectivo de los espacios** E_α respecto a las aplicaciones $g_{\alpha\beta}$, denotado $\varprojlim g_{\alpha\beta}(E_\beta)$, al $\mathbb{C}$-subespacio vectorial E de $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$ dado por $\{g_{\alpha\beta}(x_\beta): x_\beta\in F_\beta,\ \alpha,\beta\in A,\ \alpha<\beta\}$.

Si los espacios $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ son ELCs con topologías $(\tau_\alpha)_{\alpha\in A}$, las aplicaciones $g_{\alpha\beta}$ son todas continuas y al espacio $\varprojlim g_{\alpha\beta}(E_\beta)$ se le asigna la topología inducida en él por $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$, entonces $\varprojlim g_{\alpha\beta}(E_\beta)$ se dice **límite proyectivo topológico** de $g_{\alpha\beta}(E_\beta)$.

Lema A.0.4. *Sea (E,τ) un ELC y $H\subseteq E$ un subespacio lineal cerrado. Entonces, $(E/H)'\cong H^\perp$, donde $H^\perp=\{\Lambda\in E' : \Lambda(x)=0\ \forall x\in H\}$.*

Demostración. Basta ver que la inclusión canónica de $(E/H)'$ en E' es un isomorfismo algebraico de $(E/H)'$ a $H^\perp$. Dicha inclusión satisface $\iota\circ\Lambda=\Lambda\circ q\ \forall\Lambda\in(E/H)'$, donde q es la proyección de E a E/H. Sea $\Lambda\in(E/H)'$. Entonces, es claro que $\iota(\Lambda)|_H=0$, luego $\Lambda\in H^\perp$. Recíprocamente, si $\Gamma\in H^\perp$, la ecuación $\Lambda(q(x))=\Gamma(x)\ \forall x\in E$ define un funcional lineal y continuo $\Lambda: E/H\to\mathbb{C}$. $\mathbb{Q.E.D.}$

Teorema A.0.5. *Sean A un conjunto dirigido, $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ ELCs y $E = \varinjlim h_{\beta\alpha}(E_\alpha)$. Entonces, $E' = \varprojlim {}^t h_{\beta\alpha}\left(E'_\beta\right)$ como espacios vectoriales.*

Demostración. Por A.0.1, $\forall \alpha < \beta < \gamma$ se tiene $h_{\gamma\beta} \circ h_{\beta\alpha} = h_{\gamma\alpha}$. Tomando traspuestas, se obtiene ${}^t h_{\beta\alpha} \circ {}^t h_{\gamma\beta} = {}^t h_{\gamma\alpha}$. A causa de A.0.1 y 2.2.7, se deduce que las ${}^t h_{\beta\alpha}$ son continuas. De esta forma, se cumplen las hipótesis de A.0.3, luego $\varprojlim {}^t h_{\beta\alpha}\left(E'_\beta\right)$ existe. Recuérdese que, por A.0.1, $E = {\bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha}\Big/{H_0}$, donde $H_0 = \langle x_\alpha - h_{\beta\alpha}(x_\alpha) : x_\alpha \in E_\alpha,\ \alpha, \beta \in A,\ \alpha < \beta\rangle$. Por A.0.4, puede identificarse E' con $H_0^\perp \subseteq \prod_{\alpha\in A} E'_\alpha$. Sea $\Lambda = (\Lambda_\alpha)_{\alpha\in A} \in H_0^\perp$. Entonces,

$$0 = \Lambda\left(x_\alpha - h_{\beta\alpha}(x_\alpha)\right) = \Lambda_\alpha(x_\alpha) - \Lambda_\beta\left(h_{\beta\alpha}(x_\alpha)\right) = \left(\Lambda_\alpha - {}^t h_{\beta\alpha} \circ \Lambda_\beta\right) x_\alpha = 0 \quad \forall \alpha < \beta,\ \forall x_\alpha \in E_\alpha.$$

Por consiguiente, $\Lambda_\alpha = {}^t h_{\beta\alpha} \circ \Lambda_\beta\ \forall \alpha < \beta$, luego por A.0.3, $H_0^\perp = \varprojlim {}^t h_{\beta\alpha}\left(E'_\beta\right)$. $\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$