Espacios de Hardy y Bergman en el disco

Manuel Fernández Martín
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores:
Luciano Abadías Ullod
Pedro José Miana Sanz

2022

Summary

This paper is a study of the Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS) and two of the most important analytic function spaces, which are also RKHS, Hardy's and Bergman's spaces. In both cases, this study is going to be carried out on the unit disk $\mathbb{D}$.

Hardy space was introduced by Frigyes Riesz, after Godfrey Harold Hardy, who had used it before. The Hardy space theory was widely studied in the mid-20th century, in particular by the mathematicians Helson and Lowdenslager, and it is still being studied today. On the other hand, the Bergman space was introduced by Stefan Bergman and it is very useful in complex analysis. The study of this last space is subsequent to the study of Hardy's space, specifically towards the end of the 20th century. Since once the theory of Hardy's space was known, it was tried to be implemented in Bergman's space, with a terrible result, so it had to be started from scratch. However, a lot of research has been done since then and nowadays there is a great deal of knowledge about this space.

In the first chapter of the work, an introduction will be made, based on definitions, lemmas, propositions and theorems that must be known in order to introduce the RKHS and their reproductive kernels. A series of basic examples are also presented. The first is that of $\mathbb{C}^n$ as an RKHS, in which it is seen that it fulfils the properties and its reproductive kernel is given. The second is a counterexample, in which it is observed that the linear evaluation functional of a set is not always bounded. Finally, examples from function theory, Hardy's and Bergman's spaces, are also given. In these examples, it is shown that both the Hardy and the Bergman spaces are RKHS and therefore, their corresponding reproductive kernels can be given.

The second chapter is divided into two sections. The first one is a collection of properties of the RKHS. The concept of the Parseval frame is introduced, which extends that of the orthonormal basis, and a very important result is proved, the Papadakis theorem. This theorem says that from a Parseval frame for an RKHS one can construct its reproductive kernel as a power series. Also, it allows one to identify a Parseval frame for the RKHS, since any series that produces the reproductive kernel as a power series is a Parseval frame. The second section is a characterisation of the reproductive kernels, introduces the kernel function and proves a fundamental result, Moore's theorem, in which it is proved that if $K : X \times X \to \mathbb{C}$ is a kernel function there exists an RKHS of functions on X such that K is the reproductive kernel of that RKHS.

The last chapter focuses on the Hardy space on the unit disk. First, the composition operators C_φ in Hardy space are studied, for an application C_φ which must satisfy some conditions, and through the Littlewood Subordination Principle theorem it is seen that, with certain restrictions, they preserve Hardy space continuously. Finally, the adjoint of a composition operator and the conditions under which they are composition operators in Hardy space are studied.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se recuerdan algunos conceptos y resultados conocidos que serán utilizados a lo largo del trabajo. Se van a introducir también las principales definiciones sobre los espacios de Hilbert de núcleo reproductivo, se presentará alguna de sus principales propiedades y se pondrá algún ejemplo sobre ellos. Se va a usar $\mathbb{F}$ indistintamente para referirse a los números reales $\mathbb{R}$, o a los números complejos, $\mathbb{C}$.

1.1. Definiciones y teoremas

Definición 1.1. Sea V un conjunto no vacío. V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, si tiene definidas dos operaciones internas (suma y producto) que verifican las siguientes propiedades:

- Suma: $\begin{aligned} + : V \times V &\to V, \\ (u,v) &\mapsto u+v. \end{aligned}$
  - Asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w), \quad \forall\, u,v,w \in V.$
  - Conmutativa: $u+v = v+u, \quad \forall\, u,v \in V.$
  - Elemento neutro: $\exists\, e \in V$ tal que $u+e = u, \quad \forall\, u \in V.$
  - Elemento opuesto: $\forall\, u \in V,\ \exists\, -u \in V$ tal que $u+(-u) = 0.$
- Producto: $\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times V &\to V, \\ (a,u) &\mapsto a \cdot u. \end{aligned}$
  - Propiedad distributiva respecto de la suma vectorial: $a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v, \quad \forall a \in \mathbb{F}, u,v \in V.$
  - Propiedad distributiva respecto de la suma escalar: $(t+a) \cdot u = t \cdot u + a \cdot u, \quad \forall a,t \in \mathbb{F}, u \in V.$
  - Propiedad asociativa: $(a \cdot t) \cdot u = s \cdot (t \cdot u), \quad \forall a,t \in \mathbb{F}, u \in V.$
  - Elemento neutro: $\exists\, e \in V$ tal que $e \cdot u = u, \quad \forall\, u \in V.$

Definición 1.2. Sea X un conjunto. Se denota $\mathscr{F}(X,\mathbb{F})$ al conjunto de funciones de X en $\mathbb{F}$ con las operaciones suma y multiplicación escalar.

Definición 1.3. Sea H un espacio vectorial complejo. Una función $f : H \times H \to \mathbb{C}$ se llama forma sesquilineal si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo, esto es, para cada a,b,c en H y λ,μ en $\mathbb{C}$:

$$f(\lambda a+\mu b,c)=\lambda f(a,c)+\mu f(b,c),$$
$$f(a,\lambda b+\mu c)=\bar{\lambda} f(a,b)+\bar{\mu} f(a,c).$$

Definición 1.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f:\Omega \to \mathbb{C}$. Entonces f es holomorfa en Ω si f es diferenciable en todo $z_0 \in \Omega$.

Definición 1.5. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío y $f:\Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que f es analítica en Ω si para todo $c \in \Omega$ existe una serie de potencias centrada en c, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_c}(z-c)^n$ con radio de convergencia $R_c > 0$ y algún $0 < \delta_c < R_c$ tal que,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_c}(z-c)^n, \quad \forall z \in D(c,\delta_c).$$

Observación: Sea $f:\Omega \to \mathbb{C}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío. Entonces f es una función analítica en Ω si y sólo si f es holomorfa en Ω. [3, Proposición pág.37 y Teorema pág.96].

Definición 1.6. Si $x,y \in V$, con V espacio vectorial se define el producto escalar o producto interno de x e y como la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{F}, \\ (x,y) &\longrightarrow a=\langle x,y \rangle. \end{aligned}$$

Que cumple las siguientes propiedades:

- Linealidad por la izquierda: $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ y linealidad conjugada por la derecha: $\langle x,ay+bz\rangle = \bar{a}\langle x,y\rangle + \bar{b}\langle x,z\rangle$.
- Hermiticidad: $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.
- Definida positiva: $\langle x,x\rangle \geq 0$ y $\langle x,x\rangle = 0$ si y sólo si $x=0$.

Donde $x,y,z \in V$, $a,b \in \mathbb{F}$ y $\bar{c}$ es el conjugado del escalar complejo c.

Definición 1.7. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\|\cdot\| : X \to [0,+\infty)$ es una norma sobre X si:

- Sea $x \in X$, entonces $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in X.$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x,y \in X.$

Al conjunto $(X,\|\cdot\|)$ se dice espacio normado (sobre $\mathbb{F}$).

Definición 1.8. Dado un conjunto X, una distancia sobre X es una función $d: X \times X \to [0,+\infty)$ cumpliendo que $\forall x,y,z \in X$:

- $d(x,y) \geq 0.$
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
- $d(x,y) = d(y,x).$

- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

El par (X,d) se llama espacio métrico.

Observación: Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico con la distancia
$d(x,y) := \|y-x\| \quad (x,y \in X)$.

Definición 1.9. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para todo $m,n > N$, $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

Definición 1.10. Un espacio métrico (X,d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Definición 1.11. Un espacio métrico $(\hat{X},\rho)$ es la complección de un espacio métrico (X,d), si $\hat{X}$ es completo y X es isométrico a un subconjunto denso de $\hat{X}$.

Teorema 1.12. *Sea* (Y,d) *un espacio métrico y* X *un conjunto.* (Y,d) *completo* $\Rightarrow$ $(\mathscr{A}(X,Y),d_\infty)$ *completo, donde* $\mathscr{A}(X,Y)$ *es el espacio de las funciones acotadas de* X *en* Y, $d_\infty(f,g) = sup\{|f(x)-g(x)| : x \in X\}$ *y* $B_\infty(g,r) = \{f,g \in \mathscr{A}(X,Y) : d_\infty(f,g) < r\}$.

Demostración. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathscr{A}(X,Y),d_\infty)$, es decir, $\forall n,m \in \mathbb{N}$, existe $N > 0$ tal que si $m,n > N$, $d_\infty(f_n,f_m) < \varepsilon$. Entonces, para cada $x \in X$, la sucesión $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en (Y,d), luego para todo $x \in X$, $d(f_n(x),f_m(x)) < \varepsilon$.

Como hemos asumido que (Y,d) es completo, para cada $x \in X$, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $f(x)$ en Y. Así, nos podemos definir una función $f : X \to Y$ tal que a cada $x \in X$, le asocia el límite de $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$.

Veamos ahora que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $\mathscr{A}(X,Y)$. Por ser la sucesión de Cauchy, como se ha dicho al principio, $d_\infty(f_n,f_m) < \varepsilon$. En particular, podemos tomar $n > N$ fijo y $p \in \mathbb{N}$. Se cumple que $d_\infty(f_n,f_{n+p}) < \varepsilon$ y $\forall x \in X$,

$$d(f_n(x),f_{n+p}(x)) < \varepsilon.$$

Tomemos ahora los límites cuando $p \to \infty$,

$$d(f_n(x),f_{n+p}(x)) \to d(f_n(x),f(x)).$$

Es decir, $d(f_n(x),f(x)) < \varepsilon \Rightarrow d_\infty(f_n,f) < \varepsilon$ y si $n > N$, $d_\infty(f_n,f) < \varepsilon$ implica que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f.

De lo anterior vamos a obtener también que $f \in \mathscr{A}(X,Y)$. En efecto, como $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}(X,Y)$, existe $M > 0$ tal que $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_\infty(g,M)$ para alguna función $g \in \mathscr{A}(X,Y)$, es decir, $d_\infty(g,f_n) < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f, existe un n_1 tal que si $n > n_1$, entonces $d_\infty(f_n,f) < 1$. Por tanto;

$$d_\infty(g,f) \leq d_\infty(g,f_n) + d_\infty(f_n,f) < M+1.$$

Así obtenemos que $f \in \mathscr{A}(X,Y)$.

□

Teorema 1.13 (Complección). *Todo espacio métrico* (X,d) *posee complección.*

Demostración. En primer lugar, notar que sabemos que $\mathscr{A}(X,\mathbb{R})$ es completo para cualquier conjunto X por el teorema 1.12, ya que $\mathbb{R}$ es un espacio completo.

Fijamos un punto $x_0 \in X$. Dado $a \in X$, definamos $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$\phi_a(x) = d(x,a) - d(x,x_0).$$

Podemos ver que ϕ_a está acotada, ya que de las siguientes desigualdades,

$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a),$$
$$d(x,b) \leq d(x,a) + d(a,b),$$

se deduce que,

$$|d(x,a) - d(x,b)| \leq d(a,b).$$

Poniendo $b = x_0$, concluimos que $|\phi_a(x)| \leq d(a,x_0)$, para todo x.

Definamos ahora:

$$\Phi : X \to \mathscr{A}(X,\mathbb{R}),$$
$$a \to \Phi(a) = \phi_a.$$

Vamos a probar que Φ es una isometría de (X,d) en el espacio métrico completo $(\mathscr{A}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$. Es decir, vamos a probar que, para todo par de puntos $a,b \in X$,

$$d_\infty(\phi_a, \phi_b) = d(a,b).$$

Por definición,

$$\begin{aligned} d_\infty(\phi_a, \phi_b) &= \sup\{|\phi_a(x) - \phi_b(x)| : x \in X\} \\ &= \sup\{|d(x,a) - d(x,b)| : x \in X\}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$d_\infty(\phi_a, \phi_b) \leq d(a,b).$$

Por otro lado, si $x = a$,

$$d_\infty(\phi_a, \phi_b) = \sup\{|d(x,a) - d(x,b)|\} = \sup\{|d(a,b)|\} \geq d(a,b).$$

Por lo tanto,

$$d_\infty(\phi_a, \phi_b) = d(a,b).$$

Así, X es isométrico a $\Phi(X)$, que es denso en $\overline{\Phi(X)}$, y $\left(\overline{\Phi(X)}, d_\infty\right)$ es completo por ser $\overline{\Phi(X)}$ un subconjunto cerrado de $\mathscr{A}(X,\mathbb{R})$.

Concluimos entonces que $\left(\overline{\Phi(X)}, d_\infty\right)$ es la complección de (X,d).

$\square$

Definición 1.14. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial dotado de producto escalar, que es completo para la norma asociada a su producto escalar. Se considera en lo siguiente espacios de Hilbert sobre $\mathbb{F}$.

Teorema 1.15 (De la proyección ortogonal). *[2, Teorema 1.5.7] . Si H es un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H, $H = M \oplus M^\perp$. Más aún, si $H = M \oplus M^\perp$ se verifica que si $a \in M$, $a = P_0(a)$, siendo P_0 la proyección de H sobre M.*

Definición 1.16. Sea $\{e_s : s \in S\}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H. Para todo $h \in H$,

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} |\langle h, e_s\rangle|^2,$$

$$h = \sum_{s\in S} \langle h, e_s\rangle\, e_s.$$

A estas identidades se les conoce como identidades de Parseval.

Ahora, con todos estos conceptos recordados, estamos en disposición de introducir los RKHS y sus núcleos reproductivos.

Definición 1.17. Sea X un conjunto. Se llama espacio de Hilbert de núcleo reproductivo sobre X (RKHS) a un subconjunto $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}(X, \mathbb{F})$ si:

1. $\mathscr{H}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{F}(X, \mathbb{F})$.
2. $\mathscr{H}$ está dotado de un producto interno, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respecto el cual $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert.
3. Para todo $x \in X$ el funcional de evaluación lineal, $E_x : \mathscr{H} \to \mathbb{F}$, definido por $E_x(f) = f(x)$, está acotado.

Observación: Por el teorema de F.Riesz–M.Fréchet [2, Teorema 1.6.1], para cada $x \in X$, existe un único vector $k_x \in \mathscr{H}$ tal que para todo $f \in \mathscr{H}$, $E_x(f) = f(x) = \langle f, k_x \rangle$.

Definición 1.18. La función k_x es el núcleo reproductivo en el punto x. La función $K : X \times X \to \mathbb{F}$ dada por $K(x,y) = k_y(x)$ es el núcleo reproductivo de $\mathscr{H}$.

Observación: Como $K(x,y) = k_y(x) = \langle k_y, k_x \rangle = \overline{\langle k_x, k_y \rangle} = \overline{K(y,x)}$. Para el caso complejo, $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ y para el caso real, $K(x,y) = K(y,x)$.

1.2. Ejemplos básicos

En esta sección se van a tratar una serie de ejemplos básicos. Primero, el caso de $\mathbb{C}^n$ como RKHS y luego un contraejemplo, en el cual se puede observar que el funcional de evaluación no siempre está acotado.

1.2.1. $\mathbb{C}^n$ como RKHS

Sea $\mathbb{C}^n$ el espacio vectorial de las n-tuplas complejas. Para $v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ...w_n)$, el producto escalar al que nos referimos cuando hablamos de $\mathbb{C}^n$ como espacio de Hilbert es:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}.$$

Si tomamos $X = \{1, ..., n\}$ podemos pensar en una n-tupla como una función v: $X \to \mathbb{C}$ dada por $v(j) = v_j$. Así, $\mathbb{C}^n$ se convierte en el espacio vectorial de todas las funciones de X. Tomamos $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ como la base ortonormal canónica de $\mathbb{C}^n$, es decir, $e_j(i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Entonces, para todo $v \in \mathbb{C}^n$, se tiene que $v(j) = v_j = \langle v, e_j \rangle$.

Para ver que $\mathbb{C}^n$ es un RKHS, nos faltaría ver que el funcional de evaluación está acotado. En este caso tenemos que:

$$\begin{aligned} E_x : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ v &\longrightarrow v(j). \end{aligned}$$

Y podemos ver que está acotado, ya que, $|E_x(v)| = |v(j)| \leq \sup_{j \in \{1,...,n\}} |v(j)| < \infty$. Luego, en efecto, $\mathbb{C}^n$ es un RKHS.

Definición 1.19. Cuando se considera $\mathbb{C}^n$ como un espacio de funciones, el conjunto de las funciones que son los núcleos de reproducción para los puntos de evaluación es la base canónica de $\mathbb{C}^n$. El núcleo de reproducción para $\mathbb{C}^n$ es:

$$K(i,j) = \langle e_j, e_i \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Definición 1.20. Para cualquier conjunto X, se define el siguiente conjunto:

$$\ell^2(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} : \sum_{x \in X} |f(x)|^2 < +\infty \right\}.$$

Más generalmente, dados $f, g \in \ell^2(X)$, se define

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in X} f(x)\overline{g(x)}.$$

Así $\ell^2(X)$ se convierte en un espacio de Hilbert de funciones en X. Si para un $y \in X$ fijo, se toma $e_y \in \ell^2(X)$ denotando la función dada por $e_y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{array} \right.$, se tiene que $\{e_y\}_{y \in X}$ es una base ortonormal de $\ell^2(X)$ y que $\langle f, e_y \rangle = f(y)$, luego estas funciones son también núcleos reproductivos y como antes:

$$K(x,y) = \langle e_y, e_x \rangle = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

1.2.2. Un contraejemplo

Consideramos $C[0,1]$, que es el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$. Definimos la norma usual en este espacio $\|f\|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$ y lo completamos para conseguir el espacio de Hilbert $L^2[0,1] = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{F} : \left(\int_0^1 |f|^2 d\mu \right)^{1/2} < \infty \right\}$. Para cada $x \in [0,1]$, toda función de $C[0,1]$ tiene un valor, es decir, está bien definida. Pero, ¿Es posible que se extienda para dar un funcional de evaluación acotado en $L^2[0,1]$?

La respuesta es no. Sea $0 < x < 1$ fijo. Consideramos la siguiente sucesión:

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{x}\right)^n, & 0 \leq t \leq x, \\ \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^n, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

Esta sucesión está en $C[0,1]$ y satisface que $f_n(x) = 1$ para todo n y que $\lim_{n \to \infty} \|f_n\|_{L^2[0,1]} = 0$.

Podemos ver que el funcional de evaluación no está acotado para cada $0 < x < 1$. En efecto, la definición de funcional acotado es $|E_x f_n| \leq C \|f_n\|_{L^2[0,1]}$, con C una constante distinta de cero, y sabemos que $|E_x f_n|^2 = |f_n(x)|^2 = 1$ y $\|f_n\|^2_{L^2[0,1]} \to 0$ cuando n tiende a infinito, luego $1 \leq 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, como el funcional de evaluación no está acotado para $x \in [0,1], C[0,1]$ no es un RKHS en $[0,1]$.

1.3. Ejemplos de teoría de funciones

Ahora se considerarán algunos ejemplos de RKHS que surgen en el análisis complejo, los espacios de Hardy y de Bergman. Este último recibe ese nombre en honor al matemático Stefan Bergman, que fue quien originó la teoría de los espacios RKHS. Ambos espacios serán estudiados en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ del plano complejo.

1.3.1. El espacio de Hardy en el disco unidad $H^2(\mathbb{D})$

Este espacio juega un papel principal en la teoría de funciones, en la teoría de operadores y en la teoría de procesos estocásticos.

Para construir $H^2(\mathbb{D})$, se considera la siguiente serie de potencias compleja:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ tal que } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty.$$

Con las definiciones habituales de suma y producto por escalares, el conjunto de todas las series de potencias forma un espacio vectorial. Dada otra serie, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ se define el producto interno como:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Con esta definición de producto interno, se tiene que:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Para el siguiente teorema es necesario recordar que $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup 0$.

Teorema 1.21. *$H^2(\mathbb{D})$ es un RKHS, con núcleo de reproducción $K(z,w) = \frac{1}{1-\bar{w}z}$.*

Demostración. En primer lugar, nos definimos la aplicación $L : H^2(\mathbb{D}) \to \ell^2(\mathbb{Z}^+)$ dada por $L(f) = (a_0, a_1, \ldots)$ que es un isomorfismo que preserva el producto interno. Es decir, $H^2(\mathbb{D})$ se puede identificar con el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ y así cumplir (ii) de la definición de RKHS.

Vamos a ver que toda serie en $H^2(\mathbb{D})$ converge. Dado $\lambda \in \mathbb{D}$, se tiene:

$$\begin{aligned} |E_\lambda(f)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\lambda|^n \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \right)^{1/2} = \|f\| \cdot \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \quad (f \in H^2). \end{aligned}$$

Así, podemos observar que cada serie define una función en $\mathbb{D}$. Ahora queremos ver si dos series que definen la misma función en $\mathbb{D}$ son la misma serie (sus coeficientes son iguales). Para ello tenemos que recordar que las funciones que definen las series de potencias son infinitamente diferenciables en su radio de convergencia. Si derivamos n veces la función f y evaluamos en 0, obtenemos $(n!)a_n$. Así si dos series son iguales como funciones en $\mathbb{D}$, son la misma serie de potencias. Además, como las operaciones del espacio vectorial en series de potencias coinciden claramente con las operaciones del espacio vectorial como funciones en $\mathbb{D}$, (i) se cumple.

Además E_λ está acotado, ya que $\|E_\lambda\| \leq \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}$. Por lo tanto, se cumplen todas las condiciones y $H^2(\mathbb{D})$ es un RKHS sobre $\mathbb{D}$.

Ahora vamos a calcular la función núcleo para $H^2(\mathbb{D})$. Dado $w \in H^2(\mathbb{D})$, sea $k_w \in H^2(\mathbb{D})$ denotando el núcleo de la función en w. Como $k_w \in H^2(\mathbb{D})$, podemos escribir, $k_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ y obtenemos

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \langle f, k_w \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Como cada $z^k \in H^2(\mathbb{D})$, tomamos $b_n = \overline{w^n}$. Así,

$$k_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w^n} z^n,$$

pertenece a $H^2(\mathbb{D})$ y por lo tanto,

$$K(z,w) = k_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w^n} z^n = \frac{1}{1-\bar{w}z}.$$

Esta función, que es la función del núcleo del espacio de Hardy se llama el núcleo de Szego en el disco.

$\square$

1.3.2. Espacio de Bergman en el disco unidad $B^2(\mathbb{D})$

Stefan Bergman introdujo el concepto de los núcleos reproductivos de los espacios de Hilbert y los usó para estudiar varios problemas dentro del análisis complejo.

Definición 1.22. Se define $B^2(\mathbb{D})$ como:

$$B^2(\mathbb{D}) = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica en } \mathbb{D} \text{ y } \iint_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^2 dxdy < +\infty \right\}.$$

Y su producto interno:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} f(x+iy)\overline{g(x+iy)} dxdy.$$

Observación: Si $f \in B^2(\mathbb{D})$ es distinta de 0, como f es analítica, f es continua, por lo tanto existe un abierto conexo donde $f \neq 0$, es decir, $\langle f, f \rangle > 0$ y así, $B^2(\mathbb{D})$ es un espacio con producto interno.

Ahora, para ver que $B^2(\mathbb{D})$ es un RKHS tenemos que introducir nuevos conceptos.

Definición 1.23. Sean $f_n, f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Se dice que f_n converge a f uniformemente en $\mathbb{D}$ si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0, |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Equivalentemente,

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Notar que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual en cada punto de $\mathbb{D}$.

Se dice que f_n converge a f uniformemente sobre compactos si,

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_K = 0, \quad \forall K \text{ compacto de } \mathbb{D}.$$

Ahora se va a recordar un teorema muy importante del análisis, que va a ser útil para poder demostrar que $B^2(\mathbb{D})$ es un RKHS.

Teorema 1.24 (Weierstrass). *Sea $H(\mathbb{D})$ el espacio formado por las funciones $f : \mathbb{D} \longmapsto \mathbb{C}$ holomorfas. Si $f_n \in H(\mathbb{D})$ y $f \in C(\mathbb{D})$ tal que $f_n \longmapsto f$ uniformemente sobre compactos, entonces $f \in H(\mathbb{D})$.*

Demostración. Vamos a usar el Teorema de Morera visto en variable compleja [3, Pág.99]. Tomamos un triángulo T contenido en el interior de un disco $D \subset \mathbb{D}$. La sucesión f_n converge uniformemente a f sobre T, ya que T es compacto. Por tanto, por el teorema de Cauchy, teniendo en cuenta que f_n es holomorfa, $\int_T f = \text{lím}_{n\to\infty} \int_T f_n = 0$. Obtenemos que f debe ser holomorfa en cada disco $D \subset \mathbb{D}$, por lo que f es holomorfa en $\mathbb{D}$.

□

Teorema 1.25. *$B^2(\mathbb{D})$ es un RKHS en G con núcleo $\frac{1}{(1-z\bar{w})^2}$.*

Demostración. Fijamos w $\in \mathbb{D}$ y elegimos $R > 0$ tal que $B(w;R)$ está contenido en $\mathbb{D}$. Así, por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(w,R)} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Nos definimos ahora el siguiente camino:

$$\begin{aligned} &\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \\ &\theta \to w + re^{i\theta}. \end{aligned}$$

Esta función tiene derivada $\gamma'(\theta) = rie^{i\theta}$. Parametrizando, nos queda que,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(w+re^{i\theta}\right)}{w+re^{i\theta}-w} \cdot rie^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(w+re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Aplicando esto, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi f(w) r dr \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left(r \int_0^{2\pi} f\left(w+re^{i\theta}\right) d\theta \right) dr \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B(w;R)} f\left(w+re^{i\theta}\right) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B(w,R)} f(x+iy) dx dy. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy Schwarz se sigue que:

$$|f(w)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \|f\| \left(\iint_{B(w;R)} dx dy \right)^{1/2} = \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \|f\|.$$

Esto prueba que para cualquier $w \in \mathbb{D}$ el funcional de evaluación está acotado, luego si probamos que $B^2(\mathbb{D})$ es completo con su norma, ya tendremos que $B^2(\mathbb{D})$ es un RKHS.

Para demostrar esto, tomamos $(f_n) \subseteq B^2(\mathbb{D})$ una sucesión de Cauchy. Para cualquier $w \in \mathbb{D}$ tomamos R como arriba y elegimos $0 < \delta < d\left(B(w;R), \mathbb{D}^c\right)$ donde $d(\cdot,\cdot)$ denota la distancia entre dos conjuntos. Así, para cualquier $z \in B(w,R)$, se tiene que $B(z,\delta) \subseteq \mathbb{D}$. Por la estimación anterior,

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}}\|f_n - f_m\|.$$

Es decir, $f_n(z)$ es uniformemente convergente en cada bola cerrada contenida en $\mathbb{D}$, lo que implica que $f_n(z)$ es convergente puntualmente en cada bola cerrada contenida en $\mathbb{D}$. Sea así $f(z) = \lim_n f_n(z)$ el limite puntual de f_n. Como $f_n \in B^2(\mathbb{D})$, $f_n \in H(\mathbb{D})$, por lo tanto $f_n \in C(\mathbb{D})$ y como $f(z) = \lim_n f_n(z)$, por propiedades de análisis funcional, f es continua en $\mathbb{D}$. Así, ya tenemos todas las condiciones para aplicar el Teorema de Weierstrass , Teorema 1.24, y concluir que f es analítica en $\mathbb{D}$.

Como $B^2(\mathbb{D}) \subseteq L^2(\mathbb{D})$ y $L^2(\mathbb{D})$ es completo, existe $h \in L^2(\mathbb{D})$ tal que $\|h - f_n\|_{L^2(\mathbb{D})} \to 0$. Es más, podemos elegir una subsucesión f_{n_k} tal que $h(z) = \lim_k f_{n_k}(z)$ c.t.p, pero esto implica que $h(z) = f(z)$ c.t.p y así, $\|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{D})} \to 0$. Luego, $f \in B^2(\mathbb{D})$ y $B^2(\mathbb{D})$ es completo.

Veamos ahora cual es el núcleo de $B^2(\mathbb{D})$. Notar que el producto interno de dos monomios holomorfos z^m y z^n es:

$$\langle z^m, z^n\rangle = \frac{1}{\pi}\int_D z^m \cdot \bar{z}^n dxdy = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(re^{i\theta}\right)^m \cdot \left(re^{-i\theta}\right)^n r d\theta dr = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{m+n+1} \cdot e^{i\theta(m-n)} d\theta dr$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{1}{n+1}, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Así, si $|z| < 1$ y $|w| < 1$ el núcleo reproductivo de Bergman es:

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot z^n \cdot \bar{w}^n = \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2}.$$

□

Capítulo 2

Resultados fundamentales

Sea X un conjunto y $\mathscr{H}$ un RKHS de X con núcleo K. El objetivo de este capítulo es ver que, a través de algunos resultados, se puede determinar $\mathscr{H}$ a través de K. Este capítulo está basado principalmente en la exposición de [5].

2.1. Estructura del espacio de Hilbert

Se va a introducir el concepto de marco de Parseval y a mostrar cómo, dado un marco de Parseval para un RKHS, se puede construir su núcleo como una serie de potencias. Por el contrario, cualquier serie que produzca el núcleo de esta manera debe ser un marco de Parseval para el RKHS.

Proposición 2.1. *Dado $\mathscr{H}$ un RKHS en X con núcleo K. El espacio generado por $k_y(\cdot) = K(\cdot, y)$ es denso en $\mathscr{H}$.*

Demostración. Una función $f \in \mathscr{H}$ es ortogonal a $\overline{\{k_y : y \in X\}}$ si y sólo si $\langle f, k_y \rangle = f(y) = 0$ para todo $y \in X$. En efecto, si f es ortogonal a $\overline{\{k_y : y \in X\}}$, es obvio que $\langle f, k_y \rangle = f(y) = 0$. Veamos ahora que si $\langle f, k_y \rangle = f(y) = 0$, f es ortogonal a $\overline{\{k_y : y \in X\}}$. Sea $g \in \overline{\{k_y : y \in X\}}$, entonces $g = \lim_n (g_n)$ en la norma de $\mathscr{H}$, donde $g_n = \sum c_n k_{y_n}$, esto implica que $\|g - g_n\| \to 0$. Además, como $|\langle f, g \rangle - \langle f, g_n \rangle| = |\langle f, g - g_n \rangle| \leq \|f\| \|g - g_n\| \to 0$, se deduce que $\langle f, g \rangle = \lim_n \langle f, g_n \rangle = 0$.

Por el teorema 1.15, sabemos que si H es un espacio de Hilbert, $M \subset H$ y M cerrado, $H = M \oplus M^{\perp}$. En nuestro caso, como el ortogonal a $\overline{\{k_y : y \in X\}}$ es 0, nos queda que $\mathscr{H} = \overline{\{k_y : y \in X\}}$ y así queda demostrado el teorema.

□

Lema 2.2. *Sea $\mathscr{H}$ un RKHS en X y $f_n \subset \mathscr{H}$. Si $\lim_n \|f_n - f\| = 0$, entonces $f(x) = \lim_n f_n(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Notemos que $|f_n(x) - f(x)| = |\langle f_n - f, k_x \rangle| \leq \|f_n - f\| \|k_x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

Proposición 2.3. *Dados $\mathscr{H}_i$, $i = 1, 2$ dos RKHS en X con núcleos K_i, $i = 1, 2$. Sea $\|\cdot\|_i$ la norma del espacio $\mathscr{H}_i$. Si $K_1(x, y) = K_2(x, y)$ para todo $x, y \in X$, entonces $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$ y $\|f\|_1 = \|f\|_2$ para todo f.*

Demostración. Sea $K(x, y) = K_1(x, y) = K_2(x, y)$ y sea $W_i = \overline{\{k_y \in \mathscr{H}_i : y \in X\}}$, $i = 1, 2$. Por la proposición 2.1, sabemos que W_i es denso en $\mathscr{H}_i$. Nótese que, para cualquier $f \in W_i$, $f(x) = \sum_j \alpha_j k_{x_j}(x) =$

$\sum_j \alpha_j K(x, x_j)$, por lo que el valor de f es independiente de si $f \in W_1$ o $f \in W_2$. Además, para tal f, se tiene que:

$$\|f\|_1^2 = \left\langle \sum_i \alpha_i k_{x_i}, \sum_j \alpha_j k_{x_j} \right\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle k_{x_i}, k_{x_j} \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} K(x_j, x_i) = \|f\|_2^2,$$

y así $\|f\|_1 = \|f\|_2$ para todo $f \in W_1 = W_2$.

Sea ahora $f \in \mathscr{H}_1$, existe $(f_n) \in W_1$ con $\|f - f_n\|_1 \to 0$. Como (f_n) es de Cauchy en W_1, también es de Cauchy en W_2, luego existe $g \in \mathscr{H}_2$ con $\|g - f_n\|_2 \to 0$. Por la proposición 2.2, $f(x) = \lim_n f_n(x) = g(x)$. Es decir, todo $f \in \mathscr{H}_1$ está también en $\mathscr{H}_2$, y por un argumento análogo, todo $g \in \mathscr{H}_2$ está en $\mathscr{H}_1$, luego $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$. Finalmente, como $\|f\|_1 = \|f\|_2$ para todo f en un subespacio denso, se tiene que las normas son iguales para todo f.

□

Definición 2.4. Dados vectores $\{h_s : s \in S\}$ en un espacio normado H, donde S es un conjunto arbitrario. Se dice que $h = \sum_{s \in S} h_s$ siempre que para todo $\varepsilon > 0$, exista un subconjunto finito $F_0 \subseteq S$, tal que para cualquier conjunto finito F con $F_0 \subseteq F \subseteq S$ se tenga que $\|h - \sum_{s \in F} h_s\| < \varepsilon$.

Teorema 2.5. *Sea $\mathscr{H}$ un RKHS en X con núcleo reproductivo K. Si $\{e_s : s \in S\}$ es una base ortonormal de $\mathscr{H}$, entonces $K(x,y) = k_y(x) = \sum_{s \in S} \overline{e_s(y)} e_s(x)$ y esta serie converge puntualmente.*

Demostración. Para cualquier $y \in X$, se tiene que $\langle k_y, e_s \rangle = \overline{\langle e_s, k_y \rangle} = \overline{e_s(y)}$. Debido a esta igualdad y a las identidades de Parseval, definición 1.16, se obtiene que $k_y = \sum_{s \in S} \langle k_y, e_s \rangle e_s = \sum_{s \in S} \overline{e_s(y)} e_s$. Esta serie converge en norma en $\mathscr{H}$, y al hacerlo en norma, converge en todo punto. Así, $K(x,y) = k_y(x) = \sum_{s \in S} \overline{e_s(y)} e_s(x)$.

□

Ejemplo (Espacio de Hardy): En el espacio de Hardy en el disco (véase sección 1.3.1), el espacio de funciones $e_n(z) = z^n, n \in \mathbb{Z}^+$ forma una base ortonormal y, por el teorema anterior, el núcleo reproductivo del espacio de Hardy está dado por $K(z,w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} e_n(z)\overline{e_n(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z\bar{w})^n = \frac{1}{1 - z\bar{w}}$.

Teorema 2.6. *Sea $\mathscr{H}$ un RKHS sobre X con núcleo reproductivo K. Sea $\mathscr{H}_0 \subseteq \mathscr{H}$ y sea $P_0 : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_0$ la proyección ortogonal sobre $\mathscr{H}_0$. Entonces $\mathscr{H}_0$ es un RKHS sobre X con núcleo reproductivo $K_0(x,y) = \langle P_0(k_y), k_x \rangle$.*

Demostración. Como la evaluación de un punto en X define un funcional lineal acotado en $\mathscr{H}$, también permanece acotado cuando se restringe a $\mathscr{H}_0$, luego $\mathscr{H}_0$ es un RKHS sobre $\mathscr{H}$. Sea $f \in \mathscr{H}_0$, entonces $f(x) = \langle f, k_x \rangle = \langle P_0(f), k_x \rangle = \langle f, P_0(k_x) \rangle$. Por eso, $P_0(k_x)$ es el núcleo para $\mathscr{H}_0$ y $K_0(x,y) = \langle P_0(k_y), P_0(k_x) \rangle = \langle P_0(k_y), k_x \rangle$.

□

Definición 2.7. Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un conjunto de vectores $\{f_s : s \in S\} \subseteq H$ son un marco de Parseval para H siempre que para todo $h \in H$:

$$\|h\|^2 = \sum_{s \in S} |\langle h, f_s \rangle|^2 .$$

Nota: Este concepto extiende el concepto de base ortonormal, ya que en los marcos de Parseval no es necesario que haya ortogonalidad.

Proposición 2.8. *Si $\{u_s : s \in S\}$ $\{v_t : t \in T\}$ son dos bases ortonormales para H, los conjuntos $\{u_s : s \in S\} \cup \{0\}$ y $\left\{u_s/\sqrt{2} : s \in S\right\} \cup \left\{v_t/\sqrt{2} : t \in T\right\}$ son marcos de Parseval.*

Demostración. Vamos a demostrar el segundo ejemplo, ya que el primero es trivial. Sean $\{u_s : s \in S\}$ y $\{v_t : t \in T\}$ dos bases ortonormales de H, entonces, por las identidades de Parseval, definición 1.16, para todo $h \in H$,

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} |\langle h, u_s\rangle|^2 \text{ y } \|h\|^2 = \sum_{t\in T} |\langle h, v_t\rangle|^2 .$$

Sea $h \in H$, lo escribimos como $h = h/2 + h/2$. Así, $\|h/2\|^2 = \sum_{s\in S} |\langle h/2, u_s\rangle|^2$ y también,

$$\|h\|^2 = \langle h, h\rangle = \langle h/2 + h/2, h\rangle = \langle h/2, h\rangle + \langle h/2, h\rangle = 1/2\|h\|^2 + 1/2\|h\|^2 = \|h/\sqrt{2}\|^2 + \|h/\sqrt{2}\|^2 =$$
$$= \sum_{s\in S} \left|\left\langle h/\sqrt{2}, u_s\right\rangle\right|^2 + \sum_{t\in T} \left|\left\langle h/\sqrt{2}, v_t\right\rangle\right|^2 = \sum_{s\in S} \left|\left\langle u_s, h/\sqrt{2}\right\rangle\right|^2 + \sum_{t\in T} \left|\left\langle h, v_t/\sqrt{2}\right\rangle\right|^2 .$$

□

Proposición 2.9. *Sea H un espacio de Hilbert, $M \subseteq H$ un espacio cerrado y sea P la proyección ortogonal de H sobre M. Si $\{e_s : s \in S\}$ es una base ortonormal de H, entonces $\{P(e_s) : s \in S\}$ es un marco de Parseval para M.*

Demostración. Sea $h \in M$, entonces por el teorema de proyección ortogonal, teorema 1.15, $h = P(h)$ y así, $\langle h, e_s\rangle = \langle P(h), e_s\rangle = \langle h, P(e_s)\rangle$.
Esta última igualdad se tiene debido a que, como $(e_s) \in H$ y $H = M \oplus M^\perp$, podemos poner e_s como suma de un elemento de M y otro de $M^\perp$ siendo $P(e_s)$ el elemento de M y a el elemento de $M^\perp$. Es decir, $\langle P(h), e_s\rangle = \langle P(h), P(e_s) + a\rangle = \langle P(h), P(e_s)\rangle + \langle P(h), a\rangle$ y el segundo sumando es 0, ya que $a \in M^\perp$.
Luego $\|h\|^2 = \sum_{s\in S} |\langle h, e_s\rangle|^2 = \sum_{s\in S} |\langle h, P(e_s)\rangle|^2$.

□

Proposición 2.10. *Sea H un espacio de Hilbert y $\{f_s : s \in S\} \subseteq H$. Son equivalentes:*

1. *El conjunto $\{f_s : s \in S\}$ es un marco de Parseval.*
2. *La función $V : H \to \ell^2(S)$ dada por $(Vh)(s) = \langle h, f_s\rangle$ es una isometría bien definida.*
3. *Para todo $h \in H$, $h = \sum_{s\in S} \langle h, f_s\rangle f_s$.*

Más aún, si $\{f_s : s \in S\}$ es un marco de Parseval, para cualquier $h_1, h_2 \in H$ se tiene que $\langle h_1, h_2\rangle = \sum_{s\in S} \langle h_1, f_s\rangle \langle f_s, h_2\rangle$.

Demostración. 1->2. Sea $V : H \to \ell^2(S)$ definida por $(Vh)(s) = \langle h, f_s\rangle$, vamos a ver que está bien definida.

$$\sum_{s\in S} |Vh(s)|^2 = \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2 = \|h\|^2 < \infty.$$

Luego $Vh \in \ell^2(S)$. Así, $V : H \to \ell^2(S)$ está bien definida. Veamos ahora que es una isometría. En términos de la base,

$$Vh = \sum_{s\in S} \langle Vh, e_s\rangle_{\ell^2(S)} e_s = \sum_{s'\in S' s\in S} Vh(s')\overline{e_s(s')} e_s = \sum_{s\in S} Vh(s) e_s = \sum_{s\in S} \langle h, f_s\rangle e_s,$$

y como f_s es un marco de Parseval,

$$\|Vh\|^2 = \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2 = \|h\|^2.$$

2->3. Sea V una isometría, entonces $V^* : \ell^2(S) \to H$ se llama adjunto de V y cumple que $V^*V = I_H$. Notar que $\langle h, V^*e_t\rangle = \langle Vh, e_t\rangle = \langle h, f_t\rangle$. Así $V^*e_t = f_t$ y,

$$h = V^*Vh = V^*\left(\sum_{s\in S}\langle h, f_s\rangle e_s\right) = \sum_{s\in S}\langle h, f_s\rangle V^*(e_s) = \sum_{s\in S}\langle h, f_s\rangle f_s.$$

3->1.

$$\|h\| = \langle h, h\rangle = \left\langle \sum_{s\in S}\langle h, f_s\rangle f_s, h\right\rangle = \sum_{s\in S}\langle h, f_s\rangle\langle f_s, h\rangle = \sum_{s\in S}|\langle h, f_s\rangle|^2.$$

Finalmente, como V es una isometría, para cualquier $h_1, h_2 \in H$, se tiene que:

$$\langle h_1, h_2\rangle = \langle V^*Vh_1, h_2\rangle = \langle Vh_1, Vh_2\rangle_{\ell^2(S)} = \sum_{s\in S}(Vh_1)(s)\overline{(Vh_2)(s)} = \sum_{s\in S}\langle h_1, f_s\rangle\langle f_s, h_2\rangle.$$

□

Proposición 2.11 (Larson). *Sea $\{f_s : s\in S\}$ un marco de Parseval para un espacio de Hilbert H. Entonces hay un espacio de Hilbert K conteniendo a H como subespacio y una base ortonormal $\{e_S : s\in S\}$ para K, tal que $f_s = P_H(e_s), s\in S$, donde P_H denota la proyección de K sobre H.*

Demostración. Sea $K = \ell^2(S)$ y sea $V : H \to \ell^2(S)$ la isometría de la proposición anterior. Si identificamos H como $V(H)$, H es un subespacio de $\ell^2(S)$. Notar que $P = VV^* : \ell^2(S) \to \ell^2(S)$ satisface $P = P^*$ y $P^2 = (VV^*)(VV^*) = V(V^*V)V^* = VV^* = P$. Esta igualdad es, debido a que $V^*V = I_H$. En efecto,

$$\langle (V^*V - I)x, x\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle - \langle x, x\rangle = \langle Vx, Vx\rangle_{\ell^2(S)} - \langle x, x\rangle = \|Vx\|^2_{\ell^2(S)} - \|x\|^2 = 0.$$

Luego $V^*V - I = 0$ si y sólo si $V^*V = I$ Así, P es la proyección ortogonal en algún subespacio de $\ell^2(S)$. Como $Pe_s = V(V^*e_s) = Vf_s \in V(H)$, vemos que P es la proyección en $V(H)$ y que cuando identificamos h con Vh, P es la proyección sobre H con $P_H(e_s) = V(V^*e_s) = Vf_s = f_s$.

□

Teorema 2.12 (Papadakis). *Sea $\mathscr{H}$ un RKHS de X con núcleo reproductivo K y sea $\{f_s : s\in S\} \subseteq \mathscr{H}$. Entonces $\{f_s : s\in S\}$ es un marco de Parseval para $\mathscr{H}$ si y sólo si$K(x,y) = \sum_{s\in S} f_s(x)\overline{f_s(y)}$, donde la serie converge puntualmente.*

Demostración. Si $\{f_s : s\in S\}$ es un marco de Parseval para $\mathscr{H}$, se tiene que:

$$K(x,y) = \langle k_y, k_x\rangle = \sum_{s\in S}\langle k_y, f_s\rangle\langle f_s, k_x\rangle = \sum_{s\in S}\overline{f_s(y)}f_s(x).$$

Recíprocamente, si α_j son escalares y $h = \sum_j \alpha_j k_{y_j}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|h\|^2 &= \sum_{i,j}\alpha_j\overline{\alpha_i}\left\langle k_{y_j}, k_{y_i}\right\rangle = \sum_{i,j}\alpha_j\overline{\alpha_i}K(y_i, y_j) \\
&= \sum_{i,j}\alpha_j\overline{\alpha_i}\sum_{s\in S}\overline{f_s(y_j)}f_s(y_i) = \sum_{i,j}\alpha_j\overline{\alpha_i}\sum_{s\in S}\left\langle k_{y_j}, f_s\right\rangle\langle f_s, k_{y_i}\rangle \\
&= \sum_{s\in S}\left\langle \sum_j \alpha_j k_{y_j}, f_s\right\rangle\left\langle f_s, \sum_i \alpha_i k_{y_i}\right\rangle = \sum_{s\in S}|\langle h, f_s\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Así $\tilde{V} : \mathscr{L} \to \ell^2(S)$ dada por $(\tilde{V}h)(s) = \langle h, f_s\rangle$ es una isometría en $\mathscr{L}$. Por la proposición 2.1, si $\mathscr{L}$ denota el espacio generado por las funciones núcleo, $\mathscr{L}$ es denso en $\mathscr{H}$. Veamos ahora que $\tilde{V}$ se extiende para ser una isometría V en $\mathscr{H}$ dada por la misma formula. Primero, tenemos que tener en cuenta que $\overline{\mathscr{L}} = \mathscr{H}$, luego existe $h_n \in \mathscr{L}$ tal que $\lim_n \|h - h_n\| = 0$ para todo $h \in \mathscr{H}$. Ahora, nos definimos $V : \mathscr{H} \to \ell^2(S)$ dada por $Vh = \lim_n(Vh_n)$. Notar que existe $\lim_n(Vh_n)$ en $\ell^2(S)$ ya que $\|Vh_n\|_{\ell^2(S)} = \|h_n\|$ y $\lim_n \|h_n\| = \|h\|$. Por tanto $\lim_n \|Vh_n\|_{\ell^2(S)} = \|Vh\|_{\ell^2(S)}$. Luego $\|Vh\|_{\ell^2(S)} = \|h\|$ y así V es una isometría. Por el teorema 2.10, la condición de ser un marco de Parseval se cumple para $\{f_s : s \in S\}$.

□

2.2. Caracterización de los núcleos reproductivos

Ahora se van a obtener condiciones necesarias y suficientes que ha de cumplir una función $K : X \times X \to \mathbb{C}$ para ser un núcleo reproductivo para algún RKHS. También se probará el teorema de Moore, que caracteriza las funciones son núcleos reproductivos algunos RKHS. Recordemos algunos conceptos sobre matrices. Se denota por $A = (a_{i,j})_{nxn}$ a una matriz compleja.

Definición 2.13. A es semidefinida positiva si y sólo si para todo $\alpha_i \in \mathbb{C}$, se tiene que $\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_j a_{i,j} \geq 0$.

Definición 2.14. Sea X un conjunto y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ una función de dos variables. Entonces K es una función núcleo siempre que para todo n y para cada elección de n puntos $\{x_1, ..., x_n\} \in X$, la matriz $K(x_i, x_j) \geq 0$. Se va a usar la notación $K \geq 0$ para denotar que K es una función núcleo.

Proposición 2.15. *Sea X un conjunto y $\mathscr{H}$ un RKHS de X con núcleo reproductivo K. Entonces K es una función núcleo.*

Demostración. Fijamos $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$. Tenemos que,

$$\sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j K(x_i, x_j) = \left\langle \sum_j \alpha_j k_{x_j}, \sum_i \alpha_i k_{x_i} \right\rangle = \left\| \sum_j \alpha_j k_{x_j} \right\|^2 \geq 0,$$

y esto implica que $K(x_i, x_j) \geq 0$.

□

Se va a ver ahora el teorema fundamental del capítulo, que da una caracterización de los núcleos reproductivos para un RKHS.

Teorema 2.16 (Moore). *Sea X un conjunto y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ una función. Si K es una función núcleo, existe un RKHS $\mathscr{H}$ de funciones en X tal que K es el núcleo reproductivo de $\mathscr{H}$.*

Demostración. Sea $K_y : X \to \mathbb{C}$ la función definida por $K_y(x) = K(x, y)$. De la proposición 2.1 sabemos que si K es la función núcleo de un RKHS, su espacio generado es denso en el RKHS. Sea $W \subseteq F(X)$ el espacio vectorial de funciones generadas por el conjunto $\{k_y : y \in X\}$ y $B : W \times W \to \mathbb{C}$ dada por:

$$B\left(\sum_j \alpha_j k_{y_j}, \sum_i \beta_i k_{y_i}\right) = \sum_{i,j} \alpha_j \overline{\beta_i} K(y_i, y_j),$$

donde α_j y β_i son escalares. Entonces B es sesquilineal. Veamos que B está bien definida en W; para ello basta ver que si $f = \sum_{i \in I} \alpha_i K_{y_i}$ y $f = \sum_{l \in L} \gamma_l K_{y_l}$, con γ_l escalares, entonces,

$$\sum_{(i,j) \in IxJ} \alpha_i \overline{\beta_j} K(y_j, y_i) = \sum_{(l,j) \in LxJ} \gamma_l \overline{\beta_j} K(y_j, y_l) \Rightarrow \sum_{(i,j) \in IxJ} \alpha_i \overline{\beta_j} K(y_j, y_i) - \sum_{(l,j) \in LxJ} \gamma_l \overline{\beta_j} K(y_j, y_l) = 0.$$

Sea $h = \sum_{i \in I} \alpha_i K_{y_i} - \sum_{l \in L} \gamma_l K_{y_l} = 0$. Por simplificar notación $h = \sum_{m \in M} \delta_m K_{y_m}$, con δ_m escalares. Lo que tenemos que probar es que $B(h,g) = B(g,h) = 0$ para todo $g \in W$. Como W está generado por k_y, para probar la última ecuación basta ver que $B(h,k_y) = B(k_y,h) = 0$. Pero por definición,

$$B(h,k_x) = \sum_j \alpha_j K(x,y_m) = h(x) = 0.$$

De igual forma,

$$B(k_x,h) = \sum_j \overline{\delta_m} K(y_m,x) = \sum_j \overline{\delta_m K(x,y_m)} = \overline{h(x)} = 0.$$

Como $K(y_i,y_j)$ es semidefinida positiva, para cualquier $f = \sum_j \alpha_j k_{y_j}$,

$$B(f,f) = \sum \alpha_j \overline{\alpha_i} K(y_i,y_j) \geq 0,$$

luego B define un producto interno sesquilineal en W. Como además $B(f,f) = 0$ si y sólo si $B(g,f) = B(f,g) = 0$ para todo $w \in W$, $B(f,f) = 0$ si y sólo si $f(y) = B(f,k_y) = 0$ para todo $y \in X$. Es decir, $f = 0$. Luego B es un producto interno de W.

Dado cualquier producto interno en un espacio vectorial podemos completar el espacio tomando clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de W para obtener un espacio de Hilbert, $\mathscr{H}$.

Ahora, debemos mostrar que cada elemento de $\mathscr{H}$ se puede identificar únicamente con una función de X. Para ello, dado $h \in \mathscr{H}$, definimos $\hat{h}(x) = \langle h, k_x \rangle$ y $\hat{\mathscr{H}} = \{\hat{h} : h \in \mathscr{H}\}$. $\hat{\mathscr{H}}$ es un conjunto de funciones de X. Si tomamos $L : \mathscr{H} \to \mathscr{F}(X;\mathbb{C})$ dada por $L(h) = \hat{h}$, podemos ver claramente que L es lineal y así, $\hat{\mathscr{H}}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{F}(X;\mathbb{C})$. Más aun, para cualquier $f \in W$, se tiene que $\hat{f}(x) = f(x)$. Lo que queremos hacer es demostrar que la aplicación que manda $h \to \hat{h}$ es inyectiva, es decir, queremos ver que $\hat{h}(x) = 0$ para todo $x \in X$ si y sólo si $h = 0$.
Primero suponemos que $\hat{h}(x) = 0$ para todo x. Entonces $h \perp k_x$ para todo $x \in X$, luego $h \perp W$. Como W es denso en $\mathscr{H}$, se tiene que $h = 0$ y así la aplicación $L : \mathscr{H} \to \hat{\mathscr{H}}$ es inyectiva y sobreyectiva. Entonces, si definimos un producto interno en $\hat{\mathscr{H}}$ dado por $\langle \hat{h}_1, \hat{h}_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle$, $\hat{\mathscr{H}}$ es un espacio de Hilbert de funciones en X.

Como $E_x(\hat{h}) = \hat{h}(x) = \langle h, k_x \rangle = \langle \hat{h}, \hat{k}_x \rangle$, vemos que cada evaluación de un punto está acotado y $\hat{k}_x = k_x$ es el núcleo de reproducción para x. Así $\hat{\mathscr{H}}$ es un RKHS de X y como $\hat{k}_y$ es el núcleo de reproducción para y, se tiene que $\hat{k}_y(x) = \langle k_y, k_x \rangle = K(x,y)$ es el núcleo reproductivo para $\hat{\mathscr{H}}$.

□

Observación: Este teorema, junto con la Proposición 2.13, muestra que hay una correspondencia biyectiva entre RKHS en un conjunto y las funciones núcleo del conjunto.

Definición 2.17. Dado un núcleo reproductivo $K : X \times X \to \mathbb{C}$, $\mathscr{H}(K)$ denota el único RKHS con núcleo reproductivo K.

Capítulo 3

Operadores de composición

3.1. Introducción

En este capítulo se va a trabajar con $H(\mathbb{D})$, que es el espacio de todas las funciones complejas que son holomorfas (y por tanto analíticas) en el disco unidad $\mathbb{D}$.

Es importante recordar que un homomorfismo es una aplicación entre dos objetos matemáticos con la misma estructura algebraica. Un isomorfismo es un homomorfismo que admite inverso, y un automorfismo es un isomorfismo de un objeto matemático en sí mismo.

Desde ahora, se va a emplear la letra φ para representar un automorfismo holomorfo en $\mathbb{D}$. Para $f \in H(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$, se define $C_\varphi f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ como $(C_\varphi f)(z) := f(\varphi(z))$, con $z \in \mathbb{D}$.

Como la composición de funciones analíticas es analítica siempre que los dominios y rangos sean correctos (como lo es en este caso), se puede ver que $C_\varphi f \in H(\mathbb{D})$. Por lo que se ha definido una aplicación $C_\varphi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ que se llama operador de composición inducido por φ.

El objetivo de este capítulo es estudiar los operadores de composición para entender como las propiedades de la función analítica φ influyen en C_φ y viceversa. En particular, se va a considerar $f \in H^2(\mathbb{D})$.

3.2. Operadores de composición en el espacio de Hardy H^2

Se van a tratar los operadores de composición en el espacio de Hardy, el cual ya se introdujo en el primer capítulo. Notar que H^2 es un subespacio de $H(\mathbb{D})$, que además es espacio de Hilbert. Para simplificar notación, se considera $H^2(\mathbb{D}) = H^2$.

El principal objetivo de esta sección es ver que los operadores de composición actúan en H^2, es decir, si se tiene $f \in H^2$, se quiere determinar si $C_\varphi f \in H^2$. Con una serie de condiciones adicionales los operadores de composición preservan el espacio H^2 y lo hacen continuamente. Esto se debe a un resultado que se probará más tarde, conocido como *Principio de Subordinación de Littlewood*. Nos hemos basado principalmente en [6].

Notación: Cuando no indiquemos la norma a la que nos referimos, se va a suponer siempre que se trata de la norma de H^2.

Corolario 3.1. *La convergencia en H^2 implica convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathbb{D}$, $f \in \mathbb{D}$ y $\|f_n - f\| \to 0$. Queremos ver que $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Para esto, sea K un subconjunto compacto en $\mathbb{D}$, lo que tenemos que probar que $\max_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \to 0$. Sea $r = \max\{|z| : z \in K\}$. Entonces para $z \in K$, por la acotación vista en el teorema 1.21,

$$|f_n(z) - f(z)| \le \frac{\|f_n - f\|}{(1-|z|^2)^{1/2}} \le \frac{\|f_n - f\|}{(1-|r|^2)^{1/2}}.$$

Y tomando $n \to \infty$,

$$\max_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \le \frac{\|f_n - f\|}{(1-|r|^2)^{1/2}} \to 0.$$

Por lo tanto $f_n \to f$ uniformemente en K. □

Observación: Sea $f \in H(\mathbb{D})$ y $n \in \mathbb{N}\cup 0$, se define $\hat{f}(n) = f^{(n)}(0)/n!$. Entonces, la serie de Taylor de f con centro en el origen es $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$, es decir, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$.

Otra manera de definir el espacio de Hardy H^2, es como la colección de funciones $f \in H(U)$ con $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$.

Proposición 3.2. *Una función $f \in H(\mathbb{D})$ pertenece a H^2 si y solo si:*

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty.$$

Cuando esto pasa, el limite de la integral por la izquierda es $\|f\|^2$.

Demostración. Las funciones $e^{in\theta}$ forman un conjunto ortogonal en $L^2([0,2\pi])$, luego para cada $0 \le r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{ni\theta}\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n}.$$

Ahora, podemos aplicar el corolario del Teorema de la Convergencia Monótona para funciones decrecientes, ya que $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n} \le \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ y obtenemos el resultado.

□

Observación: Si f es una función acotada, $\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty$, por lo tanto, aplicando la proposición 3.2 se obtiene que si f es acotada, $f \in H^2$.

Definición 3.3. Se llama H^∞ a la colección de funciones acotadas que son analíticas en $\mathbb{D}$, y para $b \in H^\infty$, sea $\|b\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |b(z)|$.

Definición 3.4. Para $b \in H^\infty$, se define el operador de multiplicación (puntual) por b a M_b. Esto significa $M_b f = bf$.

Proposición 3.5. *Si $b \in H^\infty$ y $f \in H^2$ entonces $bf \in H^2$ y $\|bf\| \le \|b\|_\infty \|f\|$.*

Demostración. Veamos en primer lugar, que $bf \in H^2$. Para ello, vamos a aplicar la proposición 3.2. Como $b \in H^\infty$, $|b| \le M$ para una constante M. Así obtenemos,

$$\lim_{r\to 1-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|bf\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \le \lim_{r\to 1-} \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty \quad (f \in H^2).$$

Para la acotación, actuando de forma similar,

$$\|bf\| = \lim_{r\to 1-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|bf\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \le \lim_{r\to 1-} \frac{\|b\|_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \|b\|_\infty \|f\|.$$

□

Teorema 3.6 (Teorema de Subordinación de Littlewood). *Suponer que $\varphi(0) = 0$. Entonces $C_\varphi f \in H^2$ y $\left\|C_\varphi f\right\| \le \|f\|$ para todo $f \in H^2$.*

Demostración. Definimos en H^2 un operador B, que desplaza los coeficientes de la serie de potencias de f una unidad hacia la izquierda y elimina el término constante. Viene dado por

$$Bf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n+1)z^n \quad \left(f \in H^2\right).$$

Se tiene que,

$$f(z) = f(0) + zBf(z) \quad (z \in \mathbb{D}), \tag{3.1}$$

y

$$B^n f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j+n)z^j \Rightarrow B^n f(0) = \hat{f}(n) \quad (n = 0,1,2,\ldots). \tag{3.2}$$

En primer lugar, vamos a suponer que f es un polinomio. Entonces $f \circ \varphi$ está acotada en $\mathbb{D}$ y de la observación de la proposición 3.2, se sigue que pertenece a H^2. Ahora queremos estimar su norma, primero vamos a empezar sustituyendo $\varphi(z)$ por z en la ecuación 3.1 y obtenemos $f(\varphi(z)) = f(0) + \varphi(z)(Bf)(\varphi(z))$. Si ahora la escribimos como composición y multiplicación de operadores:

$$C_\varphi f = f(0) + M_\varphi C_\varphi Bf \quad (f \in H^2). \tag{3.3}$$

Debido a que asumimos que $\varphi(0) = 0$, todos los términos de la serie de potencias de φ tienen como factor común z (es decir, $\varphi(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l z^l$, con $(c_l)_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos). Lo mismo ocurre con el segundo término a la derecha de la ecuación 3.3. De este modo:

$$\|C_\varphi f\|^2 = \langle C_\varphi, C_\varphi\rangle = \langle f(0) + M_\varphi C_\varphi Bf, f(0) + M_\varphi C_\varphi Bf\rangle = |f(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi Bf\|^2. \tag{3.4}$$

Ya que $\langle f(0), M_\varphi C_\varphi Bf\rangle = 0$, porque como se ha dicho antes, en el segundo término a la derecha de la ecuación, los términos de la serie de potencias tienen como factor común z, es decir, $M_\varphi C_\varphi Bf = \sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t z^l$ para algún γ_l tal que $(\gamma_l)_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ es una sucesión de números complejos. Por lo que,

$$\langle f(0), M_\varphi C_\varphi Bf\rangle = f(0)\cdot 0 + 0 \cdot \overline{\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t} = 0.$$

Además, tenemos también que,

$$\|C_\varphi f\|^2 = |f(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi Bf\|^2 \le |f(0)|^2 + \|C_\varphi Bf\|^2. \tag{3.5}$$

Esta última desigualdad viene de la proposición 3.5 (ya que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$). Ahora, vamos a sustituir en la ecuación 3.5 f por $Bf, B^2f\ldots$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left\|C_\varphi Bf\right\|^2 &\leq |Bf(0)|^2 + \left\|C_\varphi B^2 f\right\|^2, \\
\left\|C_\varphi B^2 f\right\|^2 &\leq \left|B^2 f(0)\right|^2 + \left\|C_\varphi B^3 f\right\|^2, \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\left\|C_\varphi B^n f\right\|^2 &\leq |B^n f(0)|^2 + \left\|C_\varphi B^{n+1} f\right\|^2.
\end{aligned}$$

Poniendo todas estas inecuaciones juntas,

$$\left\|C_\varphi f\right\|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\left(B^k f\right)(0)\right|^2 + \left\|C_\varphi B^{n+1} f\right\|^2,$$

para cada n entero no negativo. Como f es un polinomio, si elegimos n siendo el grado de f, entonces $B^{n+1}f = 0$, y la última inecuación se reduce a:

$$\left\|C_\varphi f\right\|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\left(B^k f\right)(0)\right|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2.$$

Esto nos muestra que C_φ es una contracción de una norma de H^2, al menos en el espacio vectorial de polinomios holomorfos.

Para finalizar la demostración, vamos a suponer que $f \in H^2$ no es un polinomio. Sea $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k)z^k$ la n-ésima suma parcial de la serie de Taylor de f. Como $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)z^k$, se tiene que $f_n \to f$ en la norma de H^2, luego por el corolario 3.1, $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Así $f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$ de la misma manera. Es obvio que $\|f_n\| \leq \|f\|$. Como f_n es un polinomio, aplicando el procedimiento anterior se tiene que: $\|C_\varphi f_n\| = \|f_n \circ \varphi\| \leq \|f_n\|$. Ahora vamos a probar que $\|C_\varphi f\| \leq \|f\|$. Para ello, fijamos r tal que $0 < r < 1$. Notar que:

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left|f_n\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{2\pi} \left(\left|f\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^2 - \left|f_n\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^2\right) d\theta\right) = 0.$$

Y esto es cierto, ya que como $f_n \to f$ uniformemente en conjuntos compactos de $\mathbb{D}$ (como es el caso que estamos tratando), $|f_n| \to |f| \Rightarrow |f_n|^2 \to |f|^2$. Y así,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\lim_{n\to\infty} f_n\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_n\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta \leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n\| \leq \|f\|.$$

Por lo tanto:

$$\|C_\varphi f\| = \lim_{r\to 1-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(\varphi(re^{i\theta})\right)\right|^2 d\theta \leq \lim_{r\to 1-} \|f\| < \infty \qquad (f \in H^2).$$

Y ahora, por la proposición 3.2, $C_\varphi f \in H^2$. □

Observación: Siguiendo con el capítulo, ahora queda probar que C_φ está acotada aun cuando φ no está fija en el origen. Para ello, se va a utilizar un automorfismo α_p, que se define de la siguiente forma,

$$\alpha_p(z) := \frac{p - z}{1 - \bar{p}z}.$$

Para cada $p \in \mathbb{D}$, lleva $\mathbb{D}$ a sí mismo, intercambiando p con el origen, y además, es su propia inversa. Se toma $p = \varphi(0)$, entonces la función holomorfa $\psi = \alpha_p \circ \varphi$ lleva $\mathbb{D}$ a sí mismo y fija el origen. En efecto, $\psi(z) = \alpha_p(\varphi(z))$, luego $\psi(0) = \alpha_p(\varphi(0)) = \alpha_p(p) = 0$. Como la inversa de α_p es α_p, $\varphi = \alpha_p \circ \psi$ y esto se transforma a la ecuación de operadores $C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}$. Ya se ha visto en el lema anterior que C_ψ lleva H^2 a ella misma (por ser una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y $\psi(0) = 0$). Así, el hecho de que C_φ hace lo mismo, lo vamos a probar en el siguiente resultado.

Lema 3.7. *Para cada $p \in \mathbb{D}$ el operador C_{α_p} lleva H^2 a sí mismo. Más aún,*

$$\|C_{\alpha_p}\| \leq \left(\frac{1+|p|}{1-|p|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Suponer primero que f es holomorfa en un entorno del disco cerrado, digamos $\mathbb{D}_R = \{|z| < R\}$ para algún $R > 1$. Entonces, como f es holomorfa en un entorno más grande que $\mathbb{D}$, podemos coger un disco cerrado entre $\mathbb{D}_R$ y $\mathbb{D}$ de forma que f esté acotada y si f está acotada, entonces $f \in H^2$ por la observación de 3.2. Así, en la ecuación de la proposición 3.2 podemos pasar el límite dentro de la integral y nos queda,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta.$$

Sustituimos ahora f por $f \circ \alpha_p$,

$$\|f \circ \alpha_p\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(\alpha_p\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta.$$

Ahora realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\alpha_p\left(e^{i\theta}\right) = e^{it} \Rightarrow e^{i\theta} = \alpha_p(e^{it}) \text{ (La inversa de } \alpha_p \text{ es } \alpha_p) \Rightarrow ie^{i\theta}d\theta = i\alpha_p'(e^{it})dt \Rightarrow d\theta = \alpha_p'(e^{it})\frac{1}{e^{i\theta}}.$$

$$|d\theta| = |\alpha_p'(e^{it})|.$$

Continuamos donde lo habíamos dejado y,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(\alpha_p\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 \left|\alpha_p'\left(e^{it}\right)\right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 \frac{1-|p|^2}{|1-\bar{p}e^{it}|^2} dt \\
&\leq \frac{1-|p|^2}{(1-|p|)^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 dt\right) \\
&= \frac{1+|p|}{1-|p|}\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Obtenemos la desigualdad que buscábamos para todas las funciones holomorfas en $\mathbb{D}_R$; por lo que en particular se cumple para polinomios. Ahora únicamente nos queda trasladar el resultado al resto de H^2. Para ello simplemente repetimos el argumento utilizado al final de la demostración del Teorema de Subordinación de Littlewood (Teorema 3.2).

□

Nota: Se podría pensar en otro proceso para probar que si $f \in H^2$, entonces $C_\varphi f \in H^2$. Se puede aplicar la definición de H^2, y bastaría con sustituir $\varphi(z)$ por z en la serie de potencias de f, expandir las diversas potencias de la serie de potencias de φ por el teorema del binomio y reagrupar la doble serie resultante para identificar las nuevas potencias de z. Pero, si se hace de esta forma no sabemos si $C_\varphi f$ está en H^2.

Lema 3.8. *Sea ψ un automorfismos holomorfos en $\mathbb{D}$, entonces $C_\varphi = C_\psi$ si y sólo si $\varphi = \psi$.*

Demostración. Asumimos que $C_\varphi = C_\psi$, entonces para todo $z \in \mathbb{D}$, $C_\varphi z = C_\psi z$. De esto se sigue para todo $z \in \mathbb{D}$ que $\varphi(z) = \psi(z)$.

El recíproco es obvio. □

3.3. El adjunto de un operador de composición

A pesar de no haber una buena descripción de adjuntos que funcione para todos los operadores de composición, se puede observar su acción en el núcleo de un RKHS. Recordar que para cada $\alpha \in \mathbb{D}$ y $f \in H^2$,

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{1-\bar{\alpha}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\alpha}^n z^n.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n.$$

$$\langle f, k_\alpha \rangle = f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \alpha^n.$$

Definición 3.9. C_φ^* es el adjunto de un operador de composición inducido por un automorfismo φ sobre $\mathbb{D}$. Es decir, sean $f, g \in \mathbb{D}$, se tiene:

$$\langle C_\varphi^*(g), f \rangle = \langle g, C_\varphi(f) \rangle.$$

Lema 3.10. *Para todo $\alpha \in \mathbb{D}$, $C_\varphi^* k_\alpha = k_{\varphi(\alpha)}$.*

Demostración. Para cada $f \in H^2$,

$$\left\langle f, C_\varphi^* k_\alpha \right\rangle = \left\langle C_\varphi f, k_\alpha \right\rangle = \langle f \circ \varphi, k_\alpha \rangle = f \circ \varphi(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = \left\langle f, k_{\varphi(\alpha)} \right\rangle.$$

□

Con esta proposición se ha probado que la evaluación en un punto de $\mathbb{D}$ es un funcional lineal y continuo sobre H^2, cuyo representante, que se obtiene en el teorema de F.Riesz–M.Fréchet [2, Teorema 1.6.1], es precisamente el núcleo reproductor.

Lema 3.11. *El espacio generado por las funciones núcleo es denso en H^2.*

Demostración. Como H^2 es un RKHS, la demostración se obtiene trivialmente por el Teorema 2.1.

□

Ahora surge la duda de si el adjunto de un operador de composición en H^2 es un operador de composición en H^2.

Para resolver esta pregunta se van a introducir algunos conceptos previos:

Definición 3.12. Si T es un operador en un espacio de Hilbert H, un subespacio M de H es invariante bajo T (T-invariante) si $TM \subseteq M$. Un subespacio M se le llama reductor bajo T si M y $M^\perp$ son T-invariantes.

Lema 3.13. *Suponemos que $\varphi(0) = 0$. Entonces $z^n H^2$ es un subespacio invariante de H^2 bajo C_φ para cada entero positivo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in z^n H^2$, entonces $f(z) = z^n h(z)$ para algún $h \in H^2$. Lo que se tiene que probar es que $C_\varphi f(z) \in z^n H^2$. Para ello partimos de que:

$$C_\varphi f(z) = f(\varphi(z)) = \varphi^n(z) h \circ \varphi(z). \tag{3.6}$$

Como además $\varphi(0) = 0$, entonces:

$$\varphi(z) = z^k g(z), \tag{3.7}$$

para algún entero positivo k y $g \in H^2$ tal que $g(z) \neq 0$ en alguna bola en $\mathbb{D}$ con centro 0. Así, de las ecuaciones (3.6) y (3.7), para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$C_\varphi f(z) = z^n z^{(k-1)n} g^n(z) h \circ \varphi(z).$$

Como $z^{(k-1)n} g^n h \circ \varphi \in H^2$, $C_\varphi f \in z^n H^2$. Por lo tanto $z^n H^2$ es invariante bajo C_φ para cada entero positivo.

□

Definición 3.14. Se llama $\mathscr{C}$ al conjunto de todas las funciones constantes de H^2.

Proposición 3.15. *Sea $\varphi(0) = 0$, entonces $\mathscr{C}$ y zH^2 son subespacios reductores de H^2 bajo C_φ.*

Demostración. Se tiene que demostrar por una parte, que $C_\varphi \mathscr{C} \subset \mathscr{C}$ y $C_\varphi^\perp \mathscr{C} = C_\varphi^* \mathscr{C} \subset \mathscr{C}$ y por otra, que $C_\varphi z H^2 \subset zH^2$ y $C_\varphi^* z H^2 \subset zH^2$.

Notar que $k_0 = 1$ y

$$\left(C_\varphi 1\right)(z) = 1(\varphi(z)) = 1.$$

Ahora, por el lema 3.10,

$$\left(C_\varphi^* 1\right)(z) = \left(C_\varphi^* k_0\right)(z) = k_{\varphi(0)}(z) = k_0(z) = 1(z) = 1.$$

Entonces $\mathscr{C}$ es un subespacio invariante de H^2 bajo C_φ y C_φ^*, por lo tanto, $\mathscr{C}$ es reductora bajo C_φ. Ahora, si $f \in H^2$, entonces $f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^\infty \hat{f}(n) z^n$. Veamos por doble contenido, que $\mathscr{C}^\perp = zH^2$. Sea $g = \sum_{j=0}^\infty \hat{g}(j) z^j$. Primero suponemos que $g \in \mathscr{C}^\perp$, entonces $\langle g, c\rangle = 0, \forall c \in \mathscr{C} \Rightarrow \hat{g}(0)c = 0 \Rightarrow \hat{g}(0) = 0$. Por lo tanto, podemos escribir g como $g = \sum_{j=1}^\infty \hat{g}(j) z^j$ y así $g \in zH^2$. Recíprocamente, sea $g \in zH^2$, entonces $g = \sum_{j=1}^\infty \hat{g}(j) z^j$ y $\langle g, c\rangle = 0 \cdot c + \sum_{j=1}^\infty \hat{g}(j) \cdot 0 = 0$. Luego $\mathscr{C}^\perp = zH^2$ y así zH^2 es un subespacio reductor bajo C_φ.

□

Definición 3.16. Sea T un operador en un espacio de Hilbert H, se denota por $LatT$ al conjunto de todos los subespacios invariantes de M bajo T.

Una vez conocidos estos conceptos previos, se puede introducir el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.17. *C_φ^* es un operador de composición en H^2 si y sólo si $\varphi(z) = \gamma z$ para algún γ tal que $|\gamma| \leq 1$.*

Demostración. Vamos a asumir que $\varphi(z) = \gamma z$ para algún γ tal que $|\gamma| \leq 1$. Para cada $\alpha, z \in \mathbb{D}$, por el lema 3.10,

$$C_\varphi^* k_\alpha(z) = k_{\varphi(\alpha)}(z) = \frac{1}{1 - \overline{\varphi(\alpha)} z} = \frac{1}{1 - \overline{\alpha \gamma} z} = \frac{1}{1 - \bar{\alpha}(\bar{\gamma} z)} = k_\alpha(\bar{\gamma} z).$$

Poniendo $\psi(z) = \bar{\gamma}z$ se tiene que,

$$C_\varphi^* k_\alpha(z) = k_\alpha(\bar{\gamma}z) = k_\alpha \circ \psi(z) = C_\psi k_\alpha(z).$$

Por el lema 3.11, el espacio generado por las funciones núcleo es denso en H^2, es decir, $\overline{\{k_\alpha : \alpha \in \mathbb{D}\}} = H^2$. Luego, $C_\varphi^* = C_\psi$, donde $\psi(z) = \bar{\gamma}z$. Está claro que ψ es un automorfismo holomorfo sobre $\mathbb{D}$, por tanto, C_φ^* es un operador de composición en H^2 inducido por el automorfismo holomorfo sobre $\mathbb{D}$, ψ.

Recíprocamente, supongamos que $C_\varphi^* = C_\psi$ para algún automorfismo ψ, holomorfo en $\mathbb{D}$. Para cada $\alpha, z \in \mathbb{D}$,

$$C_\varphi^* k_\alpha(z) = C_\psi k_\alpha(z) = k_\alpha(\psi(z)). \tag{3.8}$$

Por el lema 3.10 ,

$$C_\varphi^* k_\alpha(z) = k_{\varphi(\alpha)}(z) = k_\alpha(\psi(z)) \quad (\alpha \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{D}).$$

Sea $\alpha \in \mathbb{D}$ distinto de 0. Para cada $z \in \mathbb{D}$, por la última igualdad obtenemos que,

$$\frac{1}{1 - \overline{\varphi(\alpha)}z} = \frac{1}{1 - \bar{\alpha}\psi(z)}.$$

Es decir,

$$\overline{\varphi(\alpha)}z = \bar{\alpha}\psi(z).$$

Despejando, obtenemos que,

$$\psi(z) = \frac{\overline{\varphi(\alpha)}}{\alpha}z.$$

Y de esto, es obvio que $\psi(0) = 0$.

Ahora, veamos que $\varphi(0) = 0$. De la ecuación 3.8, para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$C_\varphi^* k_0(z) = C_\psi k_0(z) = \left(C_\psi 1\right)(z) = 1(z) = 1.$$

Pero,

$$C_\varphi^* k_0(z) = k_{\varphi(0)}(z),$$

por lo tanto,

$$C_\varphi^* k_0(z) = k_{\varphi(0)}(z) = 1.$$

Así,

$$\frac{1}{1 - \overline{\varphi(0)}z} = 1.$$

Por consiguiente, $\overline{\varphi(0)}z = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$.

Esto implica por el lema 3.13 que $z^2H^2 \in LatC_\varphi$ y $z^2H^2 \in LatC_\psi$. Es decir, $\left(z^2H^2\right)^\perp \in LatC_\psi^*$. Pero como $C_\varphi = C_\psi^*$, $\left(z^2H^2\right)^\perp \in LatC_\varphi$. Notar que el espacio generado por $\{1, z\} = \left(z^2H^2\right)^\perp \in LatC_\varphi$ y z se encuentra en el espacio generado por $\{1, z\}$. Así $C_\varphi z$ pertenece al espacio generado por $\{1, z\}$ y por lo tanto, $C_\varphi z = \varphi(z) = \beta + \gamma z$ para algún $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Pero $\varphi(0) = 0$, entonces $\beta = 0$. Es decir, $\varphi(z) = \gamma z$ para algún γ. Está claro que $|\gamma| \leq 1$.

□

Del teorema previo se obtiene la siguiente consecuencia.

Corolario 3.18. *C_φ es un operador autoadjunto ($C_\varphi^* = C_\varphi$) si y sólo si $\varphi(z) = \gamma z$ para algún número real γ, con $|\gamma| \leq 1$.*

Demostración. Asumimos primero que C_φ es autoadjunto, entonces $C_\varphi^* = C_\varphi$. Por el teorema 3.17, $\varphi(z) = \gamma z$ para algún $\gamma, |\gamma| \leq 1$. Ahora solo nos falta probar que γ es real. Pero por la demostración del teorema 3.17, $C_\varphi^* = C_\psi$ donde $\psi(z) = \bar{\gamma} z$ para algún $\gamma, |\gamma| \leq 1$. Así $C_\varphi = C_\psi$ y por el lema 3.8, si $z \in \mathbb{D}$, $\varphi(z) = \psi(z)$. Es decir, $\gamma z = \bar{\gamma} z$ y esto implica que γ es real.

Recíprocamente, sea $\varphi(z) = \gamma z$ para algún numero real $\gamma, |\gamma| \leq 1$. Por la demostración del teorema 3.17, $C_\varphi^* = C_\psi$ tal que $\psi(z) = \bar{\gamma} z$, con $z \in \mathbb{D}$. Como γ es real, entonces $\psi(z) = \bar{\gamma} z = \gamma z = \varphi(z)$ para algún $\gamma, |\gamma| \leq 1$. Así $C_\varphi^* = C_\psi = C_\varphi$ y por lo tanto C_φ autoadjunto.

□

Bibliografía

[1] K.B.ATHREYA, S.N.LAHIRI: *Measure Theory and Probability Theory.* Springer, 2006.

[2] C.BERNARDO , J.M.MIRA, J.ORIHUELA Y M.RAJA: *Análisis Funcional*. Electo Libris, 2012.

[3] B.CUARTERO Y F.J.RUIZ: *Teoría de Funciones de Variable Compleja.* https://issuu.com/abelgalois/docs/variable_compleja/1

[4] P.J.MIANA: *Curso de Análisis Funcional*. Prensas Universitarias de Zaragoza, 2006.

[5] V.I.PAULSEN Y M.RAGHUPATHI *An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces.* Cambridge University Press, 2016.

[6] J.H.SHAPIRO: *Composition Operators and Classical Function Theory.* Springer, 1993.