Núcleos reproductivos de espacios fraccionarios y su geometría

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad
Zaragoza
1542

Jesús Oliva Maza
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: José E. Galé Gimeno y Pedro J. Miana Sanz
10 de septiembre de 2022

Resumen

A (scalar) reproducing kernel Hilbert $\mathscr{H}$ space is a Hilbert space consisting of complex-valued functions whose domain is given by a set Z such that, for any point $z \in Z$, its associated point evaluation $E_z : \mathscr{H} \to \mathbb{C}, E_z f := f(z)$ is a continuous functional on $\mathscr{H}$. The Riesz representation theorem leads to the existence of a bivariate function K, referred as to the reproducing kernel of $\mathscr{H}$, which is a very useful tool to obtain information about the space $\mathscr{H}$. Reproducing kernel Hilbert spaces have become important in many areas, statistics and machine learning among them, and they play a valuable role in complex analysis, probability, group representation theory, and the theory of integral operators.

In this work, we focus on the less explored topic of the differential geometric aspects of reproducing kernel Hilbert spaces. In this setting, it is natural to consider reproducing kernel Hilbert spaces over vector bundles, that is, Hilbert spaces $\mathscr{H}$ of sections of a vector bundle $\Pi : D \to Z$ such that, for any $z \in Z$, the evaluation $E_z : \mathscr{H} \to \Pi^{-1}(z)$, $E_z f = f(z)$ is a continuous operator. Such reproducing kernel Hilbert spaces have applications in the quantization of a mechanical system. More precisely, a reproducing kernel on a suitable vector bundle can be interpreted as a transition probability amplitude between two points of the phase space of a mechanical system, see [12]. Another application arises from the geometric realizations as homogeneous vector bundles for certain representations of group of invertible elements in C^*-algebras, see [3, 4].

In this circle of ideas, it was proved in [2, 3] that, under mild assumptions, smooth reproducing kernels on an infinite-dimensional Hermitian vector bundle give rise to linear connections on that bundle, and hence to covariant derivatives. The aim of this work is twofold. First, we want to explain such a relation between reproducing kernels and linear connections in a self-contained and accessible way for graduated students. This is not a trivial task since the presentation of such results in [2, 3] requires, for the reader, basic knowledge on infinite-dimensional differential geometry, Banach-Lie group representations, and reproducing kernel Hilbert space theory. We will slightly change this presentation, so no Banach-Lie group representation knowledge is required. Secondly, we will extend results of [3] from the smooth setting to C^N-differentiable manifolds. Luckily, the proofs of such extensions are analogous to the original ones. This extension is partly motivated by some reproducing kernels of fractional-type, which were studied in [6] in connection with the fractional averaged-Brownian motion. In addition, we will also slighty improve the formula given in [3, Theorem 4.2] for the covariant derivative induced by a reproducing kernel, so now it has a simpler expression and is also applicable to a wider class of sections.

To reach these goals, this work is organized as follows. In Chapter 1, we introduce the reproducing kernel Hilbert spaces (RKHS henceforth) in its most basic version, i.e. the scalar case where the elements of the RKHS are complex-valued functions. Inspired by [14], we prove some of the fundamental properties of these spaces and their reproducing kernels, such as the celebrated Moore-Aronzsjan theorem, which characterizes those bivariate functions which are reproducing kernels of some RKHS. The aim of this chapter is to serve us as a stepping-stone to introduce later on reproducing kernel Hilbert spaces defined over vector bundles.

In Chapter 2, we introduce the differential geometric tools that will be needed for our purposes. More precisely, we start by giving the definition of (Banach) vector bundles as well as their morphisms, with special emphasis on the tangent vector bundles, since they are in the core of the connection theory. Then we get to the main point of the chapter: definition and some pull-back properties of linear connections on vector bundles and their induced covariant derivatives. These concepts may be a bit hard to grasp at a first reading. We try to make it more accessible by giving interpretations of such objects in terms of paths, which are much more intuitive and easier to follow (although generally harder to make rigorous proofs with). We use, as a guide for this chapter, monographs [8, 9], together with the appendix of [3].

Chapter 3 is devoted to the main objective of the work: the linear connection and covariant derivative induced by a suitable reproducing kernel Hilbert space over a vector bundle. We start by giving the definition of a RKHS over a vector bundle, and prove a Moore-Aronzsjan like theorem in this setting, where we follow the steps of [4]. The sketch of its proof is analogous to the scalar case which was dealt with in Chapter 1, though now it requires the differential geometric techniques explained in Chapter 2, which make the proof considerably more technical. Then, we extend the results of [3] from the C^∞ setting to the C^N setting, in particular [3, Theorem 4.2], where we detail the covariant derivative induced by a (C^N-admissible) reproducing kernel, extending the original result so it now covers a wider class of sections and has a simpler expression, see Theorem 3.11. We finish this work by giving some examples of reproducing kernels on vector bundles and their induced covariant derivative.

Índice general

Capítulo 1

Espacios de núcleo reproductivo

Los espacios de núcleo reproductivo aparecen en una gran diversidad de áreas, como en la teoría de aproximación, estadística, aprendizaje automático, análisis complejo y análisis en general. En este capítulo, veremos la definición de los espacios que generan y uno de los resultados más importantes de esta teoría: el teorema de Moore–Aronszajn, que establece una biyección entre los espacios de núcleo reproductivo y las funciones núcleo. Siguiendo la presentación de [14], daremos este resultado para funciones con valores en $\mathbb{C}$ en primer lugar, y después la extenderemos para funciones con valores en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ arbitrario.

1.1. Definición y ejemplos

Dado un conjunto Z, denotamos por $\mathscr{F}(Z)$ al conjunto de funciones complejas con dominio Z. Es claro que el conjunto $\mathscr{F}(Z)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ con las definiciones usuales de suma de funciones y multiplicación por escalares.

Definición 1.1. *Dado un conjunto Z, diremos que un subespacio vectorial $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}(Z)$ es un* ***espacio de Hilbert de núcleo reproductivo****, o de forma abreviada, un RKHS sobre Z (Reproducing Kernel Hilbert Space), si*

(i) $\mathscr{H}$ está equipado con un producto interno $(\cdot \mid \cdot)$ que dota a $\mathscr{H}$ de estructura de espacio de Hilbert;

(ii) para cada $z \in Z$, el funcional $E_z : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, dado por la evaluación puntual en z, $E_z(f) = f(z)$, es acotado.

El punto de partida esencial para la teoría de espacios de Hilbert con núcleo reproductivo es la siguiente sencilla observación. Si $\mathscr{H}$ es un RKHS sobre Z, el *teorema de representación de Riesz* implica que, para cada $z \in Z$, E_z viene dado por un único vector $k_z \in \mathscr{H}$ tal que $f(z) = E_z f = (f \mid k_z)$ para todo $f \in \mathscr{H}$.

Definición 1.2. *Dado un RKHS $\mathscr{H}$ sobre Z y un punto $z \in Z$, el elemento k_z es denominado* ***núcleo reproductivo para el punto*** *z. La función de dos variables $K : Z \times Z \to \mathbb{C}$ dada por*

$$K(y,z) := k_z(y) = (k_z \mid k_y), \qquad y,z \in Z,$$

es denominada ***núcleo reproductivo*** *de $\mathscr{H}$.*

Notemos que, según la definición del núcleo reproductivo K,

$$K(y,z) = (k_z \mid k_y) = \overline{(k_y \mid k_z)} = \overline{K(z,y)}, \qquad y,z \in Z,$$

y que también

$$\|E_z\|^2 = \|k_z\|^2 = (k_z \mid k_z) = K(z,z), \qquad z \in Z.$$

(1) *El espacio de Hardy del disco unidad* $H^2(\mathbb{D})$. El cálculo de núcleos reproductivos no es sencillo en muchas ocasiones. Sin embargo, sí que resulta sencillo en el siguiente ejemplo, que incluimos a modo de ilustración. Sea el disco unidad $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, y sea $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, con desarrollo en serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$. Con $H^2(\mathbb{D})$ denotamos el conjunto de todas las funciones holomorfas f cuyo desarrollo en serie cumple $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Es evidente que $H^2(\mathbb{D})$ está en biyección con $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, donde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado que $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ es un espacio de Hilbert, podemos inducir en $H^2(\mathbb{D})$ la estructura de espacio de Hilbert dada por

$$(f \mid g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \qquad \text{para} \quad f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^2(\mathbb{D}).$$

Además, las evaluaciones puntuales son funcionales continuos en $H^2(\mathbb{D})$ ya que aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|f(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z^n| \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n}\right)^{1/2} = \|f\| \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}, \quad f \in H^2(\mathbb{D}), z \in \mathbb{D}.$$

Para obtener el núcleo reproductivo K de $H^2(\mathbb{D})$, observemos que, si definimos $k_w(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w^n} z^n$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces $k_w \in H^2(\mathbb{D})$ para todo $w \in \mathbb{D}$, y además $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = (f \mid k_w)$ para todo $f \in H^2(\mathbb{D})$ y $w \in \mathbb{D}$, de donde concluimos que

$$K(z,w) = k_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w^n} z^n = \frac{1}{1-\overline{w}z}, \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

Este núcleo, conocido como el **núcleo de Szegö**, tiene una gran importancia en el análisis complejo.

(2) *El espacio de Hardy del semiplano complejo* $H^2(\mathbb{C}^+)$. Sea $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Denotamos por $H^2(\mathbb{C}^+)$ al conjunto de funciones holomorfas f en $\mathbb{C}^+$ tales que

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{C}^+)} := \left(\frac{1}{2\pi} \sup_{x>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 \, dy\right)^{1/2} < \infty.$$

Es bien conocido que $H^2(\mathbb{C}^+)$ es un RKHS con la norma dada por $\|\cdot\|_{H^2(\mathbb{C}^+)}$, con núcleo reproductivo K dado por

$$K(z,w) = \frac{1}{2(z+\overline{w})}, \qquad z, w \in \mathbb{C}^+,$$

ver por ejemplo [16] para una demostración de este hecho.

El teorema de Paley-Wiener muestra que $H^2(\mathbb{C}^+)$ es la imagen de $L^2(0,\infty)$ mediante la transformada de Laplace $\mathscr{L}$, es decir, $H^2(\mathbb{C}^+) = \mathscr{L}(L^2(0,\infty))$. En general, los espacios rango de operadores integrales con núcleos en L^2 resultan ser RKHS, ver por ejemplo [14, Sección 11]. En [6] se estudia el caso particular de espacios rango de operadores Cesàro con dominios $L^2(0,\infty)$ y $H^2(0,\infty)$. Los núcleos de estos operadores son homogéneos de orden -1, que son conocidos como núcleos de Hardy. Parte de la teoría de [6] se extiende a núcleos generales de Hardy en [13]:

(3) *Rango de operadores de Hardy en* $L^2(0,\infty)$. Una aplicación medible $H : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{C}$ se llama **núcleo de Hardy** (de orden 2) si:

(i) H es homogénea de grado -1, esto es, $H(\lambda r, \lambda s) = \frac{1}{\lambda} H(r,s)$ para todo λ, r, $s > 0$;

(ii) $\int_0^{\infty} |H(1,s)| s^{-1/2} \, ds < \infty$.

La clásica desigualdad de Hardy [7, Theorem 319] implica que el operador $A_H : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ dado por

$$(A_H f)(r) = \int_0^\infty H(r,s) f(s)\, ds, \qquad \text{para casi todo } r > 0,$$

es un operador acotado. A los operadores de este tipo se les conoce como **operadores de Hardy**. El siguiente resultado de [13] relaciona los núcleos de Hardy con los núcleos reproductivos.

Proposición 1.1. *Sea H un núcleo de Hardy de orden 2. Entonces, el espacio rango $A_H(L^2(0,\infty))$ es un RKHS si y solo si $H(1,\cdot) \in L^2(0,\infty)$. En este caso, el núcleo reproductivo K de $A_H(L^2(0,\infty))$ es a su vez un núcleo de Hardy de orden 2, que viene dado por*

$$K(r,s) = \int_0^\infty H(r,t)\overline{H(s,t)}\, dt, \qquad r,s > 0,$$

Como casos particulares de este resultado, uno obtiene que los siguientes espacios de Sobolev de orden fraccionario

$$\mathscr{T}_2^{(\alpha)}(t^\alpha) = \{f \in L^2(0,\infty) \mid x^\alpha W^\alpha f \in L^2(0,\infty)\} = \{f \in L^2(0,\infty) \mid I^\alpha(x^\alpha f) \in L^2(0,\infty)\},$$

son RKHS para $\alpha > 1/2$, donde W^α y I^α denotan respectivamente las derivadas fraccionarias de Weyl y Riemann-Liouville de orden α, ver [6] para una definición de estas derivadas fraccionarias. Sus respectivos núcleos reproductivos vienen dados por

$$K_{\mathscr{T}_2^{(\alpha)}(t^\alpha)}(r,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)^2} \int_{\text{máx}\{r,s\}}^\infty (t-r)^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1} \frac{dt}{t^{2\alpha}}, \qquad r,s > 0,$$

1.2. Propiedades básicas de los RKHS

En esta sección vemos algunas de las propiedades básicas de los RKHS. En particular, el Teorema 1.3 nos dice que el núcleo K de un RKHS $\mathscr{H}$ caracteriza totalmente a $\mathscr{H}$ como espacio de Hilbert, lo que da idea de la importancia de la teoría.

Proposición 1.2. *Sea $\mathscr{H}$ un RKHS sobre Z con núcleo reproductivo K. Entonces, el espacio generado por las combinaciones lineales de las funciones $\{k_z(\cdot) = K(\cdot,z) \mid z \in Z\}$ es denso en $\mathscr{H}$.*

Demostración:
Si el enunciado fuera falso, podríamos tomar una función $f \in \mathscr{H}$ que fuera ortogonal a las combinaciones lineales de las funciones $\{k_z \mid z \in Z\}$. En particular, $f(z) = (f \mid k_z) = 0$ para $z \in Z$, esto es, $f = 0$, de donde concluimos el enunciado. ■

Teorema 1.3. *Sean $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ dos RKHS sobre Z con núcleos reproductivos respectivos K_1, K_2. Sea $\|\cdot\|_i$ la norma sobre $\mathscr{H}_i$ para $i = 1,2$. Si $K_1 = K_2$, entonces $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$ con $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$.*

Demostración:
Definamos $K(y,z) := K_1(y,z) = K_2(y,z)$ para todo $y,z \in Z$, y sea $W := \text{span}\{k_z \in \mathscr{H} \mid z \in Z\}$. Por la Proposición 1.2, sabemos que W es un subconjunto denso de $\mathscr{H}_i$, $i = 1,2$. Sea $f \in W$, es decir $f = \sum_j \alpha_j k_{z_j}$ para ciertos $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $z_j \in Z$. Entonces

$$\|f\|_1^2 = \left\| \sum_j \alpha_j k_{z_j} \right\|_1^2 = \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j (k_{z_j} \mid k_{z_i})_1 = \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j K(z_i,z_j) = \|f\|_2^2.$$

Por tanto, $\|f\|_1 = \|f\|_2$ para toda función $f \in W$.

Sea ahora $f \in \mathscr{H}_1$. Entonces, existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $\mathscr{H}_1$, la igualdad de normas en W que acabamos de probar implica que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión de Cauchy en $\mathscr{H}_2$, luego existe $g \in \mathscr{H}_2$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_2 = 0$. Como las evaluaciones son funcionales continuos en $\mathscr{H}$, concluimos que $g(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, de modo que $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_2$. Razonando de un modo análogo obtenemos que $\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}_1$, luego $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$.

Finalmente, como $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$ y las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ coinciden en el subconjunto denso W, concluimos que $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$. ■

A continuación damos un resultado que nos permite obtener el núcleo reproductivo K de un RKHS $\mathscr{H}$ de una forma explícita a partir de una base ortonormal de $\mathscr{H}$. Para ello, necesitamos la siguiente noción de convergencia: dada una familia de vectores $\{h_s \mid s \in S\}$ en un espacio vectorial normado X, indexada por un conjunto arbitrario S, diremos que $h = \sum_{s\in S} h_s$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito $F_0 \subset S$ tal que, para todo conjunto finito F tal que $F_0 \subset F \subset S$, entonces $\|h - \sum_{s\in F} h_s\| < \varepsilon$.

Proposición 1.4. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de núcleo reproductivo sobre Z con núcleo reproductivo K. Si $\{e_s \in \mathscr{H} \mid s \in S\}$ es una base ortonormal de $\mathscr{H}$, entonces*

$$K(y,z) = \sum_{s\in S} \overline{e_s(z)} e_s(y), \qquad y,z \in Z.$$

Demostración:

Para todo $z \in Z$ y $s \in S$, tenemos que $(k_z \mid e_s) = \overline{(e_s \mid k_z)} = \overline{e_s(z)}$. Por otro lado, por ser $\{e_s \mid s \in S\}$ una base ortonormal, tenemos que $k_z = \sum_{s\in S}(k_z \mid e_s)e_s$. Dado que la convergencia en $\mathscr{H}$ implica la convergencia puntual por ser las evaluaciones continuas, tenemos que $K(y,z) = k_z(y) = \sum_{s\in S}(k_z \mid e_s)e_s(y) = \sum_{s\in S} \overline{e_s(z)} e_s(y)$, como queríamos demostrar. ■

1.3. Teorema de Moore-Aronszajn

En esta sección nos centramos en el Teorema de Moore-Aronszajn, que caracteriza aquellas funciones $K(\cdot,\cdot)$ que son el núcleo reproductivo de algún RKHS. Previamente, debemos recordar algunos conceptos y propiedades sobre matrices. Dada una matriz compleja $A = (a_{i,j})$ de tamaño $n \times n$, diremos que A es **no negativa** si, para cada terna $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, tenemos que $\sum_{i,j=1}^n \overline{\alpha_i}\alpha_j a_{i,j} \geq 0$. Denotaremos que A es no negativa por $A \geq 0$. Notemos que $A \geq 0$ si y solo si $(Ax \mid x) \geq 0$ para todo $x \in C^n$, donde $(\cdot \mid \cdot)$ denota en este caso el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$.

Se tiene que si A,B son matrices $n \times n$ con $A,B \geq 0$, entonces $A+B \geq 0$ y $rA \geq 0$ para todo $r \geq 0$. Además, $A \geq 0$ si y solo si $A = A^*$ (A es auto-adjunta) y todo valor propio de A es no negativo.

Definición 1.3. *Sea Z un conjunto y sea $K : Z \times Z \to \mathbb{C}$. Diremos que K es una* ***función definida no negativa*** *si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda elección de puntos distintos $\{z_1, \ldots, z_n\} \in Z$, tenemos que la matriz $(K(z_i,z_j)) \geq 0$. Denotaremos que K es una función definida no negativa por $K \geq 0$.*

A continuación vemos que todo núcleo reproductivo es una función definida no negativa.

Proposición 1.5. *Sea Z un conjunto y sea $\mathscr{H}$ un RKHS sobre Z con núcleo reproductivo K. Entonces K es una función definida no negativa, esto es $K \geq 0$.*

Demostración:

Sean $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset Z$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Tenemos que

$$\sum_{i,j=1}^n \overline{\alpha_i}\alpha_j K(z_i,z_j) = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j k_{z_j}, \sum_{i=1}^n \alpha_i k_{z_i} \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i k_{z_i} \right\| \geq 0,$$

y hemos demostrado el resultado. ■

El recíproco de la anterior proposición es el teorema que buscamos.

Teorema 1.6 (Moore-Aronszajn [1])**.** *Sea Z un conjunto y sea $K : Z \times Z \to \mathbb{C}$ una función definida no negativa. Entonces, existe un único espacio de Hilbert de núcleo reproductivo $\mathscr{H}$ tal que K es el núcleo reproductivo de $\mathscr{H}$.*

Demostración:

Sea $k_z : Z \to \mathbb{C}$ la función dada por $k_z(y) := K(y,z)$ para $y \in Z$. Por la Proposición 1.2, sabemos que si K fuera el núcleo de un RKHS, entonces $W := \operatorname{span}\{k_z \mid z \in Z\}$ sería un subespacio denso en este espacio. Por ello, empezamos definiendo un producto interno en W. El candidato natural es $B : W \times W \to \mathbb{C}$ dado por $B\left(\sum_j \alpha_j k_{z_j}, \sum_i \beta_i k_{y_i}\right) := \sum_{i,j} \overline{\beta_i}\alpha_j K(y_i, z_j)$, donde $\alpha_j, \beta_i \in \mathbb{C}$ y $z_j, y_i \in Z$.

Lo primero que tenemos que demostrar es que la aplicación B está bien definida, ya que en el caso de que $\{k_{z_j}\}$ o $\{k_{y_i}\}$ sean familias dependientes, podemos expresar la misma función en forma de distintas combinaciones lineales. Dada la sesquilinealidad de B, basta demostrar que si $f = \sum_j \alpha_j k_{z_j}$ es la función nula, entonces $B(f,g) = B(g,f) = 0$ para toda $g \in W$. Además, como W es el subespacio generado por $\{k_z \mid z \in \mathbb{C}\}$, bastará demostrar que $B(f,k_z) = B(k_z,f) = 0$ para todo $z \in Z$. Pero por la propia definición de B, $B(f,k_z) = \sum_j \alpha_j K(z,z_j) = f(z) = 0$. Por otro lado

$$B(k_z,f) = \sum_j \overline{\alpha_j} K(z_j,z) = \sum_j \overline{\alpha_j K(z,z_j)} = \overline{f(z)} = 0.$$

Por tanto concluimos que B está bien definida, y por lo comentado anteriormente, es una forma sesquilineal. Además, es claro que $B(f,f) \geq 0$ para todo $f \in W$, pues si $f = \sum_j \alpha_j k_{z_j}$ (con $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$), entonces

$$B(f,f) = \sum_{i,j} \alpha_j \overline{\alpha_i} K(z_i,z_j) \geq 0,$$

ya que K es una función definida no negativa. Para demostrar que B es producto interno solo falta comprobar que si $B(f,f) = 0$, entonces $f = 0$. Pero razonando como en la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, vemos que $B(f,f) = 0$ si y solo si $B(g,f) = B(f,g) = 0$ para todo $g \in W$. En particular, $f(z) = \sum_j \alpha_j K(z,z_j) = B(f,k_z) = 0$ para todo $z \in Z$, de modo que $f = 0$.

Hemos demostrado que B define un producto interno sobre W. Por tanto, podemos considerar el espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ dado por las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en W. Hemos de demostrar que todo elemento de $\mathscr{H}$ se puede identificar de forma única con un elemento de $\mathscr{F}(Z)$. Para ello, dado $h \in \mathscr{H}$, definimos $\widehat{h} \in \mathscr{F}(Z)$ dada por

$$\widehat{h}(z) := (h \mid k_z), \qquad z \in Z,$$

y sea $\widehat{\mathscr{H}} := \{\widehat{h} \mid h \in \mathscr{H}\}$, de modo que $\widehat{\mathscr{H}} \subset \mathscr{F}(Z)$. Entonces, definimos el operador $L : \mathscr{H} \to \widehat{\mathscr{H}}$ dado por $Lh = \widehat{h}$, que es claramente lineal. Además, tenemos que para toda función $f \in W$, $(Lf)(z) = \widehat{f}(z) = (f \mid k_z) = f(z)$ para todo $z \in Z$.

Ahora queremos demostrar que la aplicación $L : \mathscr{H} \to \widehat{\mathscr{H}}$ es inyectiva, lo que es equivalente a demostrar que $\widehat{h} = 0$ si y solo si $h = 0$.

Supongamos que $\widehat{h}(z) = 0$ para todo $z \in Z$. Entonces $h \perp k_z$ para todo $z \in Z$, de modo que $h \perp W$. Pero como W es denso en $\mathscr{H}$ por la propia construcción de $\mathscr{H}$, concluimos que $h = 0$. Por tanto, $L : \mathscr{H} \to \widehat{\mathscr{H}}$ es una biyección, y podemos dotar a $\widehat{\mathscr{H}}$ de la estructura de espacio de Hilbert inducida por L. Más precisamente, $(\widehat{h_1} \mid \widehat{h_2}) = (h_1 \mid h_2)$, de modo que $\widehat{\mathscr{H}}$ es un espacio de Hilbert de funciones sobre Z. Como

$$E_z \widehat{h} = \widehat{h}(z) = (h \mid k_z) = (\widehat{h}, \mid \widehat{k_z}), \qquad z \in Z, \quad \widehat{h} \in \widehat{\mathscr{H}},$$

vemos que $\widehat{\mathscr{H}}$ es un RKHS sobre Z con núcleo reproductivo $\widehat{K}$ dado por

$$\widehat{K}(y,z) = \widehat{k_z}(y) = (k_z \mid k_y) = B(k_z,k_y) = K(y,z), \qquad y,z \in Z,$$

de donde concluimos que K es el núcleo reproductivo de $\widehat{\mathscr{H}}$, como queríamos demostrar. La unicidad de $\mathscr{H}$ se sigue del Teorema 1.3. ■

Capítulo 2

Fibrados vectoriales

En este capítulo se introducen los conceptos geométricos necesarios para el desarrollo del Capítulo 3. En particular, se define la derivada covariante asociada a una conexión lineal en un fibrado vectorial [8]. Este punto de vista simplifica notablemente las demostraciones del Capítulo 3.

La teoría de todo este capítulo está desarrollada para variedades modeladas en espacios de Banach X. No nos detenemos demasiado en los conceptos y propiedades básicas (variedad diferenciable, morfismo entre variedades, fibrado tangente, ...), ya que son análogos al caso en el que X es un espacio de dimensión finita, lo cual se contempla en los estudios de Grado. Como apunte breve del interés de las variedades de Banach y fibrados asociados, veremos los importantes ejemplos concretos de variedad grasmaniana (Ejemplo 2.10) y el fibrado homogéneo (Sección 3.3(v)).

2.1. Fibrados vectoriales

Sea X un espacio de Banach real[1], esto es, un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ normado donde toda secuencia de Cauchy es convergente. En esta sección definimos conceptos básicos sobre variedades diferenciables modeladas en espacios de Banach arbitrarios, ver [9, Chapter I] para más detalles.

Definición 2.1. *Sean X, Y dos espacios de Banach, y sea $f : X \to Y$ una función arbitraria con dominio* $\mathrm{dom} f$ *un subconjunto abierto de X. Diremos que f es diferenciable (de Fréchet) en $x_0 \in \mathrm{dom} f$ si existe una aplicación lineal y continua $\mathrm{d}f(x_0) : X \to Y$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0.$$

Si f es diferenciable en todo punto de $\mathrm{dom} f$*, diremos que f es diferenciable.*

Notemos que si $f : X \to Y$ es diferenciable, obtenemos la aplicación inducida $\mathrm{d}f : X \to L(X,Y)$ dada por $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$, donde $L(X,Y)$ denota el conjunto de operadores lineales y continuos de X a Y. Como $L(X,Y)$ es a su vez espacio de Banach, podemos plantear la diferenciabilidad de la aplicación $\mathrm{d}f$. De este modo, diremos que f es diferenciable de orden $N \in \mathbb{N}$ si f es $N-1$ diferenciable, y $\mathrm{d}^{N-1} f$ es a su vez diferenciable. Diremos que f es C^N-diferenciable, si existe la diferencial de orden N de f y esta es continua con la norma usual en las aplicaciones multilineales $L^N(X,Y)$. Se puede demostrar que el conjunto de funciones diferenciables es un espacio vectorial, y que además la composición de dos funciones de clase C^N es a su vez una función de clase C^N.

A lo largo del resto del trabajo, N denotará un elemento de $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Con la noción de diferenciabilidad en espacios de Banach arbitrarios, ahora podemos plantear la definición de un atlas con espacios de Banach.

Definición 2.2. *Sea Z un espacio topológico de Hausdorff. Un C^N**-atlas** sobre Z es una colección de parejas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, denominados **cartas**, tales que*

[1] Notemos que todo espacio vectorial complejo se puede interpretar como un espacio vectorial real

AT 1 *Cada U_i es un subconjunto abierto de Z y $Z = \cup_{i \in I} U_i$.*

AT 2 *Cada φ_i es un isomorfismo de U_i sobre un conjunto abierto $\varphi_i U_i$ de un espacio de Banach X_i. Además, para todo $i, j \in I$, $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es un subconjunto abierto de X_i.*

AT 3 *La aplicación $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es C^N-diferenciable para todo $i, j \in I$.*

Diremos que dos atlas sobre un mismo conjunto Z son equivalentes si su unión es a su vez otro atlas sobre Z. Una clase de equivalencia de atlas sobre Z define una estructura de **C^N-variedad diferenciable** sobre Z. Dadas dos C^N-variedades diferenciables Y, Z, diremos que una aplicación $\zeta : \operatorname{dom}\zeta \subset Y \to Z$ es un **C^N-morfismo local** entre Y y Z si $\operatorname{dom}\zeta$ es un subconjunto abierto de Y, para cada $y \in \operatorname{dom}\zeta$ existen cartas (U', φ'), (U, φ) de $y, \zeta(y)$ respectivamente tales que $U' \subset \operatorname{dom}\zeta$, $\zeta(U') \subset U$ y la aplicación $\varphi \circ \zeta \circ (\varphi')^{-1}$ es C^N diferenciable. Si además $\operatorname{dom}\zeta = Y$, diremos que ζ es un **C^N-morfismo global**, o C^N-morfismo a secas.

Ejemplo 2.1. Sea X un espacio de Banach. Entonces, todo subconjunto abierto $V \subset X$ tiene estructura de C^∞-variedad diferenciable inducida por la carta global $\iota : V \hookrightarrow X$ dada por la inclusión. En particular, el grupo de elementos invertibles de un álgebra de Banach con unidad es una C^∞-variedad, ver [8].

A continuación introducimos los fibrados vectoriales, los cuales generalizan a los fibrados tangentes. De forma intuitiva, un fibrado vectorial consiste en un morfismo entre variedades diferenciables $\Pi : D \to Z$ donde las fibras $\{\Pi^{-1}(z)\}_{z \in Z}$ tienen una estructura de espacio de Banach que varía de forma suficientemente suave a lo largo de Z.

Definición 2.3. *Sea un triple (Π, D, Z), donde D, Z son C^N-variedades diferenciables, y $\Pi : D \to Z$ es un C^N-morfismo sobreyectivo entre ellas. Diremos que la colección $(U_i, \mu_i)_{i \in I}$ es un **recubrimiento de trivializaciones** de Π si $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de Z y $\mu_i : \Pi^{-1}(U_i) \to U_i \times E$, siendo E_i espacios de Banach, y tales que se satisfacen las siguientes propiedades:*

VB1 *Las aplicaciones $\mu_i : \Pi^{-1}(U_i) \to U_i \times E_i$ son C^N-isomorfismos tales que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \Pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[dr, "\Pi"'] & U_i \times E_i \arrow[d] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

VB2 *Para todo $z \in Z$, la fibra $D_z := \Pi^{-1}(z)$ tiene una estructura de espacio vectorial topológico banacheable[2] tal que la trivialización local*

$$\mu_{iz} : \Pi^{-1}(z) = D_z \to E_i,$$

induce un isomorfismo (entre espacios vectoriales topológicos).

VB3 *Para $i, j \in I$, la aplicación con dominio $U_i \cap U_j$ y codominio $L(E_i, E_j)$ dada por*

$$z \mapsto \mu_{jz} \circ \mu_{iz}^{-1},$$

es un C^N-morfismo.

Dos recubrimientos de trivializaciones $(U_i, \mu_i)_{i \in I}$, $(V_j, \varphi_j)_{j \in J}$ de Π se dicen equivalentes si su unión sigue siendo un recubrimiento de trivializaciones de Π. Diremos que clase de equivalencia de recubrimientos de trivializaciones determina una estructura de **fibrado vectorial** sobre Π (o abusando del lenguaje, sobre D), donde D es el **espacio total** del fibrado y Z el **espacio base**. Denominaremos a las aplicaciones μ_i **trivializaciones locales** de Π.

[2] Un espacio vectorial topológico banacheable E es un espacio vectorial topológico E tal que existe alguna norma $\|\cdot\|$ compatible con la topología de E, y con la cual E es un espacio métrico completo, esto es $\|\cdot\|$ dota a E de estructura de espacio de Banach.

Ejemplo 2.2.
- Dada una C^N-variedad Z y un espacio de Banach E, la aplicación $\Pi : Z \times E \to Z$ dada por la proyección tiene una estructura canónica de fibrado vectorial. A este tipo de fibrados vectoriales se les conoce como **fibrados triviales**.
- Dada una C^N-variedad Z, su fibrado tangente $T(Z)$ es un C^{N-1}-fibrado vectorial, ver Sección 2.2.
- Al final de este capítulo, veremos un fibrado infinito-dimensional de particular interés para nuestro trabajo: el fibrado vectorial universal asociado a un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$.

Definición 2.4. *Dados dos C^N-fibrados vectoriales $\Pi : D \to Z$, $\Pi' : D' \to Z'$, un* ***C^N-morfismo entre los los fibrados vectoriales*** *$\Pi \to \Pi'$, consiste en una pareja de C^N-morfismos de variedades $\theta = (\delta, \zeta)$ con $\zeta : Z \to Z'$, $\delta : D \to D'$ tales que*

VB Mor1 *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\delta} & D' \\ \downarrow{\scriptstyle \Pi} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi'} \\ Z & \xrightarrow{\zeta} & Z \end{array}$$

es conmutativo, y para cada $z \in Z$, la aplicación inducida en las fibras $\delta_z : D_z \to D'_{\zeta(z)}$ es una aplicación lineal y continua.

VB Mor2 *Para cada $z \in Z$, existen trivializaciones locales*

$$\mu : \Pi^{-1}(U) \to U \times E_i, \qquad \mu' : (\Pi')^{-1}(U') \to U' \times E'_i,$$

en z y $\zeta(z)$ respectivamente, tales que $\zeta(U) \subset U'$ y la aplicación de U a $L(E_i, E'_i)$ dada por

$$z \mapsto \mu'_{\zeta_0(z)} \circ \delta_z \circ (\mu_z)^{-1},$$

es un C^N-morfismo.

No es difícil comprobar que el conjunto de fibrados vectoriales y sus morfismos forman una categoría. Por otro lado, si U es un subconjunto abierto de Z, es sencillo ver que la restricción $\Pi|_{\Pi^{-1}(U)} : \Pi^{-1}(U) \to U$ sigue siendo un C^N-fibrado vectorial. Entonces, un C^N-morfismo entre el fibrado restricción $\Pi|_{\Pi^{-1}(U)}$ y Π' lo denominaremos **C^N-morfismo localmente definido**.

Observación 2.3. En el caso de que E_i sean espacios de dimensión finita, las condiciones VB3 y VB Mor2 son redundantes respectivamente en la Definición 2.3 (fibrado vectorial) y en la Definición 2.4 (morfismos entre fibrados vectoriales), ver por ejemplo Proposición III.1.1 y p. 48 en [9].

Sea $\Pi : D \to Z$ un C^N-fibrado vectorial, y sea $\zeta : Y \to Z$ un C^N-morfismo. Sea el conjunto $\zeta^*(D) := \{(y,d) \in Y \times D \,|\, \zeta(y) = \Pi(D)\}$, junto con las respectivas proyecciones $\zeta^*(\Pi) : \zeta^*(D) \to Y$, $\Pi^*(\zeta) : \zeta^*(D) \to D$.

Proposición 2.4. *Sea $\Pi : D \to Z$ un C^N-fibrado vectorial y sea $\zeta : Y \to Z$ un C^N-morfismo entre variedades. Entonces $\zeta^*(\Pi) : \zeta^*(D) \to Y$ es un fibrado vectorial (denominado* ***pull-back****), y la pareja $(\zeta, \Pi^*(\zeta))$ es un morfismo entre fibrados vectoriales.*

$$\begin{array}{ccc} \zeta^*(D) & \xrightarrow{\Pi^*(\zeta)} & D \\ \downarrow{\scriptstyle \zeta^*(\Pi)} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi} \\ Y & \xrightarrow{\zeta} & Z \end{array}$$

Demostración:

Sea $\mu : \Pi^{-1}(U) \to U \times E$ una trivialización local de Π. Tomando el abierto $V := \zeta^{-1}(U) \subset Y$, definimos la aplicación $\zeta^*(\mu) : (\zeta^*(\Pi))^{-1}(V) \to V \times E$ dada por $(y,d) \mapsto (y, \mu(d))$. Tenemos que si $(U_i, \mu_i)_{i\in I}$ es un recubrimiento de trivializaciones de Π entonces $(V_i, \zeta^*(\mu_i))_{i\in I}$ es un recubrimiento de trivializaciones de $\zeta^*(\Pi)$, donde a cada fibra de $\zeta^*(D)$ le dotamos de la estructura de espacio banacheable por su biyección natural con la fibra $D_{\zeta(y)}$. Además, $(\zeta, \Pi^*(\zeta))$ es un morfismo de fibrados vectoriales. En efecto, el diagrama anterior es conmutativo por la propia definición de $\zeta^*(\Pi), \Pi^*(\zeta)$, y la respectiva aplicación de VB Mor 2 es la aplicación constante identidad $y \mapsto I_{E_i}$ cuando consideramos los recubrimientos de trivializaciones $(U_i, \mu_i)_{i\in I}$ y $(V_i, \zeta^*(\mu_i))_{i\in I}$. ■

2.2. Fibrado tangente

En esta sección, damos la definición y algunas propiedades básicas de un fibrado vectorial de especial importancia: el fibrado tangente de una variedad. Definimos en primer lugar el concepto de espacio tangente. Sea Z una C^N-variedad con $N \geq 1$, y sea $z \in Z$. Consideramos triples (U, φ, v), donde (U, φ) es una carta en z, con $\varphi : U \to X$, y v es un vector del espacio de Banach X donde cae $\varphi(U)$. Decimos que dos triples como el anterior (U, φ, v) y (V, ψ, w) son equivalentes en z si

$$\mathrm{d}(\psi\varphi^{-1})(\varphi(z))v = w.$$

Gracias a la regla de la cadena (que se cumple en espacios de Banach, véase [9, Chapter I]), es fácil ver que dicha relación es en efecto una relación de equivalencia. Una clase de equivalencia de tales triples se denomina un **vector tangente** de Z en z, y al conjunto de clases de equivalencia $T_z(Z)$ se le denomina **espacio tangente** de Z en z. Cada carta (U, φ) determina una biyección entre $T_z(Z)$ y X dada por $[U, \varphi, v] \mapsto v$. De este modo podemos dotar al espacio tangente $T_z(Z)$ de una estructura de espacio banacheable, y es fácil ver que esta estructura es independiente de la carta seleccionada.

Sean dos variedades C^N-diferenciables Y, Z con $N \geq 1$, y sea ζ un morfismo entre ellas $\zeta : Y \to Z$. Dado $y \in Y$, podemos definir de forma natural una aplicación natural entre los espacios tangentes $T_y\zeta : T_y(Y) \to T_{\zeta(y)}(Z)$. Sean $(V, \psi), (U, \varphi)$ cartas de $y, \zeta(y)$ respectivamente tales que $\zeta(V) \subset U$. Entonces, definimos $(T_y\zeta)[V, \psi, w] := [U, \varphi, v]$, donde v viene dado por

$$v = d(\varphi \circ \zeta \circ \psi^{-1})w.$$

De nuevo, la regla de la cadena nos garantiza que $T_y\zeta$ está bien definida. Además, es sencillo ver que la operación T satisface las propiedades functoriales

$$T_w(\upsilon \circ \zeta) = (T_{\zeta(w)}\upsilon) \circ (T_w\zeta), \qquad T_w(\mathrm{id}_W) = \mathrm{id}_{T_w(W)},$$

donde W, Y, Z son C^N-variedades diferenciables con $N \geq 1$, y $\zeta : W \to Y$, $\upsilon : Y \to Z$ son C^N-morfismos entre ellas.

Dada una C^N-variedad diferenciable Z con $N \geq 1$, sea $T(Z)$ la unión disjunta de todos los espacios tangentes $T_z(Z)$, $z \in Z$. Entonces, tenemos la proyección natural $\tau_Z : T(Z) \to Z$ que lleva todo vector de $T_z(Z)$ a z para cada $z \in Z$. Entonces, tenemos la siguiente

Proposición 2.5. *Sea Z una C^N-variedad diferenciable con $N \geq 1$ con un atlas dado por $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. Para cada $i \in I$, sea la aplicación $\tau_i : \tau_Z^{-1} \circ \varphi^{-1}(U_i) \to U_i \times X_i$ dada por*

$$[U_i, \varphi_i, v] \in T_z(Z) \mapsto (\varphi(z), v), \qquad z \in \varphi_i^{-1}(U_i).$$

*Entonces, la colección $(U_i, \tau_i)_{i\in I}$ es simultáneamente un atlas y un recubrimiento de trivializaciones de $\tau_Z : T(Z) \to Z$ que dota a τ_Z de estructura de C^{N-1}-fibrado vectorial, al que denominaremos **fibrado tangente**.*

Demostración:
Que $(U_i,\tau_i)_{i\in I}$ cumplen las condiciones AT1 y AT2 es inmediato. Además, cumplen la condición AT3 con orden de diferenciabilidad $N-1$ por el hecho de que

$$\tau_j\circ\tau_i^{-1}(u,v)=(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(u),d(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})(u)v),\qquad u\in\varphi_i(U_i\cap U_j),\,v\in X_i.$$

Por esta misma expresión, se deduce inmediatamente que $(U_i,\tau_i)_{i\in I}$ también cumplen las condiciones VB1, VB2 y VB3. ■

Por otro lado, si $\zeta:Y\to Z$ es un C^N-morfismo con $N\geq 1$, podemos definir la aplicación $T\zeta:T(Y)\to T(Z)$ de modo que en cada fibra $T_y(Y)$, $y\in Y$ se comporte tal que $T\zeta|_{T_y(Y)}=T_y\zeta$.

Proposición 2.6. *Sea $\zeta:Y\to Z$ un C^N-morfismo con $N\geq 1$, la aplicación $T\zeta:T(Y)\to T(Z)$ es un C^{N-1}-morfismo entre fibrados vectoriales.*

Demostración:
Sea $y\in Y$, y sean dos trivializaciones locales (U',τ'), (U,τ) de y, $\zeta(y)$ respectivamente, tales que $T\zeta(\tau_Y^{-1}(U'))\subset\tau_Z^{-1}(U)$. Sean (U',φ'), (U,φ) las cartas de $y\in Y$, $\zeta(y)\in Z$ asociadas a (U',τ'), (U,τ) como en la Proposición 2.5. Entonces, es fácil ver que

$$\tau\circ T\zeta\circ(\tau')^{-1}(u,v)=(\varphi\circ\zeta\circ(\varphi')^{-1}(u),d(\varphi\circ\zeta\circ(\varphi')^{-1})(u)v),\qquad u\in\varphi'(U'),$$

de donde se sigue inmediatamente que $T\zeta$ es un C^{N-1}-morfismo entre fibrados vectoriales. ■

Sea Z una C^N-variedad con $N\geq 1$, sea E un espacio de Banach, y sea $z\in Z$. Sea $\Omega_z(Z,E)$ el espacio de C^N-morfismos $f:Z\to\mathbb{R}$ localmente definidos en un entorno de z. Dado $e\in E$, y usando la identificación canónica de los vectores tangentes en e, $T_e(E)$, con el propio E, es fácil ver que $(Tf)(X)$ es $\mathbb{R}$-lineal en X y en f, y que además

$$(Thf)(X)=h(z)(Tf)(X)+(Th)(X)f(z)\in E,\qquad X\in T_z(Z),\,h\in\Omega_z(Z,\mathbb{R}),\,f\in\Omega_z(Z,E).\tag{2.1}$$

Esto es, todo vector tangente $X\in T_z(Z)$ induce una derivación (usualmente denotada por X) en $\Omega_z(Z,E)$. De hecho, es fácil ver que dos vectores tangentes $X,Y\in T_z(Z)$ inducen la misma derivación si y solo si $X=Y$. En general, a diferencia del caso finito-dimensional, no toda derivación en $\Omega_z(Z,\mathbb{R})$ viene inducida por un vector tangente, ver por ejemplo [8, Lemma 28.4].

Observación 2.7. Una forma equivalente de definir el espacio tangente $T_z(Z)$ es a través de caminos, esto es, morfismos de $(-\varepsilon,\varepsilon)$ a Z, donde $\varepsilon>0$. Decimos que dos caminos γ_1,γ_2 son equivalentes si $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=z$ y además, dada cualquier carta (U,φ) de z, tenemos que $\mathrm{d}(\varphi\circ\gamma_1)(0)=\mathrm{d}(\varphi\circ\gamma_2)(0)$. Es fácil ver que el conjunto de estas clases de equivalencia está en biyección con $T_z(Z)$ a través de la aplicación $[\gamma]\mapsto[U,\varphi,\mathrm{d}(\varphi\circ\gamma)(0)]$, donde (U,φ) es cualquier carta de $z\in Z$.

Además, si $\zeta:Y\to Z$ es un C^N-morfismo entre las C^N-variedades Y,Z, y γ es un camino representante de $\xi\in T(Y)$, se obtiene que $\zeta\circ\gamma$ es un camino representante de $T\zeta(\xi)$.

A continuación definimos un subconjunto de vectores tangentes necesarios para introducir la derivada covariante en la siguiente sección.

Definición 2.5. *Sea $\Pi:D\to Z$ un C^N-fibrado vectorial, con $N\geq 1$. Diremos que $\xi\in T(D)$ es un* ***vector vertical*** *de $T\Pi$ si $T\Pi(\xi)$ es el vector nulo en $T_z(Z)\subset T(Z)$, donde $z=\tau_Z(T\Pi(\xi))=\Pi(\tau_D(\xi))$. Denotamos el conjunto de vectores verticales de $T\Pi$ por $\mathscr{V}D$, y para cada $d\in D$, denotamos por $\mathscr{V}_dD=\mathscr{V}D\cap T_d(D)$ al conjunto de vectores verticales en el punto d.*

Notemos que un vector $\xi\in T_d(D)$ es vertical si y solo si se puede representar por un camino γ cuya imagen esté contenida en la fibra $D_{\Pi(d)}$ que contiene a d. Para ver esto, definimos el **producto fibrado** $D\underset{Z}{\times}D:=\{(d_1,d_2)\in D\times D\mid\Pi(d_1)=\Pi(d_2)\}$, junto con las proyecciones naturales $r_j\colon D\underset{Z}{\times}D\to D$, dadas por $r_j(d_1,d_2)=d_j$ para $j=1,2$. Adaptando las localizaciones triviales de $\Pi:D\to Z$, es fácil ver que $r_1, r_2 : D \underset{Z}{\times} D \to D$, $\tau_D|_{\mathscr{V}D} : \mathscr{V}D \to D$ poseen una estructura natural de C^N-fibrado vectorial. Para cada $(d_1, d_2) \in D \underset{Z}{\times} D$, definimos el camino $c_{d_1,d_2} : \mathbb{R} \to D$, $c_{d_1,d_2}(t) = d_1 + td_2$, y definimos la aplicación $\varepsilon : D \underset{Z}{\times} D \to \mathscr{V}(D)$, $\varepsilon(d_1, d_2) = d(c_{d_1,d_2})(0) \in T_{d_1}(D)$. Entonces, se comprueba fácilmente que la pareja $(\varepsilon, \mathrm{id}_D)$ es un C^{N-1}-isomorfismo entre los fibrados $r_1 : D \underset{Z}{\times} D \to D$ y $\tau_D|_{\mathscr{V}D} : \mathscr{V}D \to D$. Además, si consideramos el C^{N-1}-morfismo r dado por

$$r : \mathscr{V}D \to D, \qquad r := r_2 \circ \varepsilon^{-1}, \tag{2.2}$$

observamos que $\mathscr{V}_d D \sim D_{\Pi(d)}$ para todo $d \in D$. Notemos por último que, para todo $d \in D$, $\mathscr{V}_d D$ es un subespacio vectorial cerrado de $T_d(D)$ pues $\mathscr{V}_d D = \mathrm{Ker}(T_d \Pi)$. Se puede demostrar que $\mathscr{V}(D)$ es una subvariedad regular de $T(D)$, con la cual $\tau_D|_{\mathscr{V}D} : \mathscr{V}D \to D$ es un C^{N-1}-fibrado vectorial.

2.3. Conexiones lineales y derivadas covariantes

Dado un C^N-fibrado vectorial $\Pi : D \to Z$ con $N \geq 1$, denotamos por $\Omega(Z, D)$ al conjunto de C^N-secciones localmente definidas del fibrado vectorial Π, esto es

$$\Omega(Z, D) := \{f \in C^N\text{-morfismos localmente definidos de } Z \text{ a } D \mid \Pi \circ f = \mathrm{id}_Z\}.$$

Indicaremos con $\Omega_z(Z, D)$ al subconjunto de aquellos $f \in \Omega(Z, D)$ que estén definidos en un entorno de $z \in Z$. Las derivadas covariantes son unos objetos que nos permiten asociar una derivación $\Omega_z(Z, D) \to D_z$ a cada vector tangente $X \in T_z(Z)$ de un modo similar a (2.1). Para definir dicha derivada covariante, dados $z \in Z$ y $d \in D_z$, necesitamos una forma de conectar los vectores tangentes en el punto d, $T_d(D)$, con la propia fibra D_z. Una forma natural de dar dicha conexión es a través de una proyección de los vectores tangentes $T(D)$ sobre los vectores verticales $\mathscr{V}D$, compuesto del isomorfismo $r|_{\mathscr{V}_d D} : \mathscr{V}_d D \to D_z$ definido en (2.2).

Antes de introducir con rigor dicha conexión entre $T_d(D)$ y D_z, necesitamos hacer uso de una estructura natural de C^{N-1}-fibrado vectorial en la aplicación tangente $T\Pi : T(D) \to T(Z)$. Para describir esta estructura, notemos que un atlas del espacio tangente $T(D)$ viene dado por cartas del tipo

$$\xi \in T_d(D) \mapsto (\varphi_i(z), \mu_{iz}(d), v, w) \in X_i \times E_i \times X_i \times E_i, \qquad d \in D, \quad z = \Pi(d), \tag{2.3}$$

y donde $\varphi_i : U_i \to X_i$, $\mu_{iz} : D_Z \to E_i$ vienen dados como en la definición de atlas y de fibrado vectorial (Definición 2.2 y Definición 2.3 respectivamente).

Proposición 2.8. *Sea $\Pi : D \to Z$ un C^N-fibrado vectorial con $N \geq 1$. Dados $d \in D$ y $\xi \in T_d(D)$, sean μ_{iz}, w dados por* (2.3)*. Entonces, las aplicaciones dadas por*

$$\xi \in T_d(D) \mapsto (T\Pi(\xi), (\mu_{iz}(d), w)), \qquad d \in D, \quad z = \Pi(d),$$

forman un recubierto de trivializaciones de $T\Pi : T(D) \to T(Z)$, dotándolo de estructura de C^{N-1}-fibrado vectorial, cuyas fibras en $v \in T_z(Z)$ son isomorfas a $D_z \times D_z$.

Demostración:
Ya sabemos que $T(D)$ tiene estructura de C^{N-1}-variedad y que $T\Pi : T(D) \to T(Z)$ es un C^{N-1}-morfismo, luego solo queda comprobar que la familia de aplicaciones dada forma un recubrimiento de trivializaciones. Es directo que cumplen la condición VB1. Por otro lado, dados dos trivializaciones locales indexadas por i, j, la función de transición $E_i \times E_i \to E_j \times E_j$ de la fibra $T(D)_v$, con $v \in T_z(Z)$, es de la forma

$$(\theta, w) \mapsto \left((\mu_{jz} \circ \mu_{iz}^{-1})\theta, \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu_{jz} \circ \mu_{iz}^{-1})(v) \right) \theta + (\mu_{jz} \circ \mu_{iz}^{-1}) w \right), \qquad \theta, w \in E_i,$$

donde $\frac{\partial}{\partial z}$ indica la diferencial de la aplicación $z \mapsto (\mu_{jz} \circ \mu_{iz}^{-1})$. Omitimos tomar cartas explícitas en z y en $T\Pi(\xi)$ para no sobrecargar más la notación. Vemos que, fijado $v \in T(Z)$ (y por tanto fijado $z = \tau_Z(v)$), las funciones de transición de las fibras son aplicaciones lineales, continuas e invertibles (su inversa viene dada por la función de transición inversa), y que además dependen de forma C^{N-1} de la base de la fibra $v \in T(Z)$. De este modo, se induce una estructura de espacio banacheable en la fibra, que satisface VB2 y VB3, concluyendo la demostración. ■

Veamos como se expresa las operaciones vectoriales de las fibras del fibrado $T\Pi\colon T(D) \to T(Z)$ en términos de caminos. Dados $\xi_1, \xi_2 \in T(D)$, podemos representar ξ_1, ξ_2 por sendas clases de equivalencia $[\gamma_1], [\gamma_2]$ de caminos $(-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ como se indica en la Observación 2.7, con $\varepsilon > 0$. Si ξ_1, ξ_2 pertenecen a la misma fibra de $T\Pi$, esto es $T\Pi(\xi_1) = T\Pi(\xi_2)$, es fácil ver que se pueden tomar representantes γ_1, γ_2 tales que $\Pi \circ \gamma_1 = \Pi \circ \gamma_2$. Entonces, podemos definir el camino $\gamma_1 + \gamma_2$ aplicando la suma en cada fibra de $\Pi : D \to Z$, y se puede demostrar que $\gamma_1 + \gamma_2$ es un representante del vector tangente $\xi_1 + \xi_2$. De un modo análogo, si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda\gamma_1$ es un camino que representa a $\lambda\xi_1$.

A continuación damos las definiciones de conexión lineal y derivada covariante [8, Section 37].

Definición 2.6. *Dado un C^N-fibrado vectorial $\Pi : D \to Z$ con $N \geq 1$, una* ***conexión lineal*** *es un C^{N-1}-morfismo $\Phi : T(D) \to T(D)$ que satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\Phi \circ \Phi = \Phi$.

(ii) la pareja (Φ, id_D) es un C^{N-1}-morfismo del fibrado tangente $\tau_D : T(D) \to D$.

(iii) Φ es lineal en las fibras de $T\Pi : T(D) \to T(Z)$.

(iv) $\mathrm{Ran}(\Phi) = \mathscr{V}D$*, es decir, el rango de Φ es la subvariedad de vectores verticales de $T(D)$.*

Con unos cálculos rutinarios, se puede demostrar que las condiciones de la definición anterior implican que Φ tiene una representación local, en cartas de $T(D)$ como las dadas en (2.3), del tipo

$$(x, e, v, w) \mapsto (x, e, 0, w - H_x(e, v)), \qquad x \in \varphi_i(U_i) \subset X_i, \quad v \in X_i, \quad e, w \in E_i, \tag{2.4}$$

donde $H_x : E_i \times X_i \to E_i$ es una aplicación bilineal. Al conjunto de vectores $\xi \in T(D)$ tales que $\Phi(\xi) = 0$ (en $T_d(D)$ con $d \in D$ tal que $\xi \in T_d(D)$) se les conoce como **vectores horizontales** de $T(D)$ asociados a Φ. Si denotamos por $H_d(D)$ al conjunto de vectores horizontales en $T_d(D)$ para cada $d \in D$, entonces tenemos que $H_dD = \mathrm{Ker}(\Phi|_{T_d(D)})$, y por tanto H_dD es un subespacio cerrado de $T_d(D)$ tal que $T_d(D) = H_dD \oplus \mathscr{V}_dD$ para todo $d \in D$. Además, sea $\xi \in T(D)$ tal que su imagen por una carta como la dada en (2.3) es $\xi \mapsto (x, e, v, w)$, con $x, v \in X_i$, $e, w \in E_i$. Entonces, es claro por (2.4) que

$$\xi \text{ es vector horizontal } \iff w = H_x(e, v).$$

Nótese asimismo que la subvariedad de vectores verticales siempre existe, mientras que la de vectores horizontales depende de la existencia de una conexión lineal. Procedemos a dar la definición de derivada covariante. Denotaremos por $T\Omega(Z, D)$ al conjunto de C^{N-1}-morfismos localmente definidos $f : T(Z) \to D$ tales que (f, id_Z) es un morfismo entre los fibrados vectoriales $\tau_Z : T(Z) \to Z$ y $\Pi : D \to Z$.

Definición 2.7. *Dado un C^N-fibrado vectorial $\Pi : D \to Z$ con $N \geq 1$, y con una conexión lineal Φ en $T(D)$, la* ***derivada covariante*** *inducida por Φ es la aplicación lineal $\nabla\colon \Omega(Z, D) \to T\Omega(Z, D)$, definida para todo $\sigma \in \Omega(Z, D)$ por la composición*

$$\nabla\sigma\colon T(Z) \xrightarrow{T\sigma} T(D) \xrightarrow{\Phi} \mathscr{V}D \xrightarrow{r} D,$$

esto es, $\nabla\sigma = (r \circ \Phi) \circ T\sigma$. A la composición $r \circ \Phi : T(D) \to D$ se le conoce como aplicación de conexión.

Notemos que $(\nabla\sigma)(X) = 0$ si y solo si $(T\sigma)(X) \in HD$, esto es si $(T\sigma)(X)$ es un vector horizontal. Es directo comprobar que $\nabla\sigma(X)$ es $\mathbb{R}$-lineal en σ y X, y que se comporta como una derivación, es decir

$$(\nabla h\sigma)(X) = h(z)(\nabla\sigma)(X) + (\nabla h)(X)\sigma(z), \qquad X \in T_z(Z), h \in \Omega_z(Z, Z \times \mathbb{R}), \sigma \in \Omega_z(Z, D),$$

donde ∇h denota la actuación sobre h de la derivada covariante asociada a la conexión trivial del fibrado trivial $Z \times \mathbb{R}$ que veremos inmediatamente en el Ejemplo 2.9.

Ejemplo 2.9. Sea $\Pi : Z \times E \to Z$ un C^N-fibrado trivial donde E es un espacio de Banach. Trabajando con la trivialización global canónica $T(Z \times E) \to (Z \times E) \times X \times E$, la conexión lineal trivial $\Phi : T(Z \times E) \to T(Z \times E)$ viene dada por

$$(d, v, w) \mapsto (d, 0, w), \qquad d \in D, v \in X, w \in E,$$

donde X es el espacio de Banach sobre el que está modelada la variedad Z. Entonces, la derivada covariante ∇ asociada a Φ viene dada por

$$\xi \in T_{(z,e)} \mapsto (Tp_2)(\xi) \in T_e(E) \sim E \sim (Z \times E)_z, \qquad z \in Z, e \in E, \tag{2.5}$$

donde $p_2 : Z \times E \to E$ es la proyección en la segunda componente, y donde hacemos uso de las identificaciones canónicas $T_e(E) \sim E \sim E_z$. Notemos que con esta derivada covariante ∇, obtenemos la derivación (2.1) si interpretamos las funciones $\Omega_z(Z, E)$ como elementos de $\Omega(Z, Z \times E)$ con la transformación $f(\cdot) \mapsto ((\cdot), f(\cdot))$.

Vemos a continuación el fibrado vectorial universal de un espacio de Hilbert, que es una herramienta muy útil para definir geometría en fibrados a través de la operación pull-back, como veremos en el Capítulo 3.

Ejemplo 2.10. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. La **variedad grasmaniana** de $\mathscr{H}$ es

$$\mathrm{Gr}(\mathscr{H}) := \{\mathscr{S} \mid \mathscr{S} \text{ subespacio lineal cerrado de } \mathscr{H}\}.$$

Al igual que en el caso finito-dimensional, se puede demostrar que $\mathrm{Gr}(\mathscr{H})$ tiene estructura de C^∞-variedad diferenciable, ver por ejemplo [17]. Además, el conjunto $\mathscr{T}(\mathscr{H}) := \{(\mathscr{S}, x) \in \mathrm{Gr}(\mathscr{H}) \times \mathscr{H} \mid x \in \mathscr{S}\} \subset \mathrm{Gr}(\mathscr{H}) \times \mathscr{H}$ es a su vez una C^∞-variedad diferenciable, y la aplicación $\Pi_{\mathscr{H}} : \mathscr{T}(\mathscr{H}) \to \mathrm{Gr}(\mathscr{H})$ dada por $\Pi_{\mathscr{H}}((\mathscr{S}, x)) = \mathscr{S}$, tiene estructura de C^∞-fibrado vectorial. Llamaremos a $\Pi_{\mathscr{H}}$ el **fibrado vectorial universal** asociado al espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. El fibrado $\Pi_{\mathscr{H}}$ tiene asociada una **conexión (lineal) universal** $\Phi_{\mathscr{H}}$. Representando los vectores tangentes como caminos, $\Phi_{\mathscr{H}}$ tiene la siguiente forma

$$\Phi_{\mathscr{H}}[t \mapsto (\mu(t), \gamma(t))] = [t \mapsto (\mu(0), p_{\mu(0)}(\gamma(t)))],$$

donde $p_{\mathscr{S}} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ denota la proyección ortogonal de $\mathscr{H}$ sobre $\mathscr{S}$ para todo $\mathscr{S} \in \mathrm{Gr}(\mathscr{H})$, y donde μ, γ son caminos sobre $\mathrm{Gr}(\mathscr{H})$, $\mathscr{H}$ respectivamente, tales que $\gamma(t) \in \mu(t) \subset \mathscr{H}$ para todo t del dominio. La demostración de que $\Phi_{\mathscr{H}}$ es una conexión lineal necesita de técnicas que quedan fuera del alcance de este trabajo, por lo que referimos al lector interesado a [3, Section 2].

Sea $\nabla_{\mathscr{H}}$ la derivada covariante inducida por $\Phi_{\mathscr{H}}$, y sea $\sigma \in \Omega(\mathrm{Gr}(\mathscr{H}), \mathscr{T}(\mathscr{H}))$ una C^N-sección localmente definida (con $N \geq 1$), existe un único C^N-morfismo localmente definido $F_\sigma : \mathrm{Gr}(\mathscr{H}) \to \mathscr{H}$ tal que $\sigma(\cdot) = (\cdot, F_\sigma(\cdot))$. Entonces, se tiene que

$$(\nabla_{\mathscr{H}}\sigma)(X) = (\mathscr{S}, p_{\mathscr{S}}(\mathrm{d}F_\sigma(X))), \qquad \mathscr{S} \in \mathrm{Gr}(\mathscr{H}), \quad X \in T_{\mathscr{S}}(\mathrm{Gr}(\mathscr{H})),$$

En el resto de la presente sección, establecemos un resultado pull-back de conexiones lineales [3].

Proposición 2.11. *Sean $\Pi\colon D \to Z$ y $\widetilde{\Pi}\colon \widetilde{D} \to \widetilde{Z}$ dos C^N-fibrados vectoriales (con $N \geq 1$), y sea $\Theta = (\delta, \zeta)$ un C^N-morfismo entre Π y $\widetilde{\Pi}$. Además, supongamos que para todo $z \in Z$, la aplicación δ induce un isomorfismo entre las fibras $\delta_z : D_z \to D_{\zeta(z)}$.*

Entonces, $T\delta$ induce un isomorfismo entre los espacios de vectores verticales $\mathscr{V}_d D$ y $\mathscr{V}_{\delta(d)}\widetilde{D}$ para todo $d \in D$, y para toda conexión lineal $\widetilde{\Phi}$ del fibrado vectorial $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{D} \to \widetilde{Z}$, existe una única conexión lineal Φ en el fibrado vectorial $\varphi\colon D \to Z$ tal que el diagrama

$$\begin{CD} T(D) @>{T\delta}>> T(\widetilde{D}) \\ @V{\Phi}VV @VV{\widetilde{\Phi}}V \\ T(D) @>{T\delta}>> T(\widetilde{D}) \end{CD}$$

es conmutativo.

Demostración:
En primer lugar, sean $r\colon \mathscr{V}D \to D$ y $\widetilde{r}\colon \mathscr{V}\widetilde{D} \to \widetilde{D}$ las respectivas aplicaciones dadas en (2.2), notemos que

$$\delta \circ r = \widetilde{r} \circ T\delta|_{\mathscr{V}D}. \tag{2.6}$$

Para demostrar que se cumple esta igualdad haremos uso de la aplicación entre los productos fibrados $\delta \underset{Z}{\times} \delta\colon D \underset{Z}{\times} D \to \widetilde{D} \underset{\widetilde{Z}}{\times} \widetilde{D}$ dada por $(\delta \underset{Z}{\times} \delta)(d_1, d_2) = (\delta(d_1), \delta(d_2))$, la cual está bien definida ya que $\widetilde{\Pi} \circ \delta = \zeta \circ \Pi$. Como δ es lineal en las fibras, se sigue que $\delta \circ c_{d_1,d_2} = c_{\delta(d_1),\delta(d_2)}\colon \mathbb{R} \to \widetilde{D}$ para todo $(d_1, d_2) \in D \underset{Z}{\times} D$, donde $c_{d_1,d_2}(t) = d_1 + td_2$ y $c_{\delta(d_1),\delta(d_2)}(t) = \delta(d_1) + t\delta(d_2)$. Tomando las derivadas de estos caminos en $0 \in \mathbb{R}$, y teniendo en cuenta la identificación de los vectores tangentes con estos caminos (ver Observación 2.7), obtenemos que $T\delta \circ \varepsilon = \widetilde{\varepsilon} \circ (\delta \underset{Z}{\times} \delta)\colon D \underset{Z}{\times} D \to T\widetilde{D}$, donde los isomorfismos $\varepsilon : D \underset{Z}{\times} D \to \mathscr{V}D$, $\widetilde{\varepsilon} : \widetilde{D} \underset{\widetilde{Z}}{\times} \widetilde{D} \to \mathscr{V}\widetilde{D}$ fueron introducidos al final de la subsección 2.2, y de donde deducimos que $T\delta(\mathscr{V}D) \subset \mathscr{V}\widetilde{D}$. Además, $\widetilde{\varepsilon}^{-1} \circ T\delta|_{\mathscr{V}D} = (\delta \underset{Z}{\times} \delta) \circ \varepsilon^{-1}$, por lo que usando la igualdad $\widetilde{r}_2 \circ (\delta \underset{Z}{\times} \delta) = \delta \circ r_2\colon D \underset{Z}{\times} D \to \widetilde{D}$, obtenemos que

$$\widetilde{r} \circ T\delta|_{\mathscr{V}D} = \widetilde{r}_2 \circ \widetilde{\varepsilon}^{-1} \circ T\delta|_{\mathscr{V}D} = \widetilde{r}_2 \circ (\delta \underset{Z}{\times} \delta) \circ \varepsilon^{-1} = \delta \circ r_2 \circ \varepsilon^{-1} = \delta \circ r,$$

demostrando la igualdad (2.6). Recordemos que la restricción de r a los vectores verticales de la fibra de d, $r_d := r|_{\mathscr{V}_d D} : \mathscr{V}_d D \to D$, es un isomorfismo. Dado que $\delta_{\Pi(d)} \circ r_d = \widetilde{r}_{\delta(d)} \circ T\delta|_{\mathscr{V}_d D}$ por (2.6), deducimos que $T\delta$ induce un isomorfismo entre $\mathscr{V}_d D$ y $\mathscr{V}_{\delta(d)}\widetilde{D}$. Por tanto, el Lema A.1 implica que existe una única proyección continua $\Phi_d\colon T_d(D) \to T_d(D)$ tal que $\operatorname{Ran}(\Phi_d) = \mathscr{V}_d(D)$ y además cumple que $(T_d\delta) \circ \Phi_d = \widetilde{\Phi}_{\delta(d)} \circ (T_d\delta)$. De hecho, Φ_d está definido por

$$\Phi_d := (T_d\delta|_{\mathscr{V}_d D})^{-1} \circ \widetilde{\Phi}_{\delta(d)} \circ T_d\delta, \qquad d \in D.$$

Por tanto, si definimos $\Phi : T(D) \to T(D)$ tal que $\Phi|_{T_d(D)} = \Phi_d$, obtenemos una aplicación que cumple las condiciones algebraicas del enunciado. De hecho, la única condición algebraica que no es trivial es que Φ es lineal en las fibras de $T\Pi : T(D) \to T(Z)$, lo cual se puede demostrar observando que $(T\delta, T\zeta)$ es un C^{N-1}-morfismo entre los fibrados vectoriales $T\Pi : T(D) \to T(Z)$ y $T\widetilde{\Pi} : T(\widetilde{D}) \to T(\widetilde{Z})$

Entonces, lo que queda por demostrar es que $\Phi\colon T(D) \to T(D)$ es C^{N-1}-diferenciable. Dado que se trata de una propiedad local, podemos asumir sin pérdida de generalidad que ambos fibrados $\Pi, \widetilde{\Pi}$ son fibrados triviales, esto es, $D = Z \times E, \widetilde{D} = \widetilde{Z} \times \widetilde{E}$ para ciertos espacios de Banach $E, \widetilde{E}$, y para ciertos abiertos $Z \subset X, \widetilde{Z} \subset \widetilde{X}$ de espacios de Banach $X, \widetilde{X}$. En este caso, $T(D) = T(Z) \times T(E)$, $T(\widetilde{D}) = T(\widetilde{Z}) \times T(\widetilde{E})$. El hecho de que $\widetilde{\Phi}$ es una conexión implica que para cada $(\widetilde{z}, \widetilde{e}) \in \widetilde{Z} \times \widetilde{E}$, tenemos una proyección $\widetilde{\Phi}_{(\widetilde{z},\widetilde{e})}$ en $T_{\widetilde{z}}(\widetilde{Z}) \times T_{\widetilde{e}}(\widetilde{E}) \sim \widetilde{X} \times \widetilde{E}$ con $\operatorname{Ran}\left(\widetilde{\Phi}_{(\widetilde{z},\widetilde{e})}\right) = \{0\} \times T_{\widetilde{e}}(\widetilde{E}) \sim \{0\} \times \widetilde{E}$, la cual es C^{N-1} diferenciable como aplicación de $\widetilde{Z} \times \widetilde{E}$ a $L\left(T_{\widetilde{z}}(\widetilde{Z}) \times T_{\widetilde{e}}(\widetilde{E})\right) \sim L(\widetilde{X} \times \widetilde{E})$.Además, tenemos el C^N-morfismo $\delta\colon Z \times E \to \widetilde{Z} \times \widetilde{E}$. Del mismo modo, también son C^{N-1}-diferenciables las aplicaciones $(z, e) \mapsto T_{(z,e)}\delta$ y $(z, e) \mapsto \left(T_{(z,e)}\delta\right)^{-1}$ (la diferenciabilidad de la última aplicación se sigue de que estamos trabajando con espacios de Banach). Entonces, aplicando (A.1) tenemos que, para cualquier $(z, e) \in Z \times E$,

$$\Phi_{(z,e)} = \left(T_{(z,e)}\delta\right)^{-1} \circ \widetilde{\Phi}_{\delta(z,e)} \circ T_{(z,e)}\delta \in L(T_z(Z) \times T_e(E)) \sim L(X \times E)$$

lo que demuestra que $\Phi\colon T(Z) \times T(E) \to T(Z) \times T(E)$ es de C^{N-1}-diferenciable. ■

Definición 2.8. *Bajo las condiciones de la Proposición 2.11, decimos que la conexión lineal Φ es el **pull-back de la conexión** $\widetilde{\Phi}$, y la denotaremos como $\Phi = \Theta^*(\widetilde{\Phi})$.*

A continuación, damos un resultado de conmutatividad que es aplicable a la derivada covariante inducida por el pull-back de una conexión.

Proposición 2.12. *Sean* $\Pi\colon D \to Z$ *y* $\widetilde{\Pi}\colon \widetilde{D} \to \widetilde{Z}$ *dos* C^N*-fibrados vectoriales con* $N \geq 1$*, dotados de las conexiones lineales* Φ *y* $\widetilde{\Phi}$*, con sus correspondientes derivadas covariantes* ∇ *y* $\widetilde{\nabla}$ *respectivamente. Supongamos que* $\Theta = (\delta, \zeta)$ *es un* C^{N-1}*-morfismo de fibrados vectoriales de* Π *en* $\widetilde{\Pi}$ *tal que* $T\delta \circ \Phi = \widetilde{\Phi} \circ T\delta$*. Si las secciones localmente definidas* $\sigma \in \Omega(Z, D)$ *y* $\widetilde{\sigma} \in \Omega(\widetilde{Z}, \widetilde{D})$ *son tales que* $\delta \circ \sigma = \widetilde{\sigma} \circ \zeta$*, entonces* $\delta \circ \nabla\sigma = \widetilde{\nabla}\widetilde{\sigma} \circ T\zeta$*.*

Notemos que la hipótesis de conmutatividad $T\delta \circ \Phi = \widetilde{\Phi} \circ T\delta$ se cumple si $\Phi = \Theta^*(\widetilde{\Phi})$.

Demostración:
Usando (2.6) junto con la igualdad $T\delta \circ \Phi = \widetilde{\Phi} \circ T\delta$, obtenemos que

$$\delta \circ (r \circ \Phi) = \widetilde{r} \circ T\delta \circ \Phi = (\widetilde{r} \circ \widetilde{\Phi}) \circ T\delta. \tag{2.7}$$

Por otro lado, tenemos que $\delta \circ \sigma = \widetilde{\sigma} \circ \zeta$, de modo que $T\delta \circ T\sigma = T\widetilde{\sigma} \circ T\zeta$. Como consecuencia, se sigue que

$$\widetilde{\nabla}\widetilde{\sigma} \circ T\zeta = (\widetilde{r} \circ \widetilde{\Phi}) \circ T\widetilde{\sigma} \circ T\zeta = (\widetilde{r} \circ \widetilde{\Phi}) \circ T\delta \circ T\sigma = \delta \circ (r \circ \Phi) \circ T\sigma = \delta \circ \nabla\sigma$$

donde la penúltima igualdad proviene de (2.6), y con esto finalizamos la demostración. ■

Capítulo 3

Núcleos reproductivos en fibrados vectoriales

En este capítulo en primer lugar extendemos la definición de espacio de Hilbert de núcleo reproductivo para cubrir espacios de Hilbert cuyos elementos son secciones de un fibrado vectorial. Damos unas propiedades básicas de estos espacios análogas a las vistas en el Capítulo 1 y cuyas demostraciones, si bien son considerablemente más técnicas que las del caso escalar, siguen esquemas análogos.

En segundo lugar, presentamos la derivada covariante inducida por un núcleo reproductivo sobre un fibrado vectorial. En particular, extendemos los resultados de [3] de modo que sean aplicables a C^N-fibrados vectoriales con N no necesariamente infinito.

3.1. Definición y extensión del teorema de Moore-Aronzsjan

Definición 3.1. *Sea $\Pi : D \to Z$ un C^N-fibrado vectorial cuyas fibras tienen estructura de espacio de Hilbert. Una* ***estructura hermítica*** *sobre Π es una familia $\{(\cdot|\cdot)_z\}_{z\in Z}$ satisfaciendo las siguientes propiedades*

- *Para cada $z \in Z$, $(\cdot|\cdot)_z$ es un producto interno ($\mathbb{C}$-lineal en la primera variable, y $\mathbb{C}$-antilineal en la segunda variable) que dota a la fibra D_z de una estructura de espacio de Hilbert.*

- *Si U es un conjunto abierto de Z y $\mu : \Pi^{-1}(U) \to U \times E$ es una trivialización local, entonces la aplicación $U \times E \times E \to \mathbb{C}$ dada por*

$$(z,x,y) \mapsto (\mu^{-1}(z,x) \mid \mu^{-1}(z,y))_z,$$

  es un C^N-morfismo.

*Un C^N-**fibrado vectorial hermítico** es un C^N-fibrado vectorial dotado de una estructura hermítica como la anterior.*

Por motivos de brevedad, ahora enunciamos dos propiedades sin dar sus respectivas demostraciones, las cuales siguen las mismas ideas que la demostración de la Proposición 2.4.

(i) Si $\Pi : D \to Z$ es un C^N-fibrado vectorial hermítico y $\zeta : Y \to Z$ es un C^N-morfismo, entonces el pull-back $\zeta^*(\Pi) : \zeta^*(D) \to Y$ tiene una estructura natural de C^N-fibrado vectorial hermítico dada por $((y,d_1) \mid (y,d_2))_y := (d_1 \mid d_2)_{\zeta(y)}$, donde $(y,d_1),(y,d_2) \in \zeta^*(D)$.

(ii) Dados dos C^N-fibrados vectoriales $\Pi : D \to Z$, $\widetilde{\Pi} : \widetilde{D} \to \widetilde{Z}$, definimos el conjunto $L(D,\widetilde{D}) := \{(z,\widetilde{z},A) \mid z \in Z, \widetilde{z} \in \widetilde{Z}, A \in L(D_z,\widetilde{D}_{\widetilde{z}})\}$ y la aplicación $L(\Pi,\widetilde{\Pi}) : L(D,\widetilde{D}) \to Z \times \widetilde{Z}$ dada por $L(z,\widetilde{z},A) \mapsto$

$(z,\widetilde{z})$. Si (U_i,μ_i), $(\widetilde{U}_j,\widetilde{\mu}_j)$ con $\mu_i : \Pi^{-1}(U_i) \to U_i \times E_i$ y $\widetilde{\mu}_j : \widetilde{\Pi}^{-1}(\widetilde{U}_j) \to \widetilde{U}_j \times \widetilde{E}_j$, son sendos recubrimientos de trivializaciones de $\Pi,\widetilde{\Pi}$, entonces las parejas $(U_i \times \widetilde{U}_j, L(\mu_i \times \widetilde{\mu}_j))$ son un recubrimiento de trivializaciones de $L(\Pi,\widetilde{\Pi})$ que le dotan de estructura de C^N-fibrado vectorial, con

$$\begin{aligned} L(\mu_i \times \widetilde{\mu}_j) : L(\Pi,\widetilde{\Pi})^{-1}(U_i \times \widetilde{U}_j) &\to U_i \times \widetilde{U}_j \times L(E_i,\widetilde{E}_j) \\ (z,\widetilde{z},A) &\mapsto (z,\widetilde{z},B), \end{aligned}$$

donde $B \in L(E_i,\widetilde{E}_j)$ es la aplicación inducida por A con respecto a las cartas $\mu_i,\widetilde{\mu}_j$, es decir, $Bv = \widetilde{v}$, donde $Ad = \widetilde{d}$ y $\mu_i(d) = (z,v)$ y $\widetilde{\mu}_j(\widetilde{d}) = (\widetilde{z},\widetilde{v})$.

Dado un fibrado vectorial $\Pi : D \to Z$, denotaremos por $\mathscr{F}(Z,D)$ al espacio de secciones (no necesariamente continuas) f de Π, esto es, aplicaciones $f : D \to Z$ tales que $\Pi \circ f = \mathrm{id}_Z$.

Definición 3.2. *Sea $\Pi : D \to Z$ un C^N-fibrado vectorial hermítico. Diremos que un subespacio $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}(Z,D)$ es un **espacio de Hilbert de núcleo reproductivo sobre** Π si*

(i) $\mathscr{H}$ está equipado con un producto interno $(\cdot \mid \cdot)$ que dota a $\mathscr{H}$ de una estructura de espacio de Hilbert;

(ii) para cada $z \in Z$, la evaluación puntual en z, $E_z : \mathscr{H} \to D_z$ es un operador acotado.

Definición 3.3. *Sea $\mathscr{H}$ un RKHS sobre $\Pi : D \to Z$. El **núcleo reproductivo** K de $\mathscr{H}$ es la sección $K \in \mathscr{F}(Z \times Z, L(p_2^*(D), p_1^*(D)))$ dada por $K(y,z) = E_y E_z^* \in L(D_z, D_y)$, $y,z \in Z$. Es decir, dados $y,z \in Z$,*

$$\begin{aligned} K(y,z) : D_z &\to D_y, \\ d &\mapsto E_y E_z^* d. \end{aligned}$$

Es claro que todo RKHS $\mathscr{H}$ en el sentido del Capítulo 1, que tenga como dominio una C^N-variedad Z, se puede interpretar como un RKHS sobre el fibrado trivial $\Pi_Z : Z \times \mathbb{C} \to Z$. Además, podemos identificar los operadores $L(\mathbb{C})$ con los propios números complejos $\mathbb{C}$ con la aplicación $\mathbb{C} \to L(\mathbb{C})$ dada por $w \mapsto w(\cdot)$. Es sencillo ver que en estas circunstancias y bajo esta identificación, las dos definiciones de núcleo reproductivo coinciden, ver [14, Section 6] para una demostración detallada de este hecho.

A continuación vemos que los RKHS sobre fibrados vectoriales cumplen propiedades análogas a las vistas en el Capítulo 1 para RKHS escalares sobre conjuntos.

Proposición 3.1. *Sea $\mathscr{H}$ un RKHS sobre $\Pi : D \to Z$ con núcleo reproductivo K. El espacio generado por las combinaciones lineales de las funciones $\{K_d(\cdot) = K(\cdot,\Pi(d))d \mid d \in D\}$ es denso en $\mathscr{H}$.*

Demostración:

En primer lugar, notemos que en efecto $K_d \in \mathscr{H}$ para $d \in D$ pues $K_d = E^*_{\Pi(d)}$. Si el enunciado fuera falso, podríamos tomar una función $f \in \mathscr{H}$ que fuera ortogonal a las combinaciones lineales de las funciones $\{K_d \mid d \in D\}$. En particular, para todo $z \in Z$

$$(f(z) \mid d) = (E_z f \mid d) = (f \mid E_z^* d) = (f \mid K_d) = 0, \qquad d \in D_z,$$

esto es, $f(z) = 0$ para todo $z \in Z$, de donde concluimos el enunciado. ∎

Observación 3.2. Sea $\mathscr{H}$ un RKHS sobre $\Pi : D \to Z$ con núcleo reproductivo K, y sea $F \subset Z$ un subconjunto de Z. Si denotamos por $\mathscr{H}^F$ al subespacio de $\mathscr{H}$ dado por $\mathrm{span}\{K_d \mid \Pi(d) \in F\}$, razonando como en la demostración de la proposición anterior obtenemos que

$$(\mathscr{H}^F)^\perp = \{f \in \mathscr{H} \mid f(z) = 0, z \in F\}.$$

Teorema 3.3. *Sean $\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2$ dos RKHS sobre $\Pi : D \to Z$ con núcleos reproductivos respectivos K_1,K_2. Sea $\|\cdot\|_i$ la norma sobre $\mathscr{H}_i$ para $i = 1,2$. Si $K_1 = K_2$, entonces $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$ con $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$.*

Demostración:
Definamos $K := K_1 = K_2$, y sea $W := \operatorname{span}\{K_d \in \mathscr{H} \mid d \in D\}$. Por la Proposición 3.1, sabemos que W es un subconjunto denso de $\mathscr{H}_i$, $i = 1,2$. Además, si $f \in W$, entonces $f = \sum_j K_{d_j}$ para ciertos $d_j \in D$. Entonces

$$\begin{aligned}\|f\|_1^2 &= \left\| \sum_j K_{d_j} \right\|_1^2 = \sum_{i,j} (K_{d_j} \mid K_{d_i})_1 = \sum_{i,j} \left(E_{\Pi(d_i)} E^*_{\Pi(d_j)} d_j \mid d_i \right)_{\Pi(d_i)} \\ &= \sum_{i,j} (K(\Pi(d_i), \Pi(d_j)) d_j \mid d_i)_{\Pi(d_i)} = \|f\|_2^2.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Por tanto, $\|f\|_1 = \|f\|_2$ para toda función $f \in W$.

Entonces, si $f \in \mathscr{H}_1$, existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $\mathscr{H}_1$, la igualdad de normas en W que acabamos de probar implica que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión de Cauchy en $\mathscr{H}_2$, luego existe $g \in \mathscr{H}_2$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_2 = 0$. Dado que las evaluaciones son operadores continuos en $\mathscr{H}$, concluimos que $g(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, de modo que $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_2$. Razonando de un modo análogo obtenemos que $\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}_1$, luego $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$.

Finalmente, como $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$ y las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ coinciden en el subconjunto denso W, concluimos que $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$. ■

Definición 3.4. *Sea $\Pi : D \to Z$ un C^N-fibrado vectorial hermítico, $p_1, p_2 : Z \times Z \to Z$ las proyecciones naturales, y sean los fibrados pull-back dados por*

$$p_j^*(\Pi) : p_j^*(D) \to Z \times Z, \qquad j = 1,2.$$

Sea $K \in \mathscr{F}(Z \times Z, L(p_2^*(D), p_1^*(D)))$ una sección globalmente definida. Diremos que K es ***definida no negativa****, o que $K \geq 0$, si para toda elección finita de puntos $z_1, \ldots, z_n \in Z$ y vectores $\xi_1 \in D_{z_1}, \ldots, \xi_n \in D_{z_n}$, tenemos que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} (K(z_i, z_j)\xi_j \mid \xi_i)_{z_i} \geq 0.$$

Proposición 3.4. *Sea $\mathscr{H}$ un RKHS sobre un fibrado vectorial hermítico $\Pi : D \to Z$ con núcleo reproductivo K. Entonces, $K \geq 0$.*

Demostración:
Basta usar las igualdades (3.1) para obtener el enunciado. ■

Observación 3.5. Sea una sección $K \in \mathscr{F}(Z \times Z, L(p_2^*(D), p_1^*(D)))$ tal que $K \geq 0$, y sean $z_1, \ldots, z_n \in Z$. Se sigue que el operador lineal acotado en el espacio de Hilbert $D_{z_1} \times \ldots \times D_{z_n}$ dado por la matriz $(K(z_i, z_j))_{i,j}$ es un operador positivo[1]. Como todo operador positivo es un operador autoadjunto (ver por ejemplo [15, Theorem 12.32]), concluimos que

$$K(y,z) = K(z,y)^*, \qquad y, z \in Z.$$

A continuación damos el resultado análogo al teorema de Moore-Aronzsjan para núcleos reproductivos sobre fibrados vectoriales, cuya demostración original se encuentra en [4].

Teorema 3.6. *Sea $\Pi : D \to Z$ un C^N-fibrado vectorial, y sea una sección $K \in \mathscr{F}(Z \times Z, L(p_2^*(D), p_1^*(D)))$ una sección globalmente definida tal que $K \geq 0$. Entonces, existe un (único) RKHS $\mathscr{H}$ sobre Π tal que K es su núcleo reproductivo.*

[1] Se dice que un operador acotado A en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ es positivo si $(Ax \mid x) \geq 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$.

Demostración:

Consideremos el espacio vectorial complejo $\mathscr{H}_K^0 \subset \mathscr{F}(Z,D)$ de secciones (globalmente definidas) dado por $\mathscr{H}_K^0 := \operatorname{span}\{K_d(\cdot) = K(\cdot,\Pi(d))d \mid d \in D\}$. Entonces, definimos la forma sesquilineal $B : \mathscr{H}_K^0 \times \mathscr{H}_K^0 \to \mathbb{C}$ dada por

$$B(\Theta,\Delta) = \sum_{i,j} (K(\Pi(d_i),\Pi(c_j))c_j \mid d_i),$$

donde $\Theta = \sum_j K_{c_j}$, $\Delta = \sum_i K_{d_i} \in \mathscr{H}_K^0$. Comprobemos primero que B está bien definida. Dada su sesquilinealidad, basta comprobar que si $\Theta \in \mathscr{H}_K^0$ con $\Theta = 0$, entonces $B(\Theta,\Delta) = B(\Delta,\Theta) = 0$ para todo $\Delta \in \mathscr{H}_K^0$. De hecho, aplicando de nuevo la sesquilinealidad de B, basta probar que $B(\Theta,K_d) = B(K_d,\Theta) = 0$ para todo $d \in D$. Sea $\Theta = \sum_j K_{c_j} = 0$ con $c_j \in D$. Por un lado, tenemos que $B(\Theta,K_d) = \sum_j (K(\Pi(d),\Pi(c_j))c_j \mid d)_{\Pi(d)} = (\Theta(\Pi(d)) \mid d)_{\Pi(d)} = 0$ para todo $d \in D$. Por otro lado, tenemos por la Observación 3.5 que

$$\begin{aligned} B(K_d,\Theta) &= \sum_j (K(\Pi(c_j),\Pi(d))d \mid c_j)_{\Pi(c_j)} = \sum_j (d \mid K(\Pi(d),\Pi(c_j))c_j)_{\Pi(d)} \\ &= (d \mid \Theta(\Pi(d)))_{\Pi(d)} = 0, \qquad d \in D, \end{aligned}$$

de donde concluimos que B está bien definida. Además, es claro que $B(\Theta,\Theta) \geq 0$ para todo $\Theta \in \mathscr{H}_K^0$. Ahora demostraremos que B es un producto interno en $\mathscr{H}_K^0$, para lo cual tenemos que probar que $B(\Theta,\Theta) = 0$ implica que $\Theta = 0$. Como K es definida no negativa, podemos razonar como en la desigualdad de Cauchy-Schwarz para concluir que

$$|B(\Theta,\Delta)| \leq B(\Theta,\Theta)^{1/2} B(\Delta,\Delta)^{1/2}, \qquad \Theta,\Delta \in \mathscr{H}_K^0. \tag{3.2}$$

Por tanto, si $\Theta \in \mathscr{H}_K^0$ cumple que $B(\Theta,\Theta) = 0$, entonces $B(\Theta,\Delta) = B(\Delta,\Theta) = 0$ para todo $\Delta \in \mathscr{H}_K^0$. En particular, dado $z \in Z$, $(\Theta(z) \mid d)_z = B(\Theta,K_d) = 0$ para todo $d \in D_z$, de donde concluimos que $\Theta = 0$ como queríamos demostrar, y por tanto B es un producto interno sobre $\mathscr{H}_K^0$.

Ahora, dado $z \in Z$, veamos que el operador evaluación $E_z : \mathscr{H}_K^0 :\to D_z$, $E_z(\Theta) = \Theta(z)$, es un operador acotado con la norma en $\mathscr{H}_K^0$ inducida por B. Para ello, observemos que

$$\|K_d\|^2 = (K(\Pi(d),\Pi(d))d \mid d)_{\Pi(d)} \leq \|K(\Pi(d),\Pi(d))\| \|d\|^2_{\Pi(d)}, \qquad d \in D.$$

Aplicando esta desigualdad junto con (3.2) obtenemos que, si $\Theta \in \mathscr{H}_K^0$ con $\Theta(z) = d$,

$$\|E_z\Theta\|_z^2 = \|d\|_z^2 = (\Theta(z) \mid d)_z = B(\Theta,K_d) \leq B(\Theta,\Theta)^{1/2} \|K(z,z)\|^{1/2} \|d\|_{\Pi(d)},$$

es decir, $\|E_z\Theta\|_z \leq \|K(z,z)\|^{1/2} \|\Theta\|$, como queríamos demostrar.

Sea entonces $\mathscr{H}_K$ el espacio de Hilbert resultado de tomar la compleción de $\mathscr{H}_K^0$. Por lo anterior, tenemos que E_z se extiende a un operador acotado de $\mathscr{H}_K$ a D_z para cada $z \in Z$. Entonces, definimos la aplicación lineal $\iota : \mathscr{H}_K \to \mathscr{F}(Z,D)$ dada por

$$(\iota\Theta)(z) := E_z\Theta \in D_z, \qquad \Theta \in \mathscr{H}_K, \quad z \in Z.$$

Claramente, $\iota\Theta = \Theta$ si $\Theta \in \mathscr{H}_K^0$. Veamos que ι es una aplicación inyectiva en $\mathscr{H}_K$. Notemos en primer lugar que $(E_z\Theta \mid d)_z = (\Theta \mid K_d)$ si $\Theta \in \mathscr{H}_K^0$ por la propia definición de la forma sesquilineal B, y por continuidad obtenemos que

$$(E_z\Theta \mid d)_z = (\Theta \mid K_d), \qquad \Theta \in \mathscr{H}_K. \tag{3.3}$$

Entonces, sea $\Theta \in \mathscr{H}_K$ con $\iota\Theta = 0$, es decir $E_z\Theta = 0$ para todo $z \in Z$. Por el comentario anterior, tenemos que $(\Theta \mid K_d) = 0$ para todo $d \in D$, es decir, Θ es ortogonal a $\mathscr{H}_K^0$. Como este es un subconjunto denso en $\mathscr{H}_K$, concluimos que $\Theta = 0$, como queríamos demostrar.

Por tanto, $\iota : \mathscr{H}_K \to \mathscr{H}$ es una biyección, donde $\mathscr{H} := \iota(\mathscr{H}_K) \subset \mathscr{F}(Z,D)$, lo cual induce una estructura de espacio de Hilbert en $\mathscr{H}$ donde los operadores de evaluación $E_z : \mathscr{H} \to D_z$ son continuos para todo $z \in Z$. Es decir, $\mathscr{H}$ es un RKHS sobre $\Pi : D \to Z$. Además, (3.3) implica que $E_z^* d = K_d$ para todo $z \in Z$, $d \in D_z$, de donde concluimos que $E_y E_z^* = K(y,z)$, esto es, K es el núcleo reproductivo de $\mathscr{H}$, con lo que finalizamos la demostración. (La unicidad se deduce del Teorema 3.3.)

■

Observación 3.7. Sea $\mathscr{H}$ un RKHS sobre un C^N-fibrado vectorial hermítico $\Pi : D \to Z$ con núcleo K. Una pregunta natural es si podemos concluir que toda sección de $\mathscr{H}$ es de clase C^N si K también es C^N, es decir, si $K \in \Omega(Z \times Z, L(p_2^*(D), p_1^*(D)))$ es una C^N-sección globalmente definida. Esto es cierto para $N = 0$ (véase [4, Theorem 4.2]), pero es falso en general para $N \geq 1$. Por ejemplo, si Π es un fibrado trivial con fibras finito dimensionales, necesitamos que K sea de clase C^{2N} para garantizar que las funciones de $\mathscr{H}$ son de clase C^N, ver por ejemplo [16, Theorem 2.6].

Demostramos a continuación el resultado análogo en este contexto a la Proposición 1.4

Proposición 3.8. *Sea $\mathscr{H}$ un RKHS sobre un C^N-fibrado vectorial $\Pi : D \to Z$ con núcleo reproductivo K. Si $\{e_s \mid s \in S\}$ es una base ortonormal de $\mathscr{H}$, entonces*

$$K(y,z)\,d = \sum_{s \in S} (d \mid e_s(z))_{D_z}\, e_s(y), \qquad y,z \in Z, \quad d \in D_z \subset D.$$

Demostración:
Sean $y, z \in Z$ y $d \in D_z$. Como $\{e_s \mid s \in S\}$ es una base ortonormal de $\mathscr{H}$, se sigue que

$$E_z^* d = \sum_{s \in S} (E_z^* d \mid e_s)_{\mathscr{H}}\, e_s = \sum_{s \in S} (d \mid e_s(z))_{D_z}\, e_s. \tag{3.4}$$

Como $K(y,z)d = E_y E_z^* d$, basta emplear que E_y es un operador continuo para intercambiar E_y con el sumatorio de (3.4) para obtener el enunciado. ■

3.2. Derivada covariante inducida por un núcleo reproductivo

En [3] se presenta la derivada covariante, asociada a un núcleo reproductivo sobre un fibrado vectorial, en un contexto en el que todos los objetos asociados (fibrado vectorial, núcleos reproductivos) son de clase C^∞. En esta sección, extendemos dicha derivada covariante al caso en que los objetos asociados sean de clase C^N con $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Dado un fibrado vectorial hermítico $\Pi : D \to Z$ y un núcleo reproductivo $K \in \mathscr{F}(Z, D)$ definido no negativo, denotamos por $\mathscr{H}_K$ al espacio de núcleo reproductivo sobre Π asociado a K, ver Teorema 3.6. Consideremos las aplicaciones dadas por

$$\begin{aligned} \widehat{K} : D \to \mathscr{H}_K, &\qquad \widehat{K}(d) = K_d = K(\cdot, \Pi(d))d, \\ \zeta_K : Z \to \mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K), &\qquad \zeta_K(z) = \overline{\widehat{K}(D_z)}, \\ \check{K} : D \to \mathscr{T}(\mathscr{H}_K), &\qquad (\check{K})(d) = (\zeta_K(\Pi(d)), \widehat{K}(d)), \end{aligned}$$

donde $\overline{\widehat{K}(D_z)}$ denota la clausura topológica del subespacio $\widehat{K}(D_z)$. En los siguientes lemas damos propiedades básicas de estas aplicaciones

Lema 3.9. *Bajo las condiciones anteriores, sea $K \in \Omega(Z \times Z, L(p_2^*(D), p_1^*(D)))$ una C^N-sección globalmente definida. Entonces la aplicación $\widehat{K} : D \to \mathscr{H}_K$ es un C^N-morfismo.*

Demostración:
Dado que K es de clase C^N, tenemos que la aplicación $D \times D \to \mathbb{C}$ dada por $(d_1, d_2) \mapsto (\widehat{K}(d_1) \mid \widehat{K}(d_2))_{\mathscr{H}_K} = (K(\Pi(d_2), \Pi(d_1))d_1 \mid d_2)_{\Pi(d_2)}$ es de clase C^N, lo cual implica que la aplicación $\widehat{K}$ es de clase C^N por [11, Theorem 7.1, footnote 3]. ■

Lema 3.10. *Bajo las condiciones anteriores, los siguientes enunciados son equivalentes para cada $z \in Z$:*

(i) El operador $\widehat{K}|_{D_z} : D_z \to \mathscr{H}_K$ es inyectivo y tiene rango cerrado.

(ii) El operador $K(z,z) \in L(D_z)$ es invertible.

Demostración:

Por el teorema del grafo cerrado, la propiedad (i) es equivalente a que exista un $c > 0$ tal que $\|\widehat{K}(d)\|_{\mathscr{H}_K} \geq c\|d\|_z$ para todo $d \in D_z$, lo cual es equivalente a que $(K_d \mid K_d)_{\mathscr{H}_K} = (K(z,z)d \mid d)_z \geq c^2\|d\|_z^2$. Pero esta condición es equivalente a que $K(z,z)$ sea un operador invertible en D_z, ya que $K(z,z)$ es un operador positivo y autoadjunto por la Observación 3.5. ■

Definición 3.5. *Un núcleo reproductivo K de un C^N-fibrado vectorial hermítico $\Pi : D \to Z$ se dice C^N-**admisible** si satisface las siguientes propiedades:*

(i) $K \in \Omega(Z \times Z, L(p_2^*(D), p_1^*(D)))$, esto es, K es una C^N-sección globalmente definida del fibrado $L(p_2^*(\Pi), p_1^*(\Pi))$.

(ii) Para cada $z \in Z$, el operador $K(z,z) \in L(D_z)$ es invertible.

(iii) La aplicación $\zeta_K : Z \to \mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K)$ es un C^N-morfismo.

Cabe mencionar que en el caso de que las fibras de $\Pi : D \to Z$ sean finito dimensionales, la condición (iii) de la definición anterior es redundante, véase Proposición A.2.

Si K es un núcleo reproductivo C^N-admisible en un C^N-fibrado vectorial hermítico $\Pi : D \to Z$, se sigue de la definición de admisibilidad que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\check{K}} & \mathscr{T}(\mathscr{H}_K) \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_{\mathscr{H}_K}} \\ Z & \xrightarrow{\zeta_K} & \mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K) \end{array}$$

es conmutativo, siendo la pareja $\Delta_K := (\check{K}, \zeta_K)$ un C^N-morfismo entre Π y el fibrado vectorial universal de $\mathscr{H}_K$, $\Pi_{\mathscr{H}_K} : \mathscr{T}(\mathscr{H}_K) \to \mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K)$. Recordamos que el fibrado universal $\Pi_{\mathscr{H}_K}$ tiene asociada la conexión lineal universal $\Phi_{\mathscr{H}_K}$, ver el Ejemplo 2.10.

Definición 3.6. *Sea K un núcleo reproductivo C^N-admisible, con $N \geq 1$, sobre un C^N-fibrado vectorial hermítico $\Pi : D \to Z$. Sea $\Phi_{\mathscr{H}_K}$ la conexión lineal universal del fibrado vectorial universal $\Pi_{\mathscr{H}_K}$ dada en la Definición 2.8. Llamamos **conexión lineal inducida por el núcleo reproductivo C^N-admisible** K al pull-back Φ_K de la conexión $\Phi_{\mathscr{H}_K}$ a través del C^N-morfismo Δ_K, esto es*

$$\Phi_K = (\Delta_K)^*(\Phi_{\mathscr{H}_K}).$$

Notemos que al ser K C^N-admisible, el Lema 3.10 implica que se satisfacen las condiciones de la definición de conexión pull-back (ver Definición 2.8).

Teorema 3.11. *Bajo las condiciones de la Definición 3.6, sea $\nabla_K : \Omega(Z,D) \to T\Omega(Z,D)$ la derivada covariante inducida por la conexión lineal Φ_K. Sea $\sigma \in \Omega(Z,D)$ una C^N-sección localmente definida. Entonces,*

$$(\nabla_K \sigma)(X) = K(z,z)^{-1}\big(\underbrace{\mathrm{d}(E_z \circ \widehat{K} \circ \sigma)(X)}_{\in D_z}\big), \qquad z \in Z, \quad X \in T_z(Z).$$

Interpretando los vectores tangentes como clases de equivalencia de caminos, el enunciado del Teorema 3.11 se lee como que, para todo camino $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ de clase C^N con $\gamma(0) = z$,

$$(\nabla_K \sigma)([\gamma]) = \big[K(z,z)^{-1} \circ K(z, \gamma(\cdot))(\sigma \circ \gamma(\cdot))\big].$$

Demostración:
Recordemos que, para todo $d \in D$, tenemos

$$\widehat{K}(d) = K_d = K(\cdot, \Pi(d))d, \qquad \check{K}(d) = (\zeta_K(\Pi(d)), \widehat{K}(d)).$$

Supongamos en primer lugar que existe $\widetilde{\sigma} \in \Omega(\mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K), \mathscr{T}(\mathscr{H}_K))$ tal que $\check{K} \circ \sigma = \widetilde{\sigma} \circ \zeta_K$. Entonces, se sigue por la Proposición 2.12 que $\check{K} \circ \nabla_K \sigma = \widetilde{\nabla}\widetilde{\sigma} \circ T\zeta_K$, donde $\widetilde{\nabla}$ denota la derivada covariante inducida por la conexión universal del fibrado vectorial tautológico: $\Pi_{\mathscr{H}_K} : \mathscr{T}(\mathscr{H}_K) \to \mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K)$. En particular,

$$(\zeta_K(s), \widehat{K}((\nabla_K \sigma)(X))) = \check{K}((\nabla_K \sigma)(X)) = \widetilde{\nabla}\widetilde{\sigma}((T\zeta_K)X), \qquad X \in T(Z). \tag{3.5}$$

Por otro lado, como $\widetilde{\sigma} \in \Omega(\mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K), \mathscr{T}(\mathscr{H}_K))$, existe un único C^N-morfismo localmente definido $F_{\widetilde{\sigma}}$: $\mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K) \to \mathscr{H}_K$ tal que $\widetilde{\sigma}(\cdot) = (\cdot, F_{\widetilde{\sigma}}(\cdot))$. Entonces, por el Ejemplo 2.10, tenemos que

$$\widetilde{\nabla}\widetilde{\sigma}((T\zeta_K)(X)) = (\zeta_K(z), p_{\zeta_K(z)}(\underbrace{(\mathrm{d}F_{\widetilde{\sigma}} \circ T\zeta_K)(X)}_{\in \mathscr{H}_K})), \tag{3.6}$$

donde $p_{\zeta_K(z)} : \mathscr{H}_K \to \mathscr{H}_K$ denota la proyección ortogonal de $\mathscr{H}_K$ sobre $\zeta_K(z)$. Dado que $\check{K} \circ \sigma = \widetilde{\sigma} \circ \zeta_K$, se tiene que $\widehat{K} \circ \sigma = F_{\widetilde{\sigma}} \circ \zeta_K : Z \to \mathscr{H}_K$, por lo que al derivar obtenemos que

$$\mathrm{d}F \circ T\zeta_K = \mathrm{d}(\widehat{K} \circ \sigma), \qquad z \in Z, \quad X \in T_z(Z). \tag{3.7}$$

Entonces, se sigue de (3.5)–(3.7) que

$$\widehat{K}((\nabla_K \sigma)(X)) = p_{\zeta_K(z)}(\mathrm{d}(\widehat{K} \circ \sigma)(X)) \in \mathscr{H}_K, \qquad z \in Z, \quad X \in T_z(Z).$$

Notemos que ambas expresiones son elementos de $\mathscr{F}(Z, D)$, y que además $(\nabla_K \sigma)(X) \in D_z$. Por tanto, podemos evaluar en el punto z, obteniendo $(\widehat{K}((\nabla_K \sigma)(X))(z) = K(z,z)((\nabla_K \sigma)(X))$ y $(p_{\zeta_K(z)}(\mathrm{d}(\widehat{K} \circ \sigma)(X)))(z) = (\mathrm{d}(\widehat{K} \circ \sigma)(X)))(z) = \mathrm{d}(E_z \circ \widehat{K} \circ \sigma)(X)$, ya que por un lado, la proyección $p_{\zeta_K(z)}$ deja invariante el valor del elemento en z, ver Observación 3.2, y por otro lado, la evaluación E_z en el punto z es una aplicación lineal y continua, de modo que conmuta con el símbolo diferencial d. Entonces, concluimos que

$$(\nabla_K \sigma)(X) = K(z,z)^{-1}(\mathrm{d}(E_z \circ \widehat{K} \circ \sigma)(X)), \qquad z \in Z, \quad X \in T_z(Z), \tag{3.8}$$

como queríamos demostrar.

Veamos ahora que sucede si no estamos seguros de encontrar una sección $\widetilde{\sigma} \in \Omega(\mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K), \mathscr{T}(\mathscr{H}_K))$ que cumpla $\check{K} \circ \sigma = \widetilde{\sigma} \circ \zeta_K$. En primer lugar, fijemos $X \in T(Z)$. Entonces, basta seguir la demostración de la Proposición 2.12, en particular (2.7), para observar que lo que realmente necesitamos para aplicar la conmutatividad $(\check{K} \circ \nabla_K \sigma)(X) = (\widetilde{\nabla}\widetilde{\sigma} \circ T\zeta_K)(X)$ es que se cumpla la condición

$$(T\check{K} \circ T\sigma)(X) = (T\widetilde{\sigma} \circ T\zeta_K)(X). \tag{3.9}$$

Esta condición es trivial si X es el vector nulo de $T_z(Z)$, así que supongamos lo contrario. Como (3.9) es una condición local, podemos suponer que los fibrados $\Pi, \Pi_{\mathscr{H}_K}$ son triviales, de donde concluimos que se puede encontrar dicha sección $\widetilde{\sigma}$ si y solo si $T\zeta_K(X)$ es un vector no nulo de $T_{\zeta_K(z)}(\mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K))$. De modo que, por lo que ya hemos demostrado, el enunciado se cumple para todo $X \in T(Z)$ tal que $T\zeta_K(X) \neq 0$.

Supongamos entonces que $T\zeta_K(X) = 0$ (con $0 \neq X \in T_z(Z)$). En este caso,

$$(T\Pi_{\mathscr{H}_K} \circ T\check{K} \circ T\sigma)(X) = (T(\Pi_{\mathscr{H}_K} \circ \check{K} \circ \sigma))(X) = (T\zeta_K)(X) = 0 \in T_{\zeta_K(z)}(\mathrm{Gr}(\mathscr{H}_K)),$$

es decir, $(T\check{K} \circ T\sigma)(X)$ es un vector vertical de $T_{(\check{K}\circ\sigma)(z)}(\mathscr{T}(\mathscr{H}_K))$. Como consecuencia, si denotamos por $\Phi_{\mathscr{H}_K}$ a la conexión universal del fibrado tautológico $\Pi_{\mathscr{H}_K}$, tenemos que $(\Phi_{\mathscr{H}_K} \circ T\check{K} \circ T\sigma)(X) = (T\check{K} \circ T\sigma)(X)$. Entonces, la Proposición 2.11 implica en primer lugar que $T\check{K}$ induce un isomorfismo cuando es restringido de los vectores verticales $\mathscr{V}_{\sigma(z)}(D)$ a los vectores verticales $\mathscr{V}_{(\check{K}\circ\sigma)(z)}(\mathscr{T}(\mathscr{H}_K))$. En segundo lugar, implica que

$$\begin{aligned}(\nabla_K\sigma)(X) = (r\circ\Phi_K\circ T\sigma)(X) &= \left(r\circ\left(T\check{K}|_{\mathscr{V}_{(\check{K}\circ\sigma)(z)}(\mathscr{T}(\mathscr{H}_K))}\right)^{-1}\circ\Phi_{\mathscr{H}_K}\circ T\check{K}\circ T\sigma\right)(X)\\ &= \left(r\circ\left(T\check{K}|_{\mathscr{V}_{(\check{K}\circ\sigma)(z)}(\mathscr{T}(\mathscr{H}_K))}\right)^{-1}\circ T\check{K}\circ T\sigma\right)(X)\\ &= \left((\check{K}|_{D_z})^{-1}\circ\widetilde{r}\circ T\check{K}\circ T\sigma\right)(X) = (\check{K}|_{D_z})^{-1}(\mathrm{d}(\widehat{K}\circ\sigma)(X)),\end{aligned}$$

donde hemos empleado la igualdad (2.6) en el cuarto signo igual de la expresión anterior. Por último, basta razonar como en el párrafo anterior a (3.8) para obtener que $(\check{K}|_{D_z})^{-1} = K(z,z)^{-1}\circ E_z$, concluyendo la demostración del enunciado.

En cuanto a la fórmula dada para caminos, basta obervar que, para cualquier camino γ sobre Z con $\gamma(0) = z$,

$$E_z\circ\widehat{K}\circ\sigma\circ\gamma(t) = (\widehat{K}\circ\sigma\circ\gamma(t))(z) = K(z,\gamma(t))(\sigma\circ\gamma(t)), \qquad t\in\mathrm{dom}\gamma.$$

■

Observación 3.12. *La primera parte de la anterior demostración se encuentra en [3]. La segunda parte, en la que a priori no sabemos si existe la $\widetilde{\sigma}$ necesitada, es aportación del autor de este trabajo.*

3.3. Ejemplos

(i) *El espacio Hardy del disco $H^2(\mathbb{D})$.* Podemos mirar $H^2(\mathbb{D})$ como un RKHS sobre el fibrado vectorial trivial $\Pi:\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$. Es sencillo comprobar que el núcleo reproductivo K de este espacio es C^∞-admisible, por lo que induce una derivada covariante ∇. Unas pocas cuentas demuestran que, para cualquier función $F:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ de clase C^1,

$$(\nabla F)_z = dF(z) + \frac{zF(z)}{1-|z|^2}\overline{(\cdot)}, \qquad z\in\mathbb{D},$$

donde $\overline{(\cdot)}$ denota el operador conjugación actuando sobre $\mathbb{R}^2\sim\mathbb{C}$, y donde $(\nabla F)_z$ denota al operador (∇F) restringido a los vectores del punto z, $T_z(\mathbb{D})$.

(ii) *El espacio Hardy del semiplano $H^2(\mathbb{C}^+)$.* De modo análogo al ejemplo anterior, uno obtiene que la derivada covariante ∇ inducida por el núcleo reproductivo de $H^2(\mathbb{C}^+)$ viene dada por

$$(\nabla F)_z = dF(z) - \frac{F(z)}{2\,\mathrm{Re}(z)}\overline{(\cdot)}, \qquad z\in\mathbb{D},$$

donde $F:\mathbb{C}^+\to\mathbb{C}$ es cualquier función de clase C^1.

(iii) Sea H un núcleo de Hardy como los de la Proposición 1.1, de modo que el espacio rango $\mathscr{H}$ del operador de Hardy asociado A_H (esto es, $\mathscr{H} = A_H(\mathscr{L}^2(0,\infty))$) es un RKHS sobre $(0,\infty)$, que lo podemos interpretar como un RKHS sobre el fibrado vectorial trivial $\Pi:(0,\infty)\times\mathbb{C}\to(0,\infty)$.

Supongamos además que el núcleo reproductivo K de $\mathscr{H}$ es C^1-admisible, y que toma valores en los números reales. Esto se cumple para los espacios de Sobolev fraccionarios $\mathscr{T}_2^{(\alpha)}(t^\alpha)$ para $\alpha>1$. Más precisamente, es trivial que $K_{\mathscr{T}_2^{(\alpha)}(t^\alpha)}(r,r)$ para todo $r>0$. Por otro lado, se puede demostrar que $K_{\mathscr{T}_2^{(\alpha)}}$ es de clase C^N si y solo si $\alpha>(N+1)/2$.

Entonces, interpretando el núcleo reproductivo K como un núcleo reproductivo sobre el fibrado trivial $(0,\infty)\times\mathbb{C}\to(0,\infty)$, obtenemos una derivada covariante ∇_K sobre $(0,\infty)$. Por el Teorema 3.11, esta tiene la expresión

$$(\nabla_K f)_r = f'(r) + f(r)\frac{\partial_2 K(r,r)}{K(r,r)}, \qquad r>0,$$

donde $f:(0,\infty)\to\mathbb{C}$ es cualquier función de clase C^1, y donde de nuevo $(\nabla_K f)_r$ denota la restricción del operador ∇f a los vectores tangentes en el punto r, $T_r(0,\infty)$. Veamos que se puede simplificar esta expresión. Como K toma valores en los reales, tenemos que $K(r,s)=\overline{K(s,r)}=K(s,r)$ para todo $r,s>0$, luego $\partial_1 K(r,r)=\partial_2 K(r,r)$. Como consecuencia, si $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ está dada por $\varphi(r)=K(r,r)$, tenemos que $\varphi'(r)=2\partial_2 K(r,r,)$. Pero por ser K a su vez núcleo de Hardy (ver Proposición 1.1), cumple la homogeneidad de grado -1, y por tanto $\varphi(r)=r^{-1}K(1,1)$. De todas estas consideraciones deducimos que

$$\partial_2 K(r,r)=\frac{1}{2}\varphi'(r)=-\frac{1}{2r^2}K(1,1)=-\frac{1}{2r}K(r,r),\qquad r>0,$$

de donde concluimos que

$$(\nabla_K f)_r=f'(r)-\frac{f(r)}{2r},\qquad r>0.$$

En particular, la derivada covariante es un invariante para toda esta familia de espacios. Este resultado abre la perspectiva de aplicar estas ideas a la clasificación de objetos en teoría de operadores en términos geométricos. Remitimos al lector a [5], como antecedente ilustre en esta dirección.

(iv) Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. El fibrado vectorial universal $\Pi_{\mathscr{H}}:\mathscr{T}(\mathscr{H})\to \mathrm{Gr}(\mathscr{H})$ tiene asociado un núcleo reproductivo $K_{\mathscr{H}}$ C^∞-admisible, dado por

$$K_{\mathscr{H}}(\mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2)(\mathscr{S}_2,v)=(\mathscr{S}_1,p_{\mathscr{S}_1}v),\qquad v\in\mathscr{S}_2,\quad \mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2\in\mathrm{Gr}(\mathscr{H}),$$

donde $p_{\mathscr{S}_1}:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ denota la proyección ortogonal de $\mathscr{H}$ sobre $\mathscr{S}_1$. Precisamente, la conexión lineal y la derivada covariante inducidas por $K_{\mathscr{H}}$ son precisamente la conexión $\Phi_{\mathscr{H}}$ y la derivada covariante $\nabla_{\mathscr{H}}$ del fibrado universal $\Pi_{\mathscr{H}}$ presentadas en el Ejemplo 2.10, véase [3].

(v) *Fibrados vectoriales homogéneos.* Por último, damos una aplicación a fibrados vectoriales homogéneos asociados a representaciones de grupos de Banach-Lie. Este ejemplo requiere por parte del lector unos conocimientos básicos sobre grupos y álgebras de Banach-Lie que quedan fuera del alcance de este trabajo. Referimos al lector interesado a [8] para una introducción de los fibrados vectoriales homogéneos.

Sea G_A un grupo de Banach-Lie con un subgrupo de Banach-Lie G_B con respectivas algebras de Lie $\mathfrak{g}_A$ y $\mathfrak{g}_B$. Sean $\rho_A:G_A\to L(\mathscr{H}_A)$ y $\rho_B:G_B\to L(\mathscr{H}_B)$ representaciones unitarias uniformemente continuas con $\mathscr{H}_B\subset\mathscr{H}_A$, $\rho_B(g)=\rho_A(g)|_{\mathscr{H}_B}$ para todo $g\in G_B$ y tales que $\mathscr{H}_A=\overline{\rho_A(G_A)\mathscr{H}_B}$. Sea $G_A\times_{G_B}\mathscr{H}_B$ el producto $G_A\times\mathscr{H}_B$ módulo la relación de equivalencia dada por

$$(g,h)\sim(g',h')\qquad\Longleftrightarrow\qquad(\exists w\in G_B)\quad g'=gw,\quad h'=\rho_B(w^{-1})h.$$

Entonces $G_A\times_{G_B}\mathscr{H}_B$ tiene una estructura canónica de C^∞-variedad tal que la proyección $\Pi: G_A\times_{G_B}\mathscr{H}_B\to G_A/G_B$ es un C^∞-fibrado vectorial homogéneo. De hecho, Π es un C^∞-fibrado vectorial hermítico con la estructura hermítica dada por

$$([u,f]\mid[u,h])_s:=(f\mid h)_{\mathscr{H}_B},\qquad u\in G_A,\ s:=uG_B,\quad f,h\in\mathscr{H}_B.$$

Sea $P:\mathscr{H}_A\to\mathscr{H}_A$ la proyección ortogonal sobre $\mathscr{H}_B$. Entonces, el núcleo reproductivo K, donde

$$K(uG_B,vG_B)[(v,f)]:=[(u,P(\rho_A(u^{-1})\rho_A(v)f))],\qquad u,v\in G_A,\ f\in\mathscr{H}_B,$$

es un núcleo C^∞-admisible, tal que la derivada covariante ∇_K inducida por K viene dada por

$$(\nabla_K\sigma)[(u,X)]=[(u,\mathrm{d}F_\sigma(u,X)+P(\mathrm{d}\rho_A(X)F_\sigma(u)))],$$

donde $[(u,X)]\in G_A\times_{G_B}\mathfrak{g}_A/\mathfrak{g}_B\sim T(G_A/G_B)$, y σ es la sección inducida por una aplicación $F_\sigma: G_A\to\mathscr{H}_B$ tal que $F_\sigma(uw)=\rho_A(w^{-1})F_\sigma(u)$ para todo $u\in G_A$, $w\in G_B$. Referimos al lector a [3, Subsect. 5.2] para las demostraciones de estos resultados.

Bibliografía

[1] N. ARONSZAJN, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68**(3) (1950), 337–404.

[2] D. BELTIŢĂ Y J.E. GALÉ, *Universal objects in categories of reproducing kernels*, Rev. Mat. Iberoamericana **27**(1) (2011), 123–179.

[3] D. BELTIŢĂ Y J.E. GALÉ, *Linear connections for reproducing kernels on vector bundles*, Math. Z. **277**(1) (2014), 29–62.

[4] D. BELTIŢĂ Y T.S. RATIU, *Geometric representation theory for unitary groups of operator algebras*, Adv. Math., **208**(1) (2007), 299–317.

[5] M.J. COWEN Y R.G. DOUGLAS, *Complex geometry and operator theory*, Acta Math. **141** (1978), 187–261.

[6] J.E. GALÉ, P.J. MIANA Y L. SÁNCHEZ–LAJUSTICIA, *RKH spaces of Brownian type defined by Cesaro–Hardy operators*, Anal. Math. Phys., **11**(3) (2021), 1–34.

[7] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD Y G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, London–New York, 1934.

[8] A. KRIEGL Y P.W. MICHOR, *The convenient setting of global analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[9] S. LANG, *Fundamentals of differential geometry*, Springer-Verlag, Nueva York, 1999.

[10] M. MARTIN Y N. SALINAS, *Flag manifolds and the Cowen-Douglas theory*, J. Operator Theory **38**(2) (1997), 329–365.

[11] K.H. NEEB, *On differentiable vectors for representations of infinite dimensional Lie groups*, J. Funct. Anal., **259**(11) (2010), 2814–2855.

[12] A. ODZIJEWICZ, *On reproducing kernels and quantization of states*, Commun. Math. Phys. **114** (1988), 577–597.

[13] J. OLIVA-MAZA, *On Hardy kernels as reproducing kernels*, Canad. Math. Bull. (2022), 1–15.

[14] V.I. PAULSEN Y M. RAGHUPATHI, *An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces*, (Vol. 152), Cambridge university press, Cambridge, 2016.

[15] W. RUDIN, *Functional analysis*, 2 ed., McGraw-Hill, Singapore, 1991.

[16] S. SAITOH Y Y. SAWANO, *Theory of reproducing kernels and applications*, Springer, Singapore, 2016.

[17] H. UPMEIER, *Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras*, North-Holland Mathematics Studies, 104. Notas de Matemàtica, 96. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

Apéndice A

Resultados auxiliares

Lema A.1. *Sea $A\colon X \to \widetilde{X}$ una aplicación lineal y continua entre dos espacios de Banach X y $\widetilde{X}$. Supongamos que hay dos subespacios cerrados $F \subset X$ y $\widetilde{F} \subset \widetilde{X}$ tales que:*

(i) *la restricción del operador A induce un isomorfismo lineal $A|_F\colon F \to \widetilde{F}$;*

(ii) $\widetilde{F} = \operatorname{Ran}(\widetilde{P})$*, para alguna proyección (lineal y acotada) $\widetilde{P}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$.*

Entonces, existe una única proyección (lineal y acotada) $P : X \to X$ tal que $\operatorname{Ran}(P) = F$ *y* $\widetilde{P} \circ A = A \circ P$.

Demostración:
Existencia: Si definimos

$$P := (A|_F)^{-1} \circ \widetilde{P} \circ A \in (X), \tag{A.1}$$

es claro que $\operatorname{Ran}(P) = F$ y que además $P|_F = \mathrm{id}_F$, por lo que $P \circ P = P$. Además, la propiedad conmutativa se cumple por la propia construcción de P.

Unicidad: Sea $P_1 \in L(X)$ otro operador satisfaciendo las condiciones del enunciado. Entonces, para cualquier $x \in X$, tenemos que $A(P_1x) = \widetilde{P}Ax = A(Px)$. Como $P_1x, Px \in F$ y además $A|_{\mathscr{F}}\colon F \to \widetilde{F}$ es un isomorfismo por hipótesis, concluimos que $P_1x = Px$. Esto es, $P_1 = P$ y hemos finalizado la demostración. ■

Proposición A.2. *Sea $\Pi\colon D \to Z$ un C^N-fibrado vectorial hermítico cuyas fibras son finito-dimensionales. Si un K es un núcleo reproductivo en Π que satisface las condiciones (i)–(ii) de la Definición 3.5, entonces también satisface la condición (iii), y por tanto es un núcleo C^N-admisible.*

Demostración:
Sea $z_0 \in Z$. Dado que el fibrado Π es localmente trivial y sus fibras son finito-dimensionales, se sigue del Lema 3.10 que existe un $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) y un entorno abierto U de $z_0 \in Z$ tal que $\dim \zeta_K(z) = n$ para todo $z \in U$. Entonces, una aplicación de [2, Theorem 5.5] que la aplicación $\zeta_K\colon Z \to \operatorname{Gr}(\mathscr{H}_K)$ es continua.

Recordemos que $K(z_0,z_0) \in L(D_{z_0})$ es un operador invertible por la condición (ii). Entonces, considerando una trivialización local de Π con fibras dadas por D_{z_0} en un entorno de z_0, y usando el hecho de que $K\colon Z \times Z \to L(p_2^*(D), p_1^*(D))$ es continuo, tenemos que existe un entorno abierto U de $z_0 \in Z$ tal que para cualesquiera $y,z \in U$ el operador $K(y,z) \in L(D_y, D_z)$ es invertible. Sea entonces $\widetilde{K}_0\colon U \to L(D_{z_0}, \mathscr{H}_K)$ dado por $\widetilde{K}_0(z) = \widehat{K} \circ K(z,z_0)$. Como $K\colon Z \times Z \to L(p_2^*(D), p_1^*(D))$ es C^N por hipótesis, junto con $\dim D_{z_0} < \infty$ y $\widehat{K}\colon D \to \mathscr{H}_K$ es C^N por el Lema 3.9, tenemos que la aplicación $\widetilde{K}_0\colon U \to L(D_{z_0}, \mathscr{H}_K)$ es de clase C^N.

Además, como para cualquier $z \in U$ el operador $K(z,z_0) \in L(D_{z_0}, D_z)$ es invertible, tenemos que $\operatorname{Ran}(\widetilde{K}_0(z)) = \widehat{K}(D_z) = \zeta_K(z)$. Por tanto, tenemos una aplicación $\widetilde{K}_0\colon U \to L(D_{z_0}, \mathscr{H}_K)$ de clase C^N tal que la aplicación dada por $\operatorname{Ran}(\widetilde{K}_0(\cdot))\colon U \to \operatorname{Gr}(\mathscr{H}_K)$ es continua. Esto implica (ver por ejemplo [10, Subsect. 1.8 and 1.5]) que la aplicación $\operatorname{Ran}(\widetilde{K}_0(\cdot))$ es de clase C^N, es decir, $\zeta_K|_U\colon U \to \operatorname{Gr}(\mathscr{H}_K)$ es de C^N-diferenciable. Como U es un abierto de un punto arbitrario $z \in Z$, la demostración está completada. ■