



# Trabajo Fin de Grado

**EL ZOO DE LAS PARTÍCULAS: DE LA RELATIVIDAD A LA TEORÍA  
DE CAMPOS CLÁSICA Y CUÁNTICA**

Autor

Ignacio Ojer García

Directora

Siannah Peñaranda

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
2021/2022

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Campo electromagnético clásico. Invarianza gauge.</b>	<b>2</b>
<b>3. Campo de Dirac.</b>	<b>4</b>
3.1. Introducción. . . . .	4
3.2. Ecuación de Dirac. . . . .	5
<b>4. Cuantización del campo electromagnético libre. Electrodinámica Cuántica.</b>	<b>6</b>
4.1. Cuantización del campo electromagnético libre. Dificultades y soluciones. . .	6
4.2. Electrodinámica cuántica (QED). . . . .	8
<b>5. Modelo Estándar (SM).</b>	<b>8</b>
5.1. Simetrías. . . . .	9
5.2. QED. . . . .	10
5.3. Modelo electrodébil. . . . .	11
<b>6. Ruptura espontánea de simetría. Mecanismo de Higgs.</b>	<b>13</b>
6.1. Ejemplo simple de ruptura de simetría. . . . .	13
6.2. Ruptura de simetría global. . . . .	14
6.3. Ruptura de simetría gauge local invariante. . . . .	16
6.3.1. Descartando otros posibles potenciales. . . . .	18
6.4. Mecanismo de Higgs en el Modelo Estándar . . . . .	19
6.5. Masas de los bosones de gauge. . . . .	20
6.6. Superconductividad y partícula de Higgs. . . . .	22
<b>7. Conclusiones.</b>	<b>25</b>

# 1. Introducción

La física de partículas es el campo que se encarga del estudio de la composición del mundo que nos rodea, así como de la dinámica de las interacciones entre las partículas elementales que componen la materia. Uno de los principales pilares dentro de esta rama es el Modelo Estándar de las partículas elementales (SM, del inglés *Standard Model*). Este modelo es capaz de explicar tres de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza (describe las interacciones débiles, fuertes y electromagnéticas, sin entrar en la parte gravitacional).

Entre los principales puntos a favor de esta teoría destaca que algunas de sus predicciones han podido ser verificadas experimentalmente con un altísimo grado de precisión. En este sentido, es de vital importancia el descubrimiento del bosón de Higgs en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) del CERN (Ginebra, Suiza) en 2012, casi medio siglo después de ser propuesta su existencia. Este bosón es el encargado de dotar de masa al resto de partículas del SM a través del Mecanismo de Higgs.

La intención de este trabajo de fin de grado es estudiar el contenido de partículas del SM, partiendo de conocimientos previos de la teoría del campo electromagnético clásico hasta llegar al SM. Así, comenzaremos con un repaso de las principales ecuaciones del electromagnetismo y la importancia de la invariancia Lorentz en cualquier teoría de la física. A continuación, profundizaremos en algunas ideas acerca de la simetría, cuya ruptura espontánea se encuentra estrechamente relacionada con el Mecanismo de Higgs, tal y como veremos. Con el objetivo de ilustrar esto, recurriremos a varios ejemplos con diversos potenciales, partiendo de la Electrodinámica cuántica y pasando por la Teoría electrodébil hasta llegar al caso que nos concierne, el SM. Finalmente, hablaremos de la relación existente entre la ruptura espontánea de simetría y el fenómeno de superconductividad.

## 2. Campo electromagnético clásico. Invarianza gauge.

Las interacciones electromagnéticas vienen descritas clásicamente por las conocidas como ecuaciones de Maxwell. Estas 4 relaciones, a su vez, pueden dividirse en ecuaciones homogéneas e inhomogéneas. Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j}, \quad (2)$$

mientras que las homogéneas son:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

donde  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$  son los campos magnético y eléctrico,  $\rho$  es la densidad de carga y  $\vec{j}$  es la densidad de corriente. Un aspecto a destacar es que, de estas 4 ecuaciones vectoriales, en realidad se obtienen 8 ecuaciones escalares (una de cada divergencia y tres de cada rotacional).

Desde un punto de vista relativista, esta notación no es la más conveniente, puesto que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes Lorentz. Necesitamos introducir la forma covariante

de estas ecuaciones. Por ello, es habitual introducir el campo escalar  $\phi = \phi(\vec{x}, t)$  y el potencial vector  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$ , tales que cumplen las siguientes relaciones con los campos:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (6)$$

A continuación, y con el objetivo de describir el electromagnetismo clásico de manera que sea invariante Lorentz, podemos construir el siguiente cuadrivector:

$$A_\mu \equiv (-\phi, \vec{A}), \quad (7)$$

e introducir el cuatrivector densidad carga-corriente, cuyas componentes son la densidad de carga  $\rho$  y la densidad de corriente  $\vec{j}$ :

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}). \quad (8)$$

Es posible también obtener una serie de relaciones entre las derivadas parciales del cuadripotencial (7) y las componentes espaciales de los campos eléctrico y magnético, definiendo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (9)$$

Esto conduce finalmente a:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Este tensor, que además es antisimétrico, recibe el nombre de tensor del campo electromagnético. Gracias a esta nueva definición, podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell en su forma covariante. Las ecuaciones inhomogéneas, dadas en (1) y (2), pueden expresarse como:

$$\partial_\mu F^{\lambda\mu} = \frac{1}{c} j^\lambda, \quad (11)$$

mientras que para las homogéneas, dadas en (3) y (4), se obtiene:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (12)$$

Como sabemos, es de suma importancia que las ecuaciones no varíen entre distintos sistemas de referencia. Para ello, exigimos la covarianza general o invariancia Lorentz de las ecuaciones. Notemos que las ecuaciones dadas en (5) y (6) permanecen invariantes ante una transformación del tipo:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad A \rightarrow A' = A - \nabla f, \quad (13)$$

donde  $f = f(\vec{x}, t)$  es una función arbitraria. Esto se conoce como transformación de gauge de segundo tipo.

Para comprobar que las expresiones (11) y (12) son invariantes Lorentz, es suficiente con hacer una transformación como la anterior.

De esta manera, se ha expuesto que tanto las ecuaciones de Maxwell homogéneas como las inhomogéneas en su forma covariante, así como el tensor del campo electromagnético son invariantes Lorentz, lo cual era el objetivo principal de la introducción de todas las magnitudes a lo largo de este apartado.

### 3. Campo de Dirac.

#### 3.1. Introducción.

Dirac postuló la existencia de una ecuación que diera una respuesta a problemas que se planteaban en las primeras décadas del siglo XX. Era necesario encontrar una ecuación cuántica relativista que describiera los sistemas físicos con una densidad de probabilidad definida positiva. En esta sección introducimos algunas cuestiones básicas para motivar la propuesta de la ecuación de Dirac.

En primer lugar, comencemos por la expresión para la energía de una partícula libre relativista,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (14)$$

que nos conducirá a la ecuación de Klein-Gordon.

Además, recordando que en física cuántica el vector momento lineal viene dado por el operador  $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ , podemos introducir el cuadvivector momento como:

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) = i \left( \frac{E}{c}, -\nabla \right) = i \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad (15)$$

cuyas componentes corresponden con la energía total y el momento. De igual forma, se cumplirá:

$$p^\mu p_\mu = - \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) = -\square, \quad (16)$$

donde definimos  $\square$  como el operador de D'Alembert, que es invariante Lorentz. Notéase que (14) implicaría que  $(\square + m^2 c^2) = 0 \implies p^\mu p_\mu = m^2 c^2$ .

Con esta nomenclatura, aplicando (14) sobre un campo escalar  $\phi(\vec{x}, t)$ , obtenemos la conocida como ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2 c^2)\phi(\vec{x}, t) = 0. \quad (17)$$

Si empleamos unidades naturales ( $c = 1$ )<sup>1</sup>, vemos que en el caso de una partícula sin masa (por ejemplo, el fotón), la ecuación anterior se reduce a la ecuación de onda relativista, que es una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi. \quad (18)$$

Esta ecuación tendrá como solución una combinación lineal de las soluciones particulares

$$\phi^1(\vec{x}, t) = e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad \text{y} \quad \phi^2(\vec{x}, t) = e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}.$$

Sustituyendo esta igualdad en la ecuación de Klein-Gordon (17), se observa que ha de cumplirse:

$$E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 \implies E = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}. \quad (19)$$

Como vemos, se obtienen tanto soluciones con energía negativa como positiva, cuya coexistencia conduce al problema de cómo evitar posibles transiciones espontáneas entre ambos estados. Es natural pensar en que se pueden simplemente “desechar” las soluciones negativas.

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante asumimos unidades naturales salvo que se diga lo contrario.

Sin embargo, esto no es posible, pues se eliminarían estados del espacio de Hilbert total y los autoestados del Hamiltoniano ya no formarían un conjunto completo. Esto implicaría que la evolución temporal dejaría de ser unitaria.

Además, si calculamos la cuadracorriente de probabilidad, obtenemos una densidad de probabilidad negativa. Este sería otro posible enfoque de que nos encontramos en un problema. Para demostrarlo, comenzamos por multiplicar la ecuación de Klein-Gordon (17) por  $-i\phi^*$  y su conjugada por  $-i\phi$ . A continuación restamos ambos productos y obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[ (\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}) \right]}_{\rho} + \nabla \cdot \underbrace{\left[ (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \right]}_{\vec{j}} = 0. \quad (20)$$

De esta forma, hemos llegado a un resultado análogo a la ecuación de continuidad clásica ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ ), cuya forma covariante viene dada por

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (21)$$

siendo  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$  el cuadvivector densidad carga-corriente definido en (8) con  $c = 1$ .

Por tanto, vemos que  $\rho \propto -E$  y para el caso de  $E > 0 \implies \rho < 0$ , lo cual carece de sentido si consideramos la interpretación de densidad probabilística.

Las soluciones de energía negativa son necesarias matemáticamente para poder obtener la solución de la ecuación como una ecuación de ondas donde se superponen estados con frecuencias o energías de ambos signos, pero carecen de sentido físico (posteriormente se le dió otra interpretación en términos de antipartículas y sus operadores de creación y aniquilación).

### 3.2. Ecuación de Dirac.

Para tratar de paliar estos problemas asociados a la interpretación probabilística, Dirac propuso una ecuación lineal en las derivadas tanto espaciales como temporales, que tenía la forma general:

$$H\psi = (\alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot m)\psi, \quad (22)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  eran coeficientes a determinar. Dichos coeficientes resultaron ser necesariamente matrices (y no escalares) que satisfacían determinadas relaciones. Si imponemos que este Hamiltoniano cumpla la ecuación relativista de conservación de la energía (14), obtenemos la condición de anticonmutación entre  $\alpha$  y  $\beta$ , así como la igualdad  $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ , lo cual implica que  $\alpha$  y  $\beta$  no pueden ser números, sino matrices.

Bajo estas premisas, la elección de los coeficientes no es única. Sin embargo, adoptamos como solución la representación de Dirac:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (23)$$

donde por  $I$  denotamos a la matriz identidad de dimensión 2x2, y  $\sigma_i$  son las conocidas como matrices de Pauli, que también tienen dimensión 2x2.

Se obtiene así la ecuación de Dirac en su forma covariante:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (24)$$

siendo  $\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha)$ , es decir,  $\gamma^0 \equiv \beta$  y  $\gamma^i \equiv \beta\alpha$ , y donde el término de masa  $m$  está implícitamente multiplicado por la matriz identidad  $I$  de dimensión  $4 \times 4$ .

Comprobemos ahora que esta ecuación nos soluciona el problema de la densidad de probabilidad negativa. Partimos de la hermítica conjugada en componentes de la ecuación de Dirac, y empleamos algunas propiedades sobre las  $\gamma^\mu$ :

$$-i \underbrace{(\gamma^0)^\dagger}_{=\gamma^0} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} - i \underbrace{(\gamma^k)^\dagger}_{=-\gamma^k} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} - m\psi^\dagger = 0. \quad (25)$$

Multiplicando ahora esta expresión por  $\gamma^0$  y teniendo en cuenta que se cumplen las condiciones  $\gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0$  y  $(\gamma^0)^2 = I$ , resulta:

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0, \quad \text{con } \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (26)$$

Finalmente, veamos cómo a partir de las ecuaciones (24) y (26) se puede derivar la ecuación de continuidad (21). Si realizamos la suma de las multiplicaciones  $\bar{\psi} \cdot (24)$  y  $(26) \cdot \psi$ :

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \partial_\mu \underbrace{(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)}_{j^\mu} = 0. \quad (27)$$

Por tanto,

$$\rho \equiv j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 \implies \rho > 0.$$

De esta forma, se obtiene una densidad de probabilidad positiva y se soluciona el problema que motivó al planteamiento de Dirac.

## 4. Cuantización del campo electromagnético libre. Electrodinámica Cuántica.

En esta sección comenzamos presentando la cuantización de campos libres [1], considerando la electrodinámica clásica que describe la interacción entre fotones y partículas cargadas. A continuación, explicamos las dificultades en la cuantización y sus soluciones. Finalmente, terminaremos hablando sobre el Lagrangiano de la QED (del inglés *Quantum Electrodynamics*).

### 4.1. Cuantización del campo electromagnético libre. Dificultades y soluciones.

Al pasar de la teoría clásica a la teoría cuántica de campos, interpretamos los campos conjugados de coordenadas y momento como operadores que deben satisfacer determinadas relaciones de conmutación. Si tenemos los campos de coordenadas y momento,  $\Phi^\mu(\vec{x}, t)$  y  $\Pi^\mu(\vec{x}, t)$ , imponemos que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas:

$$[\Phi^\mu(\vec{x}, t), \Pi^\mu(\vec{x}', t)] = i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (28)$$

$$[\Phi^\mu(\vec{x}, t), \Phi^\mu(\vec{x}', t)] = [\Pi^\mu(\vec{x}, t), \Pi^\mu(\vec{x}', t)] = 0. \quad (29)$$

En una formulación Lagrangiana, para el campo electromagnético clásico podemos escribir:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (30)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es el tensor del campo electromagnético (10) y  $A_\mu$  viene dado por (7). El momento generalizado viene definido por:

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -F^{\mu 0}. \quad (31)$$

Conocidos los  $\Pi^\mu$ , ya podemos comprobar si se cumplen las relaciones de conmutación (28) y (29), donde tomaremos  $\Phi^\mu \equiv A^\mu$ . Sin embargo, no es necesario verificar todas las relaciones, ya que como  $\Pi^\mu = -F^{\mu 0} \implies \Pi^0 = -F^{00} = 0$ , luego la relación (28), en general, no se cumple:

$$[A^0(x, t), \Pi^0(x', t)] = [\phi^0(x, t), 0] = 0 \neq i\hbar.$$

Como consecuencia, no es posible cuantizar la teoría con este Lagrangiano.

Mencionar que otra forma alternativa para ver que no es posible la cuantización de la teoría clásica del electromagnetismo, sería comprobando la no existencia de la función de Green o propagador del fotón, que solamente presentaremos en este trabajo para el caso de la QED en la sección 4.2.

El problema de cuantizar el campo electromagnético también puede verse a partir de las ecuaciones de Maxwell, donde tenemos 6 parámetros o grados de libertad del sistema que corresponden a las componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  y tenemos sólo 4 ligaduras que vienen dadas por las ecuaciones (11) y (12) (tres ligaduras de la primera y una de la segunda, respectivamente). De aquí obtenemos dos grados de libertad libres.

Notemos además que el campo  $A_\mu(x)$  que hemos introducido tiene cuatro componentes y sin embargo solo existen dos grados de libertad físicos que corresponden con los dos modos de polarización transversal del fotón linealmente independientes.

El desacuerdo entre el número de componentes de un campo y los estados físicos de una partícula nos conduce a la definición de lo que denominamos simetría gauge de la teoría de Maxwell y el problema de la invariancia gauge.

Para solucionar este problema y poder formular una teoría cuántica del electromagnetismo, tendríamos que reescribir el Lagrangiano clásico. Una posible solución fue propuesta por Fermi, que sugiere reescribir el Lagrangiano de la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - j^\mu A_\mu, \quad (32)$$

siendo este Lagrangiano equivalente al que teníamos inicialmente, solo que ahora sí puede ser cuantizado, dado que  $\Pi^\mu = -\dot{A}^\mu \neq 0$ .

Sin embargo, sigue sin existir el propagador del fotón. Para resolver dicho problema, se hace necesario introducir un nuevo término en el Lagrangiano, al que llamaremos término de *gauge fixing*:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (33)$$

donde  $\xi$  es un parámetro tal que cuando le damos un valor particular implica que estamos escogiendo un gauge específico; una condición particular o elección del gauge. Por ejemplo  $\xi = 0$  corresponde con lo que se conoce como gauge de Landau y  $\xi = 1$  con el gauge de Feynman-t'Hooft. La introducción de dicho término está basada en la redundancia en el campo  $A^\mu$  debida a los dos grados de libertad extra que hemos mencionado antes. Como consecuencia, podemos imponer otras condiciones sobre el campo  $A^\mu$  tales que podamos

restringir el número de componentes independientes. Este es el denominado procedimiento de *gauge fixing*.

El Lagrangiano final, que soluciona la cuantización del campo electromagnético y a su vez la existencia del propagador del fotón, será entonces la suma de los dos términos dados en (32) y (33).

## 4.2. Electrodinámica cuántica (QED).

Partimos del Lagrangiano obtenido anteriormente,

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - j^\mu A_\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (34)$$

Si utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos que:

$$\partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial_\alpha A_\nu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(A_\nu)} \implies \square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu. \quad (35)$$

Reescribimos esta ecuación como:

$$[g^{\lambda\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial^\lambda] A_\mu = j^\lambda.$$

A continuación, hacemos la transformada de Fourier para pasar al espacio de momentos y obtenemos la función de Green o propagador del fotón.

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-1}{k^2 - i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} - \left(1 - \xi\right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (36)$$

donde  $k$  es el momento y el término  $-i\epsilon$  se introduce para tratar con el polo que aparece para  $k = 0$  al trabajar con el propagador. Esto se conoce como *prescripción de Feynmann*.

Finalmente, el Lagrangiano para la electrodinámica cuántica está dado por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\nu) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (37)$$

donde el tercer término contiene el término de masa y el último término es el término de interacción que hemos escrito de forma explícita,  $\mathcal{L}_{int} = -j^\mu A_\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$ .

De esta forma, partiendo de conceptos previos, hemos obtenido el lagrangiano de la QED, una teoría asociada a transformaciones del grupo de simetría  $U(1)$  que describe las interacciones entre fotones y partículas cargadas (electrones y positrones).

## 5. Modelo Estándar (SM).

El SM es la teoría de mayor éxito hasta el momento para explicar la composición de la materia y la dinámica de sus interacciones. Todas las partículas que predice este modelo han sido encontradas experimentalmente, siendo sus masas e interacciones verificadas con gran precisión. Un punto a destacar de la teoría es la comprobación de la existencia de los bosones mediadores de las interacciones débiles ( $Z$  y  $W^\pm$ ), y la relación entre sus masas. En esta sección presentaremos las partículas descritas por el modelo, introduciendo los conceptos de simetría que son de vital importancia en física de partículas, recuperando el caso de la QED discutido anteriormente y presentando el modelo electrodébil. El conjunto de partículas del SM se muestra en la Figura 1.

**Standard Model of Elementary Particles**

	three generations of matter (elementary fermions)			three generations of antimatter (elementary antifermions)			interactions / force carriers (elementary bosons)	
	I	II	III	I	II	III		
mass	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$
charge	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
<b>QUARKS</b>	<b>U</b> up	<b>C</b> charm	<b>T</b> top	<b>Ū</b> antiup	<b>Ĉ</b> anticharm	<b>Ṫ</b> antitop	<b>g</b> gluon	<b>H</b> higgs
	<b>D</b> down	<b>S</b> strange	<b>B</b> bottom	<b>Ḑ</b> antidown	<b>Ŝ</b> antistrange	<b>Ḃ</b> antibottom	<b>γ</b> photon	
<b>LEPTONS</b>	<b>e</b> electron	<b>μ</b> muon	<b>τ</b> tau	<b>e<sup>+</sup></b> positron	<b>μ<sup>-</sup></b> antimuon	<b>τ<sup>-</sup></b> antitau	<b>Z<sup>0</sup></b> Z <sup>0</sup> boson	
	<b>ν<sub>e</sub></b> electron neutrino	<b>ν<sub>μ</sub></b> muon neutrino	<b>ν<sub>τ</sub></b> tau neutrino	<b>ν̄<sub>e</sub></b> electron antineutrino	<b>ν̄<sub>μ</sub></b> muon antineutrino	<b>ν̄<sub>τ</sub></b> tau antineutrino	<b>W<sup>+</sup></b> W <sup>+</sup> boson	<b>W<sup>-</sup></b> W <sup>-</sup> boson
							<b>GAUGE BOSONS</b> VECTOR BOSONS	<b>SCALAR BOSONS</b>

Figura 1: Clasificación de las partículas elementales del Modelo Estándar.

Las partículas de materia del SM son los fermiones, partículas de espín  $\frac{1}{2}$ . Estos pueden ser leptones o quarks y en ambos casos pueden dividirse en 3 grupos o familias. Los leptones son partículas indivisibles que pueden clasificarse en leptones cargados (electrón, muón, tau) y sus neutrinos asociados. Los quarks tienen carga eléctrica fraccionaria. Cabe destacar que estos no aparecen aislados sino que se encuentran formando estados ligados llamados hadrones. Los hadrones se clasifican en mesones si están formados por una pareja quark-antiquark y bariones si están compuestos por tres quarks. Tanto leptones como quarks tienen asociados una antipartícula (misma masa, carga opuesta).

Por otro lado, tenemos las partículas mediadoras de la interacción o bosones, que tienen espín entero. En primer lugar, tenemos el fotón ( $\gamma$ ), de masa nula, mediador de las interacciones electromagnéticas entre partículas cargadas. Los bosones másicos ( $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z$ ) están asociados a las interacciones débiles, que explican por ejemplo la desintegración  $\beta$  y están estrechamente relacionadas con la física de sabor. Es muy relevante destacar que en el SM hablamos de interacciones electrodébiles, unificando así los dos tipos de interacciones comentadas en las líneas previas: la interacción electromagnética y la interacción débil. Esto es uno de los grandes éxitos del SM. Finalmente, tenemos ocho gluones no másicos, mediadores de la interacción fuerte, que mantiene unidos los quarks para la formación de hadrones y está ligada con el color.

Resta mencionar el bosón de Higgs, de vital importancia al explicar el origen de la masa de otras partículas elementales a través del Mecanismo de Higgs, que veremos de manera más detallada a lo largo de la próxima sección.

### 5.1. Simetrías.

Una simetría está asociada a una transformación que mantiene invariante cierta característica de un sistema físico. Podemos clasificarlas en dos tipos; simetrías discretas y simetrías continuas. Nosotros trabajaremos con las continuas. Más concretamente, con un subgrupo de éstas, las simetrías internas. Dicho subgrupo actúa tanto sobre los números cuánticos como sobre las coordenadas espacio-temporales de una partícula inicial, transformando los valores de estos parámetros y dando lugar a un estado final, siempre conservando la masa de la

partícula. Existen dos tipos de simetrías internas: <sup>2</sup>

- Simetría global: donde los parámetros de la transformación no dependen de las coordenadas espacio-temporales.

$$U = e^{i\alpha}, \quad \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x). \quad (38)$$

- Simetría local: donde los parámetros de la transformación dependen explícitamente de las coordenadas espacio-temporales.

$$U = e^{i\alpha(x)}, \quad \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x). \quad (39)$$

El SM es una teoría cuántica relativista, basada desde un punto de vista matemático en el grupo de simetría  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . El subíndice  $C$  indica que las transformaciones sólo actúan sobre determinadas partículas con carga de color, el subíndice  $L$  (Left) denota que solo los fermiones izquierdos pertenecen a la representación fundamental del grupo  $SU(2)_L$  y el subíndice  $Y$  denota la hipercarga. Los subíndices  $R$  o  $L$  en los campos fermiónicos hacen referencia al autoestado derecho (Right) o izquierdo (Left) del operador quiralidad. Los campos izquierdos se comportan como *dobletes de isoespin* mientras que los izquierdos como *singletes*.

Sin embargo, el modelo electrodébil (simetría  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ) tiene algunos problemas, pues no permite términos masivos ni para los bosones de gauge ni para los fermiones (sabemos que esto solamente es cierto para los fotones). Para solucionar este problema es suficiente con introducir un nuevo campo escalar con un potencial muy específico que mantenga el lagrangiano invariante bajo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , no siendo así para el estado de vacío. Esto recibe el nombre de ruptura espontánea de la simetría (SSB, del inglés *spontaneous symmetry breaking*).

## 5.2. QED.

Para formular la QED tomamos como base los resultados que hemos presentado anteriormente para el Lagrangiano de la electrodinámica. Partimos del Lagrangiano para un campo libre sin masa de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi, \quad (40)$$

siendo  $\psi$  es el campo del fermión y  $\gamma^\mu$  las matrices gamma de Dirac. Se puede comprobar fácilmente que este Lagrangiano es invariante bajo una transformación global  $U(1)$  de la forma:

$$\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\theta Q}\bar{\psi} \quad ; \quad \partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu(e^{i\theta Q}\psi) = e^{i\theta Q}\partial_\mu\psi, \quad (41)$$

donde  $Q$  es el generador del grupo de simetría y  $\theta$  es un parámetro libre.

Sin embargo, este Lagrangiano no sería invariante bajo transformaciones locales de simetría. En este caso obtenemos:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}\gamma^\mu[\partial_\mu + iQ(\partial_\mu\theta(x))]\psi.$$

---

<sup>2</sup>Apoyándonos en la teoría de grupos, sabemos que una simetría puede ser representada mediante una transformación unitaria  $U(\alpha)$ . Según el valor del parámetro  $\alpha$ , esta transformación pertenecerá a un grupo algebraico u otro. Por ejemplo, si  $\alpha$  es un escalar, hablamos de un grupo  $U(1)$ . Mientras que, si se tratara de una matriz unitaria  $N \times N$ , el grupo sería  $SU(N)$ .

Para solucionarlo y que sea invariante, se tiene que sustituir la derivada que tenemos en (40) por la siguiente derivada covariante:

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieQA_\mu)\psi. \quad (42)$$

Esta derivada covariante se transforma bajo el grupo de simetría  $U(1)$  tal que:

$$D_\mu \psi \rightarrow e^{i\theta(x)Q} D_\mu \psi.$$

Por otra parte, también se hace necesario introducir cómo se transforma el campo gauge del fotón ( $A_\mu$ ) para que se cumpla la invariancia gauge:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x). \quad (43)$$

De esta forma obtenemos para el Lagrangiano libre:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu)\psi. \quad (44)$$

Para escribir el lagrangiano de la QED, tenemos que añadir el término cinético que corresponde a la propagación del campo del fotón ( $A_\mu$ ), obtenido con el uso del tensor  $F_{\mu\nu}$  que definimos en (9). También se ha de tener en cuenta el término de interacción entre el campo del fotón y el campo fermiónico (los electrones), así como el término de *gauge fixing*. Ambas contribuciones fueron descritas en (37). Así, sin incluir el término de masa, tenemos:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\xi})(\partial_\mu A^\mu)^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (45)$$

### 5.3. Modelo electrodébil.

Podemos extender este procedimiento al grupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , asociado a las interacciones electrodébiles [2, 3]. La transformación global para esta simetría, actúa sobre el campo y la derivada de la manera siguiente:

$$\psi \rightarrow e^{ig\sum_{a=1}^3 \theta_a T^a} e^{ig'Y\alpha} \psi \quad ; \quad \partial_\mu \psi \rightarrow e^{ig\sum_{a=1}^3 \theta_a T^a} e^{ig'Y\alpha} \partial_\mu \psi, \quad (46)$$

donde  $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$  son los tres generadores del grupo  $SU(2)_L$  e  $Y$  el generador de hipercarga del grupo  $U(1)_Y$  (magnitud que se conserva en las interacciones electrodébiles).  $\theta_a$  y  $\alpha$  son parámetros continuos globales.

En este caso, el Lagrangiano libre, que será invariante bajo la transformación global anterior es:

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^3 i\bar{\psi}_a \gamma^\mu \partial_\mu \psi_a, \quad (47)$$

siendo ahora el campo  $\psi$  un doblete de fermiones con quiralidad levógira (doblete de isospin).

Sin embargo, imponiendo a continuación que la transformación sea local (es decir, con una dependencia en las coordenadas para  $\theta(x)$  y  $\alpha(x)$ ), el Lagrangiano deja de ser invariante bajo la misma. Para conseguir la invarianza, de manera análoga a QED, tenemos que introducir una derivada covariante, que en este caso queda definida por:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \sum_{a=1}^3 T_a W_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu, \quad (48)$$

con  $g$  y  $g'$  las constantes de acoplamiento asociadas a los grupos  $SU(2)_L$  y  $U(1)_Y$ . Además, hemos introducidos 4 campos de gauge;  $W_\mu^a$  y  $B_\mu$ , uno por cada generador. Nótese que estos campos bosónicos no son los estados físicos que se encuentran en la naturaleza ( $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$  y  $A_\mu$ ). Tendremos que escribir la derivada covariante en función de estos últimos. Explícitamente, dicha derivada nos queda:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_\mu^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^3 \right\} + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} B_\mu. \quad (49)$$

Definiendo  $W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp W_\mu^2)$ , podemos reescribir (49) como:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{g'}{g} Y B_\mu & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 + \frac{g'}{g} Y B_\mu \end{pmatrix}. \quad (50)$$

A continuación, introducimos el ángulo de Weinberg ( $\theta_W$ ), que representa una rotación en el espacio y cuantifica la mezcla entre los campos bosónicos ligados a las simetrías  $B$ ,  $W^3$  y los campos del fotón, así como al bosón  $Z$ ;

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_W. \quad (51)$$

La relación de dicho ángulo con las constantes de acoplamiento está dada por:

$$g = \frac{e}{\sin \theta_W} \quad ; \quad g' = \frac{e}{\cos \theta_W} \quad \implies \quad \frac{g'}{g} = \tan \theta_W. \quad (52)$$

La matriz de rotación es:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (53)$$

La derivada covariante finalmente resulta ser:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) + ig A_\mu \sin \theta_W Q + \frac{ig Z_\mu}{\cos \theta_W} (T^3 - \sin \theta_W Q), \quad (54)$$

donde definimos  $T^\pm = (\sigma_1 \pm \sigma_2)/2$  y empleamos la relación  $Q = T_3 + Y/2$ .

De manera análoga a lo que hicimos para la QED, hay que tener en cuenta el término cinético correspondiente a la propagación de los campos gauge. Dicha contribución, que será un Lagrangiano de tipo Yang-Mills, es:

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a B_a^{\mu\nu}, \quad (55)$$

siendo estos tensores:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c. \end{aligned} \quad (56)$$

Con (47), introduciendo la derivada covariante, y (55) disponemos ya de todos los ingredientes para expresar el Lagrangiano final de la teoría electrodébil:

$$\mathcal{L}_{EW} = \sum_{a=1}^3 i\bar{\psi}_a \gamma^\mu D_\mu \psi_a - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a B_a^{\mu\nu}. \quad (57)$$

Como vemos, no aparecen términos másicos para los bosones gauge. Mientras que esto es correcto para los fotones, no será así para los bosones  $W^\pm$  y  $Z$ , pues experimentalmente se ha podido comprobar que estos sí que tienen masa. Los términos de masa para los bosones vectoriales están prohibidos por la propia simetría gauge. Además, los términos de masas para los fermiones también rompen la invariancia gauge puesto que los campos levógiros y los dextrógiros se transforman de manera diferente.

En resumidas cuentas, el desarrollo teórico que hemos estudiado hasta el momento está incompleto, pues supone que las partículas carecen de masa. Este inconveniente se soluciona mediante la introducción del Mecanismo de Higgs, como veremos en detalle a lo largo de la próxima sección.

## 6. Ruptura espontánea de simetría. Mecanismo de Higgs.

Para implementar el mecanismo de Higgs o mecanismo de ruptura espontánea de la simetría incluimos un término escalar adicional al Lagrangiano, que nos lleva a la existencia de una nueva partícula, el bosón de Higgs [4]. Cuando hablamos de ruptura espontánea de la simetría nos referimos a que en un sistema con determinada simetría le añadimos un nuevo campo que deje al Lagrangiano total invariante bajo dicha simetría pero tal que el estado de mínima energía o estado de vacío no lo sea. A continuación, vamos a tratar con una serie de ejemplos para ilustrar este concepto.

### 6.1. Ejemplo simple de ruptura de simetría.

Veamos el caso en que incluimos un campo escalar real  $\phi$ , invariante bajo  $\phi \rightarrow -\phi$ . El lagrangiano del sistema, vendrá dado por:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (58)$$

con  $\lambda > 0$  para que exista un mínimo absoluto de la función. En cuanto al término  $\mu^2$ , no imponemos ninguna restricción sobre su signo y analizaremos los dos casos posibles.

- Caso  $\mu^2 > 0$ :

El mínimo del potencial, que además será único, se da para  $\phi_0 = 0$ , (Figura 2). A partir del Lagrangiano para el campo escalar (58), nos encontramos con una partícula libre de masa  $\mu$  y con un término cuártico de auto-interacción.

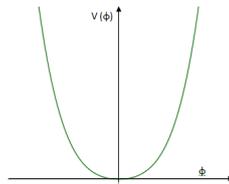


Figura 2: Potencial  $V(\phi)$  para  $\mu^2 > 0$ .

- Caso  $\mu^2 < 0$ :

En este caso el mínimo del potencial no es  $\phi_0 = 0$ , (Figura 3). Ahora, para encontrar

el estado de vacío, tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 = \mu^2 \phi_0 + \lambda \phi_0^3 \implies \mu^2 = -\lambda \phi_0^2 \iff \phi_0 \equiv v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (59)$$

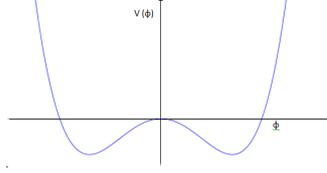


Figura 3: Potencial  $V(\phi)$  para  $\mu^2 < 0$ .

Para continuar desarrollando este caso, es conveniente redefinir el campo con un shift respecto al estado de vacío, es decir,  $\eta = \phi - v$ . Finalmente, podemos reescribir el Lagrangiano del sistema en términos de este nuevo campo, resultando en:

$$\mathcal{L}(\eta) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda v^2 \eta^2 - \frac{\lambda}{4} \eta^4 + \frac{\lambda}{4} v^4 - \lambda v \eta^3. \quad (60)$$

El segundo término en esta ecuación describe una partícula con masa  $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}$ .

Aunque el Lagrangiano mantiene su simetría original (bajo cambio de signo de  $\phi$ ), el vacío no es simétrico respecto a  $\eta$  y obtenemos así una ruptura espontánea de la simetría. Es decir, la ruptura de la simetría se ha producido en el caso para el que el vacío está degenerado,  $\mu^2 < 0$ . Notar además que hemos añadido un grado de libertad (partícula escalar masiva) a la teoría.

## 6.2. Ruptura de simetría global.

A diferencia del caso anterior, esta vez vamos a trabajar con un campo escalar complejo:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \implies \phi^* \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (61)$$

El Lagrangiano tendrá la forma:

$$\mathcal{L}(\phi) = (\partial_\mu \phi)^*(\partial^\mu \phi) - V(\phi), \quad (62)$$

con un potencial globalmente simétrico en  $U(1)$ :

$$V(\phi) = \mu^2(\phi^* \phi) + \lambda(\phi^* \phi)^2. \quad (63)$$

Sustituyendo en (62), y con (61), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_1, \phi_2) &= \frac{1}{2} [\partial_\mu(\phi_1 - i\phi_2) \cdot \partial^\mu(\phi_1 + i\phi_2)] - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) \\ &\quad - \frac{1}{4}\lambda[(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2)]^2 \\ &= \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + i\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_2 - i\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2] \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu^2[\phi_1^2 + i\phi_1 \phi_2 - i\phi_2 \phi_1 + \phi_2^2] - \frac{1}{4}\lambda[\phi_1^2 + i\phi_1 \phi_2 - i\phi_2 \phi_1 + \phi_2^2]^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \end{aligned} \quad (64)$$

Este Lagrangiano, es invariante bajo transformaciones de tipo  $\phi' \rightarrow e^{i\alpha}\phi$ , que se corresponden con una simetría U(1) global (este es el grupo de simetría asociado a la QED).

De nuevo, podemos estudiar varias situaciones en función del signo del término  $\mu^2$ :

- Caso  $\mu^2 > 0$ :

El potencial tendrá un único mínimo en el origen,  $\phi_{10} = \phi_{20} = 0$  (ver Figura 4).

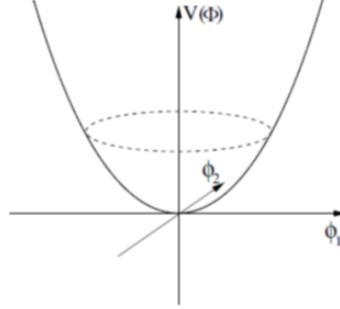


Figura 4: Potencial  $V(\phi)$ , con  $\phi$  complejo, para  $\mu^2 > 0$ .

Si minimizamos el potencial analíticamente, también encontramos un mínimo de la función en  $\sqrt{\phi_{10}^2 + \phi_{20}^2} = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ . Sin embargo, como  $\mu^2 > 0$  y  $\lambda > 0$ , resultaría en un número complejo y, por tanto, no tiene sentido considerarlo.

En este caso tendríamos dos partículas libres con masa  $\mu$  como se ve en el tercer término de la expresión (64):

$$\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2) = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi_1^2}_{\text{partícula } \phi_1 \text{ con masa } \mu} + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi_2^2}_{\text{partícula } \phi_2 \text{ con masa } \mu} + \text{interacciones.} \quad (65)$$

- Caso  $\mu^2 < 0$ :

Nos encontramos infinitos estados de vacío, todos ellos con  $\sqrt{\phi_{10}^2 + \phi_{20}^2} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v$ . Es decir, se trata de un mínimo degenerado, tal y como se muestra en la Figura 5.

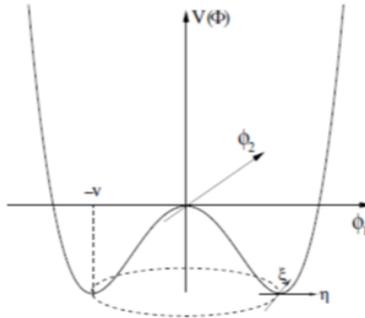


Figura 5: Potencial  $V(\phi)$ , con  $\phi$  complejo, para  $\mu^2 < 0$ .

Podemos ahora introducir un cambio de variable que nos sitúe en el fondo del potencial.

$$\text{Es decir: } \begin{cases} \phi_1 = v + \eta, \\ \phi_2 = \xi. \end{cases} \implies \text{El mínimo: } \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\xi) \quad (66)$$

Con esta redefinición, el Lagrangiano dado en (62), separado en parte cinética y potencial, quedaría:

$$\mathcal{L}_{kin}(\eta, \xi) = \frac{1}{2}\partial_\mu(\eta + v - i\xi)\partial^\mu(\eta + v + i\xi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} V(\eta, \xi) &= -\frac{1}{2}\lambda v^2[(v + \eta)^2 + \xi^2] + \frac{1}{4}\lambda[(v + \eta)^2 + \xi^2]^2 \\ &= -\frac{1}{4}\lambda v^4 + \lambda v^2\eta^2 + \lambda v\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda\xi^4 + \lambda v\eta\xi^2 + \frac{1}{2}\lambda\eta^2\xi^2. \end{aligned} \quad (68)$$

Combinando las dos últimas expresiones, obtenemos el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(\eta, \xi) = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - (\lambda v^2)\eta^2}_{\substack{\text{partícula } \eta \\ \text{con masa } \sqrt{2\lambda v^2}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 + 0 \cdot \xi^2}_{\substack{\text{partícula } \xi \\ \text{con masa nula}}}, \quad (69)$$

donde se han despreciado los términos de interacción y de mayor orden.

En este caso, nos encontramos con dos partículas; una con masa  $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}$  y otra con  $m_\xi = 0$ . La partícula de masa nula recibe el nombre de bosón de Goldstone, y su aparición es una consecuencia de la ruptura espontánea de una simetría global. El teorema de Goldstone establece que «*si una teoría de campos tiene una simetría global del Lagrangiano que a su vez no es simetría del vacío, entonces debe existir un bosón escalar sin masa, asociado a cada generador que no aniquile el vacío*». Es decir, se obtienen tantos bosones no masivos como simetrías se hayan roto.

### 6.3. Ruptura de simetría gauge local invariante.

Usamos una simetría invariante U(1) local, es decir, tal que su lagrangiano es invariante bajo  $\phi' \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi$ . Un ejemplo de esto sería la electrodinámica cuántica (QED). Tal y como habíamos explicado en la sección 5.2, en esta teoría, se emplea:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (70)$$

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (71)$$

Además, el Lagrangiano viene dado como:

$$\mathcal{L} = (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi), \quad (72)$$

siendo

$$V(\phi^*\phi) = \mu^2(\phi^*\phi) + \lambda(\phi^*\phi)^2. \quad (73)$$

Al igual que en los casos ya vistos, distinguimos los resultados en función del valor de  $\mu^2$ . Sin embargo, como ya comentamos en la sección anterior, el caso que nos interesa es aquel con  $\mu^2 < 0$  (mínimo degenerado con infinitos estados de vacío). De nuevo, el mínimo será:

$$\sqrt{\phi_{10}^2 + \phi_{20}^2} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \implies \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + v + i\xi).$$

El Lagrangiano cinético sería:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{kin}(\phi) &= (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) = (\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \\ &= (\partial^\mu\phi)^*(\partial_\mu\phi) - (\partial^\mu\phi)^*ieA_\mu\phi + ieA^\mu\phi^*(\partial_\mu\phi) + e^2A_\mu^2\phi^*\phi,\end{aligned}\quad (74)$$

que en términos de los campos  $\eta$  y  $\xi$  es:

$$\mathcal{L}_{kin}(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu^2 - evA_\mu(\partial^\mu\xi).\quad (75)$$

En cuanto al potencial:

$$\begin{aligned}V(\eta, \xi) &= -\frac{1}{2}\lambda v^2[(v + \eta)^2 + \xi^2] + \frac{1}{4}\lambda[(v + \eta)^2 + \xi^2]^2 \\ &= -\frac{1}{4}\lambda v^4 + \lambda v^2\eta^2 + \lambda v\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda\xi^4 + \lambda v\eta\xi^2 + \frac{1}{2}\lambda\eta^2\xi^2.\end{aligned}\quad (76)$$

Si sumamos ambas contribuciones, además de  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , y despreciamos el término constante y aquellos de orden superior a  $\eta^2$  y  $\xi^2$ , tenemos que:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \lambda v^2\eta^2}_{\text{Partícula } \eta} + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2}_{\text{Partícula } \xi} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{Campo del fotón}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^2v^2A_\mu^2 - evA_\mu(\partial^\mu\xi)}_{?} + \text{interacciones.}\quad (77)$$

Trataremos, a continuación, de arrojar un poco más de luz sobre el último sumando, cuya interpretación, a priori, no resulta sencilla. Nótese que considerando varios términos del Lagrangiano, tenemos que:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 - evA^\mu(\partial_\mu\xi) + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu^2 = \frac{1}{2}e^2v^2[A_\mu - \frac{1}{ev}(\partial_\mu\xi)]^2 = \frac{1}{2}e^2v^2(A'_\mu)^2.$$

Podemos introducir el conocido como gauge unitario;  $\alpha = -\xi/v$ , obteniendo:

$$\phi' \longrightarrow e^{-i\xi/v}\phi = e^{-i\xi/v}\frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\xi) = e^{-i\xi/v}\frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h),$$

donde el campo escalar  $h$  recibe el nombre de campo de Higgs.

Sustituyendo en la parte bosónica del Lagrangiano escalar:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{kin}(h) &= (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) = (\partial^\mu + ieA^\mu)\frac{1}{\sqrt{2}}(v + h)(\partial_\mu - ieA_\mu)\frac{1}{\sqrt{2}}(v + h) \\ &= \frac{1}{2}(\cancel{\partial^\mu v} + \partial^\mu h + ieA^\mu(v + h)) \cdot (\cancel{\partial_\mu v} + \partial_\mu h - ieA_\mu(v + h)) \\ &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu h)^2 - \cancel{ieA_\mu(v + h)\partial^\mu h} + \cancel{ieA^\mu(v + h)\partial_\mu h} + e^2A_\mu^2(v + h)^2] \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}e^2A_\mu^2v^2 + \frac{1}{2}e^2A_\mu^2h^2 + e^2A_\mu^2vh,\end{aligned}\quad (78)$$

$$\begin{aligned}V(h) &= \frac{1}{2}\mu^2(v + h)^2 + \frac{1}{4}\lambda(v + h)^4 \\ &= -\frac{v^2\lambda}{2}(v^2 + h^2 + 2vh) + \frac{\lambda}{4}(v^4 + h^4 + 2v^2h^2 + 2h^2v^2 + 4v^3h + 4vh^3) \\ &= +\frac{1}{4}\lambda h^4 + \lambda vh^3 + \lambda v^2h^2 - \frac{1}{4}\lambda v^4.\end{aligned}\quad (79)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{L}_{escalar} = \mathcal{L}_{kin} - V$ , y despreciando términos de mayor orden para  $v$ :

$$\mathcal{L}_{escalar} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2}_{\text{Partícula escalar masiva}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu^2}_{\text{Campo fotón}} + \underbrace{e^2 v A_\mu^2 h + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 h^2}_{\text{Interac. Higgs y campos gauge}} - \underbrace{\lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4}_{\text{Autointeracciones del Higgs}}. \quad (80)$$

Como vemos, hemos conseguido eliminar los términos relativos al bosón de Goldstone ( $\xi$ ) y podemos concluir que la ruptura espontánea de una simetría local da lugar a un fotón con masa  $m_\gamma = ev$  y una partícula escalar masiva  $h$ , con  $m_h = \sqrt{2\lambda v^2}$ .

### 6.3.1. Descartando otros posibles potenciales.

En todos los casos anteriores, hemos considerado un potencial con términos cuadráticos y cuárticos en  $\phi$ . ¿Sería posible considerar términos de distintos órdenes? En esta breve sección, vamos a ver por qué se emplea un potencial con la forma vista en (73) y no otra.

Supongamos que proponemos un potencial tal que:

$$V(\phi^* \phi) = \mu^2 \phi^2 + \beta \phi^3. \quad (81)$$

Para los estados de vacío:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi_0} = 2\mu^2 \phi_0 + 3\beta \phi_0^2 = 0 \implies \phi_0 = -\frac{2\mu^2}{3\beta} = v,$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_0} = 2\mu^2 + 6\beta \phi_0 = \dots = -2\mu^2.$$

Como estamos tomando  $\mu^2 < 0$ , la segunda derivada será positiva y, por tanto, tendríamos un mínimo para  $\phi_0$ . Sin embargo, en el límite obtenemos:

$$\lim_{\phi \rightarrow -\infty} V(\phi^* \phi) = -\infty.$$

Es decir,  $\phi_0$  será un mínimo local pero no absoluto del potencial. Este potencial no será compatible con el mecanismo de ruptura espontánea de simetría. Ocurrirá exactamente lo mismo para aquellas expresiones con potencias impares del campo. ¿Podríamos considerar términos con otras potencias para el campo?

Analicemos un posible potencial de la forma:

$$V(\phi^* \phi) = \mu^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 + \frac{4}{3} \delta \phi^6, \quad \text{siendo } \delta = -\frac{2\lambda^2}{\mu^2} > 0, \quad (82)$$

con  $\mu^2 < 0$  y  $\lambda > 0$ .

Si pasamos ahora a estudiar los mínimos:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi_0} = 2\mu^2 \phi_0 - 4\lambda \phi_0^3 + 8\delta \phi_0^5 = 0 \implies 2\mu^2 - 4\lambda \phi_0^2 + 8\delta \phi_0^4 = 0,$$

Haciendo el cambio de variable  $\phi_0^2 \equiv X$ :

$$4\delta X^2 - 2\lambda X + \mu^2 = 0 \implies X = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 16\delta\mu^2}}{8\delta} = \frac{2\lambda \pm 6\lambda}{8\delta} = \begin{cases} \lambda/\delta \\ -\lambda/2\delta \end{cases}$$

Aquí, la única solución posible es  $X = \lambda/\delta$ , ya que, teniendo en cuentas los signos de  $\lambda$  y  $\delta$ , la otra opción implicaría  $X \equiv \phi_0^2 < 0$ . Tomando pues la solución mencionada, nos encontramos con un estado de vacío que tendrá la forma:

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = v'.$$

Evalutando la segunda derivada:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_0} = 2\mu^2 - 12\lambda\phi_0^2 + 40\delta\phi_0^4 = \dots = -12\mu^2,$$

comprobamos que es un mínimo. Notése que la relación entre este nuevo valor y el obtenido para  $v$  en la sección 6.3 es  $(v')^2 = \frac{v^2}{2}$ .

Como sabemos, los términos másicos son aquellos que acompañan al cuadrado del campo en cuestión, que correspondería en este caso al campo de la partícula escalar  $h$ . Teniendo en cuenta la relación entre los valores esperados en el vacío  $v'$  y  $v$ , y siguiendo el mismo procedimiento de los casos anteriores obtendríamos que la masa de la nueva partícula escalar, asociada a este potencial, sería proporcional a la que obtuvimos previamente;  $m_h'^2 \sim m_h^2 = 2\lambda v^2$  (multiplicada por una constante).

Por tanto, el potencial de Higgs más conveniente sería con términos cuadráticos y cuárticos en  $\phi$  que hemos usado en las secciones anteriores.

#### 6.4. Mecanismo de Higgs en el Modelo Estándar

Veamos lo que ocurre cuando se da una ruptura espontánea de simetría (SSB) en el modelo de interacciones electrodébiles [4, 2, 3]. Para ello, vamos a considerar una simetría local  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . En primer lugar, como tenemos cuatro bosones vectoriales, necesitamos que nuestro campo escalar complejo introduzca cuatro campos reales. Para ello, consideramos un doblete de isospin:

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (83)$$

En este caso el Lagrangiano escalar es:

$$\mathcal{L}_{escalar} = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi), \quad (84)$$

con la derivada covariante definida en (48), y el potencial dado por:

$$V(\phi) = \mu^2(\phi^* \phi) + \lambda(\phi^* \phi)^2. \quad (85)$$

Además, nos centramos en el caso que cumple la condición  $\mu^2 < 0$  para encontrar estados de mínimo degenerados, tal y como hemos visto en las secciones anteriores.

$$\text{Tenemos: } \begin{cases} \phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \\ \phi_3 = v. \end{cases} \implies \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}, \quad (86)$$

donde tomamos  $h$  como una perturbación en torno al vacío.

Como vimos en (38), invariancia significa  $\phi_0 = e^{i\alpha Z} \phi_0$ , siendo  $Z$  la matriz de rotación asociada. Para rotaciones infinitesimales, utilizando el desarrollo en serie de  $e^{f(x)}$ :

$$\phi_0 = e^{i\alpha Z} \phi_0 = (1 + i\alpha Z) \phi_0 \implies Z \phi_0 = 0.$$

De esta forma, si vemos que no se cumple para el primer término de la serie, ya sabemos que se ha roto la simetría. Así, para los generadores de  $SU(2)_L$  tenemos:

$$\begin{aligned}\tau_1 \phi_0 &\propto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rota} \\ \tau_2 \phi_0 &\propto \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rota} \\ \tau_3 \phi_0 &\propto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rota}\end{aligned}$$

Mientras que para el generador de  $U(1)_Y$ :

$$Y \phi_0 \propto Y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rota}$$

Como vemos, las 4 simetrías se rompen y por tanto los 4 bosones gauge asociados,  $W_\mu^i$  y  $B$ , adquieren masa mediante el mecanismo de Higgs. El hecho de que el fotón no tenga masa se explica con la invarianza de la simetría  $U(1)_{EM}$ . Para que este permanezca sin masa se tiene que cumplir que:

$$\begin{aligned}Q\phi_0 &= \left( I_3 + \frac{Y}{2} \right) \phi_0 = \frac{\tau_3}{2} \phi_0 + \frac{Y_0}{2} \phi_0 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( - \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} + Y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \right) = 0 \implies Y_0 = +1\end{aligned}$$

Hemos comentado que esto indica que los bosones de gauge tendrán masa, lo natural ahora es preguntarse: ¿chay uáles serán dichas masas?

## 6.5. Masas de los bosones de gauge.

Para calcular las masas, es suficiente con estudiar la parte escalar del Lagrangiano, ya que los términos másicos serán aquellos  $\propto v^2$ .

La derivada covariante viene dada por:

$$D_\mu \phi = \left( \partial_\mu + igT_a W_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{iv}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} g(W_1 - iW_2) \\ -gW_3 + g'B_\mu \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Usando las relaciones que hemos obtenido anteriormente para la derivada covariante en términos de los campos bosónicos tenemos que:

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{v^2}{8} [g^2(W_1^2 + W_2^2) + (-gW_3 + g'B_\mu)^2]. \quad (88)$$

Como vemos, el Lagrangiano aún no está expresado en términos de los bosones físicos que aparecen en la naturaleza;  $W^\pm, Z_\mu, A_\mu$ . Para el caso de los bosones  $W$ , podemos emplear la relación  $W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 \mp iW_2)$ . Para los bosones  $Z_\mu$  y  $A_\mu$ , como  $Y \neq 0$ , serán una mezcla de los campos  $W_3$  y  $B_\mu$ , tal que:

$$\begin{pmatrix} W_3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ B_\mu \end{pmatrix}.$$

Si diagonalizamos la matriz de la transformación, obtenemos los campos  $A_\mu$  y  $Z_\mu$  como mezcla de  $W_3$  y  $B_\mu$ :

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'W_3 + gB_\mu), \quad (89)$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gW_3 + g'B_\mu), \quad (90)$$

donde el factor  $\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$  se obtiene de la normalización. Finalmente, sustituyendo estas relaciones en (88), obtenemos:

$$(D_\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) = \frac{v^2}{8} \left[ g^2(W^{+2} + W^{-2}) + (g^2 + g'^2)Z_\mu^2 + 0 \cdot A_\mu^2 \right]. \quad (91)$$

De este resultado, se pueden extraer las masas de los bosones:

$$m_{W^\pm} = \frac{1}{2}vg, \quad m_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}, \quad m_\gamma = 0.$$

Además, como consecuencia de (52), obtenemos el conocido como ratio de Veltman:

$$\frac{m_W}{m_Z} = \frac{\frac{1}{2}vg}{\frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos\theta_W. \quad (92)$$

Esta relación es de vital importancia en la teoría electrodébil, pues permite obtener  $\theta_w$  a partir de las masas de los bosones W y Z o viceversa. Esto constituye un ejemplo de lo que se denomina test de precisión del SM.

En el apartado 6.3, observamos la aparición de una partícula escalar masiva como consecuencia de la ruptura espontánea de una simetría local. Dicha partícula es el conocido como bosón de Higgs y en base al Lagrangiano (80) tenía una masa  $m_h = \sqrt{2\lambda v^2}$ . Es decir, el valor de su masa depende de  $v$  y de  $\lambda$ , siendo este último un parámetro libre.

Se puede estimar el valor esperado en el vacío ( $v$ ) a partir del decaimiento de los muones [3]. La primera teoría en describir el decaimiento de un muón fue la de Fermi, que trató dicho proceso como una desintegración  $\beta$ . Su teoría postula la interacción de cuatro fermiones en un vértice de interacción, como podemos apreciar en la Figura 6 (a). Fermi determinó que el vértice del diagrama era  $\propto \frac{G_F}{\sqrt{2}}$ , asignando a la constante de Fermi el valor  $G_F = 1,166 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$ . Sin embargo, al calcular dicho diagrama se encuentra que la sección transversal crece con el cuadrado de la energía y limita su rango de validez. Para resolver el problema es necesario abordarlo como un intercambio de bosones W (Figura 6 (b)), tal y como plantea la teoría electrodébil. Bajo la visión de esta teoría, la amplitud del diagrama es  $\propto \frac{g^2}{8m_W^2}$ . A partir de ambas expresiones podemos obtener la relación entre la constante de Fermi y la masa de los bosones W:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \implies v^2 = \frac{1}{\sqrt{2}G_F} \implies v \approx 246 GeV.$$

Es decir, al determinar  $v$ , hemos pasado de tener  $m_h$  como función de los parámetros indeterminados  $\lambda$  y  $v$  a tenerla en función del parámetro libre  $\lambda$ . Por tanto, el SM no predice un valor concreto para la masa del bosón de Higgs, que ha de medirse experimentalmente. El bosón de Higgs se buscó en los experimentos de altas energías durante varias décadas, hasta que se encontró en el CERN en el 2012.

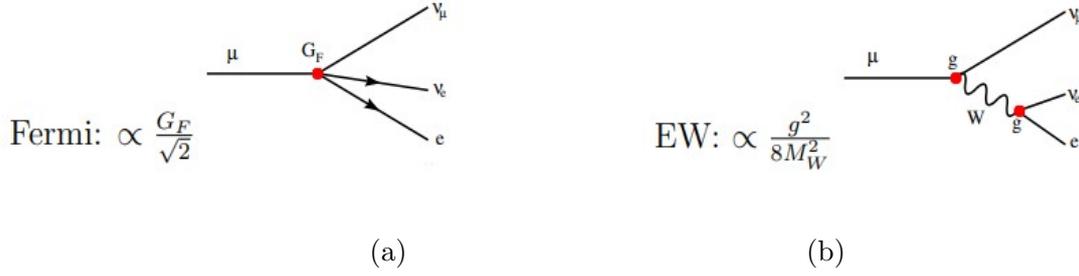


Figura 6: Desintegraciones de un muón.

## 6.6. Superconductividad y partícula de Higgs.

La superconductividad es el fenómeno por el cual ciertos materiales dejan de oponer resistencia al paso de la corriente eléctrica cuando se enfrían por debajo de cierto umbral o temperatura crítica. En esta sección, vamos a repasar las similitudes entre este interesante fenómeno y la ruptura espontánea de la simetría [5]. En primer lugar, partimos del Lagrangiano escalar de la QED:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi^*)(D^\mu \phi) + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi^* \phi) - \frac{1}{4} \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

con la derivada covariante definida en (70) y el tensor electromagnético visto en (9).

Además, se cumplen las dos siguientes relaciones para el potencial:

$$\partial^0 \phi = \partial^0 \vec{A} = 0, \quad A_0 \equiv 0. \quad (93)$$

La dinámica de  $\vec{A}$  vendrá descrita por las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\rho} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\rho)} = 0. \quad (94)$$

Para continuar con el estudio de dicha ecuación, pasamos a desarrollar el primer término de Lagrangiano. Para la parte cinética, hacemos un desarrollo equivalente al de la ecuación (74),

$$(D_\mu \phi^*)(D^\mu \phi) = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) + ie(\partial_\mu \phi^*) A^\mu \phi - ie(\partial^\mu \phi) A_\mu \phi^* + e^2 (\phi^* \phi) A_\mu A^\mu. \quad (95)$$

De esta forma, el primer término de (94) sería:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\rho} = \underbrace{ie(\partial_\mu \phi^*) \phi}_{a} \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\rho} - \underbrace{ie(\partial^\mu \phi) \phi^*}_{b} \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\rho} + e^2 (\phi^* \phi) \underbrace{\frac{\partial (A_\mu A^\mu)}{\partial A_\rho}}_c, \quad (96)$$

siendo las derivadas de los campos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\begin{aligned}
 a) \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\rho} &= \eta^{\mu\sigma} \frac{\partial A_\sigma}{\partial A_\rho} = \eta^{\mu\sigma} \delta_{\sigma\rho} = \eta^{\mu\rho} \\
 b) \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\rho} &= \delta_{\mu\rho} \\
 c) \quad \frac{\partial (A_\mu A^\mu)}{\partial A_\rho} &= \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\rho} A^\mu + A_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\rho} = \delta_{\mu\rho} A^\mu + A_\mu \eta^{\mu\rho} = 2A^\rho,
 \end{aligned}$$

tales que sustituyendo en (96):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\rho} &= ie(\partial_\mu \phi^*)\phi[\eta^{\mu\rho}] - ie(\partial^\mu \phi)\phi^*[\delta_{\mu\rho}] + e^2(\phi^*\phi)[2A^\rho] \\ &= ie(\partial^\rho \phi^*)\phi - ie(\partial^\rho \phi)\phi^* + 2e^2 A^\rho(\phi^*\phi).\end{aligned}\quad (97)$$

Respecto al segundo término de (94), la única contribución no nula vendrá de:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu][\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] \\ &= \frac{1}{4}[(\partial^\mu A^\nu)(\partial_\mu A_\nu) - (\partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\mu) - (\partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu) + (\partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\mu)] \\ &= -\frac{1}{2}[(\partial^\mu A^\nu)(\partial_\mu A_\nu) - (\partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\mu)].\end{aligned}\quad (98)$$

Por tanto, la derivada:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} = -\frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial[(\partial^\mu A^\nu)(\partial_\mu A_\nu)]}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}}_a + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{(\partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}}_b, \quad (99)$$

siendo:

$$\begin{aligned}a) \quad \frac{\partial[(\partial^\mu A^\nu)(\partial_\mu A_\nu)]}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} &= \frac{\partial(\partial^\mu A^\nu)}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}(\partial_\mu A_\nu) + (\partial^\mu A^\nu) \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} \\ &= \eta^{\mu\varphi}\eta^{\nu\pi} \frac{\partial(\partial_\varphi A_\pi)}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}(\partial_\mu A_\nu) + (\partial^\mu A^\nu)\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} = \eta^{\mu\varphi}\eta^{\nu\pi}\delta_{\varphi\sigma}\delta_{\pi\rho}(\partial_\mu A_\nu) + (\partial^\sigma A^\rho) = 2(\partial^\rho A^\sigma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) \quad \frac{\partial[(\partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\mu)]}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} &= \frac{\partial(\partial^\mu A^\nu)}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}(\partial_\nu A_\mu) + (\partial^\mu A^\nu) \frac{\partial(\partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} \\ &= \eta^{\mu\varphi}\eta^{\nu\pi}\delta_{\varphi\sigma}\delta_{\pi\rho}(\partial_\nu A_\mu) + (\partial^\mu A^\nu)\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\rho} = (\partial^\rho A^\sigma) + (\partial^\rho A^\sigma) = 2(\partial^\rho A^\sigma).\end{aligned}$$

Sustituyendo en (99):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} = -\frac{1}{2}2(\partial^\sigma A^\rho) + \frac{1}{2}2(\partial^\rho A^\sigma) = -\partial^\sigma A^\rho + \partial^\sigma A^\rho = -F^{\sigma\rho}.$$

Finalmente, la ecuación de Euler-Lagrange (94), quedaría:

$$ie(\partial^\rho \phi^*)\phi - ie(\partial^\rho \phi)\phi^* + 2e^2 A^\rho(\phi^*\phi) + \partial_\sigma F^{\sigma\rho} = 0.$$

La parte temporal ( $\rho = 0$ ):

$$ie(\overset{0}{\partial^0 \phi^*})\phi - ie(\overset{0}{\partial^0 \phi})\phi^* + 2e^2 \overset{0}{A^0}(\phi^*\phi) + \partial_\sigma F^{\sigma 0} = 0 \implies \partial_\sigma F^{\sigma 0} = 0. \quad (100)$$

Explícitamente, empleando las condiciones dadas:

$$\partial_\sigma (\underbrace{\partial^\sigma A^0}_{=0} - \underbrace{\partial^0 A^\sigma}_{=0}) = 0 \implies F^{\sigma 0} = 0 \implies \vec{E} = \vec{0}. \quad (101)$$

Mientras que para la parte espacial ( $\rho = j = 1, 2, 3$ ):

$$ie(\partial^j \phi^*)\phi - ie(\partial^j \phi)\phi^* + 2e^2 A^j(\phi^*\phi) + \partial_\sigma F^{\sigma j} = 0. \quad (102)$$

A la vista de (100) y empleando la ecuación de Maxwell inhomogénea covariante (11) para un campo eléctrico nulo, como el obtenido en (101):

$$F^{\sigma 0} = 0 \implies -F^{0\sigma} = 0 \implies F^{0j} = 0 \implies \partial_\sigma F^{\sigma j} = \partial_i F^{ij} = (\vec{\nabla} \times \vec{B})^j.$$

Sustituyendo ahora en (102):

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})^j = -ie(\partial^j \phi^*)\phi + ie(\partial^j \phi)\phi^* - 2e^2 A^j (\phi^* \phi). \quad (103)$$

Una elección adecuada para la corriente:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= -ie[\phi^*(\vec{\nabla} - ie\vec{A})\phi - \phi(\vec{\nabla} + ie\vec{A})\phi^*] \\ &= -ie[\phi^*(\vec{\nabla}\phi) - ie\phi^*\vec{A}\phi - (\vec{\nabla}\phi^*)\phi - ie\phi^*\vec{A}\phi] \\ &= -ie[\phi^*(\vec{\nabla}\phi) - (\vec{\nabla}\phi^*)\phi - 2ie\phi^*\vec{A}\phi] \\ &= -ie[\phi^*(\vec{\nabla}\phi) - (\vec{\nabla}\phi^*)\phi] - 2e^2\phi^*\vec{A}\phi. \end{aligned} \quad (104)$$

A continuación, empleando  $\partial_i \equiv \vec{\nabla}_i$ ,  $\partial^j = \eta^{ij}\partial_i = -\vec{\nabla}^j$ , obtenemos:

$$J^j = -ie(\partial^j \phi^*)\phi + ie\phi^*(\partial^j \phi) - 2e^2\phi^* A^j \phi. \quad (105)$$

Por comparación con (103), obtenemos la corriente de superconductividad ( $\vec{J}$ ):

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})^j = J^j \implies \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}.$$

Una vez obtenida dicha corriente, podemos pasar a ver la relación entre la ruptura espontánea de simetría y la superconductividad. Partimos de un estado de vacío tal que

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}v = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \implies \phi^* \phi = \frac{v^2}{2}.$$

Sustituyendo en (105):

$$\vec{J} = -e^2 v^2 \vec{A}. \quad (106)$$

El efecto Meissner consiste en la desaparición total del flujo del campo magnético en el interior de un material superconductor a una temperatura por debajo de la temperatura crítica.

Para relacionar lo que hemos visto hasta ahora con dicho efecto, podemos comenzar por aplicar el rotacional sobre la corriente de superconductividad:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{J}. \quad (107)$$

Es muy útil llegados a este punto recordar la identidad vectorial siguiente:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0, \text{ Ley Gauss}} - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}.$$

Empleando la definición de (106):

$$-\nabla^2 \vec{B} = -e^2 v^2 \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Como  $\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , resulta:

$$\nabla^2 \vec{B} = e^2 v^2 \vec{B},$$

que es la expresión para el efecto Meissner.

Finalmente, también podemos ver cómo la ruptura espontánea de simetría conduce a resistividad nula (o lo que es lo mismo, conductividad infinita). Esto es otra característica de los superconductores. La resistividad se define como:

$$\rho = \frac{\vec{E}}{\vec{J}} = \frac{0}{\vec{J}},$$

ya que en la expresión (101), obtuvimos que  $\vec{E} = 0$ .

Quedaría comprobar ahora que el denominador sea distinto de cero. Para ello, fijámonos en (106), si  $\vec{A} \neq 0 \implies \vec{J} \neq 0 \implies \rho = 0 \implies$  Superconductividad.

## 7. Conclusiones.

Las motivaciones de este trabajo han sido conocer el contenido de partículas de nuestro Universo y estudiar algunas de sus propiedades e interacciones.

Por un lado, partiendo desde las ecuaciones del electromagnetismo clásico, su forma covariante que asegura la invarianza Lorentz, la ecuación de Dirac y posteriormente la cuantización del campo electromagnético libre, hemos llegado a formular el Lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED).

Se han discutido también los grupos de simetría que describen a las partículas del modelo. Las simetrías tienen una gran importancia física ya que conducen a leyes de conservación. A continuación, hemos dado una visión general sobre cómo formular el Modelo Estándar de la física de partículas, incluyendo la QED y la teoría electrodébil. La cromodinámica cuántica, que también forma parte de este modelo, no se ha tratado en este trabajo.

Otra parte fundamental ha sido el estudio en detalle del Mecanismo de Higgs, que resuelve el problema de la generación de las masas de las partículas elementales del Modelo Estándar. Para ello, hemos planteado una serie de ejercicios con campos escalares reales y complejos hasta entender cuál es la forma asociada al potencial del Higgs y los motivos por los que se pueden descartar otras expresiones. Hemos planteado el mecanismo de Higgs en el Modelo Estándar y, estudiando los diversos términos del Lagrangiano obtenido, hemos visto que la interacción del bosón de Higgs con el resto de partículas elementales genera las masas de las mismas; dando las expresiones para las masas de los bosones de gauge.

Como cierre de este trabajo se ha planteado la relación entre la ruptura espontánea de la simetría y la superconductividad. Esta última es un tema de gran importancia en la actualidad y que, pese a ser estudiado por un campo de conocimiento ajeno a la física de partículas, tiene una notable relación con el mecanismo de Higgs y las simetrías.

Para cumplir los objetivos propuestos en este trabajo he estudiado temas y conceptos que no se incluyen en las asignaturas del Grado en Física, siendo un trabajo muy enriquecedor.

## Referencias

- [1] Siannah Peñaranda. (Universidad de Zaragoza). *Notas para un curso introductorio al Modelo Estándar*.
- [2] Antonio Pich Zardoya. (IFIC, Universitat de València – CSIC). *The Standard Model of Electroweak Interactions*, 2012.
- [3] José Ignacio Illana. (Universidad de Granada). *El Modelo Estándar y su fenomenología. Parte 1: La teoría electrodébil y herramientas de cálculo*, 2007.
- [4] Ivo van Vulpen. (Universiteit van Amsterdam). *The Standard Model Higgs Boson*, 2013.
- [5] Miguel A. Vázquez-Mozo. (Universidad de Salamanca). “*De la Superconductividad al bosón de Higgs*”, 2014.