



Universidad
Zaragoza

Estructura de los agujeros negros en teorías de gravedad superrenormalizables

Trabajo fin de Grado

Grado en Física

Autora:

Laura Bravo Casado

Director:

Manuel Asorey Carballeira

Subdirector:

Fernando Ezquerro Sastre

Índice

1. Introducción	1
2. Dinámica del campo gravitatorio	1
2.1. Preliminares tensoriales	1
2.2. Ecuaciones de Einstein	2
2.3. Acción de Einstein-Hilbert	4
2.3.1. Formalismo variacional	4
2.3.2. Estudio en altas derivadas	5
3. Métrica de Schwarzschild	8
3.1. Desarrollo de la ecuación de movimiento	10
4. Agujeros negros con constante cosmológica	12
4.1. Introducción	12
4.2. Métrica y ecuaciones de campo	13
4.3. Clasificación	17
4.3.1. Caso I	19
4.3.2. Caso II	21
4.4. Descripción y estudio del agujero negro de Schwarzschild-Bach-(A)dS de clase [0,1]	22
5. Conclusiones	23
Referencias	25

1. Introducción

Las ecuaciones de Einstein para el campo gravitatorio constituyen un conjunto de complicadas ecuaciones en las que se emplea el cálculo tensorial para describir la curvatura del espacio-tiempo, y la obtención de soluciones de las mismas es todavía un gran reto a día de hoy. Debido a la dificultad que reside en hallar soluciones exactas, consideraremos estas ecuaciones en el vacío, y una métrica con simetría esférica dada por Schwarzschild.

Estudiando la acción de Einstein-Hilbert se pueden deducir las ecuaciones del movimiento, y la veracidad de las mismas en este caso al considerar la métrica de Schwarzschild. Esta métrica es considerada como primera solución de las ecuaciones de Einstein y posee una serie de características que nos van a permitir definir diversos conceptos a la hora de caracterizar el agujero negro.

Considerando a continuación una teoría de gravedad cuadrática formulada por K.Stelle se puede verificar que la solución de Schwarzschild también es solución de las correspondientes ecuaciones del movimiento.

Una vez analizada esta solución, podemos dar un paso más incluyendo la constante cosmológica Λ que nos va a modificar las ecuaciones de Einstein así como la acción considerada, obteniendo soluciones estáticas con simetría esférica en gravedad cuadrática con constante cosmológica.

Mediante el uso de nuevas métricas, destacaremos la de Schwarzschild-Bach-Anti de Sitter, y en función de los valores que tome Λ , se podrán considerar distintas clases de soluciones.

Finalmente analizaremos el caso del agujero negro de Schwarzschild-Bach-(A)dS y sus propiedades físicas en función de las soluciones encontradas en forma de series de potencias.

2. Dinámica del campo gravitatorio

2.1. Preliminares tensoriales

El Principio de Equivalencia explica como un sistema físico arbitrario responde ante la acción de un campo gravitatorio externo [1]. Para poder implementarlo, se recurre al análisis tensorial. Considerando la ecuación de movimiento de una partícula únicamente influenciada por fuerzas gravitatorias, por el Principio de Equivalencia ésta se puede expresar de la forma:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (1)$$

donde se define el tiempo propio:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

Aparece en esta definición el tensor métrico, cuya expresión viene dada por:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (3)$$

donde $\eta_{\alpha\beta}$ es el tensor de Minkowski, cuya notación podemos tomar diagonal con un -1 y tres 1. Definimos la conexión afín dada por:

$$\Gamma_{\rho\nu}^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \quad (4)$$

La conexión afín no es un tensor. Una de sus propiedades que utilizaremos más adelante es que además es simétrica en los índices covariantes. Si además imponemos que la ecuación describiendo el sistema físico sea de la misma forma independientemente del sistema de coordenadas, estaremos aplicando el Principio de covarianza general. Tanto la métrica como la conexión afín nos permiten describir el campo gravitatorio. La relación entre ambas se puede expresar de la forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (5)$$

A continuación definiremos el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Utilizaremos su forma al subir el primer índice, de manera que podemos calcularlo utilizando la conexión afín:

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \frac{\partial \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\nu}^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} \quad (6)$$

Algunas de sus propiedades que vamos a utilizar son que es antisimétrico bajo intercambio entre los primer y segundo ó tercer y cuarto índices, y por tanto es simétrico si intercambiamos el primer y tercero o segundo y cuarto.

El tensor de Ricci se obtiene al contraer el primer y tercer índice del tensor de Riemann y lo calcularemos de la forma:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu} \quad (7)$$

También posee la propiedad de simetría. Por último el escalar de curvatura, lo definimos de la forma:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} \quad (8)$$

y es el único escalar no trivial que puede obtenerse al contraer los índices del tensor de Riemann.

A continuación podemos definir la derivada covariante de un tensor [2], cuyo símbolo escribiremos de la forma ∇_{μ} (en este caso respecto al índice μ) y que transformará un tensor arbitrario de tipo (m,n) en uno de tipo $(m,n+1)$.

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} \delta_{\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \quad (9)$$

La derivada covariante combina la derivada parcial ordinaria junto con productos dados por la conexión afín y el tensor que estamos derivando. Por tanto, aplicando el Principio de covarianza general, cuando nos encontremos en ausencia de gravedad y por tanto la conexión afín sea nula, estaremos reduciendo la derivada covariante a la derivada parcial ordinaria, puesto que el resto de términos serán nulos. Una propiedad importante a tener en cuenta en cálculos posteriores es que la derivada covariante no conmuta.

2.2. Ecuaciones de Einstein

En primer lugar, podemos definir el tensor energía-momento $T^{\alpha\beta}$, que se corresponde con un tensor simétrico que representa la densidad de energía según el sistema de referencia que consideremos, y por tanto se puede identificar:

$$T^{00} = \rho \quad (10)$$

Este tensor es simétrico y se conserva covariantemente.

Por otro lado también podemos definir el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (11)$$

Es el único tensor construido a partir de la métrica y de sus primeras y segundas derivadas cuya divergencia es nula $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$. Aplicando las asunciones que tomamos al considerar el límite Newtoniano: campo débil, campos independientes del tiempo, fuente de materia no relativista (la única contribución del tensor energía-momento viene dada por la componente definida en (10)), llegamos finalmente a las ecuaciones de Einstein para el campo gravitatorio [3]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (12)$$

donde G es la constante de gravitación. Podemos determinar una constante de proporcionalidad entre el tensor de Einstein y el tensor energía-momento que se denomina κ , lo que nos permite escribir las ecuaciones de Einstein en cuatro dimensiones:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (13)$$

Tomando la traza de (12), obtenemos:

$$R = -8\pi GT \quad (14)$$

que sustituimos de nuevo en (12) quedando:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (15)$$

En particular en el vacío $T_{\mu\nu} = 0 \forall \mu, \nu$, lo que implica que las Ecuaciones de Einstein en el vacío se reducen a:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (16)$$

Con la definición de (13) vemos que esto es equivalente a anular el tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = 0$. Mediante las ecuaciones de Einstein obtenemos un conjunto de diez ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas no lineales para la métrica $g_{\mu\nu}$. Las ecuaciones están relacionadas por las identidades de Bianchi, que son satisfechas por la derivada covariante del tensor de Riemann de la forma:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\epsilon} + R_{\mu\nu\sigma\epsilon;\rho} + R_{\mu\nu\epsilon\rho;\sigma} = 0 \quad (17)$$

Existe un término que puede ser añadido a las ecuaciones de Einstein y que viene dado por la constante cosmológica Λ . Dimensionalmente $[\Lambda] = L^{-2}$, y su contribución aparece de la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (18)$$

Λ nos da una idea de la contribución del tensor energía-momento y por tanto juega el papel de una densidad de energía en el vacío. Fue introducida por Einstein para poder conseguir soluciones cosmológicas estáticas. Antes del descubrimiento de Hubble de la expansión del Universo, asumió que se podía describir el Universo con la solución estática compatible con el principio cosmológico de homogeneidad e isotropía. Se ha demostrado observacionalmente que el valor de Λ debe ser pequeño. Si consideramos por tanto su valor no nulo, las ecuaciones de Einstein en el vacío se reducen a :

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (19)$$

En general, las soluciones de la ecuación $R_{\mu\nu} = C \cdot g_{\mu\nu}$ para una constante C se conocen como variedades de Einstein, definidas como variedades de Riemann. Por tanto en este caso el tensor de Ricci es una de ellas, y es múltiplo escalar de la métrica. En el caso de constante cosmológica nula se denomina variedad llana de Ricci.

2.3. Acción de Einstein-Hilbert

2.3.1. Formalismo variacional

Una vez hemos deducido las ecuaciones de Einstein, estudiamos si éstas se derivan de un principio de acción. Considerando la forma que debe tomar la acción, denominada como la integral de la densidad lagrangiana. Como el sistema viene descrito por un campo Φ , la acción para la métrica $g_{\mu\nu}$ vendrá dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \Phi(g_{\mu\nu}) \quad (20)$$

La elección más simple para Φ se corresponde con el escalar de curvatura R , ya que es el único escalar dado por la métrica que se puede construir con a lo sumo derivadas segundas. Por tanto la acción de Einstein-Hilbert viene dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (21)$$

El principio de mínima acción establece que, imponiendo la condición de que los campos permanezcan constantes en el infinito, la variación de la acción va a ser cero luego nos encontramos con un extremo (generalmente un mínimo) de la acción. Por tanto aplicando esto a (21):

$$\delta S = \int d^4x [\delta(\sqrt{-g}) \cdot R + \sqrt{-g} \cdot \delta R] = 0 \quad (22)$$

La variación de la métrica en forma covariante se puede expresar en términos de la forma contravariante, y viceversa:

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\sigma\rho} \quad (23)$$

De esta forma:

$$\delta g = \delta(\det g) = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (24)$$

Sustituyendo (24) en (22) y aplicando las propiedades de simetría de la métrica, llegamos a:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0 \quad (25)$$

Para facilitar los cálculos posteriores, podemos obtener las variaciones del tensor de Riemann, Ricci, y escalar de curvatura. Partiendo de la definición del tensor de Riemann (6), su variación viene dada por:

$$\delta R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \partial_{\mu} (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}) - \partial_{\sigma} (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}) + \delta \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} \delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} \delta \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} \quad (26)$$

Cabe destacar que mientras que la conexión afín no es un tensor, la variación de la conexión afín si que será un tensor, de tipo (1,2). De esta forma, podemos asociarle una derivada covariante. Para simplificar (26), podemos calcular las siguientes:

$$\nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}) = \partial_{\rho} (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}) + \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu} \delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\beta} \delta \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\gamma} \delta \Gamma_{\sigma\gamma}^{\mu} \quad (27)$$

$$\nabla_{\sigma} (\delta \Gamma_{\rho\nu}^{\mu}) = \partial_{\sigma} (\delta \Gamma_{\rho\nu}^{\mu}) + \Gamma_{\sigma\delta}^{\mu} \delta \Gamma_{\rho\nu}^{\delta} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\epsilon} \delta \Gamma_{\epsilon\nu}^{\mu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\phi} \delta \Gamma_{\rho\phi}^{\mu} \quad (28)$$

De la resta de ambas, obtenemos que cancelan entre si los terceros términos, y la expresión resultante coincide con (26), quedando por tanto de la forma:

$$\delta R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}) - \nabla_{\sigma} (\delta \Gamma_{\rho\nu}^{\mu}) \quad (29)$$

Como el tensor de Ricci se consigue contrayendo el primer y tercer índices, reescribiendo (29) tendremos su variación:

$$\delta R_{\nu\rho\sigma}^{\rho} = \delta R_{\nu\sigma} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho}) - \nabla_{\sigma}(\delta\Gamma_{\rho\nu}^{\rho}) \quad (30)$$

El escalar de curvatura lo podemos escribir como la contracción de los dos índices del tensor de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, luego necesitaremos la variación de la métrica y la del tensor de Ricci (30). Utilizando la relación entre conexión afín y métrica (5) se obtiene la propiedad que nos dice que la derivada covariante de la métrica es nula, $\nabla_{\lambda}(g_{\mu\nu}) = 0$. Por tanto nos permite escribir:

$$\delta R = \delta g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma} \delta R_{\nu\sigma} = \delta g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} + \nabla_{\rho} [g^{\nu\sigma} \delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - g^{\nu\rho} \delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\sigma}] \quad (31)$$

El último término constituye una derivada total que no contribuye a las ecuaciones del movimiento, ya que su integral es cero. Eliminando este término y despejando:

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} \cdot R_{\mu\nu} \implies \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \quad (32)$$

Si volvemos a la ecuación (26), la integral nos queda de la forma:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{2} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0 \quad (33)$$

Por el principio de mínima acción, obtendremos que $-\frac{R}{2} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} = 0$, que se corresponde con el tensor de Einstein (11), llegando a que $G_{\mu\nu} = 0$ equivalente a $R_{\mu\nu} = 0$ y por tanto obteniendo las ecuaciones de Einstein en el vacío para el caso de constante cosmológica nula.

2.3.2. Estudio en altas derivadas

En este caso realizamos el análisis sobre las derivadas de cuarto orden. Los invariantes que podemos construir vienen dados por los cuadrados del tensor de Riemann, tensor de Ricci y escalar de curvatura [4]. Para simplificar los cálculos, podemos considerar un término concreto que viene dado por combinaciones lineales de términos con altas derivadas, denominado de Gauss-Bonnet:

$$L_{GB} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \quad (34)$$

En el espacio de cuatro dimensiones que consideramos, éste representa localmente una derivada total y por tanto no contribuye a las ecuaciones del movimiento. Por tanto si lo anulamos podemos reescribir el escalar dado por el cuadrado del tensor de Riemann, simplificando así la expresión. Esto nos lleva a poder escribir la acción que vamos a considerar para altas derivadas [5]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \beta R^2 + \gamma \kappa^{-2} R) \quad (35)$$

Para obtener las ecuaciones del movimiento, repitiendo el procedimiento anterior buscamos calcular la variación de (35), que se anulará por el principio de mínima acción. La variación se divide en dos términos: el primero dado por la variación de la métrica y el segundo dado por las variaciones del tensor de Ricci (30) y escalar de curvatura (31). De esta forma, deberemos desarrollar ambas partes:

1.

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g}) (\alpha R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \beta R^2 + \gamma k^{-2} R) \quad (36)$$

2.

$$\int d^4x \sqrt{-g} [\alpha (\delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu}) - \beta \delta R^2 + \gamma k^{-2} \delta R] \quad (37)$$

Empezando con el primer término, reescribimos la variación de la métrica:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \cdot (-\delta g) \quad (38)$$

Para el segundo término, calculamos las dos nuevas variaciones dadas por:

$$\begin{aligned} \delta R^2 &= \delta (g^{\mu\rho} R_{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}) = [\delta g^{\mu\rho} R_{\mu\rho} + g^{\mu\rho} \delta R_{\mu\rho}] g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} + g^{\mu\rho} R_{\mu\rho} [\delta g^{\mu\rho} R_{\mu\rho} + g^{\mu\rho} \delta R_{\mu\rho}] \\ &= 2R [\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (39)$$

que se obtiene de aplicar la variación a cada término. Cabe destacar que si hubiésemos aplicado únicamente la regla de la cadena, el último término se pierde y por tanto la expresión sería incorrecta. Para la otra expresión:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu} &= \delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta [g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma}] = R_{\mu\rho} \delta g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\nu\sigma} + R_{\sigma\nu} g^{\sigma\rho} \delta g^{\nu\mu} R_{\rho\mu} \\ &\quad + R_{\rho\sigma} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \delta R_{\mu\nu} = 2 [\delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} \delta g^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (40)$$

de aplicar de nuevo la variación a cada término y agrupar cambiando índices. A continuación, vamos a agrupar los términos dados por las **variaciones** que habíamos calculado inicialmente y a unir todo en una sola integral, que nos dará:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2g} (\alpha R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \beta R^2 + \gamma k^{-2} R) \delta g + \gamma k^{-2} \delta R \right. \\ &\quad \left. + 2 ((\alpha R^{\mu\nu} - \beta R g^{\mu\nu}) \delta R_{\mu\nu} + (\alpha g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - \beta R R_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Sustituyendo estas variaciones con (24),(31) y (30) respectivamente, y reagrupando en función de $\delta g_{\mu\nu}$, distinguimos dos términos:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\alpha R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} - \beta R^2 + \gamma k^{-2} R) g_{\mu\nu} + 2 (\alpha g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - \beta R R_{\mu\nu}) + \gamma k^{-2} R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha R^{\mu\nu} - \beta R g^{\mu\nu}) \left(\nabla^\beta \nabla_\nu \delta g_{\mu\beta} + \nabla^\beta \nabla_\mu \delta g_{\nu\beta} - g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta} - \nabla^\beta \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Introducimos un nuevo operador que aparece en el último término, dado por:

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta = \nabla^\beta \nabla_\beta = \square \quad (43)$$

Continuamos desarrollando la segunda integral de (42), donde aparecen cuatro sumandos agrupados en función de $\delta g_{\mu\nu}$. Utilizando la simetría de $R_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$, podemos agrupar los dos primeros sumandos que nos aparecían, y seguidamente ya sustituir el valor de $\delta g_{\mu\nu}$ dado en (23).

$$\int d^4x \sqrt{-g} [2 \nabla_\rho \nabla^\nu (\alpha R^{\mu\rho} - \beta R g^{\mu\rho}) - g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma (\alpha R^{\rho\sigma} - \beta R g^{\rho\sigma}) - \square (\alpha R^{\mu\nu} - \beta R g^{\mu\nu})] \cdot \delta g_{\mu\nu} \quad (44)$$

Por tanto al sustituirlo, observar que podemos introducir la métrica dentro de las derivadas covariantes implicadas en el operador \square ya que la derivada covariante de la métrica es nula. Tras reordenar obtenemos:

$$\int d^4x \sqrt{-g} [2(\alpha \nabla_\rho \nabla_\beta R_\alpha^\rho - \beta \nabla_\alpha \nabla_\beta R) - \alpha \nabla_\sigma \nabla_\rho g_{\alpha\beta} \cdot R^{\rho\sigma} + \beta(\nabla_\sigma \nabla_\rho R) g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} - \alpha \square R_{\alpha\beta} + \beta \square R g_{\alpha\beta}] \cdot \delta g^{\alpha\beta} \quad (45)$$

Aplicando la identidad de Bianchi (17), podemos utilizar la forma contraída aplicándola a:

$$\nabla_\rho R_\alpha^\rho = \frac{1}{2} \nabla_\alpha R \quad (46)$$

pudiendo simplificar el segundo término de (45) dando lugar a:

$$\nabla_\sigma \nabla_\rho R^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \square R \quad (47)$$

Además, agrupando los factores α y β , reescribimos (45) y cambiando los índices α, β por μ, ν nos queda la expresión:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[\alpha \left(2\nabla_\rho \nabla_\nu R_\mu^\rho - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} \right) - 2\beta (\nabla_\nu \nabla_\mu R - g_{\mu\nu} \square R) \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (48)$$

Como ya habíamos comentado, las derivadas covariantes no conmutan. Sin embargo se puede desarrollar la expresión general para el conmutador de derivadas covariantes, y la aplicaremos para obtener el primer término de (48). Para el caso de un tensor (1,1) quedaría:

$$(\nabla_\rho \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\rho) R_\mu^\rho = R_{\rho\nu\mu\epsilon} R^{\epsilon\rho} + R_\nu^\epsilon R_{\mu\epsilon} \quad (49)$$

Por tanto despejando y aplicando la identidad de Bianchi quedaría:

$$\nabla_\rho \nabla_\nu R_\mu^\rho = \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu R + R_{\rho\nu\mu\epsilon} R^{\epsilon\rho} + R_\nu^\epsilon R_{\mu\epsilon} \quad (50)$$

Retomando (42) donde la primera integral no la habíamos modificado, ahora hemos simplificado al máximo la expresión y podemos reescribirla:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\alpha R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} - \beta R^2 + \gamma \kappa^{-2} R) g_{\mu\nu} + 2(\alpha g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - \beta R R_{\mu\nu}) + \gamma \kappa^{-2} R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ & - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\alpha \left(\nabla_\nu \nabla_\mu R + 2R_{\rho\nu\mu\epsilon} R^{\epsilon\rho} + 2R_\nu^\epsilon R_{\mu\epsilon} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} \right) \right. \\ & \left. - 2\beta (\nabla_\nu \nabla_\mu R - g_{\mu\nu} \square R) \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (51)$$

Finalmente agrupamos los factores α, β, γ y eliminamos los términos que cancelan.

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[\alpha \left(-\frac{1}{2} R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu R - 2R_{\rho\nu\mu\sigma} R^{\sigma\rho} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R + \square R_{\mu\nu} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} \\ & + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\beta \left(\frac{1}{2} R^2 g_{\mu\nu} - 2R R_{\mu\nu} + 2\nabla_\nu \nabla_\mu R - 2g_{\mu\nu} \square R \right) + \gamma \left(-\frac{1}{2} \kappa^{-2} R + \kappa^{-2} R_{\mu\nu} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (52)$$

Igualamos a cero la variación por el principio de mínima acción, por tanto todo el integrando debe cancelarse. Ésto nos constituye lo que serán las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} & \alpha \left(-\frac{1}{2} R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu R - 2R_{\rho\nu\mu\sigma} R^{\sigma\rho} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R + \square R_{\mu\nu} \right) \\ & + \beta \left(\frac{1}{2} R^2 g_{\mu\nu} - 2R R_{\mu\nu} + 2\nabla_\nu \nabla_\mu R - 2g_{\mu\nu} \square R \right) + \gamma \left(-\frac{1}{2} \kappa^{-2} R + \kappa^{-2} R_{\mu\nu} \right) = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

donde hemos remarcado los desarrollos más importantes. Para el cálculo y estudio de una solución exacta se debe desarrollar cada término mediante las fórmulas para el tensor de Riemann (6), tensor de Ricci (7) y escalar de curvatura (8), aplicando sus propiedades de simetría y derivadas covariantes correspondientes.

3. Métrica de Schwarzschild

Una vez hemos obtenido las ecuaciones de campo de Einstein y tenemos la ecuación de movimiento podemos aplicarla a la métrica estática e isótropa con simetría esférica correspondiente a la métrica de Schwarzschild. La independencia temporal se observa fácilmente del hecho de que todas las componentes de la métrica no dependen del tiempo, mientras que la condición de isotropía viene dada de que en términos de coordenadas polares, podemos escribir la métrica de forma general:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + 2C(r)drdt + D(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (54)$$

La métrica se puede simplificar hasta llegar a la forma estándar:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin\theta d\phi^2 \quad (55)$$

Ésta se corresponde con la métrica de Schwarzschild. Buscamos encontrar la solución exacta a las ecuaciones de Einstein y la primera fue estudiada por Karl Schwarzschild en 1916 [6]. Inicialmente calculamos los símbolos de Christoffel. Utilizando su relación con la métrica (5) tendremos que los símbolos de Christoffel no nulos serán:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{B'}{2B} & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{A} & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}\text{sen}(2\theta) \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{B'}{2A} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r}{A}\text{sen}^2\theta & \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{A'}{2A} & \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 &= \text{cotg}\theta \end{aligned}$$

Mediante (6) y las propiedades de simetría del tensor de Riemann, calculamos las componentes necesarias para obtener el tensor de Ricci, que en este caso solo serán no nulas cuatro de ellas. De esta forma, utilizando (6) y (7) llegamos a:

$$R_{00} = -\frac{B''}{2A} + \frac{A'B'}{4A^2} + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{B'}{Ar} \quad (56)$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'}{Ar} \quad (57)$$

$$R_{22} = -1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB} \quad (58)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta \left[-1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB} \right] \quad (59)$$

Se puede observar que las dos últimas componentes dependen una de la otra. Finalmente con (8) calculamos el escalar de curvatura:

$$R = \frac{B''}{AB} - \frac{A'B'}{2A^2B} - \frac{B'^2}{2AB^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{Ar^2} + \frac{2B'}{ABr} - \frac{2A'}{A^2r} \quad (60)$$

Para obtener cuales son los valores de $A(r)$ y $B(r)$, volvemos a las ecuaciones del movimiento (53). El término más simple viene dado por γ , y debe anularse. Por tanto al igualarlo a cero:

$$\gamma \left(-\frac{1}{2}\kappa^{-2}R + \kappa^{-2}R_{\mu\nu} \right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\kappa^{-2}R + \kappa^{-2}R_{\mu\nu} = 0 \quad (61)$$

Como κ es una constante esto nos lleva a obtener las ecuaciones de Einstein en el vacío, que se pueden reescribir como en (16). Por tanto impondremos que las componentes del tensor calculadas sean nulas. Cualquier combinación lineal de dichos tensores también será nula, y puesto que A y B van a ser positivos, podemos imponer:

$$\frac{R_{11}}{A} + \frac{R_{00}}{B} = 0 \quad (62)$$

Esto nos lleva a:

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0 \Leftrightarrow A'B + B'A = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dr}(AB) = 0 \quad (63)$$

Por tanto este producto será una constante. Imponiendo la condición de que la solución sea asintóticamente plana y por tanto la métrica tienda a la de Minkowski cuando $r \rightarrow \infty$, imponemos las condiciones de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1 \quad (64)$$

Por tanto la constante dada por (63) debe valer 1, de manera que obtenemos la relación dada por:

$$f(r) = B(r) = \frac{1}{A(r)} \quad (65)$$

La métrica quedaría de la forma [7]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin\theta d\phi^2 \quad (66)$$

Ésto nos permite simplificar las expresiones del tensor de Ricci y escalar de curvatura, pudiendo reescribirlas solamente en función de B :

$$R_{00} = -\frac{BB''}{2} - \frac{BB'}{r} \quad (67)$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{Br} \quad (68)$$

$$R_{22} = -1 + B + rB' \quad (69)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta [-1 + B + rB'] \quad (70)$$

$$R = B'' - \frac{2}{r^2} + \frac{2B}{r^2} + \frac{4B'}{r} \quad (71)$$

Tomando la última componente, al anularla llegamos a la relación:

$$-1 + B + rB' = 0 \Leftrightarrow (Br)' = 1 \quad (72)$$

Integrando nos da la solución $Br = r + C$, y despejando:

$$B(r) = 1 + \frac{C}{r} \quad (73)$$

Para obtener el valor de la constante C , imponemos que asintóticamente $g_{00} = -(1 + 2\psi)$ utilizando para ello el límite Newtoniano donde imponemos que en el infinito, la métrica debe coincidir con la de Minkowski. Por tanto $g_{00} \approx -(1 + 2(-\frac{GM}{c^2 \cdot r}))$, donde $\psi = -\frac{GM}{r}$ es el potencial Newtoniano [8], y se suelen considerar unidades naturales donde $c = 1$, para una estrella estática esféricamente simétrica de masa M . Luego comparando con (73) se tiene que $C = -2MG/c^2$. Así hemos conseguido el valor exacto de $B(r)$, y por consiguiente de $A(r)$.

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{c^2 \cdot r} \quad (74)$$

Finalmente reescribimos la expresión que obtenemos para la métrica de la forma (66), donde:

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} \quad m = \frac{GM}{c^2} \quad (75)$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta d\phi^2 \quad (76)$$

Podemos interpretar m como una escala de longitud gravitacional clásica, luego el radio gravitacional asociado a la masa M . Se puede corroborar dimensionalmente, donde M, L, T se corresponden con masa, longitud y tiempo respectivamente:

$$[G] = L^{-3}T^{-2}M^{-1} \rightarrow [m] = [GM/c^2] = L \quad (77)$$

Respecto a (76), podemos observar que todos los elementos de la métrica son independientes de la coordenada temporal. Por tanto encontramos que aparece un vector de Killing ∂_t , de manera que $\partial_t B = \partial_t A = 0$. Se puede generalizar esta propiedad afirmando que métrica con simetría esférica en el vacío posee un vector de Killing temporal. Si una métrica posee un vector de Killing que es temporal cerca de infinito, entonces se denomina estacionaria. A su vez, la métrica será estática si es estacionaria e invariante bajo el cambio $t \rightarrow -t$.

Por tanto una métrica estática con simetría esférica nos puede describir agujeros negros que no roten, mientras que para sistemas rotantes, la métrica será estacionaria pero no estática.

El Teorema de Birkoff nos dice que la única solución con simetría esférica en el vacío es la métrica de Schwarzschild (76) [9].

3.1. Desarrollo de la ecuación de movimiento

Tomando las ecuaciones del movimiento (53), podemos desarrollar cada uno de los términos resaltados para el caso de la métrica diagonal de Schwarzschild. A continuación distinguimos el estudio por separado de cada término:

$$R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} = (R_{00}R^{00} + R_{11}R^{11} + R_{22}R^{22} + R_{33}R^{33}) g_{\mu\nu} \quad (78)$$

Multiplicando por cada elemento de la métrica $g_{\mu\nu}$. Como la métrica de Schwarzschild es diagonal, solo tenemos los elementos en los que $\mu = \nu$.

$$\nabla_\nu \nabla_\mu R = \nabla_\nu \left(\frac{\partial R}{\partial x^\mu} \right) \quad (79)$$

R es un escalar , al aplicar la primera derivada covariante se transforma en un tensor (0,1) con un índice covariante. Si lo denominamos R_μ tenemos que :

$$\nabla_\nu \nabla_\mu R = \nabla_\nu (R_\mu) = \frac{\partial^2 R}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho R_\rho \quad (80)$$

De manera que ahora tendremos un tensor (0,2), es decir, 2 veces covariante.

$$R_{\rho\nu\mu\sigma} R^{\sigma\rho} = R_{0\nu\mu 0} R^{00} + R_{1\nu\mu 1} R^{11} + R_{2\nu\mu 2} R^{22} + R_{3\nu\mu 3} R^{33} \quad (81)$$

con $\nu, \mu = 0, 1, 2, 3$

$$\square R = \nabla^\nu \nabla_\nu R = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu R \quad (82)$$

Como el escalar de curvatura solo depende de r, la ecuación se reduce a:

$$\square R = g^{11} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial r \partial r} - \Gamma_{11}^1 \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right) \right] \quad (83)$$

De manera análoga para el tensor de Ricci:

$$\square R_{\mu\nu} = \nabla^\beta \nabla_\beta R_{\mu\nu} \quad (84)$$

Para el caso de Schwarzschild donde este tensor tiene cuatro componentes, tenemos que para la primera:

$$\square R_{00} = g^{11} \left[\frac{\partial^2 R_{00}}{\partial r \partial r} - \Gamma_{11}^1 \left(\frac{\partial R_{00}}{\partial r} \right) \right] \quad (85)$$

De igual forma se opera para R_{11}, R_{22} . En el caso de R_{33} , como también depende de θ , tendremos que añadir un sumando:

$$\square R_{33} = g^{11} \left[\frac{\partial^2 R_{33}}{\partial r \partial r} - \Gamma_{11}^1 \left(\frac{\partial R_{33}}{\partial r} \right) \right] + g^{22} \left[\frac{\partial^2 R_{33}}{\partial \theta \partial \theta} - \Gamma_{22}^2 \left(\frac{\partial R_{33}}{\partial \theta} \right) \right] \quad (86)$$

Sin embargo como la componente de Christoffel Γ_{22}^2 tiene valor cero, la ultima contribución se anula.

El desarrollo de estos elementos para cada uno de los índices nos permite obtener en el espacio cuadrimensional en el que estamos trabajando, cuatro ecuaciones para cada uno de los términos de la ecuación del movimiento. Con el valor de B(r) ya obtenido (74), el escalar de curvatura al ser una contracción del tensor de Ricci, también se anula [10]. Esto nos permite verificar de forma prácticamente directa las ecuaciones del movimiento (53). El término dado por γ ya se había analizado (61), en el dado por β todos los sumandos dependen de R luego se anula directamente. Por último en el caso de α deberemos verificar el sumando dado por (81). De aplicar la ecuación obtenemos un tensor que podemos denominar $P_{\alpha\beta}$, con componentes $\alpha = \beta = 0, 1, 2, 3$. Por la ecuación del movimiento cada una de ellas debe anularse.

Para el cálculo hemos utilizado las expresiones simplificadas de los tensores únicamente en

función de $B(r)$, por tanto obtenemos:

$$P_{00} = -\frac{BB'}{r^3} [1 - B - rB'] + \frac{BB''}{2} \left[\frac{B'}{r} + \frac{B''}{2} \right] \quad (87)$$

$$P_{11} = \frac{B'}{Br^3} [1 - B - rB'] - \frac{B''}{2B} \left[\frac{B'}{r} + \frac{B''}{2} \right] \quad (88)$$

$$P_{22} = \frac{1}{r^2} [2B - B^2 + rB' - rBB' - 1] - rB' \left[\frac{B'}{r} + \frac{B''}{2} \right] \quad (89)$$

$$P_{33} = \text{sen}^2\theta \cdot P_{22} \quad (90)$$

Sustituyendo (74) y sus derivadas correspondientes, se verifica que el valor del tensor resultante es nulo, concluyendo así que la métrica de Schwarzschild (76) cumple las ecuaciones del movimiento. Finalmente, si volvemos a (76) podemos observar que encontramos dos singularidades, donde los coeficientes de la métrica se hacen infinito [11]. Vienen dados por $r = 0$ y $r = 2m$. Para verificar que esos puntos se corresponden con singularidades, puesto que la curvatura la medimos mediante el tensor de Riemann pero sus componentes dependen de las coordenadas consideradas, podemos construir su invariante y ver cuando éste se hace infinito. De esta manera:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 48m^2r^{-6} \quad (91)$$

luego se observa que $r=0$ si representa una singularidad. El otro punto en $r = 2m$ representa el denominado radio de Schwarzschild. Para este valor ninguno de los invariantes que podemos construir se anula. Transformando las coordenadas se puede observar que la superficie definida por este radio se comporta correctamente en la métrica de Schwarzschild y marca el horizonte de eventos del agujero negro. Esta solución es únicamente válida en el vacío y aplicable para fuera del cuerpo con masa (en este caso de la masa dada por el agujero negro, luego para $r > 2m$).

4. Agujeros negros con constante cosmológica

4.1. Introducción

Una vez hemos analizado la primera solución exacta a las ecuaciones de Einstein dada por Schwarzschild, buscamos estudiar la función de la constante cosmológica Λ como interacción entre la teoría desarrollada por Einstein y los fenómenos astronómicos observados. Esta constante inicialmente permitiría a Einstein establecer un modelo cosmológico estático, aunque con el tiempo sería de Sitter el que demostraría qué hace que un espacio vacío se expanda exponencialmente rápido.

Los agujeros negros obtenidos en gravedad cuadrática con constante cosmológica describen una geometría esféricamente simétrica denominada de Schwarzschild-Bach-de Sitter. Para analizar esta geometría, vamos a repetir el proceso realizado en el capítulo anterior y por tanto partimos de la forma más sencilla de la acción en el vacío conteniendo la constante Λ , para gravedad cuadrática [12]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\bar{\gamma}(R - 2\Lambda) + \bar{\beta}R^2 - \bar{\alpha}C_{abcd}C^{abcd} \right] \quad (92)$$

donde $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} = G^{-1}$ son constantes. La forma es análoga a (35), pero esta vez hemos considerado un invariante dado por un elemento tensorial nuevo denominado tensor de Weyl [13]. La expresión

general de este tensor para un espacio de cuatro dimensiones quedará:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma}R_{\rho\nu} + g_{\nu\rho}R_{\sigma\mu} - g_{\mu\rho}R_{\sigma\nu} - g_{\nu\sigma}R_{\rho\mu}) + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})R \quad (93)$$

En el vacío, $R_{\mu\nu} = 0$, luego en los puntos donde el tensor energía-momento se anule, tanto el tensor de Ricci como el escalar de curvatura serán nulos también, luego tendremos que:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (94)$$

Cabe destacar que el tensor de Weyl tiene las mismas simetrías que el tensor de Riemann, y además es de traza nula $C_{bad}^a = 0$, reduciendo el número de componentes independientes a diez (a diferencia del tensor de Riemann que tiene veinte). El tensor de Weyl permanece invariante bajo transformaciones conformes de la métrica, que son aquellas transformaciones del espacio-tiempo que dejan la métrica invariante salvo por una constante multiplicativa, que puede o no depender de las coordenadas, $g_{ab} = \Omega^2 g_{ab}^-$. Por tanto, podemos afirmar que es un tensor conforme.

La definición de este tensor nos permite introducir una clasificación que tomará relevancia cuando definamos las siguientes métricas que vamos a considerar. Las simetrías algebraicas del tensor de Weyl en cada evento en una variedad Lorentziana son descritas por la clasificación de Petrov. El teorema de clasificación nos dice que al tomar el tensor de Weyl (de rango cuarto), evaluado en un evento, se puede considerar la aplicación lineal que actúa sobre el espacio vectorial de la siguiente manera:

$$X^{ab} \rightarrow \frac{1}{2}C^{ab}{}_{mn}X^{mn} \quad (95)$$

que permite considerar el problema de autovalores y autovectores siguiente:

$$\frac{1}{2}C^{ab}{}_{mn}X^{mn} = \lambda X^{ab} \quad (96)$$

Por las propiedades de simetría del tensor de Weyl, se pueden obtener hasta cuatro autovectores linealmente independientes, que pueden tener distintas multiplicidades. Cada una de estas multiplicidades definirá un tipo de simetría algebraica del tensor de Weyl. Por tanto los distintos tipos de tensor de Weyl pueden ser determinados resolviendo la ecuación característica (polinomio característico), en este caso de orden cuarto. Se pueden asociar vectores nulos, que son elementos distintos de cero para los cuales la forma cuadrática seleccionada se anula. Estos vectores se definen como las direcciones nulas. Por tanto, el teorema de clasificación nos establece que tendremos seis tipos de simetría algebraica, denominadas de tipo Petrov. Las métricas que vamos a considerar son de Petrov tipo D [14], caracterizadas por tener dos direcciones nulas principales.

Físicamente, esta clasificación da lugar a la clasificación de campos gravitatorios.

En las regiones tipo D, las dos direcciones nulas definen congruencias, que son las curvas que marcan el desplazamiento, siendo éstas nulas entrantes y salientes radialmente cerca del objeto que es la fuente del campo.

4.2. Métrica y ecuaciones de campo

Partiendo de (92) obtenemos las ecuaciones de campo correspondientes para altas derivadas. Puesto que la única modificación que hemos hecho ha sido añadir la constante cosmológica,

podemos escribir las ecuaciones de campo en el vacío redefiniendo unos nuevos coeficientes que se pueden expresar en función de los obtenidos en el apartado anterior. De esta forma [15]:

$$\bar{\alpha}(-4B_{ab}) + \bar{\beta} \left(-\frac{1}{2}R^2g_{ab} + 2RR_{ab} - 2\nabla_b\nabla_a R + 2g_{ab}\square R \right) + \bar{\gamma} \left(-\frac{1}{2}Rg_{ab} + R_{ab} + \Lambda g_{ab} \right) = 0 \quad (97)$$

donde B_{ab} se corresponde con el tensor de Bach. Se puede expresar en función del tensor de Weyl (93):

$$B_{ab} = \nabla^c\nabla^d C_{acbd} + \frac{1}{2}R^{cd}C_{acbd} \quad (98)$$

Sin embargo vamos a utilizar su forma en función del tensor de Riemann, tensor de Ricci y escalar de curvatura para realizar la analogía de coeficientes con las ecuaciones de campo previas. En ese caso su expresión es de la forma:

$$B_{ab} = \frac{1}{2}\square R_{ab} - \frac{1}{6} \left(\nabla_b\nabla_a R + \frac{1}{2}g_{ab}\square R \right) - \frac{1}{3}RR_{ab} + R_{acbd}R^{cd} + \frac{1}{12}g_{ab}R^2 - \frac{1}{4}R_{cd}R^{cd}g_{ab} \quad (99)$$

Por tanto el primer término de (97) quedaría de la forma:

$$\bar{\alpha} \left(-2\square R_{ab} + \frac{2}{3}\nabla_b\nabla_a R + \frac{1}{3}g_{ab}\square R + \frac{4}{3}RR_{ab} + 4R_{cabd}R^{cd} - \frac{1}{3}g_{ab}R^2 + R_{cd}R^{cd}g_{ab} \right) \quad (100)$$

donde hemos permutado y cambiado el signo en el elemento dado por el tensor de Riemann utilizando su propiedad de antisimetría. Si denominamos como a,b,c a cada factor que es multiplicado por α, β, γ respectivamente en (53), se tiene que:

$$\bar{\alpha} = \alpha \cdot \frac{a}{-2a - \frac{2}{3}b} \quad (101)$$

$$\bar{\beta} = -\beta \quad (102)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma \cdot \frac{c}{c + \Lambda g_{ab}} \quad (103)$$

De la expresión para el tensor de Bach (99), podemos ver que se anula para espacio-tiempos que cumplen

$$R_{ab} = \frac{1}{4}Rg_{ab} \quad (104)$$

De esta forma podemos simplificar (97), considerando un tensor de Bach nulo y (104), sustituyendo se obtiene:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0 \quad (105)$$

quedando al sustituir (104):

$$R = 4\Lambda \quad (106)$$

En el caso de que el tensor de Bach no se anulase, las ecuaciones de campo quedarían:

$$R_{ab} - \Lambda g_{ab} = 4kB_{ab} \quad (107)$$

donde k se corresponde con:

$$k = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma} + 8\bar{\beta}\Lambda} \quad (108)$$

Caben destacar dos casos. Cuando k se anula recuperamos las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica (19). Por otra parte, si $k \rightarrow \infty$, entonces $\bar{\gamma} + 8\bar{\beta}\Lambda = 0$, lo cual implica

que la constante cosmológica queda fijada por $\bar{\gamma}, \bar{\beta}$ de la forma $\bar{\gamma} = -8\bar{\beta}\Lambda$, y deberíamos anular el tensor de Bach B_{ab} para recuperar de nuevo las ecuaciones de Einstein.

Seguidamente vamos a tomar una métrica distinta a la de Schwarzschild (76) que habíamos considerado para el estudio anterior. Definimos una métrica de Kundt [16], que es de Petrov tipo D con la forma:

$$ds_{Kundt}^2 = \mathcal{H}(\bar{r})du^2 - 2dud\bar{r} + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (109)$$

Que la métrica sea de la clase de geometrías de Kundt, implica que es una variedad Lorentziana de congruencia nula que no puede expandirse ni rotar.

La primera parte dada por u, \bar{r} define un espacio-tiempo de Lorentz bidimensional, mientras que la parte definida por θ, ϕ es análoga a la que encontrábamos antes.

Seguidamente establecemos, según la definición previa, lo que sería la métrica conforme a la de Kundt aplicando una transformación conforme donde en este caso Ω si depende de las coordenadas, estableciendo así la que vamos a utilizar definitivamente:

$$ds^2 = \Omega(\bar{r})^2 \cdot ds_{Kundt}^2 = \Omega(\bar{r})^2 [\mathcal{H}(\bar{r})du^2 - 2dud\bar{r} + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2] \quad (110)$$

Si consideramos la forma general de la métrica de Schwarzschild (76), podemos relacionarla con (110) de manera que:

$$r = \Omega(\bar{r}) \quad (111)$$

La otra dependencia que venía dada por el tiempo t , y su transformación correspondiente:

$$t = u - \int \frac{d\bar{r}}{\mathcal{H}(\bar{r})} \quad (112)$$

De igual forma podemos expresar \bar{r} utilizando la inversa de la función $\Omega(\bar{r})$ en (111).

Asimismo, la relación para $f(r)$ en (76) con las nuevas funciones y por tanto en función de \bar{r} es:

$$B(r) = f(r) = -\Omega(\bar{r})^2 \mathcal{H}(\bar{r}) \quad (113)$$

$$A(r) = \frac{1}{f(r)} = -\left[\frac{\Omega(\bar{r})'}{\Omega(\bar{r})} \right]^2 \mathcal{H}(\bar{r}) \quad (114)$$

Como habíamos obtenido en el apartado anterior, el valor de $B(r)$ venía dado por (74) y se correspondía con la inversa de $A(r)$. Al añadir la constante cosmológica de valor no nulo, tendremos que utilizar la métrica planteada por de Sitter para la obtención de la solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica. Para ello partiendo del ansatz:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (115)$$

que mediante (19) nos lleva a obtener la métrica de de Sitter (dS):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (116)$$

donde m se define como en (76). Reescribiendo las variables podremos identificar:

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \quad (117)$$

Al hacer tender a cero la constante cosmológica recuperamos el resultado de Schwarzschild (76). Al establecer $m=0$, obtenemos la métrica de Schwarzschild-de Sitter, que se corresponde con la métrica de Sitter en coordenadas estáticas. De esta misma forma se determina la métrica de Schwarzschild Anti-de Sitter, cuando la constante cosmológica se establece negativa [17].

Para obtener los valores de $\Omega(\bar{r})$ y $\mathcal{H}(\bar{r})$, identificamos el ansatz definido en (115) con la métrica de (116) y con las relaciones (111),(112),(113),(114). De igualar las ecuaciones (113) y (114) la ecuación diferencial para $\Omega(\bar{r})$ nos da que:

$$\Omega(\bar{r}) = -\frac{1}{\bar{r}} \quad (118)$$

Asimismo tomando el valor de $B(r)$ de (113) y el valor obtenido para Ω con \bar{r} podemos despejar $\mathcal{H}(\bar{r})$. De esta forma obtenemos:

$$\mathcal{H}(\bar{r}) = -\bar{r}^2 - 2m\bar{r}^3 + \frac{\Lambda}{3} \quad (119)$$

Los puntos donde se anule la función $\mathcal{H}(\bar{r})$, que se corresponden a su vez por las relaciones (113) y (114) con los puntos donde se anulan $B(r)$ y $A(r)^{-1}$, nos definen los ceros de \mathcal{H} en donde se encuentran los horizontes. Denominaremos estos puntos como \bar{r}_h , de manera que:

$$\mathcal{H} |_{\bar{r}=\bar{r}_h} = 0 \quad (120)$$

que también cumple

$$B(r_h) = 0 = A(r_h)^{-1} \quad (121)$$

y la relación:

$$\bar{r}_h = -\frac{1}{r_h} \quad (122)$$

dada por la función Ω .

Seguidamente, vamos a establecer los invariantes dados por los tensores que habíamos introducido: el tensor de Ricci, Weyl y Bach. Tomando la forma de las ecuaciones de campo definidas en (97), reescribimos R_{ab} y R^{ab} y de multiplicarlos obtenemos el siguiente resultado en función del tensor de Bach:

$$R_{ab}R^{ab} = \Lambda^2 g_{ab}g^{ab} + \Lambda g_{ab}4kB^{ab} + \Lambda g^{ab}4kB_{ab} + 16k^2 B_{ab}B^{ab} \quad (123)$$

Por las propiedades del tensor de Bach sabemos que es de traza nula, simétrico y se comporta bien bajo transformaciones conformes. Esto implica que el producto $g^{ab}B_{ab} = 0$, nos anularía el segundo y tercer sumando de (123), quedando así la expresión final:

$$R_{ab}R^{ab} = 4\Lambda^2 + 16k^2 B_{ab}B^{ab} \quad (124)$$

Para el tensor de Bach y Weyl respectivamente, hemos detallado como sería el cálculo concreto numéricamente ([Anexo B](#)) pero se nos proporcionan las ecuaciones simplificadas ya sustituyendo las funciones Ω, \mathcal{H} :

$$B_{ab}B^{ab} = \frac{1}{72}\Omega^{-8} [(\mathcal{B}_1)^2 + 2(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2)^2] \quad (125)$$

$$C_{abcd}C^{abcd} = \frac{1}{3}\Omega^{-4} (\mathcal{H}'' + 2)^2 \quad (126)$$

donde las funciones \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 son dos componentes independientes del tensor de Bach que podemos reescribir de la forma:

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{H}\mathcal{H}'''' \quad (127)$$

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{H}'\mathcal{H}''' - \frac{1}{2}\mathcal{H}''^2 + 2 \quad (128)$$

También obtenemos las ecuaciones de campo (Anexo B) (??), (??), que podemos escribir en función de (127), (128):

$$\Omega\Omega'' - 2\Omega'^2 = \frac{1}{3}k\mathcal{B}_1\mathcal{H}^{-1} \quad (129)$$

$$\mathcal{H}'\Omega\Omega' + 3\Omega'^2\mathcal{H} + \Omega^2 - \Lambda\Omega^4 = \frac{1}{3}k\mathcal{B}_2 \quad (130)$$

Tomando la traza de las ecuaciones de campo dada por $R = 4\Lambda$, se tiene que

$$\mathcal{H}\Omega'' + \mathcal{H}'\Omega' + \frac{1}{6}(\mathcal{H}'' + 2)\Omega = \frac{2}{3}\Lambda\Omega^3 \quad (131)$$

Estas tres ecuaciones nos van a permitir caracterizar las diferentes soluciones de tipo agujero negro en función de las expansiones obtenidas para las funciones Ω y \mathcal{H} . Podemos distinguir dos casos relevantes en función del tensor de Bach. En el caso en el que $B_{ab} = 0$, nos encontramos con que podemos recuperar la solución obtenida para Schwarzschild-Anti de Sitter (116) [18]. El caso más complejo viene dado cuando $B_{ab} \neq 0$. Las ecuaciones (129) y (130) estarán acopladas, por tanto para estudiar las posibles soluciones recurrimos a escribir las funciones $\Omega(\bar{r})$ y $\mathcal{H}(\bar{r})$ como series de potencias, tomando el parámetro $\Delta = r - r_0$, que expresa la solución alrededor de cualquier valor finito r_0 .

$$\Omega(\bar{r}) = \Delta^n \sum_{i=0}^{\infty} a_i \Delta^i \quad (132)$$

$$\mathcal{H}(\bar{r}) = \Delta^p \sum_{i=0}^{\infty} c_i \Delta^i \quad (133)$$

donde la suma se realiza sobre el entero i y por tanto Δ^i representa los pasos enteros en los que se realiza la expansión. Sin embargo, para cada función se han definido las potencias Δ^n y Δ^p respectivamente fuera del sumatorio ya que no necesariamente tienen que ser enteros. Definiendo los coeficientes $a_0, c_0 \neq 0$, el primer término de los desarrollos vendrá dado únicamente por Δ^n, Δ^p .

4.3. Clasificación

Con el fin de estudiar los distintos tipos de soluciones en función de los exponentes n, p establecidos previamente, podemos reescribir las series dadas por (129), (130) utilizando las ecuaciones de campo deducidas [19]. Para ello tomando en primer lugar la ecuación (129), reescribiendo la serie de potencias para $\mathcal{H}(\bar{r})$ y calculando las derivadas correspondientes en serie de potencias, tenemos la expresión para la parte derecha de (129):

$$\mathcal{H}(\bar{r})'''' = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+4}(p+i+4)(p+i+3)(p+i+2)(p+i+1)\Delta^{p+i-1} = \sum_{l=p}^{\infty} c_{l-p+4}(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)\Delta^l \quad (134)$$

Análogamente para $\Omega(\bar{r})$ tenemos:

$$\Omega(\bar{r})' = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}(n+m+1)\Delta^{n+m} \quad (135)$$

$$\Omega(\bar{r})'' = \sum_{h=0}^{\infty} a_{h+2}(n+h+2)(n+h+1)\Delta^{n+h} \quad (136)$$

donde consideramos $m = i - 1$ y $h = i - 2$. De esta forma podemos reescribir:

$$\Omega' \cdot \Omega' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} a_{m+1}a_{b+1}(n+m+1)(n+b+1)\Delta^{2n+m+b} \quad (137)$$

tomando al igual $b = i - 1$. Por otro lado:

$$\Omega\Omega'' = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} a_i a_{h+2}(n+h+2)(n+h+1)\Delta^{2n+i+h} \quad (138)$$

Considerando $l = 2n + i + h = 2n + 2i - 2$, obtenemos la parte de la izquierda de la ecuación (130) dada por:

$$\Omega\Omega'' - 2\Omega'^2 = \sum_{i=0}^{\infty} [a_i \cdot a_{l-i-2n+2}(n+h+2) [(n+h+1) - 2(n+m+1)]] \Delta^l \quad (139)$$

Reescribiendo (145) en función de l, n, i llegamos a la expresión final:

$$\begin{aligned} \sum_{l=2n-2}^{\infty} \Delta^l \sum_{i=0}^{l-2n+2} a_i \cdot a_{l-i-2n+2}(l-i-n+2)(l-3i-3n+1) = \\ = \frac{1}{3}k \sum_{l=p-4}^{\infty} c_{l-p+4}(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)\Delta^l \quad (140) \end{aligned}$$

Esta ecuación nos va a permitir distinguir las distintas clases de que podemos considerar en función del índice l seleccionado. Puesto que en la parte izquierda se establecía la condición de $l - i - 2n + 2 > 0 \rightarrow i < l - 2n + 2$ estableciendo esta condición para el índice i , mientras que la expansión en serie de potencias para l nos dará que su menor valor posible es $l = 2n - 2$. De igual forma con la parte derecha de (140), el menor valor es para $l = p - 4$. Para diferenciar los índices renombraremos este último de manera que $l' = p - 4$.

Consecuentemente, serán los índices n, p que definíamos en (132),(133) los que van a definir la clasificación, considerando tres posibles casos según los valores de los índices de las series para cada lado de la ecuación (140), l, l' :

▪ **Caso I:** $l < l'$

$$2n - 2 < p - 4 \iff p > 2n + 2 \quad (141)$$

▪ **Caso II:** $l > l'$

$$2n - 2 > p - 4 \iff p < 2n + 2 \quad (142)$$

■ **Caso III:** $l = l'$

$$2n - 2 = p - 4 \iff p = 2n + 2 \quad (143)$$

Cabe destacar que en esta ecuación (129) no aparece la constante cosmológica. Por tanto cuando consideremos únicamente (129), nos encontramos con el caso $\Lambda = 0$.

Otra ecuación que también nos será útil desarrollar es (131). Notar que sus dos primeros sumandos se pueden reescribir ya que se cumple que $(\mathcal{H}\Omega)' = \mathcal{H}'\Omega' + \mathcal{H}\Omega''$

Luego sustituyendo las series en (149):

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_i a_{m+1} (n+m+1) \Delta^{p+i+n+m} \right]' = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_i a_{l-i-n-p+2} (n+m+1) (p+i+n+m) \Delta^{p+i+n+m-1} \quad (144)$$

Realizando el cambio de variable $l = p + i + n + m - 1$, podemos reescribir los factores. El resto de sumandos de (131) se sustituyen por las series de forma análoga a lo desarrollado para (129), obteniendo:

$$\begin{aligned} \sum_{l=n+p-2}^{\infty} \Delta^l \sum_{i=0}^{l-n-p+2} c_i a_{l-i-n-p+2} \left[(l-i-n-p+2)(l+1) + \frac{1}{6}(p+i)(p+i-1) \right] + \\ + \frac{1}{3} \sum_{l=n}^{\infty} a_{l-n} \Delta^l = \frac{2}{3} \Lambda \sum_{l=3n}^{\infty} \Delta^l \sum_{j=0}^{l-3n} \sum_{i=0}^j a_i a_{j-i} a_{l-j-3n} \quad (145) \end{aligned}$$

4.3.1. Caso I

Tomando la condición establecida y observando ambos lados de (145), vemos que el índice de menor valor se corresponde con $l = 2n - 2$ para la expansión del lado izquierdo. Para el coeficiente a_i , tenemos que para su primer valor $a_0 \neq 0$, y por tanto, siendo que el coeficiente que acompaña a Δ^{2n-2} se corresponde con $a_i \cdot a_{l-i-2n+2} \cdot (l-i-n+2)(l-3i-3n+1)$, tomando el primer valor de la serie para i , puesto que $a_0 \neq 0$ si queremos que esto se anule deberemos imponer que:

$$(l-n+2)(l-3n+1) = 0 \quad (146)$$

al tomar $i = 0$, y puesto que hemos considerado el menor índice $l = 2n - 2$, ésto nos permite establecer la siguiente condición para n :

$$n(n+1) = 0 \quad (147)$$

dando lugar a dos casos posibles, $n = 0$ y $n = -1$.

n=0 Tomamos los órdenes menores de l para la ecuación (145), pasando el término de la derecha al otro lado quedando una expresión igualada a cero. Consideramos para cada expansión respectivamente $l = n + p - 2$; $l = n$; $l = 3n$, y los primeros índices $i, j = 0$, obteniendo:

$$c_0 \cdot a_0 \left[n(n+p-1) + \frac{1}{6}p(p-1) \right] \Delta^{n+p-2} + \frac{1}{3}a_0 \Delta^n - 4\Lambda a_0^3 \Delta^{3n} = 0 \quad (148)$$

Reescribiendo para simplificar la expresión:

$$c_0 [6n(n+p-1) + p(p-1)] \Delta^{n+p-2} + 2\Delta^n - 4\Lambda a_0^2 \Delta^{3n} = 0 \quad (149)$$

Al considerar $n = 0$, obtenemos las tres potencias $\Delta^{p-2}, \Delta^0, \Delta^0$. Sin embargo la condición establecida para esta clase nos impone que en el caso de que $n=0$, la condición para p quedaría $p > 2n + 2 \rightarrow p > 2$, luego la primera potencia no aparece en el orden más bajo que estamos considerando, de manera que:

$$(2 - 4\Lambda a_0^2)\Delta^0 = 0 \quad (150)$$

Luego nos da el valor del coeficiente a_0^2 , correspondiente a:

$$a_0^2 = \frac{1}{2\Lambda} \quad (151)$$

Sustituyendo dicho valor en la ecuación (149) obtenemos el valor de Λ .

$$a_0^2 \Delta^0 [1 - \Lambda a_0^2] = \frac{2}{3}k$$

Sustituyendo a_0^2 tenemos:

$$\boxed{\Lambda = \frac{3}{8}k} \quad (152)$$

Luego esta clase aparece solamente para el caso de constante cosmológica no nula con el valor dado en (152).

n=-1 Sustituyendo este valor en la ecuación (149) obtenemos:

$$c_0(p-3)(p-4)\Delta^{p-3} + 2\Delta^{-1} - 4\Lambda a_0^2 \Delta^{-3} = 0 \quad (153)$$

Teniendo en cuenta que $a_0, c_0 \neq 0$, y puesto que $p > 2n + 2 \rightarrow p > 0$, si tomamos $p = 2$ podemos agrupar coeficientes y considerando $\Lambda = 0$, tendremos:

$$(2c_0 + 2)\Delta^{-1} = 0 \quad (154)$$

que nos impone $c_0 = -1$. Por tanto hemos encontrado dos subclases correspondientes a:

n	p	Λ
-1	2	0
0	$p > 2$	$\frac{3}{8k}$

Tabla 1: Posibles soluciones para el caso I

Cabe destacar que el caso correspondiente a $[n, p] = [-1, 2]$, se corresponde con la solución de Schwarzschild para simetría esférica, que ya ha sido estudiada inicialmente, para el caso de constante cosmológica nula. Por tanto las funciones buscadas se reescriben como:

$$\Omega(\bar{r}) = -\frac{1}{\bar{r}} \quad (155)$$

$$\mathcal{H}(\bar{r}) = -\bar{r}^2 - 2m\bar{r}^3 \quad (156)$$

4.3.2. Caso II

Análogamente al procedimiento que hemos seguido para el caso anterior, buscamos el índice de menor valor considerando la condición dada por $2n - 2 > p - 4$, que se corresponde con $l = p - 4$. Al sustituirla en el lado derecho de (140) nos lleva a imponer:

$$p(p - 1)(p - 2)(p - 3) = 0 \quad (157)$$

dando lugar a los cuatro casos $p=0,1,2,3$. Volviendo a (149), sustituimos estos valores de p creando así cuatro subcasos. Puesto que la parte derecha de la ecuación no varía, los valores de n vendrán dados al igualar a cero la parte izquierda:

$$\boxed{p=0}$$

$$c_0 \cdot 6n(n - 1)\Delta^{n-2} = 0 \iff n = 0, 1 \quad (158)$$

$$\boxed{p=1}$$

$$c_0 \cdot 6n^2\Delta^{n-1} = 0 \iff n = 0 \quad (159)$$

$$\boxed{p=2}$$

$$[c_0 \cdot (6n(n - 1) + 2) - 2] \Delta^n = 0 \iff c_0(3n^2 + 3n + 1) = -1 \quad (160)$$

que con la condición inicial deberemos imponer que $n > 0$. Volviendo a la ecuación 131) y tomando los órdenes menores para $p = 2$ tenemos:

$$[c_0 \cdot n(3n + 2) + 1] a_0^2 \Delta^{2n} - \Lambda a_0^4 \Delta^{4n} - \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}k \cdot c_0^2 \Delta^0 = 0$$

Simplificando a :

$$3a_0^2 [c_0 \cdot n(3n + 2) + 1] \Delta^{2n} - 3\Lambda a_0^4 \Delta^{4n} + 2k[c_0^2 - 1] = 0 \quad (161)$$

que al anular el sumando de menor orden nos lleva a $c_0 = \pm 1$. Sin embargo es incompatible con la condición para esta clase y el hecho de que $n > 0$. Luego este subcaso no es posible.

$$\boxed{p=3}$$

$$c_0[6n(n + 2) + 6]\Delta^{n+1} = 0 \iff n^2 + 2n + 1 = 0 \quad (162)$$

que al resolver la ecuación nos da que el único valor de n para el cual esto se cumple se corresponde con $n = -1$, lo cual es incompatible con la condición establecida para este caso, ya que para $p = 3$ nos queda que debe cumplirse $n > \frac{1}{2}$. Por tanto este subcaso tampoco es posible.

Tendremos tres subclases correspondientes a:

n	p	Λ
0	1	Cualquiera
0	0	Cualquiera
1	0	Cualquiera

Tabla 2: Posibles soluciones para el caso II

4.4. Descripción y estudio del agujero negro de Schwarzschild-Bach-(A)dS de clase [0,1]

En este apartado nos vamos a centrar en el caso de agujero negro tipo Schwarzschild-Bach-Anti de Sitter con constante cosmológica, correspondiente al caso II, subcaso $[n, p] = [0, 1]$. Esta clase, al escribir las soluciones de $\Omega(\bar{r})$ y $\mathcal{H}(\bar{r})$ expresadas en forma de series, alrededor del horizonte \bar{r}_h representa el agujero negro esférico y simétrico de Schwarzschild-Bach-Anti de Sitter, generalizando lo que encontrábamos en el Caso I dado por el agujero negro de Schwarzschild-Anti de Sitter. Su principal diferencia es que el tensor de Bach B_{ab} no va a ser nulo, y por tanto para el parámetro de Bach se cumple $b \neq 0$.

Definimos el horizonte de agujero negro, dado por \bar{r}_h donde se cumple $\mathcal{H}(\bar{r}_h)=0$, y que se asocia con \bar{r}_0 , el punto alrededor del cual se realizaba la expansión en serie de potencias para las funciones Ω , \mathcal{H} , de manera que:

$$\bar{r}_0 = \bar{r}_h \quad (163)$$

Los parámetros independientes que encontramos son Λ , la posición del horizonte \bar{r}_h y b , denominado parámetro de Bach, que solo aparece en el caso no trivial de tensor de Bach no nulo ya que en caso contrario se anularía, y toma la forma:

$$b = \frac{1}{3}(c_1 - 2 + \Lambda a_0^2) \quad (164)$$

Por otro lado definimos el parámetro dado por Λ y el radio \bar{r}_h :

$$\rho = 1 - \frac{\Lambda}{\bar{r}_h^2} \quad (165)$$

En función de estos parámetros y de las relaciones recursivas para calcular los coeficientes de las series (detallados en [Anexo C](#)) tenemos la forma explícita de la expansión para Ω y \mathcal{H} :

$$\Omega(\bar{r}) = -\frac{1}{\bar{r}} - \frac{b}{\bar{r}_h} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(\frac{\bar{r}_h - \bar{r}}{\rho \bar{r}_h} \right)^i \quad (166)$$

$$\mathcal{H}(\bar{r}) = (\bar{r} - \bar{r}_h) \left[\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}_h} - \frac{\Lambda}{3\bar{r}_h^3} (\bar{r}^2 + \bar{r}\bar{r}_h + \bar{r}_h^2) + 3b\rho\bar{r}_h \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{\bar{r} - \bar{r}_h}{\rho \bar{r}_h} \right)^i \right] \quad (167)$$

Para el horizonte en las expansiones se cumple:

$$\Delta = \bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{r} - \bar{r}_h \rightarrow 0 \quad (168)$$

Los términos dominantes para las dos funciones vienen dados por los coeficientes a_0, c_0 respectivamente:

$$\Omega = a_0 = -\frac{1}{\bar{r}_h} \quad (169)$$

$$\mathcal{H} = c_0 \Delta = \left(\bar{r}_h - \frac{\Lambda}{\bar{r}_h} \right) (\bar{r} - \bar{r}_h) \quad (170)$$

Si tomamos estos resultados y los insertamos en las relaciones obtenidas al comienzo (113), (114) para las funciones $B(r), A(r)$ se tiene que:

$$B(r) \rightarrow (r - a_0) \quad (171)$$

$$A(r) \rightarrow (r - a_0) \quad (172)$$

Por tanto encontramos que estas funciones tienden a cero, es decir, localizamos el horizonte en $\bar{r}_h = \bar{r}$ que nos daría que (120):

$$r_h = a_0 = -\frac{1}{\bar{r}_h} \quad (173)$$

De esta forma hemos situado la posición del horizonte para r y \bar{r} .

A continuación podemos estudiar el comportamiento de las funciones obtenidas en desarrollo de serie de potencias, $\mathcal{H}(\bar{r})$, $\Omega(\bar{r})$ cerca del horizonte de agujero negro \bar{r}_h [15]:

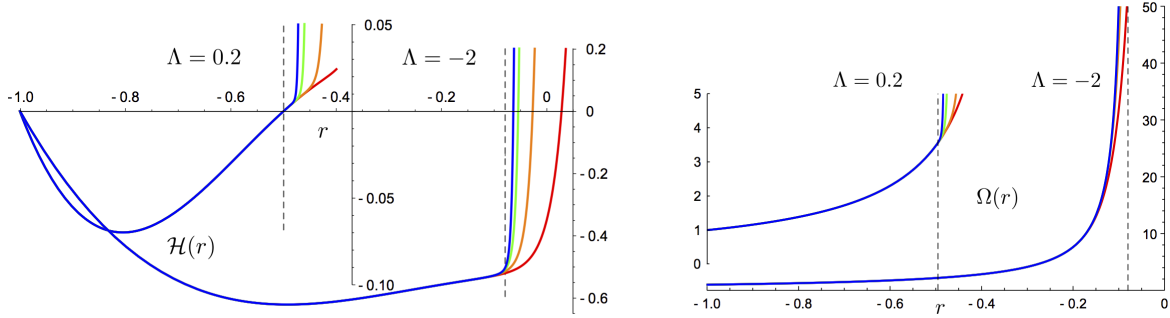


Figura 1: Comportamiento funciones $\mathcal{H}(\bar{r})$, $\Omega(\bar{r})$ para constante cosmológica positiva y negativa, tomando valores $\bar{r}_h = -1$, $k = 0,5$ y $b = 0,3$ para $\Lambda = 0,2$ y $b = 0,2$ para $\Lambda = -2$

El valor de la constante cosmológica Λ nos va a determinar el comportamiento de la función $\mathcal{H}(\bar{r})$. El horizonte de agujero negro marcado por \bar{r}_h , nos delimita las regiones estática ($\bar{r} > \bar{r}_h$) y no estática ($\bar{r} < \bar{r}_h$). El caso más remarcable aparece para $\Lambda > 0$. La función \mathcal{H} se anula en dos puntos, y por tanto tenemos un nuevo horizonte. El izquierdo es el valor de $\bar{r}_h = -1$ establecido para la representación, es el horizonte de agujero negro. En el límite del radio de convergencia se encuentra el segundo horizonte, que es el horizonte cosmológico.

Para la función $\Omega(\bar{r})$, en ambos casos la función crece monótonamente y en los puntos donde $\mathcal{H}(\bar{r})$ se anula (120) no se va a anular luego no nos muestra ningún horizonte.

5. Conclusiones

Primeramente, hemos estudiado la obtención de las ecuaciones de Einstein y su interpretación para el agujero negro, distinguiendo el caso en el que consideraremos la constante cosmológica. Una vez desarrollado el cálculo tensorial necesario para el estudio de la acción de Einstein-Hilbert, hemos utilizado el formalismo variacional para considerar una acción que, mediante la aplicación del principio de mínima acción sobre la misma, nos ha permitido obtener las ecuaciones del movimiento.

Partiendo de la métrica de Schwarzschild que nos ofrecía la primera solución exacta a las ecuaciones de Einstein, hemos hallado el valor de sus componentes y verificado con el desarrollo de las ecuaciones del movimiento previas, que ésta las cumplía, además de resaltar algunas de sus propiedades más características como sus singularidades.

Todo este desarrollo se ha llevado a cabo partiendo de la base dada por la teoría de gravedad de lagrangianos cuadráticos y el estudio de soluciones para espacio-tiempos como el de Schwarzschild.

Seguidamente hemos añadido la constante cosmológica al estudio, introduciendo el tensor de Weyl y de Bach junto con algunas de sus características y reproduciendo el estudio anterior de la acción. Modificando la métrica considerada, en este caso la métrica de de Sitter, buscamos dos funciones, $\Omega(\bar{r})$ y $\mathcal{H}(\bar{r})$ que nos van a permitir encontrar el horizonte de agujero negro, correspondiente a los puntos donde $\mathcal{H}(\bar{r})$ se anule. Con la obtención de las ecuaciones de campo, expresando las funciones buscadas en forma de series de potencias, podemos distinguir las clases que se establecen en función de los parámetros n, p que lideran la serie de potencias.

Finalmente analizamos el caso de Schwarzschild-Bach-Anti de Sitter que nos muestra como al añadir la constante cosmológica, podemos encontrar que la función $\mathcal{H}(\bar{r})$ se anula en un nuevo punto, brindándonos así un nuevo horizonte, que denominaremos horizonte cosmológico.

Referencias

- [1] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, chapter Special relativity. 1:Lorentz transformations. May 1972.
- [2] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, chapter Special relativity. 5:Vectors and tensors. May 1972.
- [3] Matthias Blau. *Lecture notes on General Relativity*, pages 369–402. Univ. Bern, May 2022.
- [4] M. Asorey, J. L. López, and I. L. Shapiro. Some remarks on high derivative quantum gravity. *International Journal of Modern Physics A*, 12(32):5711–5734, dec 1997.
- [5] K.S.Stelle. *Classical gravity with higher derivatives*. Gen.Rel. Grav, 350-372 (1978).
- [6] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, chapter Classic tests of the Einstein’s theory. 2:The Schwarzschild Solution. May 1972.
- [7] Matthias Blau. *Lecture notes on General Relativity*, pages 502–514. Univ. Bern, May 2022.
- [8] M. Novello, L. R. Freitas, and V. A. De Lorenci. The static gravitational field of a spherically symmetric body, 1995.
- [9] Reall H.S. Emparan, R. Black holes in higher dimensions. *Living Rev. Relativ.*, 11(6), 2008.
- [10] Pope C N Lü H, Perkins A and Stelle K S. Spherically symmetric solutions in higher derivative gravity. *Physical Review Letters*, 92(12), 2015.
- [11] Matthias Blau. *Lecture notes on General Relativity*, pages 604–608. Univ. Bern, May 2022.
- [12] R. Švarc, J. Podolský, V. Pravda, and A. Pravdová. Exact black holes in quadratic gravity with any cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 121:231104, Dec 2018.
- [13] Jiří Podolský and Robert Švarc. Interpreting spacetimes of any dimension using geodesic deviation. *Physical Review D*, 85(4), feb 2012.
- [14] M.A.H. MacCallum C. Hoenselaers E. Herlt H. Stephani, D.Kramer. *Exact solutions of Einstein’s Field Equations*, pages 48–56. Cambridge University Press, 2003.
- [15] J.Podolský R.Švarc V.Pravda, A.Pravdová . Black holes and other spherical solutions in quadratic gravity with a cosmological constant. *Physical Review D*, 103(6), mar 2021.
- [16] Andrea Fuster Pérez. *Kundt Spacetimes in General Relativity and Supergravity*, pages 21–24. Universiteit Amsterdam, 2007.
- [17] J. Griffiths and J.Podolský. *Exact Space-Times in Einstein’s General Relativity*, pages 55–66. Cambridge University Press, 2009.
- [18] J. Podolský , R. Švarc, V. Pravda, and A. Pravdová. Explicit black hole solutions in higher-derivative gravity. *Physical Review D*, 98(2), jul 2018.
- [19] J. Podolský , R. Švarc, V. Pravda, and A. Pravdová. Black holes and other exact spherical solutions in quadratic gravity. *Physical Review D*, 101(2), jan 2020.