Resolubilidad por radicales de algunos polinomios de grado cinco.

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza
1542

Irene Marco Sanz
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Concepción Martínez Pérez
Diciembre de 2022

Resumen

La determinación de las raíces de un polinomio, o equivalentemente, la resolución de ecuaciones algebraicas, se encuentra entre los problemas matemáticos más antiguos considerados en la historia. Se sabe que algunos polinomios no tienen raíces reales. Sin embargo, si se extiende el conjunto de las raíces posibles a los números complejos, el Teorema fundamental del álgebra afirma que todo polinomio, no constante, tiene al menos una raíz compleja, de lo que se deduce iterando que se puede factorizar completamente en $\mathbb{C}$.

El objetivo de este trabajo fin de grado se basa en mostrar la resolubilidad por radicales de algunos polinomios. La resolución de ecuaciones polinómicas por radicales hace referencia a la resolución de polinomios en términos de sus coeficientes usando operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación y división) y extracciones sucesivas de raíces.

El trabajo se encuentra dividido en 3 capítulos. Se introduce, en el primero de ellos, una serie de resultados previos que son necesarios para conseguir el objetivo del mismo. Se muestran aquí, algunas definiciones como puede ser el concepto de grupo, extensión de cuerpos o funciones simétricas. Asimismo, se hace una pequeña introducción a la Teoría de Galois. En esta, se enuncia a su vez el teorema de la teoría de Galois sobre resolubilidad por radicales de ecuaciones algebraicas. Además, como se ha nombrado, se añade un apartado dedicado al concepto de funciones simétricas elementales y su relación con los coeficientes de un polinomio. Un apartado que resulta de gran utilidad posteriormente. Por último, se verá el concepto de polinomio resolvente y como proceder al cálculo de estos. Las resolventes funcionan como ecuaciones auxiliares para obtener las soluciones de un polinomio a partir de sus propias raíces. Además, se prueba que un polinomio es resoluble por radicales si y solo si cierta ecuación resolvente asociada a este tiene una raíz racional.

En el segundo y en el último capítulo, se estudia la resolución por radicales de diferentes polinomios. Se busca encontrar en todos los casos posibles una fórmula concreta que nos permita obtener las raíces de los polinomios en función de los coeficientes de estos. Se desarrollan todos los pasos a seguir para conseguirlo. Hay diferencia entre el descubrimiento de fórmulas concretas para las raíces y la aproximación de raíces. Se conocen fórmulas de polinomios de hasta cuarto grado como puede verse en el capítulo 2. Pero, las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron irresolubles durante mucho tiempo. Como bien enuncia el Teorema de la imposibilidad de Abel-Ruffini, una ecuación algebraica de grado igual o superior a cinco no siempre se puede resolver por radicales. Las fórmulas para un polinomio resoluble de grado 5 se verán en el capítulo 3.

Se buscan también los grupos de Galois asociados a los distintos polinomios, pues el Teorema de la Teoría de Galois afirma que un polinomio f es resoluble por radicales si y solo si su grupo de Galois es resoluble.

Finalmente, se obtienen dichas fórmulas para las raíces. Se utilizarán para ello las ecuaciones resolventes y las funciones simétricas elementales. A partir de una ecuación resolvente correspondiente y una raíz de esta, se definen distintos polinomios que relacionan los coeficientes del polinomio con las raíces del mismo. Como se ha nombrado, veremos que para polinomios de grado dos, tres y cuatro las fórmulas obtenidas son siempre válidas, mientras que para polinomios de grado cinco dependen de cierto valor qué solo es racional si el polinomio es resoluble.

Asimismo, en la última parte de ambos capítulos, se muestran un par de ejemplos donde se puede ver en casos concretos el desarrollo de dichas fórmulas.

Al final del trabajo, se encuentra un anexo. En él, debido a su longitud, se muestran distintos polinomios

definidos a lo largo del último capítulo.

Abstract

Determining the roots of polynomials, or solving algebraic equations, is among the oldest mathematical problems humans have considered. It is well known that some polynomials have no real roots, whereas, if one consideres the set of all possible roots in the complex numbers, the fundamental theroem of algebra claims that every polynomial has at least one complex or real root which implies that it can be fully factorized.

The aim of this final Bachelor's thesis is to study the solvability by radicals of some polynomials. Solving algebraic equations by radicals means solving algebraic equations in terms of their coefficients, i.e, using algebraic operations, such as sum, subtraction, multiplication or division and the extraction of successive roots.

Three different chapters can be found in this project. The first part consists mainly of some previuos results which are neccesary to achieve our goal. Some basic concepts are introduced here, such as the concept of group, field extension or symmetric function. In addition, there is an introduction to Galois theory. Here, the theorem of the Galois theory about solubility by radicals is stated.

Furthermore, as can be seen, there is a specific part on elementary symmetric functions and their relation with the coefficients of a polynomial. That will be quite useful later on. At last, the concept of resolvent polynomial and how such resolvent equation can be derived is shown. The latter are really interesting to solve polynomilas by radicals since they work as auxiliary equations to obtain the solutions of the polynomials once some solutions of the resolvents are obtained. Moreover, a polynomial is solvable if and only if its associated resolvent equation has a rational root.

In the second and in the last chapter, the objective of the project is studied, it means, the solvability by radicals of different polynomials of different degrees. A concrete formula is sought to obtain the roots of the polynomial. All the steps to be followed in order to obtain this formula as acombination of the coefficients of the polynomial are derived here. There is a difference between aproximating roots and finding concrete formulas for the roots. However, it is well known that any algebraic equation of degree two, three or four can be solved by radicals, as shown in the second chapter. As the Abel-Ruffini impossibility theorem states, an algebraic equation of degree greater than or equal to five cannot always be solved by radicals. Finally, the last chapter studies a solvable polynomial of degree five.

The project is mainly based on the following theorem of Galois theory: A polynomial f is solvable if and only if its Galois group is solvable. For this reason, the Galois groups are sought. We study which of them are solvables so they are more interesting for these cases. The resolvent equation and the elementary symmetric functions are used for this purpose. With the resolvent equation and a root of the resolvent, a relation between the coefficients and the roots of the polynomial is determined.

Finally, a concrete formula for the roots is obtained. As mentioned, these formulas will be useful for any polynomial of degree two, three or four. But, for polynomials of degree five, we can use them only when the polynomial is solvable.

At the end of each chapter some examples are explained and at the end of the project there is an appendix with some polynomials that are defined in the last chapter.

Notación

$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos.
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales.
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros.
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales.
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros módulo n.
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$	grupo multiplicativo de los enteros invertibles módulo n.
$\|A\|$	orden del conjunto A.
$A \times B$	producto directo de A y B.
$H \leq G$	H subgrupo de G.
$N \trianglelefteq G$	N subgrupo normal en G.
D_{2n}	grupo diédrico de orden $2n$.
S_n	grupo simétrico de permutaciones de un conjunto de n elementos.
A_n	grupo alternado de permutaciones de un conjunto de n elementos.
$A \cong B$	A isomorfo a B.
$Stab_G(A)$	estabilizador de A en G.
$C_G(A)$	centralizador de A en G.
$N_G(A)$	normalizador de A en G.
$Z(G)$	centro del grupo G.
$< x >$	grupo generado por el elemento x.
$\|H : G\|$	índice del subgrupo H en G.
$carK$	característica del cuerpo K.
E/K	el cuerpo E es una extensión del cuerpo K.
$[E : K]$	grado de la extensión de cuerpos E/K.
$Gal(E/K)$	grupo de Galois de la extensión de cuerpos E/K.
$Fix_E(\sigma)$	cuerpo fijado por σ de elementos de E.

Índice general

Capítulo 1

Resultados previos.

En este capítulo se muestran una serie de definiciones y enunciados que se usarán a lo largo del trabajo y que resultarán de utilidad para conseguir el objetivo del mismo, resolver por radicales algunos polinomios de grado ≤ 5. Se introducen conceptos de teoría de grupos y teoría de Galois. Estos resultados se pueden consultar en los libros [1], [2] y [6].

1.1. Teoría de Grupos.

En primer lugar, se muestran una serie de conceptos de teoría grupos.

Definición 1.1.1. Un *grupo* $G = (G, \cdot)$ es una estructura dada por un conjunto G no vacío y una operación binaria $(\cdot)$ que satisface los siguientes axiomas:

- Propiedad asociativa: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\ \forall x, y, z \in G$
- Existencia de elemento neutro: existe $e \in G$ tal que $e \cdot x = x = x \cdot e\ \forall x \in G$. Este elemento es único y se denota 1.
- Existencia de elemento inverso: Si $x \in G$ existe $x' \in G$ tal que $x \cdot x' = 1 = x' \cdot x$. A este elemento x' se le denomina *inverso* de x y se denota x^{-1}. Además, dicho elemento es único.

A un grupo G se le dice abeliano (o conmutativo) si $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in G$.

Definición 1.1.2. Un subgrupo N de un grupo G es *normal en* G si $gNg^{-1} = N\ \forall g \in G$. Se denota $N \trianglelefteq G$.

La demostración de los siguientes resultados se puede consultar en [1] en las páginas 94, 120 y 171 respectivamente.

Lema 1.1.1. Sean $H, K \leq G$, entonces $HK = KH \iff HK \leq G$.

Proposición 1.1.1. Dados $H \trianglelefteq G$, $K \leq H$ subgrupos de un grupo G. Entonces $HK \leq G$.

Proposición 1.1.2. Todo subgrupo de un grupo G con índice 2 es normal en G.

Proposición 1.1.3. Sean $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ dos subgrupos normales en G tales que $N_1 \cap N_2 = 1$ y $N_1N_2 = G$. Entonces, $N_1 \times N_2 \cong G$.

Sea G un grupo arbitrario y A un subconjunto no vacío de G.

Definición 1.1.3. El conjunto $C_G(A) = \{g \in G \,|\, gag^{-1} = a\ \ \forall a \in A\}$ es el *centralizador* de A en G.

Es decir, el centralizador, $C_G(A)$, es el conjunto de elementos de G que conmutan con cualquier elemento de A, ya que $gag^{-1} = a \iff ga = ag$. Además, se puede comprobar que $C_G(A)$ es un subgrupo de G.

Definición 1.1.4. Se define $Z(G) = \{g \in G \,|\, gx = xg \,\forall x \in G\}$, el conjunto de elementos que conmutan con todo elemento de G. A este conjunto se le llama *centro* de G.

Nota. $Z(G) = C_G(G)$, luego $Z(G) \leq G$.

Definición 1.1.5. El *normalizador* de A en G se define como el conjunto $N_G(A) = \{g \in G \mid gAg^{-1} = A\}$.

Si $g \in C_G(A)$, entonces $gag^{-1} = a$ para todo $a \in A$. Luego, $C_G(A) \leq N_G(A)$. Se puede ver también que, $N_G(A)$ es subgrupo de G.

Definición 1.1.6. Si el grupo G actúa sobre un conjunto S y s es un elemento de S, el *estabilizador de s* en G es el conjunto $Stab_G(s) = \{g \in G \,|\, g(s) = s\}$. Se dice que la acción es *transitiva* si dados $s_1, s_2 \in S$ siempre existe $g \in G$ con $g(s_1) = s_2$.

Definición 1.1.7. Si G es un grupo finito se dice *orden* de G al número de elementos de G.
Se denota $|G|$.

Definición 1.1.8. Si G es un grupo finito y $H \leq G$, se define el *índice* de H en G como el número de clases respecto a la relación de equivalencia $g \backsim h \iff h^{-1}g \in H$. Se denota $|G : H|$.

Observación. Si G actúa en un conjunto S y $s \in S$, entonces $|G : Stab_G(s)| = |\{g(s) \mid g \in G\}|$. El conjunto $\{g(s) \mid g \in G\}$ se llama *órbita* de s.

La demostración de los tres siguientes resultados puede consultarse en [1] a partir de la página 89.

Teorema 1.1.1. (Lagrange). Sea G finito y H subgrupo de G. Se tiene

$$|G| = |H||G : H|$$

Proposición 1.1.4. Sea G un grupo finito y dos subgrupos H, K de G. Entonces,

$$|HK| = |H||K|/|H \cap K|$$

Teorema 1.1.2. (Cauchy). Sea G un grupo finito y p primo tal que p divide a $|G|$, entonces G contiene a un elemento de orden p.

Definición 1.1.9. Sea G un grupo y p primo.

1. Un grupo de orden p^α para $\alpha \geq 1$ se llama *p-grupo*. Los p-subgrupos de G son subgrupos de G que son p-grupos.

2. Si G es un grupo de orden $p^\alpha m$, donde $p \nmid m$, entonces un subgrupo de orden p^α recibe el nombre de *p-subgrupo de Sylow* de G.

Teorema 1.1.3. (Teoremas de Sylow) Sea G finito y p primo tal que $p \mid |G|$

1. G tiene un p-subgrupo de Sylow.

2. Dos p-subgrupos de Sylow de G cualesquiera son conjugados.

Corolario 1.1.1. Sea P un p-subgrupo de G, entonces P es el único p-subgrupo de Sylow de G si, y solo si, $P \trianglelefteq G$.

La demostración del Teorema 1.1.3 y del corolario 1.1.1 pueden consultarse en [[1], p.139]

Proposición 1.1.5. Si p es primo y H un subgrupo resoluble de S_p de orden divisible por p, entonces H está contenido en el normalizador de algún p-subgrupo de Sylow de S_p.

Demostración. Sea $H < S_p$ resoluble de orden divisible por p. Razonamos por inducción en $|H|$. Por el teorema de Cauchy $\exists \sigma \in H$ de orden p y como $\sigma \in S_p$, la única opción es que σ sea un p-ciclo. Esto implica que H actúa en $\{1, ..., p\}$ de forma transitiva. Sea

$$T = \{h \in H \mid h(1) = 1\} = Stab_H(1)$$

Tenemos: $|H : T| = |$ órbita de $1| = p$. Si $|H| = p$, $H =< \sigma >$ luego el resultado es trivial. En otro caso, como H es resoluble podemos elegir $1 \neq N \triangleleft H$. Supongamos, $N \leq T$, es decir, $n(1) = 1 \ \forall n \in N$.
Como H actúa de manera transitiva $\exists h \in H$ con $h(1) = 2$. Como $N \triangleleft H$, $N^h = N$, luego $\forall n \in N \ h^{-1}nh \in N \leq T \Longrightarrow h^{-1}nh(1) = 1 \Longrightarrow h^{-1}n(2) = 1 \Longrightarrow n(2) = h(1) = 2$. Razonando de manera análoga para las demás cifras se tiene $n(i) = i$ para todo $i \in \{1, ..., p\}$ pero esto implica que $N = 1$, lo cual es una contradicción.
Por tanto, $N \nleq T$, luego $T < NT \leq H$ y como $|H : T| = p$ que es primo, se deduce $H = NT$. Entonces, $|H| = \frac{|N||T|}{|N \cap T|} = \frac{|N|}{|N \cap T|}|T|$ y como $p \mid |H|$, $p \nmid |T|$, se deduce que $p \mid |N|$. Como $N < H$ por inducción podemos suponer que existe P p-subgrupo de Sylow de G tal que $P \triangleleft N$, luego por el corolario 1.1.1 este es el único p-subgrupo de Sylow de N.
Sea $h \in H$, $P^h \leq N^h = N$, luego P^h es otro p-subgrupo de Sylow de N así que $P = P^h$. Por tanto, $H \leq N_{S_p}(P)$. □

1.2. Extensiones de cuerpos.

Definición 1.2.1. Se dice que E/K es una *extensión de cuerpos* si K es un subcuerpo de E.

Nota. E es un K-espacio vectorial. Si la dimensión de E como K-espacio vectorial es finita, se dice que la extensión es finita. Se escribe $[E : K] = dim_K(E)$ y este número es el *grado de la extensión*.

Proposición 1.2.1. Dados $K \subseteq L \subseteq E$, entonces E/K es finita si y solo si E/L y L/K lo son. En ese caso, $[E : K] = [E : L]][L : K]$

Demostración. Se puede consultar en [[2], p.91]

Definición 1.2.2. Dado K un cuerpo y $f \in K[x]$ un polinomio no constante, se dice que f *escinde* en E si existen $a, a_1, ..., a_n \in E$ tal que $f = a(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$.

Si $E = K(a_1, .., a_n)$ se dice que E es el *cuerpo de escisión* de f sobre K.

Teorema 1.2.1. Sea $f \in K[x]$ no constante, entonces existe un cuerpo de escisión de f sobre K.

Demostración. Se puede consultar en [[2], p.59].

Definición 1.2.3. Una extensión E/K se dice que es *normal* si existe un polinomio en $K[x]$ tal que E es cuerpo de escisión de f.

1.3. Teoría de Galois.

Definición 1.3.1. El *grupo de Galois* asociado a la extensión E/K es el grupo

$$Gal(E/K) = \{\sigma : E \longrightarrow E \text{ isomorfismo tq } \sigma(k) = k \ \forall k \in K\}$$

Se llama grupo de Galois de un polinomio $f \in K[x]$ al grupo de Galois asociado a la extensión E/K, donde E es el cuerpo de escisión del polinomio sobre K.

Definición 1.3.2. Dada una extensión E/K y $\sigma \in Gal(E/K)$ se define el *cuerpo fijado* por σ como el conjunto $Fix_E(\sigma) = \{e \in E \mid \sigma(e) = e\}$.

Proposición 1.3.1. Sean E/K una extensión y $f \in K[x]$. Si $a \in E$ es una raíz de f y $\sigma \in Gal(E/K)$, entonces $\sigma(a)$ es raíz de f. Además, $Gal(E/K)$ actúa sobre las raíces de f en E y si E es el cuerpo de escisión de f sobre K, entonces f es irreducible $\Longleftrightarrow$ esta acción es transitiva.

Demostración. Se puede consultar en [[2], p.126]

Definición 1.3.3. Una *extensión de Galois* es una extensión normal E/K tal que los polinomios irreducibles en K que tienen alguna raíz en E, no tienen raíces múltiples en E. En particular, una extensión de característica cero y normal es una extensión de Galois.

Nota. Trabajamos solo en el caso finito, es decir, en este trabajo extensión de Galois $\Longrightarrow$ finita.

La demostración de los siguientes resultados se puede encontrar en [2] a partir de la página 155.

Teorema 1.3.1. Sea $K \subseteq L \subseteq E$ una extensión de cuerpos. Se tiene:

1. $Gal(E/L) \leq Gal(E/K)$
2. Si L/K es normal, entonces $\sigma(L) = L$ para todo $\sigma \in Gal(E/K)$.
3. Si E/K es normal, entonces L/K es normal si y solo si $\sigma(L) = L$ para todo $\sigma \in Gal(E/K)$. En este caso, $Gal(E/L) \trianglelefteq Gal(E/K)$ y

$$Gal(E/K)/Gal(E/L) \cong Gal(L/K)$$

Proposición 1.3.2. Sea E/K una extensión y sean $K \subseteq L$, $F \subseteq E$ cuerpos intermedios. Supongamos que F/K es de Galois, $M = L \cap F$ y $E =< L, F >$, es decir, no hay ningún subcuerpo estrictamente contenido en E que contenga a L y F. Entonces, E/L es de Galois y la restricción

$$Gal(E/L) \longrightarrow Gal(F/M)$$

es un isomorfismo de grupos.

Proposición 1.3.3. Si E/K es de Galois, entonces se tiene

$$[E : K] = |Gal(E/K)| \qquad \text{y} \qquad Fix_E(Gal(E/K)) = K$$

Demostración. Véase en [[2], p.150]

Nota. Si E/K es de Galois, entonces si H es un subgrupo de $Gal(E/K)$ se tiene $|H| = [E : Fix_E(H)]$.

El grupo de todas las permutaciones de un conjunto de n elementos se conoce como *grupo simétrico* y se denota como S_n. Dentro de este, el *grupo alternado* A_n es el subgrupo de S_n de todas las permutaciones pares (producto de un número par de trasposiciones, donde una trasposición es una permutación que intercambia dos elementos y fija el resto).
Si E/K es una extensión de Galois, entonces E es el cuerpo de escisión de algún polinomio sin raíces múltiples $f(x)$ sobre K. Cualquier automorfismo $\sigma \in Gal(E/K)$ lleva una raíz de un factor irreducible de $f(x)$ a otra raíz de este factor irreducible y σ está definido de manera única por la acción sobre las raíces de f. Si fijamos un orden para las raíces $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ de $f(x)$ vemos que cada $\sigma \in Gal(E/K)$ define una permutación única de las raíces $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Luego define una permutación única sobre los índices $\{1, 2, ..., n\}$ que depende del orden fijado. Se obtiene una inyección del grupo de Galois en el grupo simétrico S_n

$$Gal(E/K) \hookrightarrow S_n$$

Podemos así pensar en grupos de Galois como subgrupos del grupo simétrico S_n.

Definición 1.3.4. Una extensión E/K se dice *radical* si existen subcuerpos $K = K_0 \subseteq K_1 \cdots \subseteq K_m = E$ tal que $K_i = K_{i-1}(a_i)$ con $a_i^{n_i} \in K_{i-1}$ para $i = 1, ..., m$.

Un polinomio no constante en $K[x]$ es *resoluble por radicales* si existe una extensión radical E/K que contenga un cuerpo de escisión de f sobre K.

Definición 1.3.5. Un grupo G se dice *resoluble* si existen subgrupos normales G_i satisfaciendo

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_k = G$$

y G_{i+1}/G_i es abeliano para todo i.

Se introduce ahora el siguiente teorema, que es el resultado principal sobre resolubilidad de polinomios por radicales. En el trabajo se hace alusión en abundantes ocasiones a dicho teorema.

Teorema 1.3.2. Sea K un cuerpo con característica cero. Un polinomio $f \in K[x]$ es resoluble por radicales si, y solo si, el grupo de Galois de f es resoluble.

Demostración. Véase en [[1], p.628]

1.4. Funciones simétricas.

Definición 1.4.1. Dadas las variables indeterminadas $x_1, x_2, ..., x_n$, las *funciones simétricas elementales* se definen como

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n \\ &\cdots \\ s_n &= x_1x_2 \cdots x_n \end{aligned}$$

Es decir, la i-ésima función simétrica s_i de $x_1, x_2, ..., x_n$ es la suma de todos los posibles productos sin repetición de i de las variables x_j.

Definición 1.4.2. Se llama *polinomio general de grado n* al polinomio

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

cuyas raíces son las variables indeterminadas $x_1, x_2, ..., x_n$.

Es fácil ver por inducción que los coeficientes del polinomio general de grado n son las funciones simétricas elementales en las raíces.

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} \cdots + (-1)^n s_n$$

Sea $F = \mathbb{Q}(x_1, x_2, ..., x_n)$, es decir, F es el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios $\mathbb{Q}[x_1, ..., x_n]$. Cada $s_i \in F$ y podemos considerar el subcuerpo que generan que denotamos como $k = \mathbb{Q}(s_1, ..., s_n) \subseteq F$ Consideramos $q(x)$ el polinomio general de grado n y tenemos $q(x) \in k[x]$, ya que como se ha visto sus coeficientes son las funciones elementales simétricas s_i. Además, F es precisamente el cuerpo de escisión de q sobre k luego la extensión F/k es una extensión de Galois, ya que estamos en característica cero.
El grupo simétrico actúa por permutaciones en $\{x_1, ..., x_n\}$ y $\forall g \in S_n$ esta acción se puede extender a un automorfismo $F \mapsto F$ que fija cada una de las s_i, es decir, $k \subseteq Fix_F(g)$ luego g es un elemento de $Gal(F/k)$. Al revés, cada elemento de $Gal(F/k)$ induce una permutación de $\{x_1, ..., x_n\}$, luego $S_n = Gal(F/k)$.

Definición 1.4.3. Se define el *discriminante* D de $x_1, x_2, ..., x_n$ como

$$D = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2$$

Vamos a considerar ahora un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado n, sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ las raíces de f en $\mathbb{C}$ y ponemos $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $Gal(f) = Gal(E/\mathbb{Q})$. Podemos definir el homomorfismo evaluación:

$$\begin{array}{rccc} ev: & F = \mathbb{Q}(x_1, ..., x_n) & \longrightarrow & E \\ & x_i & \longmapsto & \alpha_i \end{array} \tag{1.1}$$

Comentario. Los elementos de $\mathbb{Q}$ quedan fijos bajo *ev*.

El *discriminante* de un polinomio f se define como el resultado de evaluar D en las raíces de f.
El discriminante D es una función simétrica en $x_1, x_2, ..., x_n$, luego es un elemento de k y por tanto al evaluar, el discriminante es siempre un número racional. La siguiente propiedad es inmediata:

Proposición 1.4.1. La permutación $\sigma \in S_n$ es un elemento de A_n si y solo si σ fija a la raíz cuadrada del discriminante de D, es decir, si y solo si $\sigma(\sqrt{D}) = \sqrt{D}$.

1.5. Polinomios resolventes.

Al igual que en la sección (1.4) sean $F = \mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)$, $k = \mathbb{Q}(s_1, ..., s_n)$ y $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, donde $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ son las raíces de un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado n.
Sea $\theta \in F$ un elemento cualquiera y $G = Stab_{S_n}(\theta)$. A un θ en estas condiciones se le dice *resolvente invariante* de G.
Ponemos $K = k(\theta)$, entonces F/K también es de Galois y $G = Gal(F/K)$, ya que

$$\begin{aligned} Gal(F/K) =& \{g \in Gal(F/k) \mid g \text{ fija todos los elementos de } K\} = \{g \in Gal(F/k) \mid g\theta = \theta\} \\ =& \{g \in S_n \mid g\theta = \theta\} = G \end{aligned}$$

Sea $G \leq S_n$ y $\theta \in F$ resolvente invariante para G, es decir, $G = \{g \in S_n \mid g\theta = \theta\}$. Evaluando θ tenemos:

$$ev(\theta) = \theta(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in E$$

Asociado a θ y f podemos definir el polinomio resolvente de θ, f:

$$R(\theta; f) = \prod_{t \in T}(x - ev(t\theta)) = \prod_{t \in T}(x - (t\theta))(\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

donde T es un conjunto de representantes de las clases de G en S_n, es decir, de las clases de equivalencia respecto a la relación definida en 1.1.8. Además, se tiene $R(\theta; f) \in E[x]$.
La gran utilidad de estos polinomios es que ayudan a calcular grupos de Galois de polinomios gracias al teorema siguiente:

Teorema 1.5.1. Sea θ resolvente invariante para $G \leq S_n$ y $R(\theta; f)$ el polinomio resolvente asociado.

1. Si $Gal(f)$ es conjugado en S_n a un subgrupo de G, entonces $R(\theta; f)$ tiene una raíz en $\mathbb{Q}$.
2. Si $R(\theta; f)$ tiene una raíz en $\mathbb{Q}$ que no es múltiple, entonces $Gal(f)$ es conjugado en S_n a un subgrupo de G.

Demostración.

1. Si $\exists x \in S_n$ con $(Gal(f))^x \leq G$, tenemos $Gal(f) \leq G^{x^{-1}}$. Como $G = \{g \in S_n \mid g\theta = \theta\}$ y $\forall g^{x^{-1}} \in G^{x^{-1}}$
$$xgx^{-1}(x\theta) = xg\theta = x\theta$$
vemos que $G^{x^{-1}} = \{g \in S_n \mid gx\theta = x\theta\}$ luego $x\theta$ es resolvente invariante para $G^{x^{-1}}$. Además $R(\theta; f) = R(x\theta; f)$ luego cambiando θ por $x\theta$ podemos suponer $Gal(f) \leq G$.
Sea $g \in Gal(f)$, g actúa en E luego se lo podemos aplicar al elemento $ev\theta = \theta(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y obtenemos
$$gev\theta = g(\theta(\alpha_1, ..., \alpha_n)) \stackrel{*}{=} (g\theta)(\alpha_1, ..., \alpha_n) = ev(g\theta) = ev\theta$$
$*$: g permuta las raíces y fija los coeficientes, así se obtiene lo mismo que si permutamos las variables de θ y luego evaluamos.
Es decir, $ev\theta$ pertenece al cuerpo fijo de $Gal(f)$ que es $\mathbb{Q}$.

2. Suponemos ahora que $R(\theta; f)$ tiene una raíz que no es múltiple que esta en $\mathbb{Q}$. Como antes, sin pérdida de generalidad podemos suponer que está raíz es $ev\theta$.
   Sea $g \in Gal(f)$, tenemos $gev\theta = g\theta(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (g\theta)(\alpha_1, ..., \alpha_n) = ev(g\theta)$
   Si $g \notin G$, $gG = uG$ con $1 \neq u \in T$, donde T es el conjunto de representantes de las clases de G en S_n.
   Por tanto, $g\theta = u\theta \neq \theta$ pero $ev\theta = ev(g\theta) = ev(u\theta)$. Las raíces de $R(\theta; f)$ son precisamente los $|T|$ valores $\{ev(t\theta) \mid t \in T\}$. Por lo anterior, la raíz $ev\theta$ aparece 2 veces: como $ev\theta$ y como $ev(u\theta)$.
   Esto no puede ser, pues estamos suponiendo que $ev\theta$ es una raíz que no es múltiple.
   Esto implica que $g\theta = \theta$ luego $g \in G$ y deducimos $Gal(f) \leq G$. □

1.5.1. Ejemplo.

Sea $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \in \mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)$.
Tenemos $Stab_{S_n}(\Delta) = A_n$ que es normal en S_n. Como representantes de las clases de A_n en S_n podemos tomar $\{1, \tau = (12)\}$. Veamos la acción de τ sobre Δ:

$$\tau\Delta = (x_2 - x_1) \cdot \prod_{2<j} (x_2 - x_j) \cdot \prod_{2<j} (x_1 - x_j) \cdot \prod_{2<i<j\leq n} (x_i - x_j) = -\Delta$$

Así, el polinomio resolvente asociado a cualquier f será resultado de evaluar $(x - \Delta)(x - \tau\Delta) = (x - \Delta)(x + \Delta) = x^2 - \Delta^2$ en las raíces de f. Si f no tiene raíces múltiples $\Delta \neq 0$ y este polinomio no puede tener raíces dobles así que se deduce que $Gal(f) \leq A_n$ si y solo si $R(\Delta; f)$ tiene una raíz racional, es decir, si y solo si al evaluar Δ en las raíces de f se obtiene un racional. Notemos que $\Delta = \sqrt{D}$ así que esto es equivalente a que el discriminante de f sea el cuadrado de un racional.
Veamos los cálculos para determinar D en términos de los coeficientes de un polinomio f en casos concretos y que usaremos en los siguientes capítulos:

- Si $f = x^2 + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$:

$$D = \Delta^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = s_1^2 - 4s_2 \overset{evaluando}{\Longrightarrow} D = -a^2 - 4b$$

- Si $f = x^3 + px + q \in \mathbb{Q}[x]$:

$$D = \Delta^2 = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = -4s_2^3 + 27s_3^2 \overset{evaluando}{\Longrightarrow} D = -4p^3 - 27q^2$$

- Si $f = x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s \in \mathbb{Q}[x]$:

$$\begin{aligned} D = \Delta^2 = &(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_1 - x_5)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2 \cdot \\ &\cdot (x_2 - x_5)^2(x_3 - x_4)^2(x_3 - x_5)^2(x_4 - x_5)^2 \end{aligned}$$

  El valor explícito de D evaluado se puede consultar en el anexo en la sección A.1.

Nota. Recordar que $D \in \mathbb{Q}$ una vez evaluado.

Capítulo 2

Resolubilidad por radicales de polinomios de grado dos, tres o cuatro.

2.1. Introducción.

En esta introducción se muestra un esquema del procedimiento que se llevará a cabo para resolver los polinomios por radicales en los casos en los que esto sea posible.
Sea f un polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{Q}$ y fijamos un orden para las raíces $\alpha_1,..,\alpha_n$ en $\mathbb{C}$.
Como se ha explicado, el grupo de Galois de f, $Gal(f)$, actúa sobre las raíces α_i y es isomorfo a un subgrupo de S_n.
Se utiliza a menudo la relación de los coeficientes con las funciones simétricas elementales y las raíces del polinomio. Además, se definen una serie de polinomios en las variables indeterminadas $x_1,...,x_n$ que evaluaremos en las raíces α_i. Se tendrá también en cuenta, la acción de los distintos grupos de Galois sobre ellos. Pondremos también $F=\mathbb{Q}(x_1,...,x_n)$ y $E=\mathbb{Q}(\alpha_1,...,\alpha_n)$.
Algunos de los polinomios que utilizaremos son las resolventes de Lagrange que se definen de la siguiente manera

$$r_0 = x_1+x_2+\cdots+x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \in F$$

$$r_1 = x_1+\xi x_2+\cdots+\xi^{n-1}x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi^{i-1}x_i \in F(\xi)$$

$$\cdots$$

$$r_k = x_1+\xi^k x_2+\cdots+\xi^{k(n-1)}x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi^{k(i-1)}x_i \in F(\xi) \qquad \text{para } k=0,1,...,n-1$$

donde ξ representa una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

Consideraremos los valores obtenidos al elevar a la n-ésima las r_i vistas en el párrafo anterior. A estas últimas, se les llama R_i para $i=1,2,...,n-1$

$$R_i = (r_i)^n \qquad \text{para } i=1,2,...,n-1$$

Evaluando los x_i en las raíces α_i, estos polinomios dan lugar a elementos de $E(\xi)$ que abusando de la notación, denotaremos igual, tratando de dejar claro por el contexto la interpretación en cada caso.
El método que nos permitirá calcular por radicales las raíces de un polinomio de grado ≤ 5 en los casos en los que sea posible consiste en los siguientes pasos:

1. En primer lugar, se calculan y expresan los polinomios R_i en términos de coeficientes de las funciones simétricas y en el caso de grado 5 de cierto polinomio θ cuya evaluación conocemos.

2. Como al evaluar las funciones simétricas se obtienen los coeficientes de f, podremos calcular los polinomios $R_i \in E(\xi)$.

3. A partir de estos valores, se despejan y calculan los $r_i \in E(\xi)$.
4. Por último, se calculan las raíces α_i. Es decir, tendremos

$$r_i = \sqrt[n]{R_i} \text{ para } i > 1 \tag{2.1}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r_k \tag{2.2}$$

$$\alpha_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi^{-(i-1)k} r_k \text{ para } i \geq 2 \tag{2.3}$$

Lema 2.1.1. La suma de las k raíces k-ésimas de la unidad es cero para $k \geq 2$ primo.

Demostración. Las raíces k-ésimas de la unidad son las raíces del polinomio $x^k - 1$, el cual factoriza:

$$x^k - 1 = (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$$

Llamamos $\Phi_k = x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x^2 + x + 1$. Además, las raíces k-ésimas de la unidad son las raíces de Φ_k. Luego, si ξ es una raíz k-primitiva de la unidad, satisface:

$$\xi^{k-1} + \xi^{k-2} + \cdots + \xi + 1 = 0$$

Puesto que las raíces k-ésimas de la unidad son $\{1, \xi, ..., \xi^{k-2}, \xi^{k-1}\}$ se sigue el resultado. □

Hay cierta ambigüedad con la extracción de las raíces n-ésimas de los R_i. En cada caso, veremos que una vez elegida una de las raíces de ellas, digamos R_1, las demás quedan determinadas de una manera única.
En particular estudiaremos la resolubilidad de un polinomio de grado 2, 3 y 4. Los polinomios de grado 2, 3 y 4 son siempre resolubles puesto que el grupo de Galois asociado a estos polinomios es un subgrupo de S_n y S_n es resoluble para todo $n \leq 4$.
Veamos ahora, como se ha dicho, los tres casos distintos. Empezamos con el caso más sencillo de todos ellos, es el caso de un polinomio de grado 2.

2.2. Polinomios de grado 2.

Sea $f = x^2 + ax + b$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Como se ha dicho, S_2 es un grupo resoluble así que el polinomio es resoluble por radicales. Sean α_1, α_2 las dos raíces de f. Se tiene,

$$x^2 + ax + b = f = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2$$

Así, podemos considerar los r_i definidos anteriormente y expresarlos en función de los coeficientes de f,

$$r_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = -a$$

$$r_1 = \alpha_1 + \xi\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$R_1 = (r_1)^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = a^2 - 4b$$

Nota. $\xi = -1$ raíz 2-primitiva de la unidad.

Luego, con la relación obtenida en (2.2) y (2.3) se sigue

$$\alpha_1 = \frac{r_0 + \sqrt{R_1}}{2} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{r_0 - \sqrt{R_1}}{2} = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Así, se obtiene la fórmula estándar que conocemos.

2.3. Polinomios de grado 3.

Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + cx + d$ un polinomio cúbico con coeficientes en $\mathbb{Q}$.
Observar que, realizando el cambio de variable $x = y - a/3$ el polinomio queda

$$g(y) = y^3 + py + q$$

donde $p = \frac{1}{3}(3b - a^2)$ y $q = \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)$.
Por tanto, se considera $g(x) = x^3 + px + q$ polinomio que podemos suponer irreducible con coeficientes en $\mathbb{Q}$.
Aquí, ξ denota una raíz 3-primitiva de la unidad. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ las raíces de g en $\mathbb{C}$ y $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
Se sigue,

$$\begin{aligned} x^3 + px + q =&(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = \\ =&x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}$$

De donde se deduce,

$$0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad p = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 \qquad q = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

2.3.1. Grupo de Galois de un polinomio cúbico irreducible.

Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio cúbico irreducible, entonces se sabe que cada una de las raíces de f genera una extensión de grado 3 sobre $\mathbb{Q}$, luego el grado del cuerpo de escisión sobre $\mathbb{Q}$ es divisible por 3. Ya que por la Proposición 1.3.1 el grupo de Galois es un subgrupo transitivo de S_3 y utilizando la Proposición 1.4.1 nos encontramos con dos posibilidades:

1. El grupo de Galois será $A_3 = C_3$ si y solo si el discriminante del polinomio es un cuadrado. En este caso el cuerpo de escisión de f será $\mathbb{Q}(\alpha_1)$, siendo α_1 una de las raíces de f.

2. El grupo de Galois es S_3 cuando el discriminante de f no es el cuadrado de un elemento de $\mathbb{Q}$. En este caso, el grado sobre $\mathbb{Q}$ del cuerpo de escisión del polinomio f es 6. Este cuerpo es de la siguiente forma $\mathbb{Q}(\alpha_1, \sqrt{D})$ para una raíz α_1 de f y D su discriminante.

Comentario. El grupo S_3 es resoluble con la siguiente cadena

$$1 \trianglelefteq A_3 \trianglelefteq S_3$$

Para encontrar las raíces de g, vamos a considerar el subgrupo A_3 de S_3. Este es el grupo de Galois de la extensión $E/\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, con $D = -4p^3 - 27q^2$ el discrimante de dicho polinomio.
Una resolvente invariante para A_3 es $\beta_1 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$. Como se ha expuesto en el capítulo 1, la ecuación resolvente de β_1 es $X^2 - D$, donde denotamos por $D \in \mathbb{Q}$ el resultado de evaluar el discriminante de x_1, x_2, x_3.
Sin embargo, para obtener una fórmula mejor, se toma como resolvente invariante $\beta_2 = (\xi - \xi^2)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ y se calcula su ecuación resolvente asociada:

$$\begin{aligned} R(\beta_2, ; f) = \prod_{\tau \in S_3/A_3} (X - \tau\beta_2) &= (X - \beta_2)(X + \beta_2) \\ &= X^2 - (\xi - \xi^2)^2(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_1 - x_3)^2 \\ &= X^2 - (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)D \\ &= X^2 - (1 + \xi + \xi^2 - 3)D \\ &= X^2 + 3D \end{aligned}$$

Se logra así la siguiente ecuación resolvente para β_2, $X^2 + 3D$.

Nota. Usando la ecuación resolvente que se acaba de calcular es posible relacionar las raíces α_i con el discriminante de g y, por tanto, con los coeficientes p, q. Primero, observar que

$$(\xi-\xi^2)^2(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)^2=\beta_2^2$$

Tomando la raíz cuadrada en esta última igualdad y evaluando en $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, se obtiene,

$$(\xi-\xi^2)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)=\sqrt{-3D}=\sqrt{-3(-4p^3-27q^2)}=18\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$$

Esta relación resultará de gran utilidad en los próximos cálculos.

Nota. Por otro lado, usando que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$, se puede observar que

$$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_1)=2\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1+\alpha_3^2\alpha_2$$

Luego se sigue la siguiente relación:

$$\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1+\alpha_3^2\alpha_2=-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3=3q$$

A continuación se definen los polinomios $R_i\in E(\xi)$. Notemos que la acción de A_3 fija R_1, R_2 luego $R_1,R_2\in\mathbb{Q}(\sqrt{D},\xi)$.

$$R_1=r_1^3=(\alpha_1+\xi\alpha_2+\xi^2\alpha_3)^3$$
$$R_2=r_2^3=(\alpha_1+\xi^2\alpha_2+\xi\alpha_3)^3$$

Reagrupando las raíces de g en estos polinomios y utilizando las relaciones vistas en las dos notas anteriores y teniendo en cuenta que $\xi^2=-\xi-1$, los valores de R_1 y R_2 se pueden reescribir en función de p, q y $\sqrt{-3D}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
R_1&=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+6\alpha_1\alpha_2\alpha_3+3\xi(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1)+3\xi^2(\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_3^2\alpha_2)\\
&=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3+3(\xi-1)(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1)-3(\xi+2)(\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_3^2\alpha_2)\\
&=3\xi(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)-3(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1)-6(\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_3^2\alpha_2)\\
&=\frac{3}{2}(2\xi+1)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)-\frac{9}{2}(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1+\alpha_3^2\alpha_2)\\
&=\frac{3}{2}(\xi-\xi^2)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)-\frac{9}{2}(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1+\alpha_3^2\alpha_2)\\
&=27\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{27q}{2}
\end{aligned}$$

De manera similar se sigue,

$$R_2=r_2^3=-\frac{27q}{2}-27\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$$

Por tanto, se obtiene

$$r_1=3\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}\qquad\qquad r_2=3\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

Estas dos últimas ecuaciones devuelven las soluciones de nuestro polinomio g. Para ello hay que realizar la extracción de una raíz cúbica. Como se puede observar, existen 3 posibles raíces cúbicas, lo que devolvería 9 posibles expresiones. Pero no es el caso, pues, se cumple $r_1r_2=-3p$, lo cual nos muestra que la raíz cúbica de r_1 determina de manera única r_2.
Por consiguiente, usando (2.2) y (2.3) las raíces del polinomio son:

$$\alpha_1=\frac{r_1+r_2}{3}=\frac{r_1}{3}-\frac{p}{r_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{\xi^{-1}r_1 + \xi^{-2}r_2}{3} = \frac{\xi^2 r_1}{3} - \frac{\xi p}{r_1}$$

$$\alpha_3 = \frac{\xi^{-2}r_1 + \xi^{-4}r_2}{3} = \frac{\xi r_1}{3} - \frac{\xi^2 p}{r_1}$$

Comentario. Esta fórmula es válida siempre que $r_1 \neq 0$, ya que este aparece en el denominador. Así, si $p = 0$, la raíz se elige de forma que r_1 sea distinto de cero. Esto es posible cuando g es irreducible, puesto que $q \neq 0$.

2.3.2. Ejemplos.

Considerar el siguiente polinomio, $x^3 - x + 1$. Se estudian como son las soluciones de dicho polinomio. En este caso, se tiene

$$p = -1 \qquad q = 1$$

El discriminante queda

$$D = -4(-1)^3 - 27(1)^2 = -23$$

el cual no es un cuadrado de un racional, así que el grupo de Galois de este polinomio es S_3.
Sustituyendo ahora en las fórmulas anteriores,

$$r_1 = 3\sqrt[3]{\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^3}{27} + \frac{(1)^2}{4}}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{69}}$$

$$r_2 = 3\sqrt[3]{\frac{-1}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^3}{27} + \frac{(1)^2}{4}}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{69}}$$

se elige r_1 como la raíz cúbica real y puesto que, $r_1 r_2 = 3$ se obtiene que r_2 también es real.
Sustituyendo en las fórmulas vistas en (2.2) y (2.3) para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se tienen así las raíces de dicho polinomio. Se puede ver que hay una raíz real y dos raíces complejas conjugadas.

2.4. Polinomios de grado 4.

Se considera ahora el caso de un polinomio de grado 4. Sea $g(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Q}[x]$.
Al igual que en el caso de grado 3, bajo la sustitución $x = y - a/4$ se obtiene $f(y) = y^4 + py^2 + qy + r$ con $p = \frac{1}{8}(-3a^2 + 8b)$, $q = \frac{1}{8}(a^3 - 4ab + 8c)$ y $r = \frac{1}{126}(-3a^4 + 16a^2b - 64ac + 256d)$.
Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ las raíces de f y $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ el cuerpo de escisión de f.
Vamos a ver que este problema se puede reducir mediante cierto polinomio resolvente al caso de un polinomio de grado 3. Para ello, tomamos $\theta_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$ como resolvente invariante.
Se puede probar que el estabilizador de θ_1 en S_4 es $D_8 =< (1423), (12) >$. Una familia de representantes de las clases de D_8 en S_4 es $\{1, (13), (14)\}$. Determinamos θ_2, θ_3 como sigue:

$$\theta_2 = (14)\theta_1 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$$
$$\theta_3 = (13)\theta_1 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

Nota. $Stab_{S_4}(\theta_2)$ y $Stab_{S_4}(\theta_3)$ son conjugados de D_8. Además, $Stab_{S_4}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \bigcap_i Stab_{S_4}(\theta_i) = V = \{1, (13)(24), (14)(23), (12)(34)\}$.

Además, se puede comprobar que evaluados $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, el polinomio resolvente asociado es:

$$R(\theta_1; f) = (x - \theta_1)(x - \theta_2)(x - \theta_3) = x^3 - 2px^2 + (p^2 - 4r) + q^2$$

Observación. Evaluando se tiene la siguiente relación:

$$(\theta_1 - \theta_2) = -(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)$$
$$(\theta_1 - \theta_3) = -(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)$$
$$(\theta_2 - \theta_3) = -(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)$$

Así se deduce que $\prod_{i<j}(\theta_i - \theta_j)^2$, que es el discriminante de $R(\theta_1; f)$, y $\prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$, que es el discriminante de f, son iguales. Llamaremos D al discriminante de f y $R(\theta_1; f)$.

Buscamos encontrar una relación que nos permita obtener las raíces del polinomio f a partir de las raíces de dicha resolvente. Notemos que utilizando que $(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4) = 0$ y la definición de θ_1, θ_2 y θ_3 como elementos de E, es posible el cálculo de las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ en términos de raíces cuadradas de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ como sigue:

$$\begin{array}{ll} (\alpha_1+\alpha_2) = \sqrt{-\theta_1} & (\alpha_3+\alpha_4) = -\sqrt{-\theta_1} \\ (\alpha_1+\alpha_3) = \sqrt{-\theta_2} & (\alpha_2+\alpha_4) = -\sqrt{-\theta_2} \\ (\alpha_1+\alpha_4) = \sqrt{-\theta_3} & (\alpha_2+\alpha_3) = -\sqrt{-\theta_3} \end{array} \tag{2.4}$$

Nota. La elección de 2 raíces cuadradas determina de manera única la elección de la tercera ya que,

$$\begin{aligned} \sqrt{-\theta_1}\sqrt{-\theta_2}\sqrt{-\theta_3} &= (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_4) = \\ &= \alpha_1^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -q \end{aligned}$$

Por último, observamos que sumando distintas igualdades de (2.4) se obtiene:

$$2\alpha_1 = \sqrt{-\theta_1} + \sqrt{-\theta_2} + \sqrt{-\theta_3}$$
$$2\alpha_2 = \sqrt{-\theta_1} - \sqrt{-\theta_2} - \sqrt{-\theta_3}$$
$$2\alpha_3 = -\sqrt{-\theta_1} + \sqrt{-\theta_2} - \sqrt{-\theta_3}$$
$$2\alpha_4 = -\sqrt{-\theta_1} - \sqrt{-\theta_2} + \sqrt{-\theta_3}$$

Con esta última relación podemos obtener las raíces de un polinomio de grado 4 a partir de las raíces del correspondiente polinomio resolvente asociado de grado 3.

2.4.1. Grupo de Galois de un polinomio de cuarto grado.

Para estudiar los posibles grupos de Galois asociados al polinomio f asumimos que este es irreducible, luego $Gal(f)$ actúa de forma transitiva sobre las raíces de f. Por tanto, consideraremos únicamente los subgrupos transitivos de S_4:

- El grupo alternado A_4 con orden 12 en S_4.
- El grupo diédrico D_8 y sus conjugados, todos ellos con orden 8 en S_4.
- El grupo cíclico C_4 y sus conjugados, todos ellos con orden 4 en S_4.
- $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Sea $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ el cuerpo de escisión de f y $L = \mathbb{Q}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \subseteq E$ el cuerpo de escisión de $R = R(\theta_1; f)$. En el resto de la sección todos los θ_i y D son ya evaluados, es decir, son elementos en E. Es claro que $L \subseteq E$, además $E/\mathbb{Q}$ y $L/\mathbb{Q}$ son dos extensiones normales. Luego por el Teorema 1.3.1 se tiene $Gal(R) \cong Gal(f)/Gal(E/L)$, es decir, $Gal(R)$ es un cociente de $Gal(f)$. Por tanto, si conocemos la acción del grupo de Galois $Gal(f)$ en las raíces de R podemos obtener información de $Gal(f)$.

- Si R es irreducible y el discriminante D es un cuadrado en $\mathbb{Q}$, entonces $Gal(R) = A_3$ y $Gal(f) \subseteq A_4$ (Proposición 1.4.1). Como consecuencia, 3 divide a $|Gal(f)|$. Además f es irreducible, luego 4 divide a $|Gal(f)|$ y la única posibilidad bajo estas condiciones es que $Gal(f) = A_4$.

- Si R es irreducible pero D no es un cuadrado en $\mathbb{Q}$, se tiene $Gal(R) = S_3$ y $Gal(f) \not\subseteq A_4$. Pero, 6 que es el orden de $Gal(R)$ divide a $|Gal(f)|$. La única posibilidad con estas condiciones para $Gal(f)$ es $Gal(f) = S_4$.

- Si R es reducible, debemos destacar dos casos:

  1. Si R tiene 3 raíces en $\mathbb{Q}$, entonces $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{Q}$. Es decir, $Gal(f)$ fija a cada θ_i, luego $Gal(f) \subseteq Stab_{S_4}(\theta_i)$. Por tanto, $Gal(f) = V$.
  2. Si R factoriza como el producto de un factor lineal y de un factor cuadrático podemos asumir $\theta_1 \in \mathbb{Q}$ y, como consecuencia $Gal(f) \subseteq Stab_{S_4}(\theta_1) = D_8$ pero $Gal(f) \not\subseteq V$, pues $Gal(f)$ no fija θ_2 ni θ_3. Se tienen dos posibilidades para $Gal(f)$: $Gal(f) = D_8$ o $Gal(f) = C_4$. Notar que $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ es el cuerpo fijo de los elementos de A_4 en $Gal(f)$. Además, $A_4 \cap D_8 = V$ y $A_4 \cap C_4 = \{1, (13)(24)\}$. Recordar que V es transitivo mientras que el conjunto $\{1, (13)(24)\}$ no lo es. Luego, se tiene que $Gal(f) = D_8$ si y solo si f es irreducible en $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. En caso contrario, se tiene $Gal(f) = C_4$.

Capítulo 3

Polinomios de grado cinco.

En este capítulo se estudia la resolubilidad por radicales de un polinomio de grado cinco. El procedimiento que vamos a seguir es similar al que ya se ha visto en el capítulo anterior. Sin embargo, al contrario que en los casos de grado 2, 3 y 4, se puede ver que existe un inconveniente en este caso. Pues con polinomios de grado ≥ 5, no siempre es posible su resolubilidad, como bien explica el conocido Teorema de la imposibilidad de Abel. La razón es simple, como se ha explicado en el capítulo 1, se necesita que el grupo de Galois del polinomio sea resoluble. Sin embargo, este grupo es un subgrupo de S_n que para $n \geq 5$ no es un grupo resoluble. Así, la posible resolubilidad por radicales dependerá del subgrupo de S_n concreto del que se trate.
Considerar g el polinomio general de grado 5. Al igual que sucede en los casos anteriores, a partir de una traslación se puede asumir que el coeficiente que acompaña a x^4 es 0. Por tanto, se toma $f(x) = x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s$ un polinomio que supondremos irreducible con coeficientes en $\mathbb{Q}$.
De igual manera que antes supondremos que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ son las raíces del polinomio f y $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ es el cuerpo de escisión de f. Se tiene:

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5) =$$

$$= x^5 - s_1x^4 + s_2x^3 - s_3x^2 + s_4x - s_5$$

De donde se deduce la siguiente relación de los coeficientes de f y las funciones simétricas elementales,

$$0 = s_1 \qquad p = s_2 \qquad q = -s_3 \qquad r = s_4 \qquad s = -s_5 \tag{3.1}$$

En primer lugar, vamos a introducir algunos subgrupos de S_5 que serán relevantes a la hora de resolver los polinomios. Puesto que el grupo de Galois de un polinomio irreducible es transitivo, se consideran los grupos transitivos de S_5. De todos los posibles trabajaremos con el representante concreto descrito a continuación.

- Grupo alternado A_5, con orden 60 e índice 2 en S_5.
- Grupo de Frobenius o grupo metacíclico de orden 20, F_{20}. Está generado por $\sigma = (12345)$ y $\tau = (2354)$. Además, es un subgrupo resoluble maximal de S_5. Hay 6 subgrupos de Frobenius de orden 20 en S_5, que coinciden con los conjugados de F_{20}.
- Grupo Diédrico D_{10} generado por $\sigma = (12345)$ y $\tau^2 = (25)(34)$, cuyo orden es 10 e índice 12 en S_5. Hay 6 subgrupos diédricos de orden 10 en S_5.
- Grupo cíclico C_5, con orden 5 e índice 24 en S_5. Generado por $\sigma = (12345)$. Hay 6 subgrupos cíclicos de orden 5 en S_5.

Estos grupos están situados en S_5 en la forma en la que se resume en el siguiente esquema,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & S_5 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A_5 \arrow[dr, dash] & & F_{20} \arrow[dl, dash] \\
 & D_{10} \arrow[d, dash] & \\
 & C_5 &
\end{tikzcd}$$

Como hemos visto en el primer capítulo, se obtiene que f es resoluble si y solo si el grupo de Galois de f es resoluble. En este caso, como $Gal(f) \leq S_5$ esto es equivalente a que esté contenido en algún conjugado de F_{20}.

Observación.

1. $|F_{20} : S_5| = 6$.
2. Una familia de representantes de las seis clases de F_{20} en S_5 es: $T = \{\tau_1 = 1, \tau_2 = (123), \tau_3 = (132), \tau_4 = (12), \tau_5 = (23), \tau_6 = (13)\}$

Definimos ahora el siguiente elemento en las variables indeterminadas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\theta_1 = \theta = x_1^2x_2x_5 + x_1^2x_3x_4 + x_2^2x_1x_3 + x_2^2x_4x_5 + x_3^2x_1x_5 + x_3^2x_2x_4 + x_4^2x_1x_2 + x_4^2x_3x_5 + x_5^2x_1x_4 + x_5^2x_2x_3$$

Nota. Observar que σ y τ fijan a θ. De hecho, el estabilizador de θ es F_{20}.

Tomaremos θ como resolvente invariante para F_{20} y calculamos en S_5 su polinomio resolvente asociado, que será de grado 6.
Consideramos la acción de los elementos de la familia T de representantes de F_{20} en S_5 sobre θ. Utilizando las ecuaciones vistas en (3.1) y teniendo en cuenta la sección 1.5 se puede probar que la ecuación resolvente queda definida de la siguiente manera. Aquí, θ_i son los valores evaluados.

$$\begin{aligned}
R(\theta; f) = \prod_{\tau \in S_5/F_{20}} (x - \tau\theta) &= (x-\tau_1\theta)(x-\tau_2\theta)(x-\tau_3\theta)(x-\tau_4\theta)(x-\tau_5\theta)(x-\tau_6\theta) = \\
&= (x-\theta)(x-\theta_2)(x-\theta_3)(x-\theta_4)(x-\theta_5)(x-\theta_6) = \\
&= \frac{1}{4}\Big[2x^3 + 8x^2r + (-6p^2r + 2pq^2 - 50qs + 24r^2)x - 15p^2qs - 16p^2r^2 + 13pq^2r + 125ps^2 - 2q^4 \\
&\quad -200qrs + 64r^3\Big]^2 - \left(x + 3r + \frac{p}{4}\right)(108p^5s^2 - 72p^4qrs + 16p^4r^3 + 16p^3q^3s - 4p^3q^2r^2 - 900p^3rs^2 \\
&\quad +825p^2q^2s^2 + 560p^2qr^2s - 128p^2r^4 - 630pq^3rs + 144pq^2r^3 - 3750pqs^3 + 2000pr^2s^2 + 108q^5s \\
&\quad -27q^4r^2 + 2250q^2rs^2 - 1600qr^3s + 256r^5 + 3125s^4)
\end{aligned}$$

Observación. Si f es irreducible, $Gal(f) \leq S_5$ actúa de forma transitiva en las raíces y esto implica que 5 divide al orden de $Gal(f)$ ya que se puede comprobar que en otro caso $Gal(f)$ estaría contenido en el estabilizador de una cifra (que es isomorfo a S_4). Por tanto, algún conjugado de $\sigma = (12345)$ está contenido en $Gal(f)$ y permutando las raíces si es necesario podemos suponer $\sigma \in Gal(f)$. Además, si $Gal(f)$ es resoluble, se deduce por la proposición 1.1.5 que $Gal(f)$ está contenido en el normalizador de algún 5-subgrupo de Sylow de S_5.

Notación. Trabajamos sobre los cuerpos $k = \mathbb{Q}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, $K = k(\theta)$ y $F = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, donde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 son variables indeterminadas y s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 son las funciones simétricas elementales en x_i.

Teorema 3.0.1. El polinomio irreducible $f(x) = x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s \in \mathbb{Q}[X]$ es resoluble por radicales si y solo si la ecuación resolvente $R(\theta; f)$ tiene una raíz racional. En este caso, el polinomio resolvente $R(\theta; f)$ facoriza como el producto de un polinomio lineal y un polinomio irreducible de grado 5.

Demostración. Recordar que $f(x)$ es resoluble $\Longleftrightarrow Gal(f) \subseteq (F_{20})^t$ para $t \in T = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Por otro lado, se tiene que $K(\theta_1, ..., \theta_6) = F$, ya que $F/K(\theta_1, ..., \theta_6)$ es de Galois y si $g \in S_5$ fija a todos los θ_i tendríamos $g \in \bigcap_i Stab(\theta_i) = \bigcap_{t \in T} (F_{20})^t = 1$, luego $Gal(F/K(\theta_1, ..., \theta_6)) = 1$ y se deduce que $F = K(\theta_1, ..., \theta_6)$, luego evaluando se deduce también que $E = \mathbb{Q}(\theta_1, ..., \theta_6)$. Además, si $\sigma = (12345)$, tenemos

$$\theta_2 \xrightarrow{\sigma} \theta_6 \xrightarrow{\sigma} \theta_3 \xrightarrow{\sigma} \theta_4 \xrightarrow{\sigma} \theta_5 \xrightarrow{\sigma} \theta_2$$

De aquí se deduce $\theta_i \notin \mathbb{Q} = Fix_E(Gal(f))$ con $2 \leq i \leq 6$ y $R(\theta; f)$ puede tener como máximo una única raíz racional que además no puede ser múltiple. Por tanto en este caso, usando el Teorema 1.5.1 se sigue: El polinomio $f(x)$ es resoluble $\Longleftrightarrow Gal(f)$ está contenido en algún conjugado de $F_{20} \Longleftrightarrow R(\theta; f)$ tiene una raíz racional.

Además, si eso sucede $R(\theta; f) = (x - \theta) \cdot q$ con $q \in \mathbb{Q}[x]$ y $q = \prod_{i=2}^{6} (x - \theta_i)$, el cual es irreducible ya que $Gal(f)$ actúa transitivamente en sus raíces. $\square$

Con este último teorema se consigue un nuevo criterio para resolver polinomios quínticos por radicales. A partir de ahora, estudiamos la resolubilidad por radicales del polinomio $f(x)$ asumiendo que este es resoluble, es decir, asumiendo que el grupo de Galois de f está contenido en algún conjugado de F_{20} y $R(\theta; f)$ tiene una raíz racional. Además, si F y K son como antes $K = Fix_F(F_{20})$, luego $Gal(F/K) = F_{20}$. Tomaremos θ como dicha raíz racional.

Teorema 3.0.2. El grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q}(\xi)$ el cuerpo ciclotómico de la raíz n-ésima de la unidad es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Este isomorfismo queda dado explícitamente por

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times & \longrightarrow & Gal(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}) \\ a \, (\text{mod n}) & \longmapsto & \sigma_a \end{array}$$

σ_a es el automorfismo definido por $\sigma_a(\xi) = \xi^a$

Notación. Denotamos a partir de ahora $F_{20} =< \sigma, \tau >$, donde $\sigma = (12345)$ y $\tau = (2354)$.
Definimos también la siguiente permutación generada por $\omega : (\xi \longmapsto \xi^3)$ que actúa únicamente sobre las raíces 5-primitivas de la unidad así $\xi \mapsto \xi^3 \mapsto \xi^4 \mapsto \xi^2 \mapsto \xi$. Es decir, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times =< \omega >$.

Comentario. El método que vamos a desarrollar es igual de válido para cuerpos cuya característica sea distinta de 2 y 5.

Puesto que F es el cuerpo de escisión del polinomio general de grado 5 sobre k y también sobre K, la extensión de cuerpos F/K es una extensión normal. Igualmente, F/K es extensión de Galois. Ahora, si ξ es una raíz 5-primitiva de la unidad podemos formar, $K \subseteq F \subseteq F(\xi)$. La extensión $F(\xi)/K$ también es de Galois ya que $F(\xi)$ es el cuerpo de escisión sobre K de $(x^5 - 1)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$. Se buscan ahora los diferentes grupos de Galois de las distintas extensiones de cuerpos que nos interesan. Primeramente, se ve que el grupo de Galois correspondiente a la extensión $F(\xi)/K$ es $F_{20} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$. Para ello, consideramos el siguiente esquema con las extensiones que se utilizarán:

$$\begin{tikzcd} & F(\xi) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ K(\xi) \arrow[dr, dash] & & F \arrow[dl, dash] \\ & M = K(\xi) \cap F \arrow[d, dash] & \\ & K & \end{tikzcd}$$

Notación. Se denota, $A = Gal(F(\xi)/F)$, $\Gamma = Gal(F(\xi)/K)$, $G = Gal(F/K) = F_{20}$.

Sea $M = K(\xi) \cap F$. Veamos en primer lugar que $M = K$.
Recordar que $F = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, luego no hay ningún elemento de F que sea raíz de $x^5 - 1$, es decir, $\xi \notin F$, luego M está contenido estrictamente en $K(\xi)$.
La extensión $K(\xi)/K$ tiene grado ≤ 4 y $K \subseteq M \subset K(\xi)$. Hay dos posibilidades para M: $M = K$ o bien $[M : K] = 2$ y en este último caso se deduce que $[K(\xi) : K] = 4$ y $Gal(K(\xi)/K) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} =< \omega >$ por lo que solo hay un subgrupo propio, $< \omega^2 >= \{1, \omega^2\}$. Por la correspondencia de Galois, entre K y $K(\xi)$ hay solo un subcuerpo propio.
Si llamamos $a = \xi + \xi^{-1}$ tenemos: $a^2 = \xi^2 + \xi^{-2} + 2$ luego $a^2 + a - 1 = \xi^2 + \xi^{-2} + 2 + \xi + \xi^{-1} - 1 = 0$. Es decir, a es raíz de $x^2 + x - 1 \in K[x]$. Este polinomio no tiene raíces en F ya que si $\exists\, f,\, g \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ sin factores comunes con $\left(\frac{f}{g}\right)^2 + \frac{f}{g} - 1 = 0$, tendríamos $f^2 + fg + g^2 = 0$ y si $p \mid g$ es un factor irreducible se deduce $p \mid f$, lo que es una contradicción. Esto implica que g es una unidad, es decir, $g \in \mathbb{Q}$ y podemos suponer $g = 1$.
Tendríamos $f^2 + f - 1 = 0$ y por cuestión de grados la única posiblidad es que f sea constante, es decir, $f \in \mathbb{Q}$. Pero el polinomio $x^2 + x - 1$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}$ luego esto es imposible.
Así, $x^2 + x - 1$ es irreducible en F y, por tanto, en K. Se deduce que $[K(a) : K] = 2$ y como

$$K \subseteq M \subset K(\xi) \qquad\qquad K \subset K(a) \subset K(\xi)$$

y hemos visto que hay una sola extensión intermedia, si $K(a) = M$ entonces $a \in K(a) = M = K(\xi) \cap F \subseteq F$. Pero esto es imposible ya que $x^2 + x - 1$ no tiene raíces en F. Por tanto, la única posibilidad es $M = K(\xi) \cap F = K$.

Para comprobar que en efecto el grupo de Galois correspondiente a la extensión $F(\xi)/K$ es $F_{20} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times}$ se utiliza la Proposición 1.1.3, luego se debe ver que se satisfacen las suposiciones de dicha proposición, es decir, se necesita $F_{20} \trianglelefteq \Gamma$ y $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} \trianglelefteq \Gamma$.

- $F_{20} \trianglelefteq \Gamma$.
  Aplicando la Proposición 1.3.2 con $K = K$, $F = F$, $L = K(\xi)$, $E = F(\xi)$ y $M = K$, puesto que F/K es de Galois, se obtiene $G \cong Gal(F(\xi)/K(\xi))$.
  Por otro lado, aplicando el Teorema 1.3.1, se sigue que $Gal(F(\xi)/K(\xi)) \trianglelefteq \Gamma$, ya que las extensiones $K(\xi)/K$ y $F(\xi)/K$ son ambas normales.

- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} \trianglelefteq \Gamma$.
  Razonando de la misma manera que antes, a partir de la Proposición 1.3.2, se obtiene $A \cong Gal(K(\xi)/K)$. De nuevo, a partir del Teorema 1.3.1, $A \trianglelefteq \Gamma$ pues F/K es una extensión normal y $F(\xi)/K$ también lo es.

Por otra parte, $F_{20} \cap (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} = 1$. Además, $F_{20} \cdot (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} = \Gamma$, pues $F_{20} \cdot (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} \leq \Gamma$ ya que como hemos visto ambos son subgrupos normales en Γ, y por consiguiente, conmutan. Para confirmar que efectivamente $F_{20} \cdot (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} = \Gamma$, se razona con el orden de ambos grupos.
Primero, notar que $20 = |F_{20}| = |Gal(F/K)| = [F : K]$ y $[F(\xi) : F] \leq 4$, ya que el polinomio mínimo de $F(\xi)$ sobre F es de grado menor o igual que 4. Luego, se deduce $[F(\xi) : K] \leq 80$.
Por otro lado, se obtiene $|F_{20} \cdot (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times}| = 80$. En consecuencia, $|\Gamma| = 80$ y $F_{20} \cdot (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} = \Gamma$.
Juntando todos los razonamientos anteriores, se sigue que $\Gamma \cong F_{20} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times}$.

Nota. El discriminante D de un polinomio de grado 5 que es resoluble por radicales, es siempre un número racional positivo. Esto se puede comprobar de la siguiente forma. Primero, notar que, para $\Delta = \sqrt{D}$ se tiene

$$\tau(\Delta) = -\Delta \qquad \tau^2(\Delta) = \Delta \qquad \sigma(\Delta) = \Delta$$

Además, Δ^2 queda fijo por todos ellos, luego $\Delta^2 \in K$. Es decir, $K \subset K(\Delta)$ y $[K(\Delta) : K] = 2$.
Ponemos $L = Fix_F(\sigma)$, así $Gal(F/L) =< \sigma > \trianglelefteq F_{20}$, luego L/K es de Galois y $Gal(L/K) =$

$Gal(F/K)/Gal(F/L) = F_{20}/ <\sigma> = <\tau>$. Es decir, $[L:K] = 4$ y $K(\Delta) \subset L$ con $[L:K(\Delta)] = 2$.
En lo que sigue, consideramos los valores Δ y D evaluados, es decir, $D \in \mathbb{Q}$ y $\Delta \in E$.
Puesto que el polinomio es resoluble, los posibles grupos de Galois de este son: F_{20}, el grupo de Frobenius de orden 20, D_{10}, el grupo diédrico de orden 10 o C_5, el grupo cíclido de orden 5.
En caso de que el grupo de Galois sea D_{10} o C_5, ambos están contenidos en A_5. Luego, Δ queda fijo, es decir, pertenece al cuerpo fijo de ambos grupos, que es $\mathbb{Q}$. Por tanto, $D = \Delta^2 > 0$.
Por el contrario, si el grupo de Galois es $F_{20} \not\subset A_5$, veamos que $D > 0$ de manera esquemática.
El cuerpo $L_1 = Fix_E(\sigma)$ cumple $L_1 = \mathbb{Q}(\Delta)(\sqrt{\gamma})$ para algún $\gamma \in \mathbb{Q}(\Delta)$ (Teorema del elemento primitivo).
Es decir, $(\sqrt{\gamma})^2 - a = b\Delta$ con $a, b \in \mathbb{Q} \Longrightarrow ((\sqrt{\gamma})^2 - a)^2 = b^2\Delta^2$.
Notar que, entonces $x^4 - 2ax^2 + a^2 - b^2\Delta^2$ es el polinomio mínimo de $\sqrt{\gamma}$ sobre $\mathbb{Q}$. Si resolvemos el polinomio, vemos que las raíces son $\pm\varepsilon = \pm\sqrt{a+b\Delta}$ y $\pm\beta = \pm\sqrt{a-b\Delta}$.
Además, $\varepsilon\beta = \sqrt{a^2 - b^2\Delta^2} \notin \mathbb{Q}$, pues se puede comprobar que si se asume $\varepsilon\beta \in \mathbb{Q}$ no puede haber ningún elemento de orden 4 en el grupo de Galois de $L_1/\mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción.
De aquí, se sigue $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon\beta)$, pero no se tiene la igualdad. Asimismo, $[\mathbb{Q}(\varepsilon\beta) : \mathbb{Q}] = 2$.
Se sabe que $<\tau>$ tiene un único subgrupo de índice 2, luego la correspondencia de Galois implica que $\mathbb{Q}(\Delta)$ es el único cuerpo intermedio de índice 2 de la extensión $\mathbb{Q} \subseteq L_1$.
Por tanto, $\mathbb{Q}(\varepsilon\beta) = \mathbb{Q}(\Delta)$. A partir de esto último se puede deducir que $\varepsilon\beta = c\Delta$ con $c \in \mathbb{Q}$, luego $a^2 - b^2\Delta^2 = c^2\Delta^2$ y $D = \Delta^2 = \frac{a^2}{c^2+b^2} > 0$.

Nota. Se muestra ahora el diagrama con las distintas extensiones de cuerpos y los distintos grupos de Galois que consideraremos.

$$\begin{tikzcd}
 & F(\xi) \arrow[dl, dash, "<\omega>"'] \arrow[dr, dash] & \\
F \arrow[d, dash, "<\sigma>"'] & & L(\xi) \arrow[dll, dash] \\
L \arrow[d, dash, "<\tau^2>"'] \arrow[dd, dash, bend left, "<\tau>"] & & \\
K(\Delta) \arrow[d, dash] & & \\
K & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & F_{20}\times(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times = Gal(F(\xi)/K) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
F_{20} = <\sigma,\tau> \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times = Gal(F(\xi)/F) \\
<\tau> \arrow[d, dash] & <\sigma> & \\
<\tau^2> & &
\end{tikzcd}$$

Nota. $Gal(F(\xi)/K(\xi)) = F_{20} = Gal(F/K)$

Vamos a considerar las resolventes de Lagrange, pero vistas como elementos de F,

$$\begin{aligned}
r_0 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\
r_1 &= x_1 + \xi x_2 + \xi^2 x_3 + \xi^3 x_4 + \xi^4 x_5 \\
r_2 &= x_1 + \xi^2 x_2 + \xi^4 x_3 + \xi x_4 + \xi^3 x_5 \\
r_3 &= x_1 + \xi^3 x_2 + \xi x_3 + \xi^4 x_4 + \xi^2 x_5 \\
r_4 &= x_1 + \xi^4 x_2 + \xi^3 x_3 + \xi^2 x_4 + \xi x_5
\end{aligned}$$

Se necesita elevar a la quinta todas las resolventes y para ello, se define para una z indeterminada,

$$(x_1, z) = x_1 + x_2 z + x_3 z^2 + x_4 z^3 + x_5 z^4$$

Se eleva a la quinta y agrupando todos los términos que acompañan a las distintas potencias de z, teniendo en cuenta que los exponentes de dichas potencias se calculan módulo 5, se obtienen los siguientes coeficientes l_i.

$$(x_1,z)^5 = (x_1 + x_2z + x_3z^2 + x_4z^3 + x_5z^4)^5 = l_0 + l_1z + l_2z^2 + l_3z^3 + l_4z^4$$

En caso de tomar $z = \xi$, se sigue la siguiente relación,

$$R_1 = (r_1)^5 = l_0 + l_1\xi + l_2\xi^2 + l_3\xi^3 + l_4\xi^4$$

De manera similar, se obtiene

$$R_2 = r_2^5 = l_0 + \xi l_3 + \xi^2 l_1 + \xi^3 l_4 + \xi^4 l_2$$

$$R_3 = r_3^5 = l_0 + \xi l_2 + \xi^2 l_4 + \xi^3 l_1 + \xi^4 l_3$$

$$R_4 = r_4^5 = l_0 + \xi l_4 + \xi^2 l_3 + \xi^3 l_2 + \xi^4 l_1$$

A continuación se va a estudiar las acciones de los grupos de Galois sobre los diferentes elementos. Para ello, recordar que tomamos $\sigma = (12345)$ $\tau = (2354)$ y $\omega : (\xi \mapsto \xi^3)$.

$$\sigma r_1 = \xi^4 r_1 \qquad \sigma r_2 = \xi^3 r_2 \qquad \sigma r_3 = \xi^2 r_3 \qquad \sigma r_4 = \xi r_4$$

$$\tau r_1 = r_3 \qquad \tau r_2 = r_1 \qquad \tau r_3 = r_4 \qquad \tau r_4 = r_2$$

$$\omega r_1 = r_3 \qquad \omega r_2 = r_1 \qquad \omega r_3 = r_4 \qquad \omega r_4 = r_2$$

Observar que l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 están contenidos en F. Además, la permutación σ los fija mientras que τ actúa sobre ellos y únicamente fija l_0,

$$\tau l_0 = l_0 \qquad \tau l_1 = l_2 \qquad \tau l_2 = l_4 \qquad \tau l_3 = l_1 \qquad \tau l_4 = l_3 \tag{3.2}$$

De aquí deducimos que $l_0 \in K$ y l_1, l_2, l_3, l_4 están en el cuerpo fijo de $< \sigma >$ que es L. Sea P el polinomio mínimo de l_1 sobre K. Entonces, $grado(P) = [K(l_1) : K] \mid [L : K] = 4$. Además, debido a (3.2) l_2, l_3, l_4 también son raíces de P. Luego $grado(P) = 4$ y se deduce $K(l_1) = L$. Como $K(l_1) \subseteq K(l_1, l_2, l_3, l_4) \subseteq L$, los tres cuerpos son iguales.
Recordar que $K \subseteq K(\Delta) \subseteq L$, donde Δ es la raíz cuadrada del discriminante D. Además, como hemos visto más arriba, el único cuerpo intermedio entre L y K es $K(\Delta)$. Puesto que $K(\Delta)$ es el cuerpo fijo de $< \tau^2 >$, el polinomio P factoriza como el producto de dos conjugados cuadráticos en $K(\Delta)$ como sigue:

$$\left[x^2 + (T_1 + T_2\Delta)x + (T_3 + T_4\Delta)\right] \left[x^2 + (T_1 - T_2\Delta)x + (T_3 - T_4\Delta)\right] \tag{3.3}$$

con $T_1, T_2, T_3, T_4 \in K$. Las raíces de estos dos factores son $\{l_1, \tau^2 l_1 = l_4\}$ y $\{l_2, \tau^2 l_2 = l_3\}$ respectivamente. Fijamos el orden de los factores y determinamos los coeficientes T_i explícitamente asumiendo que las raíces del primer factor de la expresión son $\{l_1, l_4\}$ y, por tanto, las del segundo factor son, $\{l_2, l_3\}$. Entonces,

$$l_1 + l_4 = -T_1 - T_2\Delta \qquad l_1 l_4 = T_3 + T_4\Delta$$

$$l_2 + l_3 = -T_1 + T_2\Delta \qquad l_2 l_3 = T_3 - T_4\Delta$$

La idea ahora, es expresar cada T_i como combinación lineal de $1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5$. Esto es posible ya que $K = k(\theta)$. Se introduce el método que se utiliza para este fin. Este método resultará de gran utilidad también más adelante para expresar otros coeficientes. Cabe destacar que todos ellos son polinomios en F.
La idea principal de este método es tomar el polinomio Q que se quiere expresar como combinación lineal y se define la siguiente relación:

$$Q = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5$$

Desde aquí, se aplican los automorfismos $<(123)>$ y $<(12)>$ a ambos lados de la igualdad y se obtiene el siguiente sistema con coeficientes en F.

$$\begin{aligned}
Q &= a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5 \\
(123)Q &= a_0 + a_1\theta_2 + a_2\theta_2^2 + a_3\theta_2^3 + a_4\theta_2^4 + a_5\theta_2^5 \\
(132)Q &= a_0 + a_1\theta_3 + a_2\theta_3^2 + a_3\theta_3^3 + a_4\theta_3^4 + a_5\theta_3^5 \\
(12)Q &= a_0 + a_1\theta_4 + a_2\theta_4^2 + a_3\theta_4^3 + a_4\theta_4^4 + a_5\theta_4^5 \\
(23)Q &= a_0 + a_1\theta_5 + a_2\theta_5^2 + a_3\theta_5^3 + a_4\theta_5^4 + a_5\theta_5^5 \\
(13)Q &= a_0 + a_1\theta_6 + a_2\theta_6^2 + a_3\theta_6^3 + a_4\theta_6^4 + a_5\theta_6^5
\end{aligned}$$

Basta resolver para a_i dicho sistema con la regla de Cramer.

Nota. Observar que la matriz asociada al sistema es la matriz de Vandermonde, cuyo determinante en este caso es $-\prod_{i<j}(\theta_i - \theta_j)$. Además, el determinante se puede expresar:

$$-\prod_{i<j}(\theta_i - \theta_j) = \Delta^3 H$$

donde H es un polinomio simétrico. Para comprobarlo, observar que:

$$(\theta_1 - \theta_4) = (x_1 - x_2)(x_3 - x_5)(x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_5 - x_1x_2 - x_3x_4 - x_4x_5)$$

Haciendo actuar elementos de S_5 en esta expresión se puede ver que en cada uno de los 15 términos $\theta_i - \theta_j$ hay 2 factores $x_{i_1} - x_{i_2}$ de forma que aparecen 30 en total y cada uno de ellos 3 veces. Por tanto $\Delta^3 \mid \prod_{i<j}(\theta_i - \theta_j)$, es decir, $\prod_{i<j}(\theta_i - \theta_j) = \Delta^3 H$ para un polinomio $H \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_5]$. Además, H es simétrico puesto que $\forall g \in S_5$:

$$g(\Delta) = \begin{cases} -\Delta & si \quad g \notin A_5 \\ \Delta & si \quad g \in A_5 \end{cases} \qquad g\left(\prod_{i<j}(\theta_i - \theta_j)\right) = \begin{cases} -\prod_{i<j}(\theta_i - \theta_j) & si \quad g \notin A_5 \\ \prod_{i<j}(\theta_i - \theta_j) & si \quad g \in A_5 \end{cases}$$

Luego, $g(H) = H \ \forall g \in S_5$. Así, $H \in k$ (que es el cuerpo fijo de la extensión F/k), lo que significa que H es simétrico.

Usando el método explicado en el párrafo anterior se calculan los siguientes coeficientes que ayudarán a obtener así las raíces del polinomio.

$$\begin{aligned}
l_0 &= \beta_0 + \beta_1\theta + \beta_2\theta^2 + \beta_3\theta^3 + \beta_4\theta^4 + \beta_5\theta^5 \\
T_1 &= (b_{10} + b_{11}\theta + b_{12}\theta^2 + b_{13}\theta^3 + b_{14}\theta^4 + b_{15}\theta^5)/(2H) \\
T_2 &= (b_{20} + b_{21}\theta + b_{22}\theta^2 + b_{23}\theta^3 + b_{24}\theta^4 + b_{25}\theta^5)/(2DH) \\
T_3 &= (b_{30} + b_{31}\theta + b_{32}\theta^2 + b_{33}\theta^3 + b_{34}\theta^4 + b_{35}\theta^5)/(2H) \\
T_4 &= (b_{40} + b_{41}\theta + b_{42}\theta^2 + b_{43}\theta^3 + b_{44}\theta^4 + b_{45}\theta^5)/(2DH)
\end{aligned}$$

Tanto los b_{ij} como D, H están en k luego se pueden expresar en términos de los polinomios simétricos y por tanto, al evaluar, en términos de los coeficientes del polinomio f. En el anexo A se pueden encontrar estas expresiones explícitas.
A partir de los T_i se obtienen los factores de (3.3), y posteriormente sus raíces, es decir, se obtienen así los valores explícitos evaluados de los coeficientes l_i de las resolventes R_i.

Nota. $r_i \in F(\xi)$, $R_i \in L(\xi)$, $l_i \in L$, $T_i \in K$.
Así, tenemos una serie de elementos, situados cada vez más abajo en la cadena de subcuerpos de la página 21, de forma que $T_i \in K$, luego al evaluar se pueden calcular en términos de θ y los coeficientes del polinomio (que corresponden con las funciones simétricas). Además, cada elemento de la serie se puede calcular en función del siguiente y las raíces de f se pueden calcular a partir de los r_i.

Es importante dar con las raíces l_i en el orden correcto. Este problema se resuelve introduciendo una condición de orden. Se observa que $(l_1-l_4)(l_2-l_3)=\phi\Delta$ para algún elemento $\phi\in K$ ya que $(l_1-l_4)(l_2-l_3)$ está en $K(\Delta)$ (porque queda fijo por σ y cambia de signo al aplicar, por ejemplo, (12)). Se utiliza de nuevo el mismo método para calcular explícitamente ϕ como combinación lineal de $1,\theta,\theta^2,\theta^3,\theta^4,\theta^5$, y queda,

$$\phi=(b_0+b_1\theta+b_2\theta^2+b_3\theta^3+b_4\theta^4+b_5\theta^5)/(DH)$$

Para un polinomio quíntico cualquiera, se elige Δ', una raíz cuadrada cualquiera del discriminante del polinomio. Se definen las raíces del primer factor de (3.3) como l_1' y l_4'. Mientras que las raíces del segundo factor, se definen como l_2' y l_3', ordenadas de manera que se satisface $(l_1'-l_4')(l_2'-l_3')=\phi\Delta'$.
Si la elección de Δ' coincide con Δ, entonces la elección de l_1',l_2',l_3',l_4' corresponde con l_1,l_2,l_3,l_4 o l_4,l_3,l_2,l_1. Sin embargo, si la elección coincide con $-\Delta$, entonces puede ser l_2,l_4,l_3,l_1 o l_3,l_1,l_4,l_2.
Las resolventes que corresponden a cada una de las opciones anteriores, se obtienen simplemente al hacer una permutación de todas ellas, es decir, serían (R_1,R_2,R_3,R_4), (R_4,R_3,R_2,R_1), (R_3,R_1,R_4,R_2) o (R_2,R_4,R_1,R_3) respectivamente. Como resultado, se obtiene una permutación en las x_i.

Una vez resuelto el problema del orden de los coeficientes l_i, falta tener en cuenta la elección de las raíces quintas de los R_i para conseguir las funciones r_i. Para ello, se va a probar que dado $R_1=r_1^5$ cada una de las 5 posibilidades que hay para r_1 determinan de manera única la elección de r_2,r_3,r_4, es decir, define de manera única las cinco raíces del polinomio.

Considerar las expresiones r_1r_4 y r_2r_3. Estas expresiones quedan fijas con σ, $\tau\omega^{-1}$ y τ^2. Es decir r_1r_4, r_2r_3 pertenecen al cuerpo fijado por el subgrupo generado por estos 3 elementos. Veamos que dicho cuerpo fijo coincide con $K(\Delta\sqrt{5})$. Sea H el subgrupo de $Gal(F(\xi)/K)$ generado por $\sigma,\tau^2,\tau\omega^{-1}$. Recordar que $Gal(F(\xi)/K)=F_{20}\times(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times}$ y $|Gal(F(\xi)/K)|=80$.

Nota. Notemos que $\sqrt{5}\in K(\xi)$ ya que $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\xi+\xi^{-1}$.

Antes que nada, se demuestra que $H=<\sigma><\tau^2><\tau\omega^{-1}>$. Se aplica para ello, la Proposición 1.1.2 y Proposición 1.1.1

- Se tiene $<\sigma>\trianglelefteq F_{20}$ con orden 5 y $<\tau^2>\leq F_{20}$ con orden 2. Luego, $<\sigma><\tau^2>\leq F_{20}$. Puesto que tienen orden coprimo $|<\sigma><\tau^2>|=10$, i.e, $<\sigma><\tau^2>$ tiene índice 2 en F_{20}, por tanto, $<\sigma><\tau^2>\trianglelefteq F_{20}$. Y de aquí se deduce, $F_{20}\subseteq N_G(<\sigma><\tau^2>)$.
- $\omega\in Gal(F(\xi)/K)$ y satisface $\omega\in Z(Gal(F(\xi)/K))$. Luego, $\omega\in N_G(<\sigma><\tau^2>)$.

Como consecuencia de estos dos puntos, $<\sigma><\tau^2>\trianglelefteq Gal(F(\xi)/K)$. Por tanto, $<\sigma><\tau^2><\tau\omega^{-1}>$ es subgrupo, luego es precisamente H.
Notar que $\tau\omega^{-1}$ tiene orden 4, pues τ y ω conmutan. Además,
$<\tau\omega^{-1}>\cap<\sigma><\tau^2>=1$. En consecuencia, $|H|=40$. Es decir, $[F(\xi):Fix_{F(\xi)}(H)]=40$, lo que implica, $[Fix_{F(\xi)}(H):K]=2$.
Por otra parte, es obvio que $[K(\Delta\sqrt{5}):K]=2$. Además, $K(\Delta\sqrt{5})$ está contenido en el cuerpo fijo de H. Puesto que, es claro que σ y τ^2 lo fijan y además:

$$\tau\omega^{-1}(\Delta\sqrt{5})=\tau(\Delta)\omega^{-1}(\sqrt{5})=(-\Delta)(-\sqrt{5})=\Delta\sqrt{5}$$

Esto implica que $K(\Delta\sqrt{5})\subseteq Fix_{F(\xi)}(H)$, y razonando con los grados de las distintas extensiones, obtenemos $Fix_{F(\xi)}(H)=K(\Delta\sqrt{5})$. Como r_1r_4, r_2r_3 son elementos del cuerpo fijo, se deduce que están en $K(\Delta\sqrt{5})$.

Lema 3.0.1. Los elementos r_1,r_2,r_3,r_4 cumplen que $r_1r_4,r_2r_3\in K(\Delta\sqrt{5})$ y

$$\begin{aligned} r_1r_2^2+r_4r_3^2&=u+v\sqrt{5}\Delta\\ r_3r_1^2+r_2r_4^2&=u-v\sqrt{5}\Delta \end{aligned} \tag{3.4}$$

Además, dado r_1 estas condiciones determinan r_2,r_3,r_4 de forma única.

Demostración. Veamos primero que cumplen las condiciones. Ya se ha probado que $r_1r_4, r_2r_3 \in K(\Delta\sqrt{5})$. Además, los r_i están definidos de manera única, a excepción de la multiplicación por una raíz quinta de la unidad. Esto implica directamente que r_4 queda determinado por r_1 y r_3 por r_2, respectivamente ya que $\xi \notin K(\Delta\sqrt{5})$.
Considerar ahora $r_1r_2^2$, $r_3r_1^2$, $r_4r_3^2$, $r_2r_4^2$.
Todos ellos son invariantes bajo la acción de σ. Por el contrario, τ y ω generan una permutación cíclica sobre ellos. De aquí se sigue que son las raíces de un polinomio de grado 4 cíclico sobre K. En particular, este factoriza como producto de dos factores sobre el cuerpo $K(\Delta\sqrt{5}\,)$. Puesto que las raíces de ambos factores son conjugadas se obtiene la relación vista en (3.4).
Con esto último y puesto que todos los r_i están únicamente definidos a excepción de la multiplicación por cualquier raíz quinta de la unidad, veamos que r_1 determina de manera única a r_2.
En caso de sustituir r_2 por μr_2, donde μ es una raíz quinta no trivial de la unidad, se reemplaza de la misma forma r_3 por $\bar{\mu} r_3$ ($\bar{\mu}\mu = 1$), ya que por hipotésis su producto debe estar en $K(\Delta\sqrt{5}\,)$.
Suponer que esta nueva elección también satisface la condición (3.4). Se tiene entonces

$$\begin{aligned} r_1r_2^2 + r_4r_3^2 &= u + v\sqrt{5}\Delta \\ r_3r_1^2 + r_2r_4^2 &= u - v\sqrt{5}\Delta \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} r_1(\mu r_2)^2 + r_4(\bar{\mu} r_3)^2 &= u + v\sqrt{5}\Delta \\ \bar{\mu} r_3 r_1^2 + \mu r_2 r_4^2 &= u - v\sqrt{5}\Delta \end{aligned} \tag{3.6}$$

Juntando las ecuaciones (3.5) y (3.6) se sigue

$$\begin{aligned} r_1r_2^2 + r_4r_3^2 &= r_1\mu^2 r_2^2 + r_4\bar{\mu}^2 r_3^2 \\ r_3r_1^2 + r_2r_4^2 &= r_1^2\bar{\mu} r_3 + r_4^2 \mu r_2 \end{aligned}$$

De aquí,

$$\frac{r_1r_2^2}{r_4r_3^2} = \frac{\bar{\mu}^2 - 1}{1 - \mu^2} \tag{3.7}$$

$$\frac{r_1^2 r_3}{r_4^2 r_2} = \frac{\mu - 1}{1 - \bar{\mu}} \tag{3.8}$$

Multiplicando (3.7) y el cuadrado de (3.8), se obtiene $\left(\frac{r_1}{r_4}\right)^5 = 1$, es decir, $\frac{r_1}{r_4}$ es una raíz quinta de la unidad, lo cual es una contradicción, ya que este elemento genera una extensión de grado 5 de $L(\xi)$ que sobrevive a cualquier especialización, es decir, que sigue teniendo grado 5 en cualquier evaluación. Con esto se concluye la demostración. $\square$

Comentario. Los elementos u, v se calculan con el mismo método que el resto y evaluando se obtiene,

$$u = -25q/2$$

$$v = (c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3 + c_4\theta^4 + c_5\theta^5)/(2DH)$$

Por último, concluimos el trabajo enunciando el siguiente Teorema que describe los posibles grupos de Galois y que es consecuencia del Teorema 3.0.1.

Teorema 3.0.3. Suponer que el polinomio $f(x) = x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible y resoluble por radicales. Sea θ la única raíz racional de la ecuación resolvente asociada a $f(x)$. Fijada una raíz cuadrada Δ del discriminante D del polinomio y ξ una raíz 5-primitiva de la unidad. Definido el coeficiente l_0 como se ha expuesto y l_1, l_2, l_3, l_4 como las raíces de los factores definidos en (3.3), sujetos a la condición $(l_1 - l_4)(l_2 - l_3) = \phi\Delta$. Entonces, el grupo de Galois de $f(x)$ es:

- F_{20} el grupo de Frobenius de orden 20 $\Longleftrightarrow$ D no es un cuadrado $\Longleftrightarrow$ los factores de (3.3) son irreducibles en $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$.

- D_{10} el grupo diédrico de orden 10 $\Longleftrightarrow D$ es un cuadrado y los factores de (3.3) son irreducibles en $\mathbb{Q}$.
- C_5 el grupo cíclico de orden 5 $\Longleftrightarrow D$ es un cuadrado y los factores de (3.3) son reducibles en $\mathbb{Q}$.

Dads r_1 la quinta raíz de R_1 y dados r_2, r_3, r_4 las correspondientes raíces quintas de R_2, R_3, R_4, como en el lema anterior, entonces las fórmulas (2.2) y (2.3) devuelven las raíces de $f(x)$ en términos de radicales. Además, las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ son permutadas cíclicamente por algún 5-ciclo del grupo de Galois.

3.1. Ejemplos.

1. Dado $f(x) = x^5 + 15x + 12$, el discriminante de f es $D = 2^{10}3^4 5^5$. Sustituyendo los valores en la resolvente queda

$$x^6 + 120x^5 + 9000x^4 + 540000x^3 + 20250000x^2 + 324000000x$$

La raíz racional de la resolvente es, claramente, $\theta = 0$ y así, f es resoluble por radicales. El discriminante D no es un cuadrado de un racional, luego el grupo de Galois de f es, por tanto, el grupo de Frobenius F_{20}.
Se toma $\Delta = 7200\sqrt{5}$ como la raíz cuadrada de D. Recordar que además $\xi + \xi^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Se calculan los valores de los coeficientes T_i:

$$\begin{aligned} T_1 &= 750 \\ T_2 &= 5/24 \\ T_3 &= 6468750 \\ T_4 &= 3225/32 \end{aligned}$$

Con estos valores, se expresan los factores nombrados en (3.3):

$$\begin{aligned} &x^2 + (750 + 1500\sqrt{5}\,)x + (6468750 + 725625\sqrt{5}\,) \\ &x^2 + (750 - 1500\sqrt{5}\,)x + (6468750 - 725625\sqrt{5}\,) \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula conocida y expuesta para polinomios de segundo grado, se obtienen las siguientes raíces:

$$\begin{aligned} l_1 &= -375 - 750\sqrt{5} + 75i\sqrt{625 + 29\sqrt{5}} \\ l_4 &= -375 - 750\sqrt{5} - 75i\sqrt{625 + 29\sqrt{5}} \\ l_2 &= -375 + 750\sqrt{5} - 75i\sqrt{625 - 29\sqrt{5}} \\ l_3 &= -375 + 750\sqrt{5} + 75i\sqrt{625 - 29\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Donde l_1 y l_4 corresponden con las raíces del primero de ellos, y l_2 y l_3 con las del segundo.
Se comprueba que también se satisface la condición, $(l_1 - l_4)(l_2 - l_3) = \phi\Delta$:

$$\begin{aligned} l_1 - l_4 &= 150i\sqrt{625 + 29\sqrt{5}} \\ l_2 - l_3 &= -150i\sqrt{625 - 29\sqrt{5}} \\ \phi\Delta &= (3475/4)7200\sqrt{5} = 13986605{,}2 \end{aligned}$$

$$(l_1 - l_4)(l_2 - l_3) = 150^2\sqrt{625^2 - 5(29)^2} = 13986605{,}2$$

Luego, se satisface la condición expuesta.
Con los coeficientes l_i se continúa calculando los valores de las resolventes:

$$\begin{aligned}
R_1 &= -1875 - 75\sqrt{1635+385\sqrt{5}} + 75\sqrt{1635-385\sqrt{5}} \\
R_4 &= -1875 + 75\sqrt{1635+385\sqrt{5}} - 75\sqrt{1635-385\sqrt{5}} \\
R_2 &= 5625 - 75\sqrt{1490+240\sqrt{5}} - 75\sqrt{1490-240\sqrt{5}} \\
R_3 &= 5625 + 75\sqrt{1490+240\sqrt{5}} + 75\sqrt{1490-240\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Estos elementos son números reales. Luego, sea r_1 la raíz quinta real de R_1, concluimos que las correspondientes r_2, r_3, r_4 son las raíces reales de R_2, R_3 y R_4, respectivamente.
A partir de las ecuaciones vistas en (2.2) y (2.3) se determinan las raíces del polinomio $f(x)$.

2. Sea $f(x) = x^5 - 110x^3 - 55x^2 + 2310x + 979$ con discriminante $D = 5^{20}11^4$. Su ecuación resolvente asociada es,

$$\begin{aligned}
&x^6 + 18480x^5 + 47764750x^4 - 580262760000x^3 - 1796651418959375x^2 \\
&\quad + 2980357148316659375x - 3602606856446967 1875
\end{aligned}$$

que tiene $\theta = -9955$ como raíz, la cual es claramente un racional, luego $f(x)$ es resoluble por radicales y tiene grupo de Galois resoluble.
En este caso, los cálculos se complican. Debido a esto, se muestran únicamente algunos de ellos.
Los polinomios T_i son bastante extensos, mientras que los factores de (3.3) sí quedan más simplificados como se puede ver:

$$(x-797500)(x+61875)$$
$$(x-281875)(x+405625)$$

Las raíces claramente son:

$$\begin{aligned}
l_1 &= 797500 \\
l_4 &= -61875 \\
l_2 &= 281875 \\
l_3 &= -405625
\end{aligned}$$

Como se puede observar, los polinomios son reducibles en $\mathbb{Q}$ y el discriminante D es un cuadrado. Con lo que se deduce, el grupo de Galois de $f(x)$ es el grupo cíclico de orden 5, C_5. Se toma $\Delta = 5^{10}11^2$ como la raíz del discriminante D.
Con valores de los coeficientes l_i, se obtienen así las resolventes R_i:

$$\begin{aligned}
R_1 &= 5^5 11(14\xi + 26\xi^2 + 6\xi^3 + 16\xi^4) \\
R_2 &= 5^5 11(6\xi + 41\xi^2 + 16\xi^3 + 26\xi^4) \\
R_3 &= 5^5 11(26\xi + 16\xi^2 + 41\xi^3 + 6\xi^4) \\
R_4 &= 5^5 11(16\xi + 6\xi^2 + 26\xi^3 + 41\xi^4)
\end{aligned}$$

En este caso, $\mathbb{Q}(\Delta\sqrt{5} \subseteq \mathbb{R}$ y se toma como r_1 cualquier raíz quinta de R_1, r_4 la raíz quinta de R_4 tal que el producto $r_1 r_4$ sea real. De la misma manera, r_2, r_3 son raíces quintas de R_2, R_3 respectivamente, cuyo producto es real. Además, todas ellas están sujetas a la condición

$$r_1 r_2^2 + r_4 r_3^2 = \frac{1375 + 6875\sqrt{5}}{2}$$

$$r_3 r_1^2 + r_2 r_4^2 = \frac{1375 - 6875\sqrt{5}}{2}$$

De nuevo, con las fórmulas vistas en (2.2) y (2.3), se obtienen las raíces del polinomio.

Bibliografía

[1] DAVID.S.DUMMIT AND RICHARD.M. FOOTE , *Abstract Algebra Third edition*. John Wiley and Sons inc., 2004.

[2] DAVID.A.COX, *Galois Theory, Second edition*. John Wiley and Sons inc. 2012.

[3] L. CANGELMI, *Resolvents and Galois Groups*, Univ. Pol. Torino.

[4] D.S.DUMMIT, *Solving solvable quintics*. Mathematics of computation Vol. 57, number 195. July 1991, pages 387-401.

[5] DANIEL LAZARD, *Solving Quintics by Radicals*, [Research Report] lip6.1998.023, LIP6; Équipe PolSix. 1998. hal-02547734.

[6] PIERRE SAMUEL, *Algebraic Theory of numbers*.

[7] D.S.DUMMIT, *Corrigenda: Solving solvable quintics.* Mathematics of Computation Vol. 59, number 199. July 1992. Pages 309 (45 pages). Published by American Mathematical Society.

Anexo A

En esta sección se muestran, debido a su longitud, los valores explícitos de todos los coeficientes que se han obtenido a lo largo del trabajo en la tercera sección del capítulo 2, es decir, en el desarrollo de polinomios de grado 5.

A.1. Discriminante de un polinomio de grado 5

Sea $f = x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s$ definido como se ha visto en el capítulo 2, se define su discriminante como sigue

$$\begin{aligned} D = {} & -4p^3q^2r^2 - 27q^4r^2 + 16p^4r^3 + 144pq^2r^3 - 128p^2r^4 + 256r^5 + 16p^3q^3s + 108q^5s - 72p^4qrs \\ & - 630pq^3rs + 560p^2qr^2s - 1600qr^3s + 108p^5s^2 + 825p^2q^2s^2 - 900p^3rs^2 + 2250q^2rs^2 \\ & + 2000pr^2s^2 - 3750pqs^3 + 3125s^4 \end{aligned}$$

A.2. Coeficientes de las resolventes

A continuación, se muestran los valores explícitos de los coefientes l_i de las funciones R_i. Obtenidos como resultado de elevar a la quinta las resolventes de Lagrange s_i.

$$\begin{aligned} l_0 = {} & 30\alpha_2\alpha_4^2\alpha_5^2 + 20\alpha_1\alpha_4\alpha_5^3 + 20\alpha_1^3\alpha_2\alpha_5 + 20\alpha_2\alpha_3\alpha_5^3 + \alpha_2^5 + \alpha_5^5 + \alpha_1^5 + \alpha_3^5 + \alpha_4^5 + 20\alpha_1^3\alpha_3\alpha_4 + 30\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4 \\ & + 30\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3^2 + 20\alpha_1\alpha_2^3\alpha_3 + 30\alpha_1^2\alpha_3\alpha_5^2 + 30\alpha_1^2\alpha_4^2\alpha_5 + 30\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5 + 30\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^2 + 20\alpha_2^3\alpha_4\alpha_5 \\ & + 20\alpha_2\alpha_3^3\alpha_4 + 20\alpha_1\alpha_2\alpha_4^3 + 30\alpha_1\alpha_2^2\alpha_5^2 + 30\alpha_1\alpha_3^2\alpha_4^2 + 20\alpha_1\alpha_3^3\alpha_5 + 120\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 30\alpha_3^2\alpha_4\alpha_5^2 \\ & + 20\alpha_3\alpha_4^3\alpha_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 = {} & 20\alpha_1\alpha_3\alpha_4^3 + 30\alpha_1^2\alpha_4\alpha_5^2 + 5\alpha_1^4\alpha_2 + 10\alpha_1^3\alpha_3^3 + 5\alpha_2^4\alpha_3 + 10\alpha_2^2\alpha_4^3 + 5\alpha_3^4\alpha_4 + 10\alpha_2^3\alpha_5^2 + 10\alpha_3^2\alpha_5^3 + 5\alpha_4^4\alpha_5 \\ & + 5\alpha_1\alpha_5^4 + 20\alpha_1^3\alpha_3\alpha_5 + 30\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_5 + 30\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2 + 20\alpha_1\alpha_2^3\alpha_4 + 30\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4^2 + 20\alpha_2\alpha_3^3\alpha_5 \\ & + 20\alpha_2\alpha_4\alpha_5^3 + 30\alpha_3\alpha_4^2\alpha_5^2 + 60\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 60\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 = {} & 20\alpha_1^3\alpha_4\alpha_5 + 10\alpha_1^3\alpha_2^2 + 5\alpha_1^4\alpha_3 + 10\alpha_2^3\alpha_3^2 + 5\alpha_2^4\alpha_4 + 10\alpha_1^2\alpha_5^3 + 10\alpha_3^3\alpha_4^2 + 5\alpha_1\alpha_4^4 + 5\alpha_3^4\alpha_5 + 5\alpha_2\alpha_5^4 \\ & + 10\alpha_4^3\alpha_5^2 + 30\alpha_1^2\alpha_2\alpha_4^2 + 30\alpha_1^2 v3^2\alpha_4 + 20\alpha_1\alpha_2\alpha_3^3 + 20\alpha_1\alpha_2^3\alpha_5 + 30\alpha_2^2\alpha_3\alpha_5^2 + 20\alpha_2\alpha_3\alpha_4^3 + 30\alpha_2^2\alpha_4^2\alpha_5 \\ & + 30\alpha_1\alpha_3^2\alpha_5^2 + 60\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + 60\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4 + 60\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5^2 + 60\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4\alpha_5 + 60\alpha_1\alpha_3\alpha_4^2\alpha_5 + 20\alpha_3\alpha_4\alpha_5^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_3 = {} & 20\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4 + 20\alpha_3^3\alpha_4\alpha_5 + 5\alpha_1^4\alpha_4 + 10\alpha_1^2\alpha_2^2 + 10\alpha_1^3\alpha_5^2 + 10\alpha_2^2\alpha_3^3 + 5\alpha_2^4\alpha_5 + 5\alpha_1\alpha_3^4 + 5\alpha_2\alpha_4^4 + 10\alpha_3^2\alpha_4^3 \\ & + 5\alpha_3\alpha_5^4 + 10\alpha_4^2\alpha_5^3 + 20\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3 + 30\alpha_1^2\alpha_3\alpha_4^2 + 30\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_5 + 30\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4^2 + 30\alpha_2\alpha_3^2\alpha_5^2 + 30\alpha_2^2\alpha_4\alpha_5^2 \\ & + 20\alpha_1\alpha_2\alpha_5^3 + 20\alpha_1 v4^3\alpha_5 + 60\alpha_1^2\alpha_2\alpha_4\alpha_5 + 60\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4 + 60\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3\alpha_5 + 60\alpha_2\alpha_3\alpha_4^2\alpha_5 + 60\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_4 = {} & 30\alpha_1^2\alpha_2\alpha_5^2 + 5\alpha_1^4\alpha_5 + 10\alpha_1^3\alpha_3^2 + 5\alpha_2^4 + 5\alpha_2\alpha_3^4 + 10\alpha_1^2\alpha_4^3 + 10\alpha_2^3\alpha_4^2 + 10\alpha_2^2\alpha_5^3 + 5\alpha_3\alpha_4^4 + 10\alpha_3^3\alpha_5^2 4 \\ & + 5\alpha_4\alpha_5^4 + 20\alpha_1^3\alpha_2\alpha_4 + 30\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3 + 30\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4 + 20\alpha_2^3\alpha_3\alpha_5 + 20\alpha_1\alpha_3^3\alpha_4 + 20\alpha_2\alpha_4^3\alpha_5 + 30\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5 \\ & + 20\alpha_1\alpha_3\alpha_5^3 + 30\alpha_1\alpha_4^2\alpha_5^2 + 60\alpha_1^2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 60\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4\alpha_5 + 60\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4^2 + 60\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2\alpha_5 + 60\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5^2 \end{aligned}$$

A.3. Polinomio simétrico H

$$F = 4p^6q^6 + 59p^3q^8 + 216q^10 - 36p^7q^4r - 623p^4q^6r - 2610pq^8r + 81p^8q^2r^2 + 2015p^5q^4r^2 + 10825p^2q^6r^2 - 1800p^6q^2r^3 - 17500p^3q^4r^3 + 625q^6r^3 + 10000p^4q^2r^4 + 108p^8q^3s + 1584p^5q^5s + 5700p^2q^7s + 486p^9qrs - 9720p^6q^3rs - 45050p^3q^5rs - 9000q^7rs + 10800p^7qr^2s + 92500p^4q^3r^2s + 32500pq^5r^2s - 60000p^5qr^3s - 50000p^2q^3r^3s + 729p^{10}s^2 + 12150p^7q^2s^2 + 60000p^4q^4s^2 + 93750pq^6s^2 - 18225p^8rs^2 - 175500p^5q^2rs^2 - 478125p^2q^4rs^2 + 135000p^6r^2s^2 + 850000p^3q^2r^2s^2 + 15625q^4r^2s^2 - 250000p^4r^3s^3 + 225000p^3q^3r^3 + 175000q^5s^3 - 1012500p^4qrs^3 - 1187500pq^3rs^3 + 1250000p^2qr^2s^3 + 928125p^5s^4 + 187500p^2q^2s^4 - 2812500p^3rs^4 - 390625q^2rs^4 - 9765625s^6$$

A.4. Coeficientes de l_0

$$\beta_0 = -100p^7q^7 - 2175p^4q^9 - 1500pq^{11} + 1100p^8q^5r + 27975p^5q^7r + 152950p^2q^9r - 4125p^9q^3r^2 - 128875p^6q^5r^2 - 830525p^3q^7r^2 + 59450q^9r^2 + 5400p^{10}qr^3 + 243800p^7q^3r^3 + 2082650p^4q^5r^3 - 333925pq^7r^3 - 139200p^8qr^4 - 2406000p^5q^3r^4 - 122600p^2q^5r^4 + 1254400p^6qr^5 + 3776000p^3q^3r^5 + 1832000q^5r^5 - 4736000p^4qr^6 - 6720000pq^3r^6 + 6400000p^2qr^7 - 900p^9q^4s - 37400p^6q^6s - 281625p^3q^8s - 435000q^{10}s + 6750p^{10}q^2rs + 322300p^7q^4rs + 2718575p^4q^6rs + 4214250pq^8rs - 16200p^{11}r^2s - 859275p^8q^2r^2s - 8925475p^5q^4r^2s - 14427875p^2q^6r^2s + 453600p^9r^3s + 10038400p^6q^2r^3s + 17397500p^3q^4r^3s - 11333125q^6r^3s - 4451200p^7r^4s - 15850000p^4q^2r^4s + 34000000pq^4r^4s + 17984000p^5r^5s - 10000000p^2q^2r^5s - 25600000p^3r^6s - 8000000q^2r^6s + 6075p^{11}qs^2 - 83250p^8q^3s^2 - 1282500p^5q^5s^2 - 2862500p^2q^7s^2 + 724275p^9qrs^2 + 9807250p^6q^3rs^2 + 28374375p^3q^5rs^2 + 22212500q^7rs^2 - 8982000p^7qr^2s^2 - 39600000p^4q^3r^2s - 61746875pq^5r^2s^2 - 1010000p^5qr^3s^2 - 1000000p^2q^3r^3s^2 + 78000000p^3qr^4s^2 + 30000000q^3r^4s^2 + 80000000pqr^5s^2 - 759375p^{10}s^3 - 9787500p^7q^2s^3 - 39062500p^4q^4s^3 - 52343750pq^6s^3 + 12301875p^8rs^3 + 98175000p^5q^2rs^3 + 225078125p^2q^4rs^3 - 54900000p^6r^2s^3 - 310000000p^3q^2r^2s^3 - 7890625q^4r^2s^3 + 51250000p^2q^4rs^3 - 420000000pq^2r^3s^3 + 110000000p^2r^4s^3 - 200000000r^5s^3 + 2109375p^6qs^4 - 21093750p^3q^3s^4 - 89843750q^5s^4 + 182343750p^4qrs^4 + 733203125pq^3rs^4 - 196875000p^2qr^2s^4 + 1125000000qr^3s^4 - 158203125p^5s^5 - 566406250p^2q^2s^5 + 101562500p^3rs^5 - 1669921875q^2rs^5 + 1250000000pr^2s^5 - 1220703125pqs^6 + 6103515625s^7$$

$$\begin{aligned}\beta_1 =\ & 1000p^5q^7+7250p^2q^9-10800p^6q^5r-96900p^3q^7r-52500q^9r+37400p^7q^3r^2+470850p^4q^5r^2\\ &+640600pq^7r^2-39600p^8qr^3-983600p^5q^3r^3-2848100p^2q^5r^3+814400p^6qr^4+6076000p^3q^3r^4\\ &+2308000q^5r^4-5024000p^4qr^5-9680000pq^3r^5+9600000p^2qr^6+13800p^7q^4s+94650p^4q^6s-26500pq^8s\\ &-86400p^8q^2rs-816500p^5q^4rs-257500p^2q^6rs+91800p^9r^2s+1853700p^6q^2r^2s+630000p^3q^4r^2s\\ &-8971250q^6r^2s-2071200p^7r^3s-7240000p^4q^2r^3s+29375000pq^4r^3s+14416000p^5r^4s-5200000p^2q^2r^4s\\ &-30400000p^3r^5s-12000000q^2r^5s+64800p^9qs^2+567000p^6q^3s^2+1655000p^3q^5s^2+6987500q^7s^2\\ &+337500p^7qrs^2+8462500p^4q^3rs^2-5812500pq^5rs^2-24930000p^5qr^2s^2-69125000p^2q^3r^2s^2\\ &+103500000p^3qr^3s^2+30000000q^3r^3s^2+90000000pqr^4s^2-708750p^8s^3-5400000p^5q^2s^3+8906250p^2q^4s^3\\ &+18562500p^6rs^3-625000p^3q^2rs^3+29687500q^4rs^3-75000000p^4r^2s^3-416250000pq^2r^2s^3\\ &+60000000p^2r^3s^3-300000000r^4s^3+71718750p^4qs^4+189062500pq^3s^4+210937500p^2qrs^4\\ &+1187500000qr^2s^4-187500000p^3s^5-800781250q^2s^5-390625000prs^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 =\ & -500p^6q^5-6350p^3q^7-19800q^9+3750p^7q^3r+65100p^4q^5r+264950pq^7r-6750p^8qr^2-209050p^5q^3r^2\\ &-1217250p^2q^5r^2+219000p^6qr^3+2510000p^3q^3r^3+1098500q^5r^3-2068000p^4qr^4-5060000pq^3r^4\\ &+5200000p^2qr^5-6750p^8q^2s-96350p^5q^4s-346000p^2q^6s+20250p^9rs+459900p^6q^2rs+1828750p^3q^4rs\\ &-2930000q^6rs-594000p^7r^2s-4301250p^4q^2r^2s+10906250pq^4r^2s+5252000p^5r^3s-1450000p^2q^2r^3s\\ &-12800000p^3r^4s-6500000q^2r^4s+74250p^7qs^2+1418750p^4q^3s^2+5956250pq^5s^2-4297500p^5qrs^2\\ &-29906250p^2q^3rs^2+31500000p^3qr^2s^2+12500000q^3r^2s^2+35000000pqr^3s^2+1350000p^6s^3\\ &+6093750p^3q^2s^3+17500000q^4s^3-7031250p^4rs^3-127812500pq^2rs^3+18750000p^2r^2s^3-162500000r^3s^3\\ &+107812500p^2qs^4+460937500qrs^4-214843750ps^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 =\ & 1950p^4q^5+14100pq^7-14350p^5q^3r-125600p^2q^5r+27900p^6qr^2+402250p^3q^3r^2+288950q^5r^2\\ &-436000p^4qr^3-1345000pq^3r^3+1400000p^2qr^4+9450p^6q^2s-1250p^3q^4s-465000q^6s-49950p^7rs\\ &-302500p^4q^2rs+1718750pq^4rs+834000p^5r^2s+437500p^2q^2r^2s-3100000p^3r^3s-1750000q^2r^3s\\ &-292500p^5qs^2-1937500p^2q^3s^2+3343750p^3qrs^2+1875000q^3rs^2+8125000pqr^2s^2-1406250p^4s^3\\ &-12343750pq^2s^3+5312500p^2rs^3 43750000r^2s^3+74218750qs^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_4 =\ & -300p^5q^3-2150p^2q^5+1350p^6qr+21500p^3q^3r+61500q^5r-42000p^4qr^2-290000pq^3r^2\\ &+300000p^2qr^3-4050p^7s-45000p^4q^2s-125000pq^4s+108000p^5rs+643750p^2q^2rs-700000p^3r^2s\\ &-375000q^2r^2s-93750p^3qs^2-312500q^3s^2+1875000pqrs^2-1406250p^2s^3-9375000rs^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_5 =\ & 1250p^3q^3+9000q^5-4500p^4qr-46250pq^3r+50000p^2qr^2+6750p^5s+43750p^2q^2s-75000p^3rs\\ &-62500q^2rs+156250pqs^2-1562500s^3\end{aligned}$$

A.5. Coeficientes de T1

$$
\begin{aligned}
b_{10} = & -100p^7q^7-2175p^4q^9-10500pq^{11}+1100p^8q^5r+27975p^5q^7r+152950p^2q^9r-4125p^9q^3r^2 \\
& -128875p^6q^5r^2-830525p^3q^7r^2+59450p^9r^2+5400p^{10}qr^3+243800p^7q^3r^3+2082650p^4q^5r^3 \\
& -333925pq^7r^3-139200p^8qr^4-2406000p^5q^3r^4-122600p^2q^5r^4+1254400p^6qr^5+3776000p^3q^3r^5 \\
& +1832000q^5r^5-4736000p^4qr^6-6720000pq^3r^6+6400000p^2qr^7-900p^9q^4s-37400p^6q^6s \\
& -281625p^3q^8s-435000q^{10}s+6750p^{10}q^2rs+322300p^7q^4rs+2718575p^4q^6rs+4214250pq^8rs \\
& -16200p^{11}r^2s-859275p^8q^2r^2s-8925475p^5q^4r^2s-14427875p^2q^6r^2s+453600p^9r^3s+10038400p^6q^2r^3s \\
& +17397500p^3q^4r^3s-11333125q^6r^3s-4451200p^7r^4s-15850000p^4q^2r^4s+34000000pq^4r^4s \\
& +17984000p^5r^5s-10000000p^2q^2r^5s-25600000p^3r^6s-8000000q^2r^6s+6075p^{11}qs^2-83250p^8q^3s^2 \\
& -1282500p^5q^5s^2-2862500p^2q^7s^2+724275p^9qrs^2+9807250p^6q^3rs^2+28374375p^3q^5rs^2+22212500q^7rs^2 \\
& -8982000p^7qr^2s^2-39600000p^4q^3r^2s^2-61746875pq^5r^2s^2-1010000p^5qr^3s^2-1000000p^2q^3r^3s^2 \\
& +78000000p^3qr^4s^2+30000000q^3r^4s^2+80000000pqr^5s^2-759375p^{10}s^3-9787500p^7q^2s^3-39062500p^4q^4s^3 \\
& -52343750pq^6s^3+12301875p^8rs^3+98175000p^5q^2s^3+225078125p^2q^4rs^3-54900000p^6r^2s^3 \\
& -310000000p^3q^2r^2s^3-7890625q^4r^2s^3+51250000p^4r^3s^3-420000000pq^2r^3s^3+110000000p^2r^4s^3 \\
& -200000000r^5s^3+2109375p^6qs^4-21093750p^3q^3s^4-89843750q^5s^4+182343750p^4qrs^4 \\
& +733203125pq^3rs^4-196875000p^2qr^2s^4+1125000000qr^3s^4-158203125p^5s^5-566406250p^2q^2s^5 \\
& +101562500p^3rs^5-1669921875q^2rs^5+1250000000qr^2s^5-1220703125pqs^6+6103515625s^7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{11} = & \ 1000p^5q^7+7250p^2q^9-1080p^6q^5r-96900p^3q^7r-52500q^9r+37400p^7q^3r^2+470850p^4q^5r^2 \\
& +640600pq^7r^2-39600p^8qr^3-983600p^5q^3r^3-2848100p^2q^5r^3+814400p^6qr^4+6076000p^3q^3r^4 \\
& +2308000q^5r^4-502400p^4qr^5-9680000pq^3r^5+9600000p^2qr^6+13800p^7q^4s+94650p^4q^6s \\
& -26500pq^8s-86400p^8q^2rs-816500p^5q^4rs-257500p^2q^6rs+91800p^9r^2s+1853700p^6q^2r^2s \\
& +630000p^3q^4r^2s-8971250q^6r^2s-2071200p^7r^3s-7240000p^4q^2r^3s+29375000pq^4r^3s \\
& +14416000p^5r^4s-5200000p^2q^2r^4s-30400000p^3r^5s-12000000q^2r^5s+64800p^9qs^2+567000p^6q^3s^2 \\
& +1655000p^3q^5s^2+6987500q^7s^2+337500p^7qrs^2+8462500p^4q^3rs^2+30000000p^3q^3s^2 \\
& +90000000pqr^4s^2-708750p^8s^3-5400000p^5q^2s^3+8906250p^2q^4s^3+18562500p^6rs^3-625000p^3q^2rs^3 \\
& +29687500q^4rs^3-75000000p^4r^2s^3-416250000pq^2r^2s^3+60000000p^2r^3s^3-300000000r^4s^3 \\
& +71718750p^4qs^4+189062500pq^3s^4+210937500p^2qrs^4+1187500000qr^2s^4-187500000p^3s^5 \\
& -800781250q^2s^5-390625000qrs^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{12} = & -500p^6q^5-6350p^3q^7-19800q^9+3750p^7q^3r+65100p^4q^5r+264950pq^7r-6750p^8qr^2-209050p^5q^3r^2 \\
& -1217250p^2q^5r^2+219000p^6qr^3+2510000p^3q^3r^3+1098500q^5r^3-2068000p^4qr^4-5060000pq^3r^4 \\
& +5200000p^2qr^5-6750p^8q^2rs+1828750p^3q^4rs-2930000q^6rs-594000p^7r^2s-4301250p^4q^2r^2s \\
& +10906250pq^4r^2s+5252000p^5r^3s-1450000p^2q^2r^3s-12800000p^3r^4s-6500000q^2r^4s+74250p^7qs^2 \\
& +1418750p^4q^3s^2+5956250pq^5s^2-4297500p^5qrs^2-29906250p^2q^3rs^2+31500000p^3qr^2s^2 \\
& +12500000q^3r^2s^2+35000000pqr^3s^2+1350000p^6s^3+6093750p^3q^2s^3+17500000q^4s^3 \\
& -7031250p^4rs^3-127812500pq^2rs^3+18750000p^2r^2s^3-162500000r^3s^3+107812500p^2qs^4 \\
& +460937500qrs^4-214843750ps^5
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} b_{13} = {} & 1950p^4q^5 + 14100pq^7 - 14350p^5q^3r - 125600p^2q^5r + 27900p^6qr^2 + 402250p^3q^3r^2 + 288250q^5r^2 \\ & - 436000p^4qr^3 - 1345000pq^3r^3 + 1400000p^2qr^4 + 9450p^6q^2s - 1250p^3q^4s - 465000q^6s - 49950p^7rs \\ & - 302500p^4q^2rs - 1718750pq^4rs + 834000p^5r^2s + 437500p^2q^2r^2s - 3100000p^3q^3s - 1750000q^2r^3s \\ & - 2925000p^5qs^2 - 1937500p^2q^3s^2 + 3343750p^3qrs^2 + 1875000q^3rs^2 + 8125000pqr^2s^2 - 1406250p^4s^3 \\ & - 1234375pq^2s^3 + 5312500p^2rs^3 - 43750000r^2s^3 + 74218750qs^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{14} = {} & -300p^5q^3 - 2150p^2q^5 + 1350p^6qr + 21500p^3q^3r + 61500q^5r - 42000p^4qr^2 - 290000pq^3r^2 \\ & + 300000p^2qr^3 - 4050p^7s - 45000p^4q^2s - 125000pq^4s + 108000p^5rs + 643750p^2q^2rs - 700000p^3r^2s \\ & - 375000q^2r^2 - 93750p^3qs^2 - 312500q^3s^2 + 1875000pqrs^2 - 1406250p^2s^3 - 9375000rs^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{15} = {} & 1250p^3q^3 + 9000q^5 - 4500p^4qr - 46250pq^3r + 50000p^2qr^2 + 6750p^5s + 43750p^2q^2s - 75000p^3rs \\ & - 62500q^2rs + 156250pqs^2 - 1562500s^3 \end{aligned}$$

A.6. Coeficientes de T2

$$
\begin{aligned}
b_{20} =&200p^6q^1 1-250p^3q^1 3-10800q^1 5-3900p^7q^9r-3325p^4q^1 1r+181800pq^1 3+26950p^8q^7r^2\\
&+69625p^5q^9r^2-1214450p^2q^1 1r^2-7872p^9q^5r^3-368675p^6q^7r^3+4166325p^3q^9r^3+1131100q^{11}r^3\\
&73400p^{10}q^3r^4+661950p^7q^5r^4-9151950p^4q^7r^4-16633075pq^9r^4+36000p^{11}qr^5+135600p^8q^3r^5\\
&+173214oop^5q^5r^5+85338300p^2q^7r^5-832000p^9qr^6-21379200p^6q^3r^6-176044000p^3q^5r^6\\
&-1410000q^7r^6+6528000p^7qr^7+129664000p^4q^3r^7+47344000pq^5r^7-21504000p^5qr^8\\
&-115200000p^2q^3r^8+25600000p^3qr^9+64000000q^3r^9+15700p^8q^8s+120525p^5q^{10}s+113250p^2q^{12}s\\
&-196900p^9q^6rs-1776925p^6q^8rs-3062475p^3q^{10}s-4153500q^{12}rs+857925p^{10}q^4r^2s\\
&+10562775p^7q^6r^2s+34866250p^4q^8r^2s+73486750pq^{10}r^2s-1333800p^{11}q^2r^3s-29212625p^8q^4r^3s\\
&-168729675p^5q^6r^3s-427230750p^2q^8r^3s+108000p^{12}r^4s+30384200p^9q^2r^4s+324535100p^6q^4r^4s\\
&+952666750p^3q^6r^4s-38076875q^8r^4s-4296000p^{10}r^5s-213606400p^7q^2r^5s-842060000p^4q^4r^5s\\
&-95285000pq^6r^5s+61184000p^8r^6s+567520000p^5q^2r^6s+547000000p^2q^4r^6s-390912000p^6r^7s\\
&-812800000p^3q^2r^7s-924000000q^4r^7s+1152000000p^4r^8s+800000000pq^2r^8s-1280000000p^2r^9s\\
&+141750p^{10}q^5s^2-31500p^7q^7s^2-11325000p^4q^9s^2-31687500pq^{11}s^2-1293975p^{11}q^3rs^2\\
&-4803800p^8q^5rs^2+71398250p^5q^7rs^2+227625000p^2q^9rs^2+3256200p^{12}qr^2s^2+43870125p^9q^3r^2s^2\\
&+64581500p^6q^5r^2s^2+5609625p^3q^7r^2s^2+260218750q^9r^2s^2-74610000p^{10}qr^3s^2-662186500p^7q^3r^3s^2\\
&-1987747500p^4q^5r^3s^2-811928125pq^7r^3s^2+471286000p^8qr^4s^2+2106040000p^5q^3r^4s^2\\
&+792687500p^2q^5r^4s^2-135120000p^6qr^5s^2+2479000000p^3q^3r^5s^2+5242250000q^5r^5s^2\\
&-6400000000p^4qr^6s^2-8620000000pq^3r^6s^2+13280000000p^2qr^7s^2+1600000000qr^8s^2\\
&-273375p^{12}q^2s^3-13612500p^9q^4s^3-177250000p^6q^6s^3-511015625p^3q^8s^3-320937500q^{10}s^3\\
&-2770200p^{13}rs^3+125595500p^{10}q^2rs^3+543950000p^7q^4rs^3+1612281250p^4q^6rs^3+968125000pq^8rs^3\\
&+77031000p^{11}r^2s^3+373218750p^8q^2r^2s^3+1839765625p^5q^4r^2s^3+1818515625p^2q^6r^2s^3\\
&-776745000p^9r^3s^3-6861075000p^6q^2r^3s^3-20014531250p^3q^4r^3s^3-13747812500q^6r^3s^3\\
&+3768000000p^7r^4s^3+353655000000p^4q^2r^4s^3+344418750000pq^4r^4s^3-9628000000p^5r^5s^3\\
&-63230000000p^2q^2r^5s^3+13600000000p^3r^6s^3-1500000000p^2r^6s^3-10400000000pr^7s^3\\
&-45562500p^{11}qs^4-525937500p^8q^3s^4-1364218750p^5q^5s-1382812500p^2q^7s^4+572062500p^9qrs^4\\
&+2473515625p^6q^3rs^4+13192187500p^3q^5rs^4+12703125000q^7rs^4-451406250p^7qr^2s^4\\
&-18153906250p^4q^3r^2s^4-369008203125pq^5r^2s^4-9069375000p^5qr^3s^4+79957812500p^2q^3r^3s^4\\
&+5512500000p^3qr^4s^4+50656250000q^3r^4s^4+74750000000pqr^5s^4+56953125p^{10}s^5\\
&+1381640625p^7q^2s^5-781250000p^4q^4s^5+878906250pq^6s^5-2655703125p^8rs^5-3223046875p^5q^2rs^5\\
&-35117187500p^2q^4s^5+26573437500p^6r^2s^5+14785156250p^3q^2r^2s^5-52050781250q^4r^2s^5\\
&-103062500000p^4r^3s^5-281796875000pq^2r^3s^5+146875000000p^2r^4s^5-37500000000r^5s^5\\
&-8789062500p^6qs^6-3906250000p^3q^3s^6+1464843750q^5s^6+102929687500p^4qrs^6\\
&+297119140625pq^3rs^6-217773437500p^2qr^2s^6+167968750000qr^3s^6+10986328125p^5s^7\\
&+98876953125p^2q^2s^7-188964843750p^3rs^7-278320312500q^2rs^7+517578125000pr^2s^7\\
&-610351562500pqs^8+762939453125s^9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{21} = {} & -200p^7q^9 + 1850p^4q^{11} + 21600pq^{13} + 3200p^8q^7r - 19200p^5q^9r - 316350p^2q^{11}r - 19050p^9q^5r^2 \\
& + 37400p^6q^7r^2 + 1759250p^3q^9r^2 + 440100q^{11}r^2 + 48750p^{10}q^3r^3 + 190200p^7q^5r^3 - 4604200p^4q^7r^3 \\
& - 6072800pq^9r^3 - 43200p^{11}qr^4 - 834500p^8q^3r^4 + 4916000p^5q^5r^4 + 27926850p^2q^7r^4 + 969600p^9qr^5 \\
& + 2467200p^6q^3r^5 - 45393200p^3q^5r^5 - 5399500q^7r^5 - 7283200p^7qr^6 + 10536000p^4q^3r^6 + 41656000pq^5r^6 \\
& + 22784000p^5qr^7 - 35200000p^2q^3r^7 - 25600000p^3qr^8 + 96000000q^3r^8 - 3000p^9q^6s + 40400p^6q^8s \\
& + 136550p^3q^{10}s - 1647000q^{12}s + 40500p^{10}q^4rs - 173600p^7q^6rs - 126500p^4q^8rs + 23969250pq^{10}rs \\
& - 153900p^{11}q^2r^2s - 496150p^8q^4r^2s - 4115800p^5q^6r^2s - 112653250p^2q^8r^2s + 129600p^{12}r^3s \\
& + 2683350p^9q^2r^3s + 10906650p^6q^4r^3s + 187289500p^3q^6r^3s + 44098750q^8r^3s - 4384800p^{10}r^4s \\
& - 35660800p^7q^2r^4s - 175420000p^4q^4r^4s - 426538750pq^6r^4s + 60857600p^8r^5s + 349436000p^5q^2r^5s \\
& + 900600000p^2q^4r^5s - 429568000p^6r^6s - 1511200000p^3q^2r^6s - 1286000000q^4r^6s + 1472000000p^4r^7s \\
& - 1440000000pq^2r^7s - 1920000000p^2r^8s - 36450p^{11}q^3s^2 - 188100p^8q^5s^2 - 5504750p^5q^7s^2 \\
& - 37968750p^2q^9s^2 + 255150p^{12}qrs^2 + 2754000p^9q^3rs^2 + 49196500p^6q^5rs^2 + 323587500p^3q^7rs^2 \\
& - 83250000q^9rs^2 - 465750p^{10}qr^2s^2 - 31881500p^7q^3r^2s^2 - 415585000p^4q^5r^2s^2 + 1054775000pq^7r^2s^2 \\
& - 96823500p^8qr^3s^2 - 701490000p^5q^3r^3s^2 - 2953531250p^2q^5r^3s^2 + 1454560000p^6qr^4s^2 \\
& + 7670500000p^3q^3r^4s^2 + 5661062500q^5r^4s^2 - 7785000000p^4qr^5s^2 - 9450000000pq^3r^5s^2 \\
& + 14000000000p^2qr^6s^2 + 2400000000qr^7s^2 - 437400p^{13}s^3 - 10145250p^{10}q^2s^3 - 121912500p^7q^4s^3 \\
& - 576531250p^4q^6s^3 - 528593750pq^8s^3 + 12939750p^{11}rs^3 + 313368750p^8q^2rs^3 + 2171812500p^5q^4rs^3 \\
& + 2381718750p^2q^6rs^3 - 124638750p^9r^2s^3 - 3001575000p^6q^2r^2s^3 - 12259375000p^3q^4r^2s^3 \\
& - 9985312500p^6r^2s^3 + 384000000p^7r^3s^3 + 13997500000p^4q^2r^3s^3 + 20749531250pq^4r^3s^3 \\
& - 555500000p^5r^4s^3 - 41835000000p^2q^2r^4s^3 + 5420000000p^3r^5s^3 - 16300000000q^2r^5s^3 \\
& - 17600000000pr^6s^3 - 7593750p^9qs^4 + 289218750p^6q^3s^4 + 3591406250p^3q^5s^4 + 5992187500q^7s^4 \\
& + 658125000p^7qrs^4 - 269531250p^4q^3rs^4 - 15882812500pq^5rs^4 - 4785000000p^5qr^2s^4 \\
& + 54375781250p^2q^3r^2s^4 - 5668750000p^3qr^3s^4 + 35867187500q^3r^3s^4 + 113875000000pqr^4s^4 \\
& - 544218750p^8s^5 - 5407031250p^5q^2s^5 - 14277343750p^2q^4s^5 + 5421093750p^6rs^5 - 24941406250p^3q^2rs^5 \\
& - 25488281250q^4rs^5 - 11500000000p^4r^2s^5 - 231894531250pq^2r^2s^5 - 6250000000p^2r^3s^5 \\
& - 43750000000r^4s^5 + 35449218750p^4qs^6 + 137695312500pq^3s^6 + 34667968750p^2qrs^6 \\
& + 202148437500qr^2s^6 - 33691406250p^3s^7 - 214843750000q^2s^7 - 31738281250prs^7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{22} = {} & -800p^5q^9 - 5400p^2q^{11} + 5800p^6q^7r + 48750p^3q^9r + 16200q^{11}r - 3000p^7q^5r^2 - 108350p^4q^7r^2 \\
& - 263250pq^9r^2 - 60700p^8q^3r^3 - 38625p^5q^5r^3 + 253100p^2q^7r^3 + 127800p^9qr^4 + 2326700p^6q^3r^4 \\
& + 6565550p^3q^5r^4 - 7055750q^7r^4 - 2903200p^7qr^5 - 21218000p^4q^3r^5 + 1057000pq^5r^5 + 5200p^7q^6s \\
& + 188250p^4q^8s + 931500pq^{10}s - 72800p^8q^4rs - 1466850p^5q^6rs - 6894000p^2q^8rs + 315900p^9q^2r^2s \\
& + 4547000p^6q^4r^2s + 20362500p^3q^6r^2s + 15018750q^8r^2s - 653400p^{10}r^3s - 13897550p^7q^2r^3s \\
& - 76757500p^4q^4r^3s - 124207500pq^6r^3s + 18567600p^8r^4s + 175911000p^5q^2r^4s + 253787500p^2q^4r^4s \\
& - 183816000p^8r^5s - 706900000p^3q^2r^5s - 665750000q^4r^5s + 740000000p^4r^6s + 890000000pq^2r^6s \\
& - 1040000000p^2r^7s - 763000p^6q^5s^2 - 12375000p^3q^7s^2 - 40500000q^9s^2 + 364500p^{10}qrs^2 \\
& + 15537000p^7q^3rs^2 + 154392500p^4q^5rs^2 + 372206250pq^7rs^2 - 25481250p^8qr^2s^2 - 386300000p^5q^3r^2s^2 \\
& - 996343750p^2q^5r^2s^2 + 459872500p^6qr^3s^2 + 2943937500p^3q^3r^3s^2 + 2437781250q^5r^3s^2 \\
& - 2883750000p^4qr^4s^2 - 4343750000pq^3r^4s^2 + 5495000000p^2qr^5s^2 + 1300000000qr^6s^2 - 364500p^{11}s^3 \\
& - 13668750p^8q^2s^3 - 113406250p^5q^4s^3 - 159062500p^2q^6s^3 + 13972500p^9rs^3 + 6153750p^6q^2rs^3 \\
& - 1622656250p^3q^4rs^3 - 2720625000q^6rs^3 - 201656250p^7r^2s^3 + 1949687500p^4q^2r^2s^3 \\
& + 4979687500pq^4r^2s^3 + 497125000p^5r^3s^3 - 11150625000p^2q^2r^3s^3 + 2982500000p^3q^4s^3 \\
& - 6612500000q^2r^4s^3 - 10450000000pr^5s^3 + 126562500p^7qs^4 + 1443750000p^4q^3s^4 + 281250000pq^5s^4 \\
& - 1648125000p^5qrs^4 + 11271093750p^2q^3rs^4 - 4785156250p^3qr^2s^4 + 8808593750q^3r^2s^4 + 52390625000pqr^3s^4 \\
& - 611718750p^6s^5 - 13027343750p^3q^2s^5 - 1464843750q^4s^5 + 6492187500p^4rs^5 - 65351562500pq^2rs^5 \\
& - 13476562500p^2r^2s^5 - 24218750000r^3s^5 + 41992187500p^2qs^6 + 69824218750qrs^6 - 34179687500ps^7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{23} = {} & -1000p^6q^7 - 5150p^3q^9 + 10800q^{11} + 11000p^7q^5r + 66450p^4q^7r - 127800pq^9r - 41250p^8q^3r^2 \\
& - 368400p^5q^5r^2 + 204200p^2q^7r^2 + 54000p^9qr^3 + 1040950p^6q^3r^3 + 2096500p^3q^5r^3 + 200000q^7r^3 \\
& - 1140000p^7qr^4 - 7691000p^4q^3r^4 - 2281000pq^5r^4 + 7296000p^5qr^5 + 13300000p^2q^3r^5 - 14400000p^3qr^6 \\
& + 14000000q^3r^6 - 9000p^8q^4s + 52100p^5q^6rs + 710250p^2q^8s + 67500p^9q^2rs - 256100p^6q^4rs \\
& - 5753000p^3q^6rs + 292500q^8rs - 162000p^{10}r^2s - 1432350p^7q^2r^2s + 5410000p^4q^4r^2s - 7408750pq^6r^2s \\
& + 4401000p^8r^3s + 24185000p^5q^2r^3s + 20781250p^2q^4r^3s - 43012000p^6r^4s - 146300000p^3q^2r^4s \\
& - 165875000q^4r^4s + 182000000p^4r^5s + 250000000pq^2r^5s - 280000000p^2r^6s + 60750p^{10}qs^2 \\
& + 2414250p^7q^3s^2 + 15770000p^4q^5s^2 + 15825000pq^7s^2 - 6021000p^8qrs^2 - 62252500p^5q^3rs^2 \\
& - 74718750p^2q^5rs^2 + 90888750p^6qr^2s^2 + 471312500p^3q^3r^2s^2 + 525875000q^5r^2s^2 - 539375000p^4qr^3s^2 \\
& - 1030000000pq^3r^3s^2 + 1142500000p^2qr^4s^2 + 350000000qr^5s^2 - 303750p^9s^3 - 35943750p^6q^2s^3 \\
& - 331875000p^3q^4s^3 - 505937500q^6s^3 + 8437500p^7rs^3 + 530781250p^4q^2rs^3 + 1150312500pq^4rs^3 \\
& - 154500000p^5r^2s^3 - 2059062500p^2q^2r^2s^3 + 1150000000p^3r^3s^3 - 1343750000q^2r^3s^3 - 2900000000pr^4s^3 \\
& + 30937500p^5qs^4 + 1166406250p^2q^3s^4 - 1496875000p^3qrs^4 + 1296875000q^3rs^4 + 10640625000pqr^2s^4 \\
& - 281250000p^4s^5 - 9746093750pq^2s^5 + 1269531250p^2rs^5 - 7421875000r^2s^5 + 15625000000qs^6
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
b_{24} = & -1600p^4q^7 - 10800pq^9 + 9800p^5q^5r + 80550p^2q^7r - 4600p^6q^3r^2 - 112700p^3q^5r^2 + 40500q^7r^2 \\
& - 34200p^7qr^3 - 279500p^4q^3r^3 - 665750pq^5r^3 + 632000p^5qr^4 + 3200000p^2q^3r^4 - 2800000p^3qr^5 \\
& + 3000000q^3 - 18600p^6q^4s - 51750p^3q^6s + 405000q^8s + 21600p^7q^2rs - 122500p^4q^4rs - 2891250pq^6rs \\
& + 15600p^8r^2s + 1569750p^5q^2r^2s + 6943750p^2q^4r^2s - 3774000p^6r^3s - 27100000p^3q^2r^3s - 30187500q^4r^3s \\
& + 28000000p^4r^4s + 52500000pq^2r^4s - 60000000p^2r^5s - 81000p^8qs^2 - 240000p^5q^3s^2 + 937500p^2q^5s^2 \\
& + 3273750p^6qrs^2 + 30406250p^3q^3rs^2 + 55687500q^5rs^2 - 4218750p^4q^2s^3 + 15156250pq^4s^3 + 5906250p^5rs^3 \\
& - 206562500p^2q^2rs^3 + 107500000p^3r^2s^3 - 159375000q^2r^2s^3 - 612500000pr^3s^3 + 135937500p^3qs^4 \\
& + 46875000q^3s^4 + 1175781250pqrs^4 - 292968750p^2s^5 - 1367187500rs^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{25} = & -800p^5q^5 - 5400p^2q^7 + 6000p^6q^3r + 51700p^3q^5r + 27000q^7r - 10800p^7qr^2 - 163250p^4q^3r^2 \\
& - 285750pq^5r^2 + 192000p^5qr^3 + 1000000p^2q^3r^3 - 800000p^3qr^4 + 500000q^3r^4 - 10800p^7q^2s \\
& - 57500p^4q^4s + 67500pq^6s + 32400p^8rs + 279000p^5q^2rs - 131250p^2q^4rs - 729000p^6r^2s \\
& - 4100000p^3q^2r^2s - 5343750q^4r^2s + 5000000p^4r^3s + 10000000pq^2r^3s - 10000000p^2r^4s \\
& + 641250p^6qs^2 + 5812500p^3q^3s^2 + 10125000q^5s^2 - 7031250p^4qrs^2 - 20625000pq^3rs^2 \\
& + 17500000p^2qr^2s^2 12500000qr^3s^2 - 843750p^5s^3 - 19375000p^2q^2s^3 + 30000000p^3rs^3 \\
& - 20312500q^2rs^3 - 112500000pr^2s^3 + 183593750pqs^4 - 292968750s^5
\end{aligned}$$

A.7. Coeficientes de T3

$$
\begin{aligned}
b_{30} = {} & 500p^{11}q^6 + 9875p^8q^8 + 42625p^5q^{10} - 35000p^2q^{12} - 4500p^{12}q^4r - 108375p^9q^6r - 516750p^6q^8r \\
& + 1110500p^3q^{10}r + 2730000q^{12}r + 10125p^{13}q^2r^2 + 358250p^{10}q^4r^2 + 1908625p^7q^6r^2 - 11744250p^4q^8r^2 \\
& - 43383250pq^{10}r^2 - 313875p^{11}q^2r^3 - 2074875p^8q^4r^3 + 52094750p^5q^6r^3 + 264567500p^2q^8r^3 + 796125p^9q^2r^4 \\
& - 92486250p^6q^4r^4 - 757957500p^3q^6r^4 - 29354375q^8r^4 + 60970000p^7q^2r^5 + 1112462500p^4q^4r^5 \\
& + 571094375pq^6r^5 - 685290000p^5q^2r^6 - 2037800000p^2q^4r^6 + 2279600000p^3q^2r^7 + 8490000000q^4r^7 \\
& - 1480000000pq^2r^8 + 13500p^{13}q^3s + 363000p^{10}q^5s + 2861250p^7q^7s + 8493750p^4q^9s + 17031250pq^{11}s \\
& - 60750p^{14}qrs - 2319750p^{11}q^3rs - 22674250p^8q^5rs - 74368750p^5q^7rs - 170578125p^2q^9rs \\
& + 2760750p^{12}qr^2s + 46719000p^9q^3r^2s + 163356375p^6q^5r^2s + 360295625p^3q^7r^2s - 195990625q^9r^2s \\
& - 37341750p^{10}qr^3s - 194739375p^7q^3r^3s - 105463125p^4q^5r^3s - 415825000pq^7r^3s + 90180000p^8qr^4s \\
& - 990552500p^5q^3r^4s + 3519212500p^2q^5r^4s + 1112220000p^6qr^5s - 4508750000p^3q^3r^5s - 8159500000q^5r^5s \\
& - 4356000000p^4qr^6s + 14615000000pq^3r^6s - 2160000000p^qr^7s + 91125p^{15}s^2 + 3290625p^{12}q^2s^2 \\
& + 35100000p^9q^4s^2 + 175406250p^6q^6s^2 + 629062500p^3q^8s^2 + 910937500q^{10}s^2 - 5710500p^{13}rs^2 \\
& - 100423125p^{10}q^2rs^2 - 604743750p^7q^4rs^2 - 2954843750p^4q^6rs^2 - 4587578125pq^8rs^2 \\
& + 116194500p^{11}r^2s^2 + 1280716250p^8q^2r^2s^2 + 7401190625p^5q^4r^2s^2 + 11619937500p^2q^6r^2s^2 \\
& - 952173125p^9r^3s^2 - 6519712500p^6q^2r^3s^2 - 10238593750p^3q^4r^3s^2 + 29984609375q^6r^3s^2 \\
& + 2558300000p^7r^4s^2 + 16225000000p^4q^2r^4s^2 - 64994140625pq^4r^4s^2 + 4202250000p^5r^5s^2 \\
& + 46925000000p^2q^2r^5s^2 - 28950000000p^3 - 1000000000q^2r^6s^2 + 37000000000pr^7s^2 - 48093750p^{11}qs^3 \\
& - 673359375p^8q^3s^3 - 2170312500p^5q^5s^3 - 2466796875p^2q^7s^3 + 647578125p^9qrs^3 + 597031250p^6q^3rs^3 \\
& - 7542578125p^3q^5rs^3 - 41125000000q^7rs^3 - 2175828125p^7qr^2s^3 - 7101562500p^4q^3r^2s^3 \\
& + 100596875000pq^5r^2s^3 - 8984687500p^5qr^3s^3 - 120070312500p^2q^3r^3s^3 + 57343750000p^3qr^4s^3 \\
& + 9500000000q^3r^4s^3 - 342875000000pqr^5s^3 + 400781250p^{10}s^4 + 8531250000p^7q^2s^4 + 34033203125p^4q^4s^4 \\
& + 42724609375pq^6s^4 - 6289453125p^8rs^4 - 24037109375p^5q^2rs^4 - 62626953125p^2q^4rs^4 \\
& + 17299218750p^6r^2s^4 - 365000000000p^2r^4s^4 + 184375000000r^5s^4 - 32080078125p^6qs^5 \\
& - 98144531250p^3q^3s^5 + 93994140625q^5s^5 - 178955078125p^4qrs^5 - 1299804687500pq^3rs^5 \\
& + 332421875000p^2qr^2s^5 - 1195312500000qr^3s^5 + 72021484375p^5s^6 + 323486328125p^2q^2s^6 \\
& + 682873046875p^3rs^6 + 2447509765625q^2rs^6 - 3011474609375qr^2s^6 + 3051757812500pqs^7 \\
& - 7629394531250s^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{31} = {} & 1500p^9q^6+69625p^6q^8+590375p^3q^{10}+1035000q^{12}-13500p^{10}q^4r-760625p^7q^6r-7904500p^4q^8r \\
& -18169250pq^{10}r+30375p^{11}q^2r^2+2628625p^8q^4r^2+37879000p^5q^6r^2+121367500p^2q^8r^2-2699250p^9q^2r^3 \\
& -76776875p^6q^4r^3-403583125p^3q^6r^3-78865625q^8r^3+60907500p^7q^2r^4+735291250p^4q^4r^4 \\
& +781142500pq^6r^4-558270000p^5q^2r^5-2150725000p^2q^4r^5+2015400000p^3q^2r^6+1181000000q^4r^6 \\
& -2220000000pq^2r^7+40500p^{11}q^3s+1376500p^8q^5s+9953125p^5q^7s+9765625p^2q^9s-182250p^{12}qrs \\
& -8859000p^9q^3rs-82854500p^6q^5rs-71511250p^3q^7rs+273631250q^9rs+10233000p^{10}qr^2s \\
& +179627500p^7q^3r^2s+25164375p^4q^5r^2s-2927290625pq^7r^2s-171305000p^8qr^3s-544768750p^5q^3r^3s \\
& +7583437500p^2q^5r^3s+1139860000p^6qr^4s-6489375000p^3q^3r^4s-9625375000q^5r^4s-1838000000p^4qr^5s \\
& +19835000000pq^3r^5s-3240000000p^2qr^6s+273375p^{13}s^2+9753750p^{10}q^2s^2+82575000p^7q^4s^2 \\
& +202265625p^4q^6s^2+556093750pq^8s^2-11552625p^{11}rs^2-115813125p^8q^2rs^2+630590625p^5q^4rs^2 \\
& +1347015625p^2q^6rs^2+157578750p^9r^2s^2-689206250p^6q^2r^2s^2-4299609375p^3q^4r^2s^2 \\
& +23896171875q^6r^2s^2-1022437500p^7r^3s^2+6648125000p^4q^2r^3s^2-52895312500pq^4r^3s^2 \\
& +4401750000p^5r^4s^2+26500000000p^2q^2r^4s^2-22125000000p^3r^5s^2-1500000000q^2r^5s^2 \\
& +55500000000pr^6s^2-137109375p^9qs^3-1955937500p^6q^3s^3-6790234375p^3q^5s^3-16996093750q^7s^3 \\
& +2146218750p^7qrs^3+6570312500p^4q^3rs^3+39918750000pq^5rs^3-7673281250p^5qr^2s^3 \\
& -52000000000p^2q^3r^2s^3+50796875000p^3qr^3s^3+18750000000q^3r^3s^3-399875000000pqr^4s^3 \\
& +780468750p^8s^4+14455078125p^5q^2s^4+10048828125p^2q^4s^4-15113671875p^6rs^4+39298828125p^3q^2rs^4 \\
& -52138671875q^4rs^4+45964843750p^4r^2s^4+914414062500pq^2r^2s^4+1953125000p^2r^3s^4 \\
& +334375000000r^4s^4-149169921875p^4qs^5-459716796875pq^3s^5-325585937500p^2qrs^5 \\
& -1462890625000qr^2s^5+296630859375p^3s^6+1324462890625q^2s^6+307617187500prs^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{32} = {} & -20750p^7q^6-290125p^4q^8-993000pq^{10}+146125p^8q^4r+2721500p^5q^6r+11833750p^2q^8r \\
& -237375p^9q^2r^2-8167500p^6q^4r^2-54605625p^3q^6r^2-23802500q^8r^2+8927500p^7q^2r^3+131184375p^4q^4r^3 \\
& +254695000pq^6r^3-121561250p^5q^2r^4-728003125p^2q^4r^4+702550000p^3q^2r^5+597312500q^4r^5 \\
& -1202500000pq^2r^6-194625p^9q^3s-1568875p^6q^5s+9685625p^3q^7s+74662500q^9s+327375p^{10}qrs \\
& +1280000p^7q^3rs-123703750p^4q^5rs-850121875pq^7rs-7436250p^8qr^2s+164820000p^5q^3r^2s \\
& +2336659375p^2q^5r^2s+32202500p^6qr^3s-2429765625p^3q^3r^3s-4318609375q^5r^3s+148000000p^4qr^4s \\
& +9902812500pq^3r^4s-1755000000p^2qr^5s+1154250p^{11}s^2+36821250p^8q^2s^2+372825000p^5q^4s^2 \\
& +1170921875p^2q^6s^2-38913750p^9rs^2-797071875p^6q^2rs^2-2848984375p^3q^4rs^2+7651406250q^6rs^2 \\
& +415068750p^7r^2s^2+3151328125p^4q^2r^2s^2-17696875000pq^4r^2s^2-725968750p^5r^3s^2 \\
& +5295312500p^2q^2r^3s^2-8581250000p^3r^4s^2-812500000q^2r^4s^2+30062500000pr^5s^2-110109375p^7qs^3 \\
& -1976562500p^4q^3s^3-6329296875pq^5s^3+2256328125p^5qrs^3+8554687500p^2q^3rs^3+12947265625p^3qr^2s^3 \\
& +7984375000q^3r^2s^3-167039062500pqr^3s^3+1181250000p^6s^4+17873046875p^3q^2s^4-20449218750q^4s^4 \\
& -16265625000p^4rs^4+260869140625pq^2rs^4+21025390625p^2r^2s^4+207617187500r^3s^4-207177734375p^2qs^5
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
b_{33} = {} & 53125p^5q^6+425000p^2q^8-394375p^6q^4r-4301875p^3q^6r-3225000q^8r+851250p^7q^2r^2\\
& +16910625p^4q^4r^2+44210000pq^6r^2-20474375p^5q^2r^3-147190625p^2q^4r^3+163975000p^3q^2r^4\\
& +156812500q^4r^4-323750000pq^2r^5-99375p^7q^3s-6395000p^4q^5s-49243750pq^7s-1164375p^8qrs\\
& +4465625p^5q^3rs+205546875p^2q^5rs+12163750p^6qr^2s-315546875p^3q^3r^2s-946453125q^5r^2s\\
& -23500000p^4qr^3s+2313437500pq^3r^3s-472500000p^2qr^4s+1316250p^9s^2+22715625p^6q^2s^2\\
& +206953125p^3q^4s^2+1220000000q^6s^2-20953125p^7rs^2-277656250p^4q^2rs^2-3317187500pq^4rs^2\\
& +293734375p^5r^2s^2+13511562500p^2q^2r^2s^2-2278125000p^3r^3s^2-218750000q^2r^3s^2+8093750000pr^4s^2\\
& -9609375p^5qs^3+240234375p^2q^3s^3+2310546875p^3qrs^3+1171875000q^3rs^3-33460937500pqr^2s^3\\
& +2185546875p^4s^4+32578125000pq^2s^4-8544921875p^2rs^4+58398437500r^2s^4-114013671875qs^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{34} = {} & -16250p^6q^4-191875p^3q^6-495000q^8+73125p^7q^2r+1437500p^4q^4r+5866250pq^6r-2043125p^5q^2r^2\\
& -17218750p^2q^4r^2+19106250p^3q^2r^3+34015625q^4r^3-69375000pq^2r^4-219375p^8qs-2846250p^5q^3s\\
& -8021875p^2q^5s+3420000p^6qrs-1640625p^3q^3rs-152468750q^5rs+3062500p^4qr^2s+381171875pq^3r^2s\\
& -101250000p^2qr^3s+2784375p^7s^2+43515625p^4q^2s^2+115625000pq^4s^2-48140625p^5rs^2-307421875p^7s^2\\
& -25781250p^3r^2s^2-46875000q^2r^2s^2+1734375000pr^3s^2-128906250p^3qs^3+339843750q^3s^3\\
& -4583984375pqrs^3+2236328125p^2s^4+12255859375rs^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{35} = {} & 31875p^4q^4+255000pq^6-82500p^5q^2r-1106250p^2q^4r+1653125p^3q^2r^2+5187500q^4r^2-11562500pq^2r^3\\
& -118125p^6qs-3593750p^3q^3s-23812500q^5s+4656250p^4qrs+67109375pq^3rs-16875000p^2qr^2s\\
& -984375p^5s^2-19531250p^2q^2s^2-37890625p^3rs^2-7812500q^2rs^2+289062500pr^2s^2-529296875pqs^4\\
& +2343750000s^4
\end{aligned}$$

A.8. Coeficientes de T4

$$
\begin{aligned}
b_{40} = {} & 600p^{10}q^{10}+13850p^7q^{12}+106150p^4q^{14}+270000pq^{16}-9300p^{11}q^8r-234075p^8q^{10}r-1942825p^5q^12r \\
& -5319900p^2q^{14}r+52050p^{12}q^6r^2+1481025p^9q^8r^2+13594450p^6q^{10}r^2+40062750p^3q^{12}r^2-3569400q^{14}r^2 \\
& -122175p^{13}q^4r^3-4260350p^{10}q^6r^3-45052375p^7q^8r^3-142634900p^4q^{10}r^3+54186350pq^{12}r^3 \\
& +97200p^{14}q^2r^4+5284225p^{11}q^4r^4+70389525p^8q^6r^4+232732850p^5q^8r^4-318849400p^2q^{10}r^4 \\
& -2046000p^{12}q^2r^5-43874125p^9q^4r^5-107411850p^6q^6r^5+948310700p^3q^8r^5-34763575q^{10}r^5 \\
& +5915600p^{10}q^2r^6-115887800p^7q^4r^6-1649542400p^4q^6r^6+224468875pq^8r^6+120252800p^8q^2r^7 \\
& +1779902000p^5q^4r^7-288250000p^2q^6r^7-915200000p^6q^2r^8-1164000000p^3q^4r^8-444200000q^6r^8 \\
& +2502400000p^4q^2r^9+1984000000pq^4r^9-2880000000p^2q^2r^{10}+10700p^{12}q^7s+551475p^9q^9s \\
& +5194875p^6q^{11}s+18985000p^3q^{13}s+16875000q^{15}s-218700p^{13}q^5rs-6606475p^{10}q^7rs-69770850p^7q^9rs \\
& -285325500p^4q^{11}rs-292005000pq^{13}rs+694575p^{14}q^3r^2s+26187750p^{11}q^5r^2s+328992825p^8q^7r^2s \\
& +1573292400p^5q^9r^2s+1930043875p^2q^{11}r^2s-583200p^{15}qr^3s-37263225p^{12}q^3r^3s-638579425p^9q^5r^3s \\
& -3920212225p^6q^7r^3s-6327336875p^3q^9r^3s+440969375q^{11}r^3s+13446000p^{13}qr^4s+462330325p^{10}q^3r^4s \\
& +4509088275p^7q^5r^4s+11709795625p^4q^7r^4s-3579565625pq^9r^4s-85033600p^{11}qr^5s-2136801600p^8q^3r^5s \\
& -12221575800p^5q^5r^5s+9431044375p^2q^7r^5s+10643200p^9qr^6s+4565594000p^6q^3r^6s-1778590000p^3q^5r^6 \\
& +4842175000q^7r^6s+712320000p^7qr^7s-16182000000p^4q^3r^7s-21918000000pq^5r^7s-742400000p^5qr^8s \\
& +31040000000p^2q^3r^8s+1280000000p^3qr^9s+4800000000q^3r^9s+230850p^{14}q^4s^2+7373250p^{11}q^6s^2 \\
& +85045625p^8q^8s^2+399140625p^5q^{10}s^2+565031250p^2q^{12}s^2-1257525p^{15}q^2rs^2-52728975p^{12}q^4rs^2 \\
& -743466375p^9q^6rs^2-4144915000p^6q^8rs^2-7102690625p^3q^{10}rs^2-1389937500q^{12}rs^2+874800p^{16}r^2s^2 \\
& +89851275p^{13}q^2r^2s^2+1897236775p^{10}q^4r^2s^2+14144163000p^7q^6r^2s^2+31942921875p^4q^8r^2s^2 \\
& +13305118750pq^{10}r^2s^2-23004000p^{14}r^3s^2-1450715475p^{11}q^2r^3s^2-19427105000p^8q^4r^3s^2 \\
& -70634028750p^5q^6r^3s^2-47854218750p^2q^8r^3s^2+204710400p^{12}r^4s^2+10875135000p^9q^2r^4s^2 \\
& +83618806250p^6q^4r^4s^2+62744500000p^3q^6r^4s^2-19806718750q^8r^4s^2-757094800p^{10}r^5s^2 \\
& -37718030000p^7q^2r^5s^2-22479500000p^5q^2r^6s^2-212851250000p^2q^4r^6s^2-10720000000p^6r^7s^2 \\
& -64720000000p^3q^2r^7s^2-59925000000q^4r^7s^2+28000000000p^4r^8s^2+280000000000pq^2r^8s^2- \\
& 24000000000p^2r^9s^2+820125p^{16}qs^3+36804375p^{13}q^3s^3+552225000p^{10}q^5s^3+335759750p^7q^7s^3 \\
& +7146562500p^4q^9s^3+38515662500pq^{11}s^3-92400750p^{14}qrs^3-2350175625p^{11}q^3rs^3-19470640625p^8q^5rs^3 \\
& -52820593750p^5q^7rs^3-45447734375p^2q^9rs^3+1824363000p^{12}qr^2s^3+31435234375p^9q^3r^2s^2 \\
& +141717537500p^6q^5r^2s^3+228370781250p^3q^7r^2s^3+34610078125q^9r^2s^3-17591825625p^{10}qr^3s^3 \\
& -188927187500p^7q^3r^3s^3-502088984375p^4q^5r^3s^3-187849296875pq^7r^3s^3+75577750000p^8qr^4s^3 \\
& +342800000000p^5q^3r^4s^3+295384296875p^2q^5r^4s^3-107681250000p^6qr^5s^3+53330000000p^3q^3r^5s^3 \\
& +271586875000q^5r^5s^3-26410000000p^4qr^6s^3-188200000000pq^3r^6s^3+92000000000p^2qr^7s^3 \\
& +120000000000qr^8s^3+47840625p^{15}s^4+1150453125p^{12}q^2s^4+9229453125p^9q^4s^4+24954687500p^6q^6s^4 \\
& +22978515625p^3q^8s^4+1367187500q^{10}s^4-1193737500p^{13}rs^4-20817843750p^{10}q^2rs^4 \\
& -98640000000p^7q^4rs^4-225767187500p^4q^6rs^4-74707031250pq^8rs^4+13431318750p^{11}r^2s^4 \\
& +188709843750p^8q^2r^2s^4+875157656250p^5q^4r^2s^4+593812890625p^2q^6r^2s^4-69869296875p^9r^3s^4 \\
& -854811093750p^6q^2r^3s^4-1730658203125p^3q^4r^3s^4-570867187500q^6r^3s^4+162075625000p^7r^4s^4 \\
& +1536375000000p^4q^2r^4s^4+765156250000pq^4r^4s^4-165988750000p^5r^5s^4-728968750000p^2q^2r^5s^4 \\
& +121500000000p^3r^6s^4-1039375000000q^2r^6s^4-100000000000pr^7s^4-379687500p^{11}qs^5 \\
& -11607421875p^8q^3s^5-20830078125p^5q^5s^5-33691406250p^2q^7s^5+311767578125q^7rs^5 \\
& +620116015625p^7qr^2s^5+1154687500000p^4q^3r^2s^5+36455078125pq^5r^2s^5-2265953125000p^5qr^3s^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-1509521484375p^2q^3r^3s^5+2530468750p^3qr^4s^5+3259765625000q^3r^4s^5+93750000000pqr^5s^5\\
&+23730468750p^{10}s^6+243603515625p^7q^2s^6+341552734375p^4q^4s^6-12207031250pq^6s^6\\
&-357099609375p^8rs^6-2981933593750000p^3q^2r^2s^6+406738281250p^2q^4rs^6+1615683593750p^6r^2s^6\\
&+558593750000p^3q^2r^2s^6-2811035156250q^4r^2s^6-2960937500000p^4r^3s^6-3802246093750pq^2r^3s^6\\
&+2347656250000p^2r^4s^6-671875000000r^5s^6-651855468750p^6qs^7-1458740234375p^3q^3s^7\\
&-152587890625q^5s^7+1628417968750p^4qrs^7+3948974609375pq^3rs^7-916748046875p^2qr^2s^7\\
&+640869140625p^3s^8+1068115234375p^2q^2s^8-2044677734375p^3rs^8-3204345703125q^2rs^8\\
&+1739501953125pr^2s^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{41} = &-600p^{11}q^8 - 14050p^8q^{10} - 109100p^5q^{12} - 280800p^2q^{14} + 7200p^{12}q^6r + 188700p^9q^8r \\
&+ 1621725p^6q^{10}r + 4577075p^3q^{12}r + 5400q^{14}r - 28350p^{13}q^4r^2 - 910600p^{10}q^6r^2 \\
&- 9237975p^7q^8r^2 - 30718900p^4q^{10}r^2 - 5575950pq^{12}r^2 + 36450p^{14}q^2r^3 + 1848125p^{11}q^4r^3 \\
&+ 25137777p^8q^6r^3 + 109591450p^5q^8r^3 + 70627650p^2q^{10}r^3 - 1317150p^{12}q^2r^4 - 32857100p^9q^4r^4 \\
&- 219125575p^6q^6r^4 - 327565875p^3q^8r^4 - 13011875q^{10}r^4 - 16484150p^{10}q^2r^5 + 222242250p^7q^4r^5 \\
&+ 642173750p^4q^6r^5 + 101263750pq^8r^5 - 79345000p^8q^2r^6 - 433180000p^5q^4r^6 - 93731250p^2q^6r^6 \\
&- 74300000p^6q^2r^7 - 1057900000p^3q^4r^7 - 591175000q^6r^7 + 1891600000p^4q^2r^8 + 2796000000pq^4r^8 \\
&- 4320000000p^2q^2r^9 - 16200p^{13}q^5s - 359500p^{10}q^7s - 4590375p^4q^{11}s + 1232500pq^{13}s + 121500p^{14}q^3rs \\
&+ 3227400p^{11}q^5rs + 27301725p^8q^7rs + 59480975p^5q^9rs - 137308875p^2q^{11}rs - 218700p^{15}qr^2s \\
&- 8903925p^{12}q^3r^2s - 100918225p^9q^5r^2s - 325291300p^6q^7r^2s + 365705000p^3q^9r^2s + 94342500q^{11}r^2s \\
&+ 7632900p^{13}qr^3s + 162995400p^{10}q^3r^3s + 974558975p^7q^5r^3s + 930991250p^4q^7r^3s - 495368750pq^9r^3s \\
&- 97344900p^{11}qr^4s - 1406739250p^8q^3r^4s - 5572526250p^5q^5r^4s - 1903987500p^2q^7r^4s + 678550000p^9qr^5s \\
&+ 817615000p^6q^3r^5s + 18082050000p^3q^5r^5s + 5435843750q^7r^5s - 2979800000p^7qr^6s - 29163500000p^4q^3r^6s \\
&- 27417500000pq^5r^6s + 6282400000p^5qr^7s + 48690000000p^2q^3r^7s - 2880000000p^3qr^8s + 7200000000q^3r^8s \\
&- 109350p^{15}q^2s^2 - 2405700p^{12}q^4s^2 - 16125250p^9q^6s^2 - 4930000p^6q^8s^2 + 201150000p^3q^{10}s^2 \\
&- 243000000q^{12}s^2 + 328050p^{16}rs^2 + 10552275p^{13}q^2rs^2 + 88019100p^{10}q^4rs^2 - 4208625p^7q^6rs^2 \\
&- 1920390625p^4q^8rs^2 + 1759537500pq^{10}rs^2 - 11955600p^{14}r^2s^2 - 196375050p^{11}q^2r^2s^2 \\
&- 555196250p^8q^4r^2s^2 + 4213270000p^5q^6r^2s^2 - 157468750p^2q^8r^2s^2 + 162656100p^{12}r^3s^2 \\
&+ 1880870000p^9q^2r^3s^2 + 753684375p^6q^4r^3s^2 - 25423062500p^3q^6r^3s^2 - 14142031250q^8r^3s^2 \\
&- 1251948750p^{10}r^4s^2 - 12524475000p^7q^2r^4s^2 + 18067656250p^4q^4r^4s^2 + 60531875000pq^6r^4s^2 \\
&+ 6827725000p^8r^5s^2 + 57157000000p^5q^2r^5s^2 - 75844531250p^2q^4r^5s^2 - 24452500000p^6r^6s^2 \\
&- 144950000000p^3q^2r^6s^2 - 82109375000q^4r^6s^2 + 46950000000p^4r^7s^2 + 60000000000pq^2r^7s^2 \\
&- 36000000000p^2r^8s^2 + 1549125p^{14}qs^3 + 51873750p^{11}q^3s^3 + 599781250p^8q^5s^3 + 2421156250p^5q^7s^3 \\
&- 1693515625p^2q^9s^3 - 104884875p^{12}qrs^3 - 1927437500p^9q^3rs^3 - 11461053125p^6q^5rs^3 \\
&+ 10299375000p^3q^7rs^3 + 10551250000q^9rs^3 + 1336263750p^{10}qr^2s^3 + 23737250000p^7q^3r^2s^3 \\
&+ 57136718750p^4q^5r^2s^3 - 8288906250pq^7r^2s^3 - 10907218750p^8qr^3s^3 - 160615000000p^5q^3r^3s^3 \\
&- 111134687500p^2q^5r^3s^3 + 46743125000p^6qr^4s^3 + 57050937500000pq^3r^5s^3 + 274839843750q^5r^4s^3 \\
&- 73312500000p^4qr^5s^3 - 145437500000pq^3r^5s^3 + 8750000000p^2qr^6s^3 - 180000000000qr^7s^3 \\
&+ 15946875p^{13}s^4 + 1265625p^{10}q^2s^4 - 3282343750p^7q^4s^4 - 38241406250p^4q^6s^4 - 40136718750pq^8s^4 \\
&- 113146875p^{11}rs^4 - 2302734375p^8q^2rs^4 + 68450156250p^5q^4rs^4 + 177376562500p^2q^6rs^4 \\
&+ 3164062500p^9r^2s^4 + 14392890625p^6q^2r^2s^4 - 543781250000p^3q^4r^2s^4 - 319769531250p^6r^2s^4 \\
&- 21048281250p^7r^3s^4 - 240687500000p^4q^2r^3s^4 - 228164062500pq^4r^3s^4 + 23062500000p^5r^4s^4 \\
&+ 300410156250p^2q^2r^4s^4 + 93437500000p^3r^5s^4 - 1141015625000q^2r^5s^4 - 187500000000pr^6s^4 \\
&+ 1761328125p^9qs^5 - 3177734375p^6q^3s^5 + 60019531250p^3q^5s^5 + 108398437500q^7s^5 + 24106640625p^7qrs^5 \\
&+ 429889843750p^4q^3rs^5 + 410371093750pq^5rs^5 - 23582031250p^5qr^2s^5 + 202441406250p^2q^3r^2s^5 \\
&- 383203125000p^3qr^3s^5 + 2232910156250q^3r^3s^5 + 1500000000000pqr^4s^5 - 13710937500p^8s^6 \\
&- 202832031250p^5q^2s^6 - 531738281250p^2q^4s^6 + 73330078125p^6rs^6 - 3906250000p^3q^2rs^6 \\
&- 1275878906250q^4rs^6 - 121093750000p^4r^2s^6 - 3308593750000pq^2r^2s^6 + 18066406250p^2r^3s^6 \\
&- 244140625000r^4s^6 + 327148437500p^4qs^7 + 1672363281250pq^3s^7 + 446777343750p^2qrs^7 \\
&+ 1232910156250qr^2s^7 - 274658203125p^3s^8 - 1068115234375q^2s^8 - 61035156250prs^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{42} = {} & 200p^9q^8+7550p^6q^{10}+78650p^3q^{12}+248400q^{14}-4800p^{10}q^6r-164300p^7q^8r-1709575p^4q^{10}r\\
&-5566500pq^{12}r+31050p^{11}q^4r^2+1116175p^8q^6r^2+12674650p^5q^8r^2+45333850p^2q^{10}r^2-60750p^{12}q^2r^3\\
&-2872725p^9q^4r^3-40403050p^6q^6r^3-173564375p^3q^8r^3-11242250q^{10}r^3-24858500p^8q^2r^5\\
&-300875000p^5q^4r^5-319430625p^2q^6r^5+69810000p^6q^2r^6-23900000p^3q^4r^6-294662500p^6r^6\\
&+524200000p^4q^2r^7+1432000000pq^4r^7-2340000000p^2q^2r^8+5400p^{11}q^5s310400p^8q^7s+3591725p^5q^9s\\
&+11556750p^2q^{11}s-105300p^{12}q^3rs-4234650p^9q^5rs-49928875p^6q^7rs-174078125p^3q^9rs+18000000q^{11}rs\\
&+364500p^{13}qr^2s+15763050p^{10}q^3r^2s+220187400p^7q^5r^2s+929609375p^4q^7r^2s-43653125pq^9r^2s\\
&-13427100p^{11}qr^3s-346066250p^8q^3r^3s-2287673375p^5q^5r^3s-1403903125p^2q^7r^3s+184586000p^9qr^4s\\
&+2983460000p^6q^3r^4s+8725818750p^3q^5r^4s+2527734375q^7r^4s-1284480000p^7qr^5s-13138250000p^4q^3r^5s\\
&-14001625000pq^5r^5s+4224800000p^5qr^6s+27460000000p^2q^3r^6s-3760000000p^3qr^7s+3900000000q^3r^7s\\
&+36450p^{13}q^2s^2+2765475p^{10}q^4s^2+34027625p^7q^6s^2+97375000p^4q^8s^2-88275000pq^{10}s^2-546750p^{14}rs^2\\
&-21961125p^{11}q^2rs^2-273059375p^8q^4rs^2-761562500p^5q^6rs^2+1869656250p^2q^8rs^2+20545650p^{12}r^2s^2\\
&+473934375p^9q^2r^2s^2+1758053125p^6q^4r^2s^2-8743359375p^3q^6r^2s^2-4154375000q^8r^2s^2-296559000p^{10}r^3s^2\\
&-4065056250p^7q^2r^3s^2-186328125p^4q^4r^3s^2+19419453125pq^6r^3s^2+2326262500p^8r^4s^2\\
&+21189375000p^5q^2r^4s^2-26301953125p^2q^4r^4s^2-10513250000p^6r^5s^2-69937500000p^3q^2r^5s^2\\
&-42257812500q^4r^5s^2+23375000000p^4r^6s^2+40750000000pq^2r^6s^2-19500000000p^2r^7s^2+4009500p^{12}qs^3\\
&+36140625p^9q^3s^3-335459375p^6q^5s^3-2695312500p^3q^7s^3-1486250000q^9s^3+102515625p^{10}qrs^3\\
&+4006812500p^7q^3rs^3+27589609375p^4q^5rs^3+20195312500pq^7rs^3-2792812500p^8qr^2s^3\\
&-44115156250p^5q^3r^2s^3-72609453125p^2q^5r^2s^3+18752500000p^6qr^3s^3+218140625000p^3q^3r^3s^3\\
&+109940234375q^5r^3s^3-21893750000p^4qr^4s^3-65187500000pq^3r^4s^3-31000000000p^2qr^5s^3\\
&+97500000000qr^6s^3-86568750p^{11}s^4-1955390625p^8q^2s^4-1357812500p^2q^6s^4-1657968750p^9rs^4\\
&+10467187500p^6q^2rs^4-55292968750p^3q^4rs^4-60683593750q^6rs^4-11473593750p^7r^2s^4\\
&-123281250000p^4q^2r^2s^4-164912109375pq^4r^2s^4-13150000000p^5r^3s^4+190751953125p^2q^2r^3s^4\\
&+61875000000p^3r^4s^4-467773437500q^2r^4s^4-118750000000pr^5s^4+7583203125p^7qs^5\\
&+54638671875p^4q^3s^5+39423828125pq^5s^5+32392578125p^5qrs^5+278515625000p^2q^3rs^5\\
&-298339843750p^3qr^2s^5+560791015625q^3r^2s^5+720703125000pqr^3s^5-19687500000p^6s^6\\
&-159667968750p^3q^2s^6-72265625000q^4s^6+116699218750p^4rs^6-924072265625pq^2rs^6\\
&-156005859375p^2r^2s^6-112304687500r^3s^6+349121093750p^2qs^7+396728515625qrs^7\\
&-213623046875ps^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{43} = {} & -600p^{10}q^6 - 18450p^7q^8 - 174000p^4q^{10} - 518400pq^{12} + 5400p^{11}q^4r + 197550p^8q^6r + 2147775p^5q^8r \\
& + 7219800p^2q^{10}r - 12150p^{12}q^2r^2 - 662200p^9q^4r^2 - 9274775p^6q^6r^2 - 38330625p^3q^8r^2 - 5508000q^{10}r^2 \\
& + 656550p^{10}q^2r^3 + 16233750p^7q^4r^3 + 97335875p^4q^6r^3 + 58271250pq^8r^3 - 9845500p^8q^2r^4 \\
& - 119464375p^5q^4r^4 - 194431875p^2q^6r^4 + 49465000p^6q^2r^5 + 1660000000p^3q^4r^5 - 80793750q^6r^5 \\
& + 54400000p^4q^2r^6 + 377750000pq^4r^6 - 630000000p^2q^2r^7 - 16200p^{12}q^3s - 459300p^9q^5s - 4207225p^6q^7s \\
& - 10827500p^3q^9s + 13635000q^{11}s + 72900p^{13}qrs + 2877300p^{10}q^3rs + 33239700p^7q^5rs + 107080625p^4q^7rs \\
& - 114975000pq^9rs - 3601800p^{11}qr^2s - 75214375p^8q^3r^2s - 387073250p^5q^5r^2s + 55540625p^2q^7r^2s \\
& + 53793000p^9qr^3s + 687176875p^6q^3r^3s + 1670018750p^3q^5r^3s + 665234375q^7r^3s - 391570000p^7qr^4s \\
& - 3420125000p^4q^3r^4s - 3609625000pq^5r^4s + 1365600000p^5qr^5s + 7236250000p^2q^3r^5s - 1220000000p^3qr^6s \\
& + 1050000000q^3r^6s - 109350p^{14}s^2 - 3065850p^{11}q^2s^2 - 26908125p^8q^4s^2 - 44606875p^5q^6s^2 + 269812500p^2q^8s^2 \\
& + 5200200p^{12}rs^2 + 81826875p^9q^2rs^2 + 155378125p^6q^4rs^2 - 1936203125p^3q^6rs^2 - 998437500q^8rs^2 \\
& - 77145750p^{10}r^2s^2 - 745528125p^7q^2r^2s^2 + 683437500p^4q^4r^2s^2 + 4083359375pq^6r^2s^2 + 593287500p^8r^3s^2 \\
& + 4799375000p^5q^2r^3s^2 - 4167578125p^2q^4r^3s^2 - 2731125000p^6r^4s^2 - 18668750000p^3q^2r^4s^2 \\
& - 10480468750q^4r^4s^2 + 6200000000p^4r^5s^2 + 11750000000pq^2r^5s^2 - 5250000000p^2r^6s^2 + 26527500p^{10}qs^3 \\
& + 526031250p^7q^3s^3 + 3160703125p^4q^5s^3 + 2650312500pq^7s^3 - 448031250p^8qrs^3 - 6682968750p^5q^3rs^3 \\
& - 11642812500p^2q^5rs^3 + 2553203125p^6qr^2s^3 + 37234375000p^3q^3r^2s^3 + 21871484375q^5r^2s^3 \\
& + 2803125000p^4qr^3s^3 - 10796875000pq^3r^3s^3 - 16656250000p^2qr^4s^3 + 26250000000qr^5s^3 - 75937500p^9s^4 \\
& - 704062500p^6q^2s^4 - 8363281250p^3q^4s^4 - 10398437500q^6s^4 + 197578125p^7rs^4 - 16441406250p^4q^2rs^4 \\
& - 24277343750pq^4rs^4 - 5716015625p^5r^2s^4 + 31728515625p^2q^2r^2s^4 + 27031250000p^3r^3s^4 \\
& - 92285156250q^2r^3s^4 - 33593750000pr^4s^4 + 10394531250p^5qs^5 + 38037169375p^2q^3s^5 - 48144531250p^3qrs^5 \\
& + 74462890625q^3rs^5 + 121093750000pqr^2s^5 - 2197265625p^4s^6 - 92529296875pq^2s^6 + 15380859375p^2rs^6 \\
& - 31738281250r^2s^6 + 54931640625qs^7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{44} = {} & 200p^8q^6 + 2950p^5q^8 + 10800p^2q^{10} - 1800p^9q^4r - 49650p^6q^6r - 403375p^3q^8r - 999000q^{10}r + 4050p^{10}q^2r^2 \\
& + 236625p^7q^4r^2 + 3109500p^4q^6r^2 + 11463750pq^8r^2 - 331500p^8q^2r^3 - 7818125p^5q^4r^3 - 41411250p^2q^6r^3 \\
& + 4782500p^6q^2r^4 + 47475000p^3q^4r^4 - 16728125q^6r^4 - 8700000p^4q^2r^5 + 81750000pq^4r^5 - 135000000p^2q^2r^6 \\
& + 5400p^{10}q^3s + 144200p^7q^5s + 939375p^4q^7s + 1012500pq^9s - 24300p^{11}qrs - 1169250p^8q^3rs \\
& - 14027250p^5q^5rs - 44446875p^2q^7rs + 2011500p^9qr^2s + 49330625p^6q^3r^2s + 272009375p^3q^5r^2s \\
& + 104062500q^7r^2s - 34660000p^7qr^3s - 455062500p^4q^3r^3s - 625906250pq^5r^3s + 210200000p^5qr^4s \\
& + 1298750000p^2q^3r^4s - 240000000p^3qr^5s + 225000000q^3r^5s + 36450p^{12}s^2 + 1231875p^9q^2s^2 \\
& + 10712500p^6q^4s^2 + 21718750p^3q^6s^2 + 16875000q^8s^2 - 2814750p^{10}rs^2 - 67612500p^7q^2rs^2 \\
& - 345156250p^4q^4rs^2 - 283125000pq^6rs^2 + 51300000p^8r^2s^2 + 734531250p^5q^2r^2s^2 + 1267187500p^2q^4r^2s^2 \\
& - 384312500p^6r^3s^2 - 3912500000p^3q^2r^3s^2 - 1822265625q^4r^3s^2 + 1112500000p^4r^4s^2 + 2437500000pq^2r^4s^2 \\
& - 1125000000p^2r^5s^2 - 72578125p^5q^3s^3 - 189296875p^2q^5s^3 + 127265625p^6qrs^3 + 1415625000p^3q^3rs^3 \\
& + 1229687500q^5rs^3 + 1448437500p^4qr^2s^3 + 2218750000pq^3r^2s^3 - 4031250000p^2qr^3s^3 + 5625000000qr^4s^3 \\
& - 132890625p^7s^4 - 529296875p^4q^2s^4 - 175781250pq^4s^4 - 401953125p^5rs^4 - 4482421875p^2q^2rs^4 \\
& + 4140625000p^3r^2s^4 - 10498046875q^2r^2s^4 - 7031250000pr^3s^4 + 1220703125p^3qs^5 + 1953125000q^3s^5 \\
& + 14160156250pqrs^5 - 1708984375p^2s^6 - 3662109375rs^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{45} = {} & -4600p^6q^6 - 67850p^3q^8 - 248400q^{10} + 38900p^7q^4r + 679575p^4q^6r + 2866500pq^8r - 81900p^8q^2r^2 \\
& - 2009750p^5q^4r^2 - 10783750p^2q^6r^2 + 1478750p^6q^2r^3 + 14165625p^3q^4r^3 - 2743750q^6r^3 - 5450000p^4q^2r^4 \\
& + 12687500pq^4r^4 - 22500000p^2q^2r^5 - 101700p^8q^3s - 1700975p^5q^5s - 7061250p^2q^7s + 423900p^9qrs \\
& + 9292375p^6q^3rs + 50438750p^3q^5rs + 20475000q^7rs - 7852500p^7qr^2s - 87765625p^4q^3r^2s \\
& - 121609375pq^5r^2s + 47700000p^5qr^3s + 264687500p^2q^3r^3s - 65000000p^3qr^4s + 37500000q^3r^4s \\
& - 534600p^{10}s^2 - 10344375p^7q^2s^2 - 54859375p^4q^4s^2 - 40312500pq^6s^2 + 10158750p^8rs^2 \\
& + 117778125p^5q^2rs^2 + 192421875p^2q^4rs^2 - 70593750p^6r^2s^2 - 685312500p^3q^2r^2s^2 - 334375000q^4r^2s^2 \\
& + 193750000p^4r^3s^2 + 500000000pq^2r^3s^2 - 187500000p^2r^4s^2 + 8437500p^6qs^3 + 159218750p^3q^3s^3 \\
& + 220625000q^5s^3 + 353828125p^4qrs^3 + 412500000pq^3rs^3 - 1023437500p^2qr^2s^3 + 937500000qr^3s^3 \\
& - 206015625p^5s^4 - 701171875p^2q^2s^4 + 998046875p^3rs^4 - 130859375q^2rs^4 - 1367187500pr^2s^4 \\
& + 1708984375pqs^5 - 976562500s^6
\end{aligned}
$$

A.9. Coeficientes de v

$$
\begin{aligned}
c_0 = {} & -40p^5q^{11} - 270p^2q^{13} + 700p^6q^9r + 5165p^3q^{11}r + 540q^{13}r - 4230p^7q^7r^2 - 31845p^4q^9r^2 + 20880pq^{11}r^2 \\
& 9645p^8q^5r^3 + 57615p^5q^7r^3 - 358255p^2q^9r^3 - 1880p^9q^3r^4 + 114020p^6q^5r^4 + 2012190p^3q^7r^4 - 26855q^9r^4 \\
& - 14400p^{10}qr^5 - 470400p^7q^3r^5 - 5088640p^4q^5r^5 + 920pq^7r^5 + 332800p^8qr^6 + 5797120p^5q^3r^6 \\
& + 1608000p^2q^5r^6 - 2611200p^6qr^7 - 7424000p^3q^3r^7 - 2323200q^5r^7 + 8601600p^4qr^8 + 9472000pq^3r^8 \\
& - 10240000p^2qr^9 - 3060p^7q^8s - 39085p^4q^{10}s - 132300pq^{12}s + 36580p^8q^6rs + 520185p^5q^8rs + 1969860p^2q^{10}rs \\
& - 144045p^9q^4r^2s - 2438425p^6q^6r^2s - 10809475p^3q^8r^2s + 518850q^{10}r^2s + 182520p^{10}q^2r^3s + 4533930p^7q^4r^3s \\
& + 26196770p^4q^6r^3s - 4542325pq^8r^3s + 21600p^{11}r^4s - 2208080p^8q^2r^4s - 24787960p^5q^4r^4s + 10813900p^2q^6r^4s \\
& - 499200p^9r^5s + 3827840p^6q^2r^5s + 9596000p^3q^4r^5s + 22662000q^6r^5s + 3916800p^7r^6s - 29952000p^4q^2r^6s \\
& - 90800000pq^4r^6s - 12902400p^5r^7s + 87040000p^2q^2r^7s + 15360000p^3r^8s + 12800000q^2r^8s - 38070p^9q^5s^2 \\
& - 566700p^6q^7s^2 - 2574375p^3q^9s^2 - 1822500q^{11}s^2 + 292815p^{10}q^3rs^2 + 5170280p^7q^5rs^2 + 27918125p^4q^7rs^2 \\
& + 21997500pq^9rs^2 - 573480p^{11}qr^2s^2 - 14566350p^8q^3r^2s^2 - 104851575p^5q^5r^2s^2 - 96448750p^2q^7r^2s^2 \\
& + 11001240p^9qr^3s^2 + 147798600p^6q^3r^3s^2 + 158632750p^3q^5r^3s^2 - 78222500q^7r^3s^2 - 62819200p^7qr^4s^2 \\
& - 136160000p^4q^3r^4s^2 + 317555000pq^5r^4s^2 + 160224000p^5qr^5s^2 - 267600000p^2q^3r^5s^2 - 153600000p^3qr^6s^2 \\
& - 120000000q^3r^6s^2 - 32000000pqr^7s^2 - 127575p^{11}q^2s^3 - 2148750p^8q^4s^3 13652500p^5q^6s^3 - 19531250p^2q^8s^3 \\
& + 495720p^{12}rs^3 + 11856375p^9q^2rs^3 + 107807500p^6q^4rs^3 + 222334375p^3q^6rs^3 + 105062500q^8rs^3 \\
& - 11566800p^{10}r^2s^3 - 216787500p^7q^2r^2s^3 - 633437500p^4q^4r^2s^3 - 504484375pq^6r^2s^3 + 90918000p^8r^3s^3 \\
& + 567080000p^5q^2r^3s^3 + 692937500p^2q^4r^3s^3 - 326640000p^6r^4s^3 - 339000000p^3q^2r^4s^3 + 369250000q^4r^4s^3 \\
& + 560000000p^4r^5s^3 + 508000000pq^2r^5s^3 - 480000000p^2r^6s^3 + 320000000r^7s^3 - 455625p^{10}qs^4 \\
& - 27562500p^7q^3s^4 - 120593750p^4q^5s^4 - 60312500pq^7s^4 + 110615625p^8qrs^4 + 662984375p^5q^3rs^4 \\
& + 528515625p^2q^5rs^4 - 541687500p^6qr^2s^4 - 1262343750p^3q^3r^2s^4 - 466406250q^5r^2s^4 + 633000000p^4qr^3s^4 \\
& - 1264375000pq^3r^3s^4 + 1085000000p^2qr^4s^4 - 2700000000qr^5s^4 - 68343750p^9s^5 - 478828125p^6q^2s^5 \\
& - 355468750p^3q^4s^5 - 11718750q^6s^5 + 718031250p^7rs^5 + 1658593750p^4q^2rs^5 + 2212890625pq^4rs^5 \\
& - 2855625000p^5r^2s^5 - 4273437500p^2q^2r^2s^5 + 4537500000p^3r^3s^5 + 8031250000q^2r^3s^5 - 1750000000pr^4s^5 \\
& + 1353515625p^5qs^6 + 1562500000p^2q^3s^6 - 3964843750p^3qrs^6 - 7226562500q^3rs^6 + 1953125000pqr^2s^6 \\
& - 1757812500p^4s^7 - 3173828125pq^2s^7 + 6445312500p^2rs^7 - 3906250000r^2s^7 + 6103515625qs^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1 = {} & 40p^6q^9 + 110p^3q^{11} - 1080q^{13} - 560p^7q^7r - 1780p^4q^9r + 17370pq^{11}r + 2850p^8q^5r^2 + 10520p^5q^7r^2 \\
& - 115910p^2q^9r^2 - 6090p^9q^3r^3 - 25330p^6q^5r^3 + 448740p^3q^7r^3 + 128230p^9r^3 + 4320p^{10}qr^4 + 16960p^7q^3r^4 \\
& - 1143600p^4q^5r^4 - 1410310pq^7r^4 + 3840p^8qr^5 + 1744480p^5q^3r^5 + 5619520p^2q^5r^5 - 1198080p^6qr^6 \\
& - 10579200p^3q^3r^6 - 2940800q^5r^6 + 8294400p^4qr^7 + 13568000pq^3r^7 - 15360000p^2qr^8 + 840p^8q^6s \\
& + 7580p^5q^8s + 24420p^2q^{10}s - 8100p^9q^4rs - 94100p^6q^6rs - 473000p^3q^8rs - 473400q^{10}rs + 22680p^{10}q^2r^2s \\
& + 374370p^7q^4r^2s + 2388020p^4q^6r^2s + 5561050pq^8r^2s - 12960p^{11}r^3s - 485820p^8q^2r^3s - 6723440p^5q^4r^3s \\
& - 23561400p^2q^6r^3s + 190080p^9r^4s + 5894880p^6q^2r^4s + 50882000p^3q^4r^4s + 22411500q^6r^4s - 258560p^7r^5s \\
& - 46248000p^4q^2r^5s - 103800000pq^4r^5s - 3737600p^5r^6s + 119680000p^2q^2r^6s + 10240000p^3r^7s \\
& + 19200000q^2r^7s + 7290p^{10}q^3s^2 + 117360p^7q^5s^2 + 691250p^4q^7s^2 - 198750pq^9s^2 - 36450p^{11}qrs^2 \\
& - 854550p^8q^3rs^2 - -7340700p^5q^5rs^2 - 2028750p^2q^7rs^2 + 995490p^9qr^2s^2 + 18896600p^6q^3r^2s^2 \\
& + 5026500p^3q^5r^2s^2 - 52272500q^7r^2s^2 - 1663680Op^7qr^3s^2 - 43200000p^4q^3r^3s^2 + 223426250pq^5r^3s^2 \\
& + 112068000p^5qr^4s^2 - 177000000p^2q^3r^4s^2 - 244000000p^3qr^5s^2 - 156000000q^3r^5s^2 + 437140p^{12}s^3 \\
& + 1032750p^9q^2s^3 + 8602500p^6q^4s^3 + 15606250p^3q^6s^3 + 39625000q^8s^3 - 1603800p^{10}rs^3 - 26932500p^7q^2rs^3 \\
& - 19562500p^4q^4rs^3 - 1520000O0pq^6rs^3 + 25555500p^8r^2s^3 + 16230000p^5q^2r^2s^3 + 42187500p^2q^4r^2s^3 \\
& - 165660000p^6r^3s^3 + 373500000p^3q^2r^3s^3 + 332937500q^4r^3s^3 + 465000000p^4r^4s^3 + 586000000pq^2r^4s^3 \\
& - 592000000p^2r^5s^3 + 480000000r^6s^3 - 1518750p^8qs^4 - 62531250p^5q^3s^4 + 7656250p^2q^5s^4 + 184781250p^6qrs^4 \\
& - 15781250p^3q^3rs^4 - 135156250q^5rs^4 - 1148250000p^4qr^2s^4 - 2121406250pq^3r^2s^4 + 1990000000p^2qr^3s^4 \\
& - 3150000000q - 2531250p^7s^5 + 660937500p^4q^2s^5 + 1339843750pq^4s^5 - 33750000p^5rs^5 - 679687500p^2q^2rs^5 \\
& + 6250000p^3r^2s^5 + 6195312500q^2r^2s^5 + 1125000000pr^3s^5 - 996093750p^3qs^6 - 3125000000q^3s^6 \\
& - 3222656250pqrs^6 + 1171875000p^2s^7 + 976562500rs^7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2 = {} & 80p^4q^9 + 540pq^{11} - 600p^5q^7r - 4770p^2q^9r + 1230p^6q^5r^2 + 20900p^3q^7r^2 + 47250q^9r^2 - 710p^7q^3r^3 \\
& - 84950p^4q^5r^3 - 526310pq^7r^3 + 720p^8qr^4 + 216280p^5q^3r^4 + 2068020p^2q^5r^4 - 198080p^6qr^5 - 3703200p^3q^3r^5 \\
& - 1423600q^5r^5 + 2860800p^4qr^6 + 7056000pq^3r^6 - 8320000p^2qr^7 - 2720p^6q^6s - 46350p^3q^8s - 178200q^{10}s \\
& + 25740p^7q^4rs + 489490p^4q^6rs + 2152350pq^8rs - 61560p^8q^2r^2s - 1568150p^5q^4r^2s - 9060500p^2q^6r^2s \\
& + 24840p^9r^3s + 1692380p^6q^2r^3s + 18098250p^3q^4r^3s + 9387750q^6r^3s - 382560p^7r^4s - 16818000p^4q^2r^4s \\
& - 49325000pq^4r^4s + 1212800p^5r^5s + 64840000p^2q^2r^5s - 320000p^3r^6s + 10400000q^2r^6s - 36450p^8q^3s^2 \\
& - 588350p^5q^5s^2 - 2156250p^2q^7s^2 + 123930p^9qrs^2 + 2879700p^6q^3rs^2 + 12548000p^3q^5rs^2 - 14445000q^7rs^2 \\
& - 3233250p^7qr^2s^2 - 28485000p^4q^3r^2s^2 + 72231250pq^5r^2s^2 + 32093000p^5qr^3s^2 - 61275000p^2q^3r^3s^2 \\
& - 107500000p^3qr^4s^2 - 78500000q^3r^4s^2 + 22000000pqr^5s^2 - 72900p^{10}s^3 - 1215000p^7q^2s^3 - 2937500p^4q^4s^3 \\
& + 9156250pq^6s^3 + 2612250p^8rs^3 + 16560000p^5q^2rs^3 - 75468750p^2q^4rs^3 - 32737500p^6r^2s^3 \\
& + 169062500p^3q^2r^2s^3 + 121718750q^4r^2s^3 + 160250000p^4r^3s^3 + 219750000pq^2r^3s^3 - 31700000Op^2r^4s^3 \\
& + 260000000r^5s^3 + 2531250p^6qs^4 + 22500000p^3q^3s^4 + 39843750q^5s^4 - 266343750p^4qrs^4 - 776406250pq^3rs^4 \\
& + 789062500p^2qr^2s^4 - 1368750000qr^3s^4 + 67500000p^5s^5 + 441406250p^2q^2s^5 - 311718750p^3rs^5 \\
& + 1785156250q^2rs^5 + 546875000pr^2s^5 - 1269531250pqs^6 + 488281250s^7
\end{aligned}
$$

$$c_3 = 120p^5q^7 + 810p^2q_1^9 280p^6q^5r - 9160p^3q^7r + 3780q^9r + 4530p^7q^3r^2 + 36640p^4q^5r^2 - 45270pq^7r^2$$
$$- 5400p^8qr^3 - 60920p^5q^3r^3 + 200050p^2q^5r^3 + 31200p^6qr^4 - 476000p^3q^3r^4 - 378200q^5r^4 + 521600p^4qr^5$$
$$+ 1872000pq^3r^5 - 2240000p^2qr^6 + 1440p^7q^4s + 15310p^4q^6s + 59400pq^8s - 9180p^8q^2rs - 115240p^5q^4rs$$
$$- 589650p^2q^6rs + 16200p^9r^2s + 316710p^6q^2r^2s + 2547750p^3q^4r^2s + 2178000q^6r^2s - 259200p^7r^3s$$
$$- 4123000p^4q^2r^3s - 11700000pq^4r^3s + 937600p^5r^4s + 16340000p^2q^2r^4s - 640000p^3r^5s + 2800000q^2r^5s$$
$$- 2430p^9qs^2 - 54450p^6q^3s^2 - 285500p^3q^5s^2 - 2767500q^7s^2 + 43200p^7qrs^2 - 916250p^4q^3rs^2$$
$$+ 14482500pq^5rs^2 + 4806000p^5qr^2s^2 - 13212500p^2q^3r^2s^2 - 25400000p^3qr^3s^2 - 18750000q^3r^3s^2$$
$$+ 8000000pqr^4s^2 + 121500p^8s^3 + 2058750p^5q^2s^3 - 6656250p^2q^4s^3 - 6716250p^6rs^3 + 24125000p^3q^2rs^3$$
$$+ 23875000q^4rs^3 + 43125000p^4r^2s^3 + 45750000pq^2r^2s^3 - 87500000p^2r^3s^3 + 70000000r^4s^3 - 44437500p^4qs^4$$
$$- 107968750pq^3s^4 + 159531250p^2qrs^4 - 284375000qr^2s^4 + 7031250p^3s^5 + 265625000q^2s^5 + 31250000prs^5$$

$$c_4 = 160p^3q^7 + 1080 - q^9 1080p^4q^5r - 8730pq^7r + 1510p^5q^3r^2 + 20420p^2q^5r^2 + 720p^6qr^3 - 23200p^3q^3r^3$$
$$- 79900q^5r^3 + 35200p^4qr^4 + 404000pq^3r^4 - 480000p^2qr^5 + 960p^5q^4s + 2850p^2q^6s + 540p^6q^2rs$$
$$+ 63500p^3q^4rs + 319500q^6rs - 7560p^7r^2s - 253500p^4q^2r^2s - 180250pq^4r^2s + 91200p^5r^3s + 2600000p^2q^2r^3s$$
$$- 80000p^3r^4s + 600000q^2r^4s - 4050p^7qs^2 - 120000p^4q^3s^2 - 273750pq^5s^2 + 425250p^5qrs^2 + 2325000p^2q^3r^2$$
$$- 5400000p^3qr^2s^2 - 28715000q^3r^2s^2 + 1500000pqr^3s^2 - 303750p^6s^3 - 843750p^3q^2Ss^3 - 812500q^4s^3$$
$$+ 5062500p^4rs^3 + 13312500pq^2rs^3 - 14500000p^2r^2s^3 + 15000000r^3s^3 - 3750000p^2qs^4 - 35937500qrs^4$$
$$+ 11718750ps^5$$

$$c_5 = 80p^4q^5 + 540pq^7 - 600p^5q^3r - 4770p^2q^5r + 1080p^6qr^2 + 11200p^3q^3r^2 - 12150q^5r^2 - 4800p^4qr^3$$
$$+ 64000pq^3r^3 - 80000p^2qr^4 + 1080p^6q^2s + 13250p^3q^4s + 54000q^6s - 3240p^7rs - 56250p^4q^2rs - 337500pq^4rs$$
$$+ 43200p^5r^2s + 560000p^2q^2r^2s - 80000p^3r^3s + 100000q^2r^3s + 6750p^5qs^2 + 225000p^2q^3s^2 - 900000p^3qrs^2$$
$$- 562500q^3rs^2 + 500000pqr^2s^2 + 843750p^4s^3 + 1937500pq^2s^3 - 3000000p^2rs^3 + 2500000r^2s^3 - 5468750qs^4$$

A.10. Coeficientes de ϕ

$$
\begin{aligned}
b_0 = &-1600p^{10}q^{10} - 23600p^7q^{12} - 86400p^4q^{14} + 24800p^{11}q^8r + 419200p^8q^{10}r + 1850450p^5q^{12}r + 896400p^2q^{14}r \\
&- 138800p^{12}q^6r^2 - 2921900p^9q^8r^2 - 17295200p^6q^{10}r^2 - 27127750p^3q^{12}r^2 - 26076600q^{14}r^2 + 325800p^{13}q^4r^3 \\
&+ 9993850p^{10}q^6r^3 + 88010500p^7q^8r^3 + 274047650p^4q^{10}r^3 + 410171400pq^{12}r^3 - 259200p^{14}q^2r^4 \\
&- 17147100p^{11}q^4r^4 - 254289150p^8q^6r^4 - 1318548225p^5q^8r^4 - 2633598475p^2q^{10}r^4 + 12636000p^{12}q^2r^5 \\
&+ 388911000p^9q^4r^5 + 3269704725p^6q^6r^5 + 8791192300p^3q^8r^5 + 93560575q^{10}r^5 - 228361600p^{10}q^2r^6 \\
&- 3951199200p^7q^4r^6 - 16276981100p^4q^6r^6 - 1597227000pq^8r^6 + 1947899200p^8q^2r^7 + 17037648000p^5q^4r^7 \\
&+ 8919740000p^2q^6r^7 - 7672160000p^6q^2r^8 - 15496000000p^3q^4r^8 + 4224000000q^6r^8 + 9968000000p^4q^2r^9 \\
&- 8640000000pq^4r^9 + 4800000000p^2q^2r^{10} - 55200p^{12}q^7s - 685600p^9q^9s + 1028250p^6q^{11}s + 37650000p^3q^{13}s \\
&+ 111375000q^{15}s + 583200p^{13}q^5rs + 9075600p^{10}q^7rs - 883150p^7q^9rs - 506830750p^4q^{11}rs \\
&- 1793137500pq^{13}rs - 1852200p^{14}q^3r^2s - 41435250p^{11}q^5r^2s - 80566700p^8q^7r^2s + 2485673600p^5q^9r^2s \\
&+ 11442286125p^2q^{11}r^2s + 1555200p^{15}qr^3s + 80846100p^{12}q^3r^3s + 564906800p^9q^5r^3s - 4493012400p^6q^7r^3s \\
&- 35492391250p^3q^9r^3s - 789931875q^{11}r^3s - 71766000p^{13}qr^4s - 1551149200p^{10}q^3r^4s - 1773437900p^7q^5r^4s \\
&+ 51957593125p^4q^7r^4s + 14964765625pq^9r^4s + 1231569600p^{11}qr^5s + 12042977600p^8q^3r^5s \\
&- 27151011900p^5q^5r^5s - 88080610000p^2q^7r^5s - 9912995200p^9qr^6s - 29448104000p^6q^3r^6s \\
&+ 144954840000p^3q^5r^6s - 44601300000q^7r^6s + 35453760000p^7qr^7s - 63964000000p^4q^3r^7s \\
&+ 60544000000pq^5r^7s - 30048000000p^5qr^8s + 37040000000p^2q^3r^8s - 60800000000p^3qr^9s \\
&- 48000000000q^3r^9s - 615600p^{14}q^4s^2 - 10524500p^{11}q^6s^2 - 33831250p^8q^8s^2 + 222806250p^5q^{10}s^2 \\
&+ 1099687500p^2q^{12}s^2 + 3353400p^{15}q^2rs^2 + 74269350p^{12}q^4rs^2 + 276445750p^9q^6rs^2 - 2618600000p^6q^8rs^2 \\
&- 14473243750p^3q^{10}rs^2 + 1383750000q^{12}rs^2 - 2332800p^{16}r^2s^2 - 132750900p^{13}q^2r^2s^2 - 900775150p^{10}q^4r^2s^2 \\
&+ 8249244500p^7q^6r^2s^2 + 59525796875p^4q^8r^2s^2 - 40292868750pq^{10}r^2s^2 + 128304000p^{14}r^3s^2 \\
&+ 3160232100p^{11}q^2r^3s^2 + 8329580000p^8q^4r^3s^2 - 45558458750p^5q^6r^3s^2 + 297252890625p\text{‘}2q^8r^3s^2 \\
&- 2769854400p^{12}r^4s^2 - 37065970000p^9q^2r^4s^2 - 90812546875p^6q^4r^4s^2 + 627902000000p^3q^6r^4s^2 \\
&+ 181347421875q^8r^4s^2 + 30946932800p^{10}r^5s^2 + 249954680000p^7q^2r^5s^2 + 802954812500p^4q^4r^5s^2 \\
&- 80900000000pq^6r^8s^2 - 192137320000p^8r^6s^2 - 932641600000p^5q^2r^6s^2 - 943242500000p^2q^4r^6s^2 \\
&+ 658412000000p^6r^7s^2 + 1930720000000p^3q^2r^7s^2 + 593800000000q^4r^7s^2 - 1162800000000p^4r^8s^2 \\
&- 280000000000pq^2r^5s^2 + 840000000000p^2r^9s^2 - 2187000p^{16}qs^3 - 47418750p^{13}q^3s^3 - 180618750p^{10}q^5s^3 \\
&+ 2231250000p^7q^7s^3 + 17857734375p^4q^9s^3 + 29882812500pq^{11}s^3 + 24664500p^{14}qrs^3 - 853368750p^{11}q^3rs^3 \\
&- 25939693750p^8q^5rs^3 - 177541562500p^5q^7rs^3 - 297978828125p^2q^9rs^3 - 153468000p^{12}qr^2s^3 \\
&+ 30188125000p^9q^3r^2s^3 + 344049821875p^6q^5r^2s^3 + 534021875000p^3q^7r^2s^3 - 340726484375q^9r^2s^3 \\
&- 9056190000p^{10}qr^3s^3 - 322314687500p^7q^3r^3s^3 - 760632109375p^4q^5r^3s^3 - 83276875000pq^7r^3s^3 \\
&+ 1640610000000p^8qr^4s^3 + 1381358750000p^5q^3r^4s^3 + 3088020000000p^2q^5r^4s^3 - 1267655000000p^6qr^5s^3 \\
&- 7642630000000p^3q^3r^5s^3 - -2759877500000q^5r^5s^3 + 4597760000000p^4qr^6s^3 + 1846200000000pq^3r^6s^3 \\
&- 7006000000000p^2qr^7s^3 - 1200000000000qr^8s^3 + 18225000p^{15}s^4 + 1328906250p^{12}q^2s^4 \\
&+ 24729140625p^9q^4s^4 + 169467187500p^6q^6s^4 + 413281250000p^3q^8s^4 + 223828125000q^{10}s^4 \\
&+ 710775000p^{13}rs^4 - 18611015625p^{10}q^2rs^4 - 314344375000p^7q^4rs^4 - 828439843750p^4q^6rs^4 \\
&+ 460937500000pq^8rs^4 - 25674975000p^{11}r^2s^4 - 52223515625p^8q^2r^2s^4 - 387160000000p^5q^4r^2s^4 \\
&- 4733680078125p^2q^6r^2s^4 + 343911875000p^9r^3s^4 + 3328658359375p^6q^2r^3s^4 + 16532406250000p^3q^4r^3s^4 \\
&+ 5980613281250q^6r^3s^4 - 2295497500000p^7r^4s^4 - 14809820312500p^4q^2r^4s^4 - 6491406250000pq^4r^4s^4 \\
&+ 7768470000000p^5r^5s^4 + 34192562500000p^2q^2r^5s^4 - 11859000000000p^3r^6s^4 + 10530000000000q^2r^6s^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+6000000000000pr^7s^4+11453906250p^{11}qs^5+14976562500p^8q^3s^5+545537109375p^5q^5s^5\\
&+527343750000p^2q^7s^5-371313281250p^9qrs^5-3461455078125p^6q^3rs^5-7920878906250p^3q^5rs^5\\
&-4747314453125q^7rs^5+2417815625000p^7qr^2s^5+5465576171875p^4q^3r^2s^5+5937128906250pq^5r^2s^5\\
&-1066115625000p^5qr^3s^5-63574218750000p^2q^3r^3s^5+24059375000000p^3qr^4s^5-33023437500000q^3r^4s^5\\
&-43125000000000pqr^5s^5+94394531250p^{10}s^6+1097167968750p^7q^2s^6+2829833984375p^4q^4s^6\\
&-1525878906250pq^6s^6+2724609375p^8rs^6+13998535156250p^5q^2rs^6+57094482421875p^2q^4rs^6\\
&-8512509765625p^6r^2s^6-37941406250000p^3q^2r^2s^6+33191894531250q^4r^2s^6+50534179687500p^4r^3s^6\\
&+156656250000000pq^2r^3s^6-85023437500000p^2r^4s^6+10125000000000r^5s^6-2717285156250p^6qs^7\\
&-11352539062500p^3q^3s^7-2593994140625q^5s^7-47154541015625p^4qrs^7-160644531250000pq^3rs^7\\
&+1425000000000000p^2qr^2s^7-26757812500000qr^3s^7-4364013671875p^5s^8-94604492187500p^2q^2s^8\\
&+114379882812500p^3rs^8+51116943359375q^2rs^8-346435546875000pr^2s^8+476837158203125pqs^9\\
&-476837158203125s^{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 = {} & 1600p^{11}q^8 - 20800p^8q^{10} + 45100p^5q^{12} - 151200p^2q^{14} - 19200p^{12}q^6r - 293200p^9q^8r - 794600p^6q^{10}r \\
& + 2634675p^3q^{12}r + 2640600q^{14}r + 75600p^{13}q^4r^2 + 1529100p^{10}q^6r^2 + 6233350p^7q^8r^2 - 12013350p^4q^{10}r^2 \\
& - 29069550pq^{12}r^2 - 97200p^{14}q^2r^3 - 3562500p^{11}q^4r^3 - 26984900p^8q^6r^3 - 15900325p^5q^8r^3 + 76267100p^2q^{10}r^3 \\
& + 3272400p^{12}q^2r^4 + 59486850p^9q^4r^4 + 221270075p^6q^6r^4 + 74065250p^3q^8r^4 - 300564375q^{10}r^4 \\
& - 45569400p^{10}q^2r^5 - 438666000p^7q^4r^5 - 444821250p^4q^6r^5 + 2448256250pq^8r^5 + 290640000p^8q^2r^6 \\
& + 855850000p^5q^4r^6 - 5741875000p^2q^6r^6 - 644000000p^6q^2r^7 + 5574000000p^3q^4r^7 + 4643000000q^6r^7 \\
& - 1696000000p^4q^2r^8 - 12660000000pq^4r^8 + 7200000000p^2q^2r^9 + 43200p^{13}q^5s + 572000p^{10}q^7s - 59800p^7q^9s \\
& - 241465p^4q^{11}s - 74587500pq^{13}s - 324000p^{14}q^3rs - 5531400p^{11}q^5rs - 3712100p^8q^7rs + 293009275p^5q^9rs \\
& + 1115548875p^2q^{11}rs + 583200p^{15}qr^2s + 18343800p^{12}q^3r^2s + 77911100p^9q^5r^2s - 957488825p^6q^7r^2s \\
& - 5449661250p^3q^9r^2s + 960120000q^{11}r^2s - 23684400p^{13}qr^3s - 373761900p^{10}q^3r^3s - 27944975p^7q^5r^3s \\
& + 10375740625p^4q^7r^3s - 4649093750pq^9r^3s + 395816400p^{11}qr^4s + 2910968000p^8q^3r^4 - 9126162500p^5q^5r^4s \\
& - 11696118750p^2q^7r^4s - 3028640000p^9qr^5s - 3251550000p^6q^3r^5s + 47914250000p^3q^5r^5s \\
& - 30255625000q^7r^5s + 9304000000p^7qr^6s - 42970000000p^4q^3r^6s + 31475000000pq^5r^6s + 2176000000p^5qr^7s \\
& + 62100000000p^2q^3r^7s - 43200000000p^3qr^8s - 72000000000q^3r^8s + +291600p^{15}q^2s^2 + 270700p^{12}q^4s^2 \\
& - 38692250p^9q^6s^2 - 538903125p^6q^8s^2 - 1613112500p^3q^{10}s^2 + 320625000q^{12}s^2 - 874800p^{16}rs^2 \\
& - 14166900p^{13}q^2rs^2 + 193284900p^{10}q^4rs^2 + 3688520500p^7q^6rs^2 + 11613390625p^4q^8rs^2 \\
& - 15609881250pq^{10}rs^2 + 44031600p^{14}r^2s^2 + 482345550p^{11}q^2r^2s^2 - 2020881875p^8q^4r^2s^2 \\
& - 7407026250p^5q^6r^2s^2 + 136175750000p^2q^8r^2s^2 - 1000884600p^{12}r^3s^2 - 8888950000p^9q^2r^3s^2 \\
& - 30101703125p^6q^4r^3s^2 - 319761000000p^3q^6r^3s^2 + 51519218750q^8r^3s^2 + 12622395000p^{10}r^4s2 \\
& + 97032450000p^7q^2r^4s^2 + 469929218750p^4q^4r^4s^2 + 291342187500pq^6r^4s - 96382000000p^8r^5s^2 \\
& - 598070000000p^5q^2r^5s^2 - 1165021875000p^2q^4r^5s^2 + 446500000000p^6r^6s^2 + 1651500000000p^3q^2r^6s^2 \\
& + 789375000000q^4r^6s^2 - 1152000000000p^4r^7s^2 - 600000000000pq^2r^7s^2 + 1260000000000p^2r^8s^2 \\
& - 24786000p^{14}qs^3 - 660487500p^{11}q^3s^3 - 5886356250p^8q^5s^3 - 18137187500p^5q^7s^3 - 5120546875p^2q^9s^3 \\
& + 827658000p^{12}qrs^3 + 13343062500p^9q^3rs^3 + 39782068750p^6q^5rs^3 - 111288437500p^3q^7rs^3 \\
& - 15438750000q^9rs^3 - 14540782500p^{10}qr^2s^3 - 135889750000p^7q^3r^2s^3 - 176892578125p^4q^5r^2s^3 \\
& - 934462656250pq^7r^2s^3 + 171669250000p^8qr^3s^3 + 1164538125000p^5q^3r^3s^3 + 3192346406250p^2q^5r^3s^3 \\
& - 1295476250000p^6qr^4s^3 - 6540712500000p^3q^3r^4s^3 - 2957828125000q^5r^4s^3 + 5366750000000p^4qr^5s^3 \\
& + 3165000000000pq^3r^5s^3 - 8862500000000p^2qr^6s^3 - 1800000000000qr^7s^3 + 236925000p^{13}s^4 \\
& + 8895234375p^{10}q^2s^4 + 106180781250p^7q^4s^4 + 474221875000p^4q^6s^4 + 616210937500pq^8s^4 \\
& - 6995868750p^{11}rs^4 - 184190625000p^8q^2rs^4 - 1299254453125p^5q^4rs^4 - 2475458593750p^2q^6rs^4 \\
& + 63049218750p^9r^2s^4 + 1646791484375p^6q^2r^2s^4 + 9086886718750p^3q^4r^2s^4 + 4673421875000q^6r^2s^4 \\
& - 215665000000p^7r^3s^4 - 7864589843750p^4q^2r^3s^4 - 5987890625000pq^4r^3s^4 + 594843750000p^5r^4s^4 \\
& + 27791171875000p^2q^2r^4s^4 - 3881250000000p^3r^5s^4 + 12203125000000q^2r^5s^4 + 10312500000000pr^6s^4 \\
& - 34720312500p^9qs^5 - 545126953125p^6q^3s^5 - 2176425781250p^3q^5s^5 - 2792968750000q^7s^5 \\
& - 1395703125p^7qrs^5 - 1957568359375p^4q^3rs^5 + 5122636718750pq^5rs^5 + 858210937500p^5qr^2s^5 \\
& - 42050097656250p^2q^3r^2s^5 + 7088281250000p^3qr^3s^5 - 25974609375000q^3r^3s^5 - 69296875000000pqr^4s^5 \\
& + 384697265625p^8s^6 + 6403320312500p^5q^2s^6 + 16742675781250p^2q^4s^6 - 3467080078125p^6rs^6 \\
& + 11009765625000p^3q^2rs^6 + 16451660156250q^4rs^6 + 6979003906250p^4r^2s^6 + 145403320312500pq^2r^2s^6 \\
& + 4076171875000p^2r^3s^6 + 22265625000000r^4s^6 - 21915283203125p^4qs^7 - 86608886718750pq^3s^7 \\
& - 22785644531250p^2qrs^7 - 103466796875000qr^2s^7 + 18798828125000p^3s^8 + 106048583984375q^2s^8 \\
& + 17761230468750prs^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2 = {} & 2800p^9q^8 + 55700p^6q^{10} + 363600p^3q^{12} + 777600q^{14} - 27200p^{10}q^6r - 700200p^7q^8r - 5726550p^4q^{10}r \\
& - 15066000pq^{12}r + 74700p^{11}q^4r^2 + 2859575p^8q^6r^2 + 31175725p^5q^8r^2 + 103147650p^2q^{10}r^2 - 40500p^{12}q^2r^3 \\
& - 4274400p^9q^4r^3 - 76065825p^6q^6r^3 - 365623750p^3q^8r^3 - 132264000q^{10}r^3 + 2192400p^{10}q^2r^4 \\
& + 92562500p^7q^4r^4 + 799193875p^4q^6r^4 + 1188193125pq^8r^4 - 41231500p^8q^2r^5 - 914210000p^5q^4r^5 \\
& - 3318853125p^2q^6r^5 + 398850000p^6q^2r^6 + 3944000000p^3q^4r^6 + 2211312500q^6r^6 - 1817000000p^4q^2r^7 \\
& - 6720000000pq^4r^7 + 3900000000p^2q^2r^8 + 75600p^{11}q^5s + 1823100p^8q^7s + 14534150p^5q^9s + 38265750p^2q^{11}s \\
& - 394200p^{12}q^3rs - 11453850p^9q^5rs - 101213000p^6q^7rs - 223565625p^3q^9rs + 415125000q^{11}rs \\
& + 243000p^{13}qr^2s + 13654575p^{10}q^3r^2s + 163811725p^7q^5r^2s + 173461250p^4q^7r^2s - 3008671875pq^9r^2s \\
& - 2016900p^{11}qr^3s - 86576250p^8q^3r^3s - 324146625p^5q^5r^3s + 3378506250p^2q^7r^3s - 89211000p^9qr^4s \\
& - 55207500p^6q^3r^4s + 1493950000p^3q^5r^4s - 12573609375q^7r^4s + 1140100000p^7qr^5s + 42500000p^4q^3r^5s \\
& + 21511250000pq^5r^5s - 4058000000p^5qr^6s + 6725000000p^2q^3r^6s - 1400000000p^3qr^7s - 39000000000q^3r^7s \\
& + 510300p^{13}q^2s^2 + 4814775p^{10}q^4s^2 - 70265125p^7q^6s^2 - 1016484375p^4q^8s^2 - 3221100000pq^{10}s^2 \\
& - 364500p^{14}rs^2 + 30314250p^{11}q^2rs^2 + 1106765625p^8q^4rs^2 + 10984203125p^5q^6rs^2 + 33905812500p^2q^8rs^2 \\
& - 37980900p^{12}r^2s^2 - 2142905625p^9q^2r^2s^2 - 26896125000p^6q^4r^2s^2 - 95551328125p^3q^6r^2s^2 \\
& + 11320312500q^8r^2s^2 + 1743781500p^{10}r^3s^2 + 35432262500p^7q^2r^3s^2 + 177855859375p^4q^4r^3s^2 \\
& + 121260546875pq^6r^3s^2 - 25943162500p^8r^4s^2 - 249165500000p^5q^2r^4s^2 - 461739453125p^2q^4r^4s^2 \\
& + 177823750000p^6r^5s^2 + 726225000000p^3q^2r^5s^2 + 404195312500q^4r^5s^2 - 565875000000p^4r^6s^2 \\
& - 407500000000pq^2r^6s^2 + 682500000000p^2r^7s^2 - 59140125p^{12}qs^3 - 1290515625p^9q^3s^3 - 8785071875p^6q^5s^3 \\
& - 15588281250p^3q^7s^3 + 17505000000q^9s^3 + 896062500p^{10}qrs^3 + 2589750000p^7q^3rs^3 - 82700156250p^4q^5rs^3 \\
& - 347683593750pq^7rs^3 + 17022656250p^8qr^2s^3 + 320923593750p^5q^3r^2s^3 + 1042116875000p^2q^5r^2s^3 \\
& - 353262812500p^6qr^3s^3 - 2212664062500p^3q^3r^3s^3 - 1252408984375q^5r^3s^3 + 1967362500000p^4qr^4s^3 \\
& + 1583343750000pq^3r^4s^3 - 3560625000000p^2qr^5s^3 - 975000000000qr^6s^3 + 462459375p^{11}s^4 \\
& + 14210859375p^8q^2s^4 + 995921718750p^5q^4s^4 + 114955468750p^2q^6s^4 - 17720859375p^9rs^4 \\
& - 100320703125p^6q^2 + 1021943359375p^3q^4rs^4 + 1193203125000q^6rs^4 + 171371250000p^7r^2s^4 \\
& - 1113390625000p^4q^2r^2s^4 - 1211474609375pq^4r^2s^4 - 274056250000p^5r^3s^4 + 8285166015625p^2q^2r^3s^4 \\
& - 2079375000000p^3r^4s^4 + 5137304687500q^2r^4s^4 + 6187500000000pr^5s^4 - 135675000000p^7qs^5 \\
& - 1275244140625p^4q^3s^5 - 28388671875pq^5s^5 + 1015166015625p^5qrs^5 - 10584423828125p^2q^3rs^5 \\
& + 3559570312500p^3qr^2s^5 - 6929931640625q^3r^2s^5 - 32304687500000pqr^3s^5 + 4305761718715p^6s^6 \\
& + 9397949218750p^3q^2s^6 + 575195312500q^4s^6 - 4086425781250p^4rs^6 + 42183837890625pq^2rs^6 \\
& + 8156494140625p^2r^2s^6 + 12612304687500r^3s^6 - 25513916015625p^2qs^7 - 37017822265625qrs^7 \\
& + 18981933593750ps^8
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
b_3 = {} & 1600p^{10}q^6 + 9200p^7q^8 - 126000p^4q^{10} - 777600pq^{12} - 14400p^{11}q^4r - 119300p^8q^6r + 1203225p^5q^8r \\
& + 9412200p^2q^{10}r + 32400p^{12}q^2r^2 + 417950p^9q^4r^2 - 4543725p^6q^6r^2 - 49008125p^3q^8r^2 - 24192000q^{10}r^2 \\
& - 292050p^{10}q^2r^3 + 8760000p^7q^4r^3 + 137506625p^4q^6r^3 + 225438750pq^8r^3 - 4213250p^8q^2r^4 \\
& - 173595625p^5q^4r^4 - 653003125p^2q^6r^4 + 82575000p^6q^2r^5 + 838125000p^3q^4r^5 + 578562500q^6r^5 \\
& - 421500000p^4q^2r^6 - 1796250000pq^4r^6 + 1050000000p^2q^2r^7 + 43200p^{12}q^3s + 80730p^9q^5s + 5328225p^6q^7s \\
& + 16946250p^3q^9s + 29565000q^{11}s - 194400p^{13}qrs - 5505300p^{10}q^3rs - 49886700p^7q^5rs - 178821875p^4q^7rs \\
& - 222750000pq^9rs + 6814800p^{11}qr^2s + 120525625p^8q^3r^2s + 526694500p^5q^5r^2s + 84065625p^2q^7r^2s \\
& - 123670500p^9qr^3s - 1106731875p^6q^3r^3s - 669556250p^3q^5r^3s - 2869265625q^7r^3s + 1004350000p^7qr^4s \\
& + 3384375000p^4q^3r^4s + 5665625000pq^5r^4s - 3411000000p^5qr^5s - 418750000p^2q^3r^5s + 17000000000p^3qr^6s \\
& - 10500000000q^3r^6s + 291600p^{14}s^2 + 9829350p^{11}q^2s^2 + 114151875p^8q^4s^2 + 522169375p^5q^6s^2 \\
& + 716906250p^2q^8s^2 - 18625950p^{12}rs^2 - 387703125p^9q^2rs^2 - 2056109375p^6q^4rs^2 - 760203125p^3q^6rs^2 \\
& + 3071250000q^8rs^2 + 512419500p^{10}r^2s^2 + 5859053125p^7q^2r^2s^2 + 12154062500p^4q^4r^2s^2 \\
& + 15931640625pq^6r^2s^2 - 6598393750p^8r^3s^2 - 43549625000p^5q^2r^3s^2 - 82011328125p^2q^4r^3s^2 \\
& + 43538125000p^6r^4s^2 + 160831250000p^3q^2r^4s^2 + 99070312500q^4r^4s^2 - 141812500000p^4r^5s^2 \\
& - 117500000000pq^2r^5s^2 + 183750000000p^2r^6s^2 - 154608750p^{10}qs^3 - 3309468750p^7q^3s^3 \\
& - 20834140625p^4q^5s^3 - 34731562500pq^7s^3 + 5970375000p^8qrs^3 + 68533281250p^5q^3rs^3 \\
& + 142698281250p^2q^5rs^3 - 74509140625p^6qr^2s^3 - 389148437500p^3q^3r^2s^3 - 270937890625q^5r^2s^3 \\
& + 366696875000p^4qr^3s^3 + 400031250000pq^3r^3s^3 - 735156250000p^2qr^4s^3 - 262500000000qr^5s^3 \\
& + 371250000p^9s^4 + 21315000000p^6q^2s^4 + 179515625000p^3q^4s^4 + 238406250000q^6s^4 - 9071015625p^7rs^4 \\
& - 268945312500p^4q^2rs^4 - 379785156250pq^4rs^4 + 140262890695p^5r^2s^4 + 1486259765625p^2q^2r^2s^4 \\
& - 806484375000p^3r^3s^4 + 1066210937500q^2r^3s^4 + 1722656250000pr^4s^4 - 125648437500p^5qs^5 \\
& - 1236279296875p^2q^3s^5 + 1267871093750p^3qrs^5 - 1044677734375q^3rs^5 - 6630859375000pqr^2s^5 \\
& + 160888671875p^4s^6 + 63592294921875pq^2s^6 - 708740234375p^2rs^6 + 3901367187500r^2s^6 \\
& - 8050537109375qs^7
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_4 = {} & 2800p^8q^6 + 41300p^5q^8 + 151200p^2q^{10} - 25200p^9q^4r - 542600p^6q^6r - 3397375p^3q^8r - 5751000q^{10}r \\
& + 56700p^{10}q^2r^2 + 1972125p^7q^4r^2 + 18624250p^4q^6r^2 + 50253750pq^8r^2 - 1701000p^8q^2r^3 - 32630625p^5q^4r^3 \\
& - 139868750p^2q^6r^3 + 18162500p^6q^2r4 + 177125000p^3q^4r^4 + 121734375q^6r^4 - 100500000p^4q^2r^5 \\
& - 386950000pq^4r^5 + 225000000p^2q^2r^6 + 75600p^{10}q^3s + 1708800p^7q^5s + 12836875p^4q^7s + 32062500pq^9s \\
& - 340200p^{11}qrs - 10185750p^8q^3rs - 97502750p^5q^5rs - 301640625p^2q^7rs + 7168500p^9qr^2s \\
& + 135960625p^6q^3r^2s + 587471875p^3q^5r^2s - 384750000q^7r^2s - 29325000p^7qr^3s - 320625000p^4q^3r^3s \\
& + 523437500pq^5r^3s - 42000000p^5qr^4s + 343750000p^2q^3r^4s + 150000000p^3qr^5s - 2250000000q^3r^5s \\
& + 510300p^{12}s^2 + 12808125p^9q^2s^2 + 107062500p^6q^4s^2 + 270312500p^3q^6s^2 - 168750000q^8s^2 - 2551500p^{10}lrs^2 \\
& - 5062500p^7q^2rs^2 + 712343750p^4q^4rs^2 + 478828150pq^6rs^2 - 256837500p^8r^2s^2 - -3574812500p^5q^2r^2s^2 \\
& - 14967968750p^2q^4r^2s^2 + 4040937500p^6r^3s^2 + 26400000000p^3q^2r^3s^2 + 17083984375q^4r^3s^3 \\
& - 21812500000p^4r^4s^2 - 24375000000pq^2r^4s^2 + 39375000000p^2r^5s^2 - 127265625p^5q^3s^3 - 680234375p^2q^5s^3 \\
& - 2048203125p^6qrs^3 - 18794531250p^3q^3rs^3 - 25050000000q^5rs^3 + 26621875000p^4qr^2s^3 \\
& + 37007812500pq^3r^2s^3 - 105468750000p^2qr^3s^3 - 56250000000qr^4s^3 + 1124296875p^7s^4 + 9251953125p^4q^2s^4 \\
& - 8007812500pq^4s^4 - 4004296875p^5rs^4 + 179931640625p^2q^2rs^4 - 75703125000p^3r^2s^4 \\
& + 133447265625q^2r^2s^4 + 363281250000pr^3s^4 - 91552734375p^3qs^5 - 19531250000q^3s^5 \\
& - 751953125000pqrs^5 + 157958984375p^2s^6 + 748291015625rs^6
\end{aligned}
$$

A.11. Caso particular

En esta sección se considera un caso particular de polinomios de grado 5, en el que debido a como está definido, las cuentas se simplifican significativamente. El polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ queda definido de la siguiente forma,

$$f = x^5 + ax + b$$

El procedimiento a seguir es exactamente igual al desarrollado en el apartado anterior, por ello únicamente se muestran en esta sección las diferencias.
En primer lugar, la ecuación resolvente es en efecto más simple,

$$R(\theta; f) = x^6 + 8ax + 40a^2x^4 + 160a^3x^3 + 400a^4x^2 + (512a^5 - 3125b^4)x + (256a^6 - 9375ab^4)$$

Al igual ocurre con los coeficientes T_i, ϕ, u, v.

$$
\begin{aligned}
T_1 = {} & (512a^5 - 15625b^4 + 768a^4\theta + 416a^3\theta^2 + 112a^2\theta^3 + 24a\theta^4 + 4\theta^5)/(50b^3) \\
T_2 = {} & (3840a^5 - 78125b^4 + 4480a^4\theta + 2480a^3\theta^2 + 760a^2\theta^3 + 140a\theta^4 + 30\theta^5)/(512a^5b + 6250b^5) \\
T_3 = {} & (-18880a^5 + 78125b^4 - 34240a^4\theta - 21260a^3\theta^2 - 5980a^2\theta^3 - 1255a\theta^4 - 240\theta^5)/(2b^2) \\
T_4 = {} & (68800a^5 + 25000a^4\theta + 11500a^3\theta^2 + 3250a^2\theta^3 + 375a\theta^4 + 100\theta^5)/(512a^5 + 6250b^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi = {} & (-1036800a^5 + 48828125b^4 - 2280000a^4\theta - 1291500a^3\theta^2 - 399500a^2\theta^3 - 76625a\theta^4 \\
& -16100\theta^5)/(256a^5 + 3125b^4)
\end{aligned}
$$

$$u = 0$$

$$
\begin{aligned}
v = {} & (-2040a^7 + 25000a^2b^4 - 3072a^6\theta - 6250ab^4\theta - 1664a^5\theta^2 - 3125b^4\theta^2 - 448a^4\theta^3 \\
& -96a^3\theta^4 - 16a^2\theta^5)/(32000a^5b^3 + 390625b^7)
\end{aligned}
$$