



Universidad
Zaragoza

Universidad de Zaragoza

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS PARA LA DISIPACIÓN DE
ENERGÍA EN UNIONES DE VASOS
SANGUÍNEOS

Trabajo de Fin de Grado

Autor:

David Perez Perez

Director:

Javier Murillo Castarlenas

2021/2022

Índice

1. Introducción y Objetivos	3
2. Desarrollo del Modelo Matemático	5
3. Resolución Numérica	6
3.1. Discretización mediante volúmenes finitos	6
3.2. Método de Roe	6
3.3. Correcciones de entropía	8
3.4. Terminos fuente	9
3.5. Condiciones de contorno	10
3.6. Uniones	11
3.6.1. Estimación por volúmenes de control	13
3.7. Evolución de K_i frente a cambios en los parámetros del sistema	15
3.7.1. Ángulos ϕ_i	16
3.7.2. Viscosidad dinámica μ	18
3.7.3. Caudal volumétrico q	19
4. Conclusiones	20
Bibliografía	21
A. Anexo: Estudio de los efectos de la viscosidad dinámica sobre una rotura de presa subcrítica	25
B. Anexo: Criterio de Termalización	26
C. Anexo: Ecuaciones de aguas poco profundas	27

1. Introducción y Objetivos

El modelado numérico de flujo unidimensional (1D) en redes de dominios espaciales unidos por uniones ofrece un compromiso satisfactorio entre la calidad de las predicciones numéricas y el coste computacional que en flujo tridimensional es muy elevado. Hay una gran variedad de aplicaciones de flujo 1D en la literatura, como redes de tuberías industriales, flujo de tráfico, flujos de agua en canales abiertos o flujo sanguíneo en el sistema circulatorio humano [3]. La física del flujo en la bifurcación es compleja en bifurcaciones simétricas o asimétricas y también en uniones arbitrarias. El modelado 1D ha demostrado ser una herramienta precisa en aplicaciones complejas, como la hemodinámica computacional en modelos arteriales deformables bajo flujo pulsátil, generando resultados competitivos si se compara con simulaciones tridimensionales (3D) [28, 29]. El flujo en tubos elásticos y plegables es de gran interés, especialmente en el contexto de la hemodinámica, la fisiología y la medicina, y ha sido analizado en muchos estudios [13, 24, 2, 11, 9, 15, 16, 22] en las últimas décadas.

Sin embargo, el modelado numérico de flujo 1D en redes sigue siendo un desafío. En el marco 1D, la unión es un punto singular, donde el esquema numérico no se puede aplicar directamente y, por lo tanto, se deben prescribir condiciones de contorno internas [6], lo que lleva al Problema de la unión de Riemann. Los métodos existentes se basan en enfoques de acoplamiento para la conservación de la energía o el momento con la ecuación de continuidad [6, 27, 26] considerando solo condiciones de flujo subcríticas o subsónicas. Esos métodos asumen que las soluciones del problema de Riemann involucran solo ondas de rarefacción o decompresión.

En flujos multidireccionales pulsátiles, el cambio entre ecuaciones empíricas al invertir el flujo puede introducir discontinuidades poco realistas en las formas de onda hemodinámicas simuladas. Además es necesario utilizar un método unificado para estimar los coeficientes de pérdida que se pueden aplicar a cualquier cruce (es decir, cualquier número de ramas en cualquier ángulo) y cualquier régimen de flujo.

Una alternativa para superar las dificultades que tiene que enfrentar el enfoque 1D en las, es aumentar localmente el número de dimensiones espaciales [3, 25, 12], evitando así el costo computacional del modelado multidimensional en todo el dominio. En [3], las redes de canales se modelaron con uniones donde las ecuaciones de aguas poco profundas se resolvieron utilizando la geometría verdadera, mientras que en los canales se resolvieron las ecuaciones 1D habituales. Otro ejemplo es el modelado de flujo de gas transitorio en [4], donde el flujo dentro de la unión es definido como un contenedor prismático 3D.

En el contexto de los vasos circulatorios, los modelos de unión se pueden definir usando un volumen de confluencia con propiedades mecánicas [Zhang2017, 7] dependientes del tamaño de celda utilizado para discretizar espacialmente los vasos 1D y de la rigidez de los vasos que se conectan en la misma unión.

En este trabajo seguiremos el enfoque basado en la solución exacta del problema de Riemann en la unión (PRU) [15, 10, 14, 16, 6]. Las soluciones exactas se basarán en las relaciones de onda para choque y rarefacciones (u ondas de compresión y decompresión) derivadas de un análisis de estructura propia estándar del sistema hiperbólico de ecuaciones para el flujo en tubos colapsables en [5]. El sistema proporcionará las relaciones de onda que vinculan los estados proporcionados por dominios 1D que comparten una unión.

Al resolver el problema de Riemann en la unión queremos obtener condiciones de acoplamiento completamente consistentes con el sistema hiperbólico subyacente de las leyes de conservación,

por lo que la técnica usada para resolver el PRU resultante se puede usar en combinación con cualquier esquema numérico de orden arbitrario de precisión. Los estados resultantes se utilizarán para calcular los flujos numéricos que necesita el esquema explícito para desarrollar la solución dentro del dominio 1D. De esta forma, se prescribirán las condiciones de contorno internas evitando el uso de formulaciones tipo contenedor para las uniones o el uso de modelos multidimensionales.

El esquema explícito seleccionado en este trabajo para computar los flujos de actualización en las celdas dentro del dominio 1D es el método de Roe de primer orden [18, 20] y ampliado para tratar con términos fuente discontinuos [18, 17].

El esquema numérico en las redes de vasos debe completarse con dos tipos de condiciones de contorno: externas e internas (las subyacente en nuestro caso). En ambos casos la evolución temporal del sistema está gobernada por el estado en el interior del vaso y por las ondas que entran en el vaso desde fuera de sus límites. Para proporcionar un enfoque adecuado para el PRU, primero es necesario explorar las condiciones de contorno en las secciones de entrada o salida, y luego extender las conclusiones resultantes para formular la solución del PRU.

Por lo tanto, la definición de condiciones de contorno externo en secciones de entrada o salida está relacionada con el problema equivalente en una confluencia de vasos.

Las uniones entre vasos pueden involucrar la mezcla o división de fluidos. El flujo alrededor de la unión es muy complejo y es posible la recirculación en los vasos de salida. Por ejemplo en tuberías rígidas, en las uniones, la división real del flujo dependerá de las caídas de presión en los dos tramos aguas abajo. Aparte de las pérdidas habituales en los vasos debidos a la fricción con la pared, existen pérdidas específicas en la propia unión. Para ilustrar mejor esta complejidad vamos a analizar la Figura 1, que muestra la distribución de la presión en una unión, donde el flujo entra a través del vaso 1.

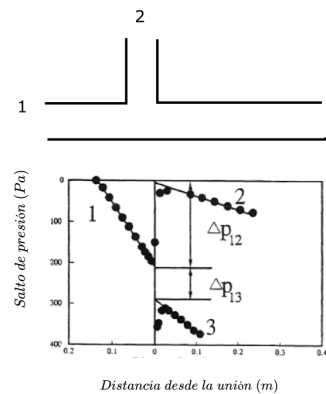


Figura 1: Distribución de la presión en una unión.

El perfil de presión no es obvio: como la velocidad en la tubería 2 es más baja que en la tubería 1, la presión aumenta. Las caídas de presión de la unión se definen a partir de la extrapolación de los perfiles de presión de las regiones no perturbadas alejadas de la unión en la dirección de la unión. Obviamente, las caídas de presión en la unión son más importantes cuando las caídas de presión en los vasos aguas abajo por fricción son pequeñas.

En los modelos de flujo sanguíneo o respiratorio de orden reducido (0D/1D), las pérdidas de presión en las uniones generalmente se desprecian. Sin embargo, estos pueden volverse importantes donde las velocidades son altas y ocurre una redirección significativa del flujo. Los métodos

actuales para estimar las pérdidas se basan en ecuaciones empíricas relativamente complejas que son solo es válido para geometrías de unión y regímenes de flujo específicos.

Las discontinuidades en las formas de onda simuladas se evitaron al extender el método basado en el volumen de control de Bassett et al. para incorporar una rama de suministro de "pseudodato", un recipiente efectivo imaginario que contiene todo el flujo de entrada a la unión. Energía el intercambio entre corrientes de flujo divergentes también se tuvo en cuenta empíricamente. La formulación se validó utilizando dinámica de fluidos computacional de alta resolución en una amplia gama de condiciones de flujo y configuraciones de unión.

En una simulación 1D pulsátil que exhibe transiciones entre cuatro regímenes de flujo diferentes, el nueva formulación produjo transiciones suaves en las pérdidas de presión calculadas.

En este trabajo, las ecuaciones de flujo en vasos se resuelven para cada rama utilizando el solucionador de Riemann Aumentado [18, 17]. El esquema numérico debe completarse con las condiciones de contorno adecuadas. Las condiciones de contorno de entrada y salida se proporcionan de acuerdo con [8] mientras que las condiciones de contorno internas, necesarias en el nodo de unión, se proporcionan mediante la aproximación de Riemann.

2. Desarrollo del Modelo Matemático

El modelo utilizado para la simulación del fluido en este TFG, consta de dos ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, derivadas de las ecuaciones de Navier-Stokes [19]. La primera de ellas establece la conservación de masa y la segunda implica la conservación del momento lineal dentro de los vasos.

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_\chi \mathcal{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{G}_\chi \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_\chi = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{f}{\rho} - gA \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Donde χ es la coordenada axial, A es el sección transversal y Q el flujo o caudal del vaso. También tenemos que ρ la densidad de la sangre 1 g/cm^3 , p es la distribución promedio de presión interna del vaso, f es la fuerza de fricción a la que se somete el fluido por unidad de longitud y η es una coordenada perpendicular a la superficie terrestre.

Si la presión es igual a $p(x, t) = p_{ext} + p_{tr}$, donde p_{ext} es la presión externa al vaso y p_{tr} es la presión transmural elástica, imponemos que la distribución de la presión sea igual a esta ultima, que a su vez se formula como:

$$p(x, t) = p_{tr} = p_0 + K_0 \sigma, \quad \sigma = \alpha^m - \alpha^n = \left(\frac{A}{A_0} \right)^m - \left(\frac{A}{A_0} \right)^n \quad (2)$$

Siendo K_0 el coeficiente de rigidez del vaso, A_0 es el valor de la sección transversal en la que el canal se encuentra en equilibrio, σ la diferencia adimensional de presión transmural y n y m dos exponentes usados para ajustar el modelo al comportamiento medido en arterias, con $m = 1/2$ y $n = 0$ y al de venas, con $m = 10$ y $n = -3/2$.

Los conductos simulados en este TFG solo variaran a lo largo del eje axial A y Q . El resto de magnitudes usadas para definir el sistema, como A_0 , K_0 , m , $n...$ son constantes a lo largo del mismo vaso.

Esta hipótesis nos permite generar la función φ , cuya derivada respecto a la coordenada axial es igual a la derivada de la presión respecto a la misma coordenada. Ello nos permite pasar el

aporte a la ecuación de la presión a la izquierda de esta, incluyéndola en forma de φ dentro de la segunda componente del flujo:

$$\varphi = D_0 \left(\frac{m}{m+1} \alpha^{m+1} - \frac{n}{n+1} \alpha^{n+1} \right), \quad D_0 = \frac{A_0 c_0^2}{m-n} \quad (3)$$

$$\mathcal{F}_\varphi(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \partial_t \mathbf{U} + \partial_\chi \mathcal{F}_\varphi(\mathbf{U}) \\ \kappa \frac{Q^2}{A} + \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_\chi = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\chi \\ 0 \\ -\frac{f}{\rho} - gA \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para resolver las ecuaciones del modelo, igualamos la derivada del vector \mathcal{F}_φ al producto de su matriz Jacobiana y el vector derivada de $\mathbf{U}(x, t)$ respecto a la coordenada axial.

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\varphi}{\partial \chi} = \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \chi} \quad (5)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathcal{F}_\varphi}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

Definimos c dentro de la matriz Jacobiana como $\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}$, que se calcula como:

$$c^2 = \frac{c_0^2}{m-n} (m\alpha^m - n\alpha^n), \quad c_0 = \sqrt{\frac{K_0}{\rho} (m-n)} \quad (6)$$

Definido c , podemos definir el numero de Froude como $Fr = \frac{u}{c}$. Este numero adimensional deberá cumplir durante la totalidad de la simulación, la desigualdad $|Fr| \leq 1$, asegurando que el flujo en el vaso se encuentre constantemente en un estado subcrítico. De vulnerarse la desigualdad, sabríamos que el fluido se encuentra en un estado supercrítico, indeseable para este trabajo.

Diagonalizando la matriz Jacobiana, obtenemos los autovalores $\lambda_1 = u - c$ y $\lambda_3 = u + c$ (siendo u la velocidad del fluido en el vaso), que definen la velocidad de propagación de las ondas en el fluido.

3. Resolución Numérica

3.1. Discretización mediante volúmenes finitos

Definidas las ecuaciones que rigen el comportamiento del fluido en los vasos, utilizamos el método resolución numérica por elementos finitos o MEF. Ello implica la división del canal en intervalos espaciales y temporales de dimensiones Δx y Δt , respectivamente, llamados celdas. En cada celda se realizara un promedio de las variables A y u , permitiendo que el valor obtenido pase a utilizarse de manera aproximada como el valor que toma la función en la totalidad de la celda. Este valor se nombrara como $(\cdot)_i^n$, donde i hace referencia a la posición y t al tiempo de la celda.

3.2. Método de Roe

El método de Roe, es un método de resolución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, basado en el esquema de Godunov. Este método presupone la utilización del método MEF y tiene como objetivo dar solución al Jacobiano $\frac{\partial \mathcal{F}_\varphi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{J}$, mediante la aceptación de las siguientes hipótesis:

Aceptando estas condiciones establecemos que:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{c}^2 - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}}, \quad \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{A_{i+1}u_{i+1} + \sqrt{A_i}u_i}}{\sqrt{A_{i+1}} + \sqrt{A_i}} \quad (7)$$

$$\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{c_0^2}{m-n} \left(m \left(\bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \right)^m - n \left(\bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \right)^n \right), \quad \bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{2}$$

Notar que $\bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}$ esta siendo elevado a m y n . Realizada la aclaración en cuanto a la notación, integramos las ecuaciones a lo largo de un espacio centrado en la frontera de dos celdas adyacentes podemos obtener que la fórmula de actualización de los valores de la celda es:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \left(\delta\mathbf{M}_{i+\frac{1}{2}}^- + \delta\mathbf{M}_{i+\frac{1}{2}}^+ \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (8)$$

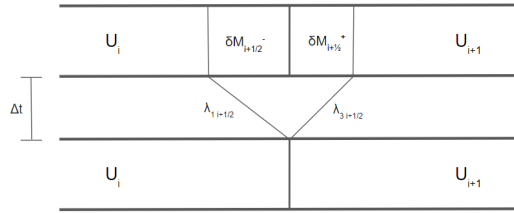


Figura 2: Diagrama del proceso de generación de los choques en la frontera, utilizados para la posterior actualización de la celda

Siendo $\delta\mathbf{M}_{i\pm\frac{1}{2}}^\pm$ una fluctuación calculable como la suma de choques:

$$\delta\mathbf{M}_{i\mp\frac{1}{2}}^\pm = \sum_j \left(\tilde{\lambda}^\pm \alpha \theta \tilde{e} \right)_{i\mp\frac{1}{2}}^j \quad (9)$$

Notar que j es un índice encargado de recorrer los choques sumados en la fluctuación (habitualmente 1 y 3) y además que $(\cdot)_{i+\frac{1}{2}}$ hace referencia a una variable cuyo calculo requiere de las magnitudes de la celda $(\cdot)_{i+1}$ y $(\cdot)_i$. Los términos que aparecen en la fórmula de la fluctuación, se calculan como:

$$\left(\tilde{\lambda}^\pm \right)_{i+\frac{1}{2}}^j = \left(\frac{\tilde{\lambda}^\pm |\tilde{\lambda}|}{2} \right)_{i+\frac{1}{2}}^j, \quad \theta_{i+\frac{1}{2}}^j = 1 - \left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\lambda} \alpha} \right)_{i+\frac{1}{2}}^j, \quad \tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^j = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}^j \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{\tilde{\lambda}^3 \delta A - \delta q}{2\tilde{c}} \right)_{i+\frac{1}{2}}, \quad \alpha_{i+\frac{1}{2}}^3 = \left(\frac{-\tilde{\lambda}^1 \delta A + \delta q}{2\tilde{c}} \right)_{i+\frac{1}{2}}$$

Estas variables a su vez son obtenidas mediante variables mas básicas calculables como:

$$\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1 = (\tilde{u} - \tilde{c})_{i+\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^3 = (\tilde{u} + \tilde{c})_{i+\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$\delta A = A_{i+1} - A_i, \quad \delta q = A_{i+1}u_{i+1} - A_iu_i$$

$$\tilde{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^1 = \left(-\frac{\tilde{S}_2}{2\tilde{c}} \right)_{i+\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^3 = \left(\frac{\tilde{S}_2}{2\tilde{c}} \right)_{i+\frac{1}{2}}$$

Siendo \tilde{S}_2 el termino fuente, que dará cuenta de los efectos causados por las variaciones de altura del fondo, además de los dados por la fricción a la que se somete el fluido en el vaso sanguíneo. La fórmula mediante la que se calculara este termino además de sus limites, serán expuesto en un apartado posterior dedicado.

Definidas todas las magnitudes, las calculamos para cada pareja de celdas adyacentes y obtenemos las variables Δx como el cociente de la longitud del vaso por el numero de celdas espaciales requeridas y Δt como:

$$\Delta x = \Delta t = CFL \frac{\Delta x}{Max \left(|\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}| \right)} \quad (12)$$

Siendo CFL un valor numérico de entre (0, 1), usado para ajustar la simulación y $Max \left(|\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}| \right)$ el máximo modulo alcanzado por $\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1$ o $\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^3$ en alguna iteración.

Establecido una parte del método de simulación, se nos posibilita el empezar a realizar simulaciones de fluidos como la siguiente.

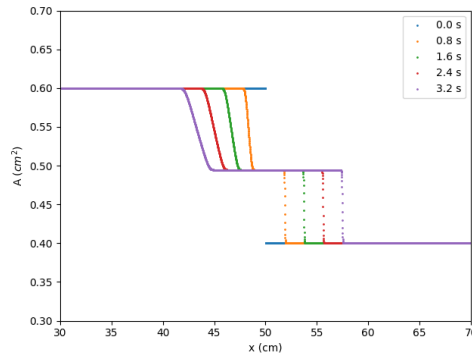


Figura 3: Evolución de un torniquete subcrítico, con $CFL = 0,5$

En la figura 3 vemos un torniquete sin fricción, ni variaciones de fondo y sometida a una distribución de presión estática, formulada en el final de la sección previa. La simulación nos muestra que un sistema como el de la figura, genera dos ondas de direcciones opuestas, que recorren el canal provocando que este tome como valor del área a la media aritmética de las dos zonas, $0,5 \text{ m}^2$.

3.3. Correcciones de entropía

Que el método de Roe se base en aproximar la evolución de las condiciones de estado de las celdas, mediante la suma de choques, lo vuelve preciso a la hora de estudiar choques los mismos choques en el fluido, a costa de generar resultados imprecisos en rarefacciones o flujos transcíticos en los que el fluido pasa de estado supercrítico a subcrítico, punto en el que una de las velocidades de las ondas $\tilde{\lambda}^1$ o $\tilde{\lambda}^3$, toma un valor próximo a 0, estancando el flujo de la información.

Para corregir estas imprecisiones, se proponen dos correcciones a la simulación que aseguran resultados precisos en roturas transcíticas de presas, entre otras [19]. En primer lugar tenemos la corrección para la rarefacción transcítica zurda, que se da cuando se cumple $\lambda_i^1 < 0 < \lambda_{i+1}^1$, siendo λ_i^1 la velocidad de la onda calculada con los datos propios de la celda i . De cumplirse esta desigualdad, el aporte a la fluctuación calculado mediante $\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1$ pasa a separarse en dos componentes que toman como datos para su cálculo $\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1$, junto con $\tilde{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^1$ y $\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1$, junto con $\tilde{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^1$, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\check{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1 &= \lambda_i^1 \frac{\lambda_{i+1}^1 - \bar{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1}{\lambda_{i+1}^1 + \lambda_i^1} & \check{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^1 &= \bar{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^1 \\
\check{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1 &= \lambda_{i+1}^1 \frac{\bar{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1 - \lambda_i^1}{\lambda_{i+1}^1 + \lambda_i^1} & \check{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^1 &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

En segundo lugar tenemos la corrección para la rarefacción transcítica diestra, que de manera similar a la rarefacción transcítica zurda, se da cuando se cumple $\lambda_i^3 < 0 < \lambda_{i+1}^3$. De nuevo se dividirá el aporte a la fluctuación calculado mediante $\bar{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^3$ en dos componentes calculados mediante las variables $\check{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^3$, junto con $\check{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^3$ y $\check{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^3$, junto con $\check{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^3$, respectivamente. Estas variables se calculan de manera equivalente a lo mostrado para el anterior caso, aunque con dos diferencias. Por un lado se tomaran velocidades λ^3 , en vez de λ^1 para los cálculos y por otro lado se intercambiaran los valores de $\check{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^1$ y $\check{\beta}_{i+\frac{1}{2}}^1$.

Notar que debe cumplirse con las nuevas variables de ambas situaciones, que su suma debe ser igual a la $(\check{\cdot})_{i+\frac{1}{2}}^j$ que sustituyan.

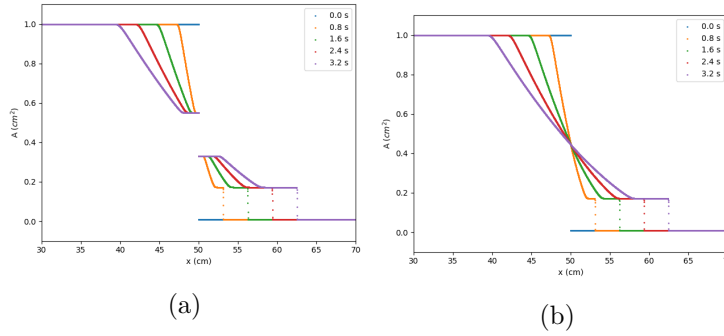


Figura 4: Comparación de la evolución de un torniquete sin (a) y con (b) corrección de la entropía, con $CFL = 0,5$

Realizando una simulación de un torniquete que transiciona de una fase supercrítica a otra subcrítica, podemos notar los efectos de la corrección expuesta en el apartado, ya que se puede observar como en la simulación no corregida aparece una frontera vertical separando las dos zonas del fluido, mientras que en la simulación corregida la susodicha frontera desaparece.

3.4. Termino fuente

Como se ha explicado en un apartado previo, el termino fuente $\bar{S}_{2, i+\frac{1}{2}}$ es un termino que da cuenta de los efectos causados por las variaciones de altura del fondo, además de los dados por la fricción a la que se somete el fluido en el canal.

Estos efectos se incluyen en las ecuaciones del fluido mediante:

$$-\frac{f}{\rho} - gA \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{14}$$

Donde $f = C_f u$ y a su vez $C_f = \zeta \pi \mu \sqrt{\frac{A_0}{A}}$, siendo μ la viscosidad dinámica del fluido, que en el caso de la sangre es $3,5 \cdot 10^{-2} P$ y ζ una constante adimensional dependiente del perfil de velocidades del fluido. Experimentalmente se ha estimado que ζ es igual a 22 para arterias extensas y 8 para vasos pequeños.

Definida la función analítica pasamos a estudiar la forma en la que esta será discretizadas, pudiéndose así implementar en el programa. $\bar{S}_{2\ i+\frac{1}{2}} = (\bar{S}_\tau + \bar{S}_z)_{i+\frac{1}{2}}$, donde el primero considera los efectos de la fricción, mientras que el segundo los del fondo.

El termino fuente de la fricción se calcula como:

$$\bar{S}_{\tau\ i+\frac{1}{2}} = -\Delta x (C_f u_{min} |\tilde{u}|)_{i+\frac{1}{2}} = -\Delta x \left(\frac{\zeta \pi \mu u_{min} |\tilde{u}|}{\sqrt{\alpha}} \right)_{i+\frac{1}{2}} \quad (15)$$

donde $u_{mini+\frac{1}{2}}$ toma el mínimo valor absoluto entre u_i y u_{i+1} . Para ver un estudio de la evolución del perfil de una rotura de presa, frente a la viscosidad del fluido Anexo A.

Para nuestro trabajo se tomara que el fondo del vaso es independiente de la posición, lo que provoca que este sea constante e igual a 0. La incorporación de este termino a las ecuaciones de actualización de las celdas, puede ocasionarnos la aparición de errores a la hora de estimar el termino de la fricción, sobrestimándolo bajo ciertas circunstancias y en otras ocasiones dándonos como resultado áreas negativas, lo que carece de sentido físico. Para evitar estos errores se limitara el valor del termino fuente siguiendo las directrices expuestas en el artículo [19].

3.5. Condiciones de contorno

En este trabajo, se estudiarán dos tipos de condiciones de contorno, obviando las uniones que debido a su importancia se trabajaran en su respectivo apartado. Estas vendrán dadas por la imposición del calado o del caudal para flujos subcríticos y en función de nuestra elección las funciones utilizadas serán ligeramente distintas [21]. Escogemos imponer la condición del flujo subcrítico, debido a que la simulación de otros tipos de flujos presentan un grado de complejidad impropio para un TFG.

Los efectos de las fronteras sobre el fluido simulado, vendrán reguladas mediante un conjunto de variables estrella $(\cdot)^*$. Definiremos para cada vaso un par de parejas de variables estrella, estando una asignada al limite de la izquierda, algo que denotaremos mediante el índice k , que tomara el valor 1 para este borde, mientras que la otra lo estará al limite de la derecha, donde se cumplirá que $k = N$, siendo N el numero de celdas en las que se divide el vaso. Gracias a estas variables podremos calcular las fluctuaciones asociadas con cada frontera:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{M}_{i-\frac{1}{2}}^+ &= F_\varphi(\mathbf{U}_1) - F_\varphi(\mathbf{U}_k^*), \quad k = 1 \\ \delta \mathbf{M}_{i+\frac{1}{2}}^- &= F_\varphi(\mathbf{U}_k^*) - F_\varphi(\mathbf{U}_N), \quad k = N \end{aligned} \quad (16)$$

Los valores de cada pareja de variables estrella, serán obtenidos mediante un proceso iterativo que partirá de la identificación del estado en la frontera. Para ello sera utilizada la variable $d\alpha_k = \alpha_k^* - \alpha_k^n$, la cual de cumplir $d\alpha_k \leq 0$ nos indicara que tenemos una rarefacción en la frontera k , mientras que si su valor es positivo tendremos un choque. Una vez identificado el estado del limite se procederá al calculo de sus variables asociadas.

Para ello definiremos el vector \mathbf{X} , que contendrá las variables estrella de la frontera y la función \mathbf{E} , dependiente del tipo de condición de si imponemos un calado o caudal. De recibir como entrada al vector \mathbf{X} , con los valores adecuados de las estrellas, deberá dar como resultado 0.

$$\mathbf{E}_{caudal}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} u_k^* - u_k + gB \\ g\alpha_k^* u_k^* A_0 - gQ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{calado}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} u_k^* - u_k + gB \\ A_0 (A - A_k^*) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_k^* \\ \alpha_k^* \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde Q y A son el caudal y calado, respectivamente, impuestos en la frontera, g es una variable que toma valor 1 si $k = N$ y -1 si $k = 1$ y B es una función igual a dW^* si tenemos una rarefacción y f_g^* si tenemos un choque.

$$dW^* = \int_{\alpha_k}^{\alpha_k^*} da \frac{c(a)}{a}, \quad f_g^* = \sqrt{\frac{1}{A_0} \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_k^*} \right) (\varphi_k^* - \varphi_k)} \quad (18)$$

En caso de que las variables estrella tomen valores adecuados, resolveremos el sistema de ecuaciones no lineales haciendo uso del método iterativo de Picard, que nos establece que es posible alcanzar la solución de \mathbf{X} a través de la suma repetida de variaciones ($\delta\mathbf{X}$), que se calcularán para cada iteración como la solución de:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{E}}(\mathbf{X}) \delta\mathbf{X} = -\mathbf{E}(\mathbf{X}) \quad (19)$$

Siendo $\mathbf{J}_{\mathbf{E}}$ la matriz Jacobiana calculada como la derivada de \mathbf{E} frente a \mathbf{X} . A su vez esta ecuación de matrices se resolverá usando el método de Cramer.

3.6. Uniones

Las uniones de vasos sanguíneos serán estudiadas como un caso concreto de cálculo de condiciones de contorno para flujos subcríticos. Aunque el método presentado a continuación resulta escalable a uniones de más canales, este trabajo se centrará en la simulación de uniones de tres vasos [21]. Definimos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} (u_k^* - u_k + gB)_1 \\ (u_k^* - u_k + gB)_2 \\ (u_k^* - u_k + gB)_3 \\ \sum_{l=1}^3 (g\alpha_k^* u_k^k A_0)_l \\ p_{T,1} - p_{T,2} \\ p_{T,1} - p_{T,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_{k,1}^* \\ u_{k,2}^* \\ u_{k,3}^* \\ \alpha_{k,1}^* \\ \alpha_{k,2}^* \\ \alpha_{k,3}^* \end{bmatrix} \quad (20)$$

Donde el subíndice numérico nos especifica el vaso al que pertenece cada variable o función y la función $p_{T,i}$ es igual a $p_M + K_0\sigma + \frac{1}{2}\rho u^2$, donde p_M es una constante tomada 0 en este trabajo y el resto es la energía propia del fluido, descrito mediante las variables estrella de la unión. Notar que obviamos las diferencias energéticas debidas a diferencias de altura.

Nuevamente utilizaremos el método iterativo de Picard para calcular los valores de las variables estrella de cada canal, definiéndose así la matriz Jacobiana ($\mathbf{J}_{\mathbf{E}}$), equivalente a la mostrada en el apartado anterior, como:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{E},1} & \mathbf{J}_{\mathbf{E},2} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{E},3} & \mathbf{J}_{\mathbf{E},4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{E},1} = \mathbf{Id}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{E},2} = \begin{bmatrix} \left(g_k \frac{\partial B}{\partial \alpha_k^*}\right)_1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(g_k \frac{\partial B}{\partial \alpha_k^*}\right)_2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(g_k \frac{\partial B}{\partial \alpha_k^*}\right)_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{E},3} = \begin{bmatrix} (g\alpha^* A_0)_1 & (g\alpha^* A_0)_2 & (g\alpha^* A_0)_3 \\ (gu_k^*)_1 & -(gu_k^*)_2 & 0 \\ (gu_k^*)_1 & 0 & -(gu_k^*)_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{E},4} = \begin{bmatrix} (gu^* A_0)_1 & (gu^* A_0)_2 & (gu^* A_0)_3 \\ \left(K_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha_k^*}\right)_1 & -\left(K_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha_k^*}\right)_2 & 0 \\ \left(K_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha_k^*}\right)_1 & 0 & -\left(K_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha_k^*}\right)_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Realizamos una simulación a modo de testeo de una unión de arterias con flujos subcríticos, con $K_0 = 10 \text{ dPa}$ y viscosidad dinámica μ nula.

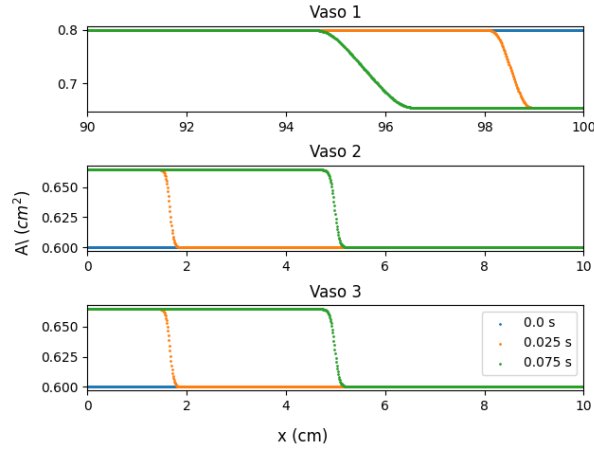


Figura 5: Evolución ideal subcrítica de un vaso padre unido a dos vasos hijos, con $CFL = 0,5$, $\mu = 0$

Vemos que el resultado de la figura 5 se asemeja al esperado en la realidad, donde se deberían generar ondas que recorran los vasos, haciendo aparecer un espacio común a los canales donde se mide un único valor de área igual a la media aritmética de las áreas iniciales, $0,67\text{cm}^2$.

El proceso de calculo presenta una carencia inherente a este, que consiste en que solo simula uniones perfectas que no presentan perdidas de energía. Uniones como las descritas por el método previo no existen en la naturaleza, donde los fluidos se ven sometidos a múltiples procesos mediante los cuales se dan perdidas de energía. Con el objetivo de tratar modelizar estas perdidas aproximando el comportamiento de la simulación a la realidad se toma la decisión de implementar un coeficiente de perdida de energía $p_{loss\ 1,i} = K_i \frac{1}{2} \rho (u_k^*)^2$. Implementaremos la variable dentro del programa editado las componentes de la función vector $\mathbf{E}[5] = p_{T,1} - p_{T,2} - p_{loss\ 1,2}$ y $\mathbf{E}[6] = p_{T,1} - p_{T,3} - p_{loss\ 1,3}$. Puesto que la matriz $\mathbf{J}_{\mathbf{E}}$ es la matriz Jacobiana de \mathbf{E} , su submatriz $\mathbf{J}_{\mathbf{E},3}$ también se verá modificada en consecuencia.

A continuación se profundizará en un método de estimación de la perdida de presión entre vasos, para uniones.

3.6.1. Estimación por volúmenes de control

El primer método fue descrito inicialmente por Bassett [1] y retomado posteriormente por Jonathan P.Mynard y Kristian Valen-Sendstad [23], entre otros y se centra en la realización de un análisis de volumen de control sobre una unión de tres canales, mediante el cual se estima la pérdida energética asociada al proceso de compresión y descompresión al que se somete el fluido cuando fluye del vaso padre, del que proviene la totalidad del fluido que entra en la unión, a uno de los dos vasos hijo.

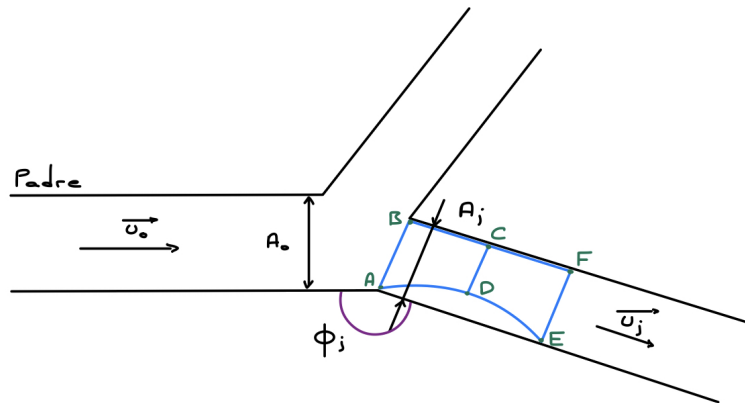


Figura 6: Esquema de la unión, y volumen de control.

En el diagrama en la Figura 6 vemos que un vaso viene definido por una variable u_j y A_j , siendo A_0 y u_0 las propias del canal padre. Vemos además que ϕ_j es un ángulo que toma valores entre $(0, 2\pi)$ y que define el ángulo relativo del vaso hijo con respecto al padre.

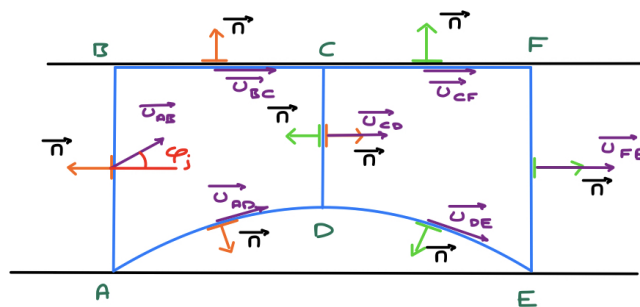


Figura 7: Esquema del volumen de control utilizado

Observando con mayor detalle el volumen de control, vemos que este consta de dos partes, siendo $ABCD$ el volumen en el que el fluido pasa por un proceso de compresión generado por las propiedades geométricas de la unión. Su origen se encuentra en que el vector velocidad del fluido se desvía hacia el interior del vaso en promedio, con un ángulo de $\varphi_j = 3(\pi - \phi_j)/4$ (estimado de manera experimental). Y el volumen $CDEF$ que es aquel en el que el fluido se expande nuevamente hasta tomar como valor de la sección a A_j . Este proceso genera un espacio sobre el que se encuentra el área de control, caracterizado por un flujo turbulento que nos da como resultado una pérdida de energía en el fluido.

Definidos los volúmenes de control calculamos las ecuaciones de conservación de momento lineal, obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{ABCD} \mid A_j (p_{AB} - p_{DC}) &= \rho q_j (u_{DC} - u_{AB} \cos \varphi_j) \\ \mathbf{CDEF} \mid A_j (p_{CD} - p_{EF}) &= \rho q_j (u_{EF} - u_{CD}) \end{aligned} \quad (22)$$

Donde $\varphi_j = \frac{3}{4}(\pi - \phi_{1j})$, la velocidad u_{nk} es la medible en la frontera nk y q_i es el caudal volumétrico del vaso hijo i . Sabiendo que la perdida de energía se da únicamente en el proceso de descompresión, calculamos la ecuación de conservación de energía en el volumen $CDEF$, obteniendo:

$$p_{DC} + \frac{1}{2} \rho u_{DC}^2 = p_{EF} + \frac{1}{2} \rho u_{EF}^2 + p_{loss} \quad (23)$$

reformulable como:

$$p_{loss} = p_{DC} - p_{EF} + \frac{1}{2} \rho (u_{DC}^2 - u_{EF}^2) \quad (24)$$

Asumiendo que $u_{AB} \approx u_0$ y $u_{EF} \approx u_j$, podemos calcular p_{loss} como una expresión dependiente de las siguientes variables:

$$\lambda_j = \frac{q_j}{q_0}, \quad \psi_j = \frac{A_0}{A_j}, \quad \epsilon_j = \frac{A_{DC}}{A_j} \quad (25)$$

Apoyándonos en ellas, podemos expresar u_{EF} y u_{DC} como:

$$u_{EF} = \lambda_j \psi_j u_0 u_{DC} = \lambda_j \psi_j \frac{u_0}{\epsilon_j} \quad (26)$$

La última fórmula es válida debido a que la ecuación de conservación de masa, aplicada a la frontera CD y FE nos otorga la igualdad $A_{CD} u_{CD} = A_j u_j = q_j$. Usando la fórmula de la conservación del momento lineal en el volumen CDEF, obtenemos:

$$\begin{aligned} p_{DC} - p_{EF} &= \rho q_j \frac{A_j u_{EF}}{q_j} \frac{1}{A_j} (u_{EF} - u_{CD}) = \\ &= \rho u_{EF} (u_{EF} - u_{CD}) = \rho u_0^2 \lambda_j^2 \psi_j^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_j}\right) \end{aligned} \quad (27)$$

Si sustituimos esta fórmula en (24) además de sustituir las velocidades, obtenemos:

$$\begin{aligned} p_{loss} &= \rho u_0^2 \lambda_j^2 \psi_j^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_j}\right) + \frac{1}{2} \rho \left(u_0^2 \lambda_j^2 \psi_j^2 \frac{1}{\epsilon_j} - u_0^2 \lambda_j^2 \psi_j^2\right) = \\ &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 \left[2 \lambda_j^2 \psi_j^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_j}\right) + \lambda_j^2 \psi_j^2 \frac{1}{\epsilon_j} - \lambda_j^2 \psi_j^2\right] = \frac{1}{2} \rho \lambda_j^2 \psi_j^2 u_0^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_j}\right)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Puesto que ϵ_j es una variable difícil de medir intentaremos hallarle una equivalencia dependiente del resto de variables, para así sustituirla en la ecuación. Para ello nos apoyamos en cuatro suposiciones:

1. La presión en B es igual a la presión de estancamiento en el vaso del padre.
2. La presión en A es igual a la del padre.
3. La velocidad axial del fluido es uniforme a lo largo de DC.
4. p_{AB} es estimable mediante la media aritmética de p_A y p_B .

De cumplirse estas hipótesis, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$p_{AB} = \frac{p_A + p_B}{2} = \frac{p_0 + p_0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2}{2} = p_{dat} + \frac{1}{4}\rho u_{dat}^2 \quad (29)$$

Puesto que la pérdida de energía se da en el proceso de descompresión y no en el de compresión, podemos obtener:

$$p_{AB} + \frac{1}{2}\rho u_{AB}^2 = p_{DC} + \frac{1}{2}\rho u_{DC}^2, \quad p_{AB} - p_{DC} = \frac{1}{2}\rho (u_{DC}^2 - u_0^2) \quad (30)$$

Sustituimos esta relación en la ecuación de conservación del momento lineal para el volumen de control ABCD:

$$\begin{aligned} p_{AB} - p_{DC} &= \rho u_{EF} (u_{DC} - u_{AB} \cos \varphi_j) \\ \frac{1}{2}\rho \left(u_0^2 \lambda_j^2 \psi_j^2 \frac{1}{\epsilon_j^2} - u_0^2 \right) &= \rho \lambda_j \psi_j u_0 \left(\lambda_j \psi_j \frac{u_0}{\epsilon_j} - u_0 \cos \varphi_j \right) \\ \lambda_j^2 \psi_j^2 \frac{1}{\epsilon_j^2} - 1 &= 2 \lambda_j^2 \psi_j^2 \frac{1}{\epsilon_j} - 2 \lambda_j \psi_j \cos \varphi_j \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{1}{\epsilon_j^2} - 2 \frac{1}{\epsilon_j} + \left(\frac{2}{\lambda_j \psi_j} \cos \varphi_j - \frac{1}{\lambda_j^2 \psi_j^2} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\epsilon_j} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_j^2 \psi_j^2} - \frac{2}{\lambda_j \psi_j} \cos(\varphi_j)}$$

Obviamos la otra solución por poder dar valores negativos, algo no permitible para ϵ_j . Regresamos a la fórmula en (24) y sustituimos la expresión $\frac{1}{\epsilon_j}$ por la obtenida, obteniendo:

$$p_{loss} = \frac{1}{2}\rho u_{dat}^2 \left(1 + \lambda_j^2 \psi_j^2 - 2 \lambda_j \psi_j \cos(\varphi_j) \right) \quad (32)$$

Vemos que los coeficientes de pérdida, asociado a una unión de tres vasos que cumpla nuestras hipótesis, se calculan como:

$$K_i = 1 + \lambda_j^2 \psi_j^2 - 2 \lambda_j \psi_j \cos(\varphi_j) \quad (33)$$

3.7. Evolución de K_i frente a cambios en los parámetros del sistema

Obtenida una función con la que estimar los coeficientes de pérdida en la unión de tres vasos, buscaremos estudiar su evolución frente a los ángulos relativos entre los vasos, el caudal del vaso padre y la viscosidad dinámica del fluido.

Para poder medir el valor de K_i , utilizaremos un criterio que de cumplirse, asumiremos la termalización del sistema y en consecuencia tanto K_1 como K_2 son constantes.

El criterio se basa en pedir que 100 medidas sucesivas y realizadas cada 0.025 s, de las velocidades en la frontera de la unión, tengan todas una desviación estándar inferior al de una sucesión originada por una recta punto pendiente de pendiente $\beta_1 = 0,05 \text{ cm/s}^2$. Su calculo se hace mediante:

$$\sigma = \Delta t \beta_1 \sqrt{N^2 - 2N} \quad (34)$$

Obteniendo que la cota de la desviación es igual a $0,124 \text{ cm/s}$. El calculo detallado se encuentra en el anexo B.

Establecida la cota pasamos a estudiar la evolución de K_i con respecto a los parámetros del sistema en venas y arterias, usando para ello un sistema estándar con viscosidad dinámica $\mu = 0 \text{ P}$, rigidez del vaso $K_0 = 10 \text{ dPas}$, caudal volumétrico aguas arriba $q = 6 \text{ cm}^3/\text{s}$, densidad $\rho = 0,001 \text{ g/cm}^3$, área de equilibrio $A_0 = 1 \text{ cm}^2$, intervalo de tiempo entre las medidas realizadas $\Delta t = 0,025 \text{ s}$ y ángulos del vaso padre con los hijos $\phi_1 = 3\pi/4$ y $\phi_2 = 2\pi - 3\pi/4$, lo que los hace simétricos con respecto al padre.

3.7.1. Ángulos ϕ_i

Definimos cuatro configuraciones a testear, caracterizadas por una relación entre los ángulos ϕ_i y la evolución sera con respecto a ϕ_2 :

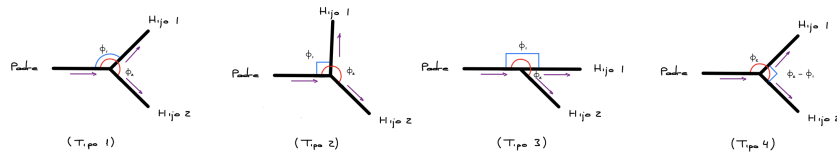


Figura 8: Tipos de unión basados en los ángulos ϕ_i

■ Tipo 1:

Los ángulos entre el vaso padre e hijos son iguales, con lo que el sistema presentara una simetría de rotación C_2 .

$$\phi_1 = 2\pi - \phi_2 \quad (35)$$

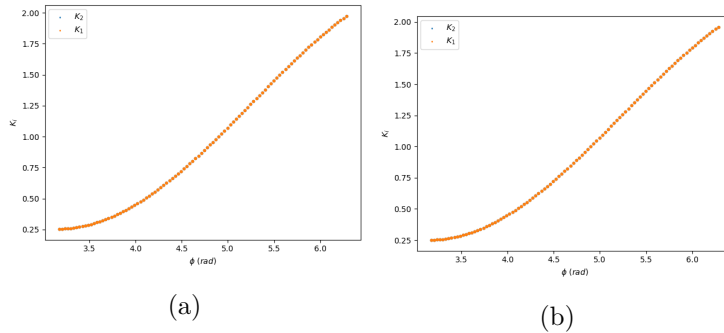


Figura 9: Evolución de K_1 y K_2 con respecto a ϕ_2 para arterias (a) y venas (b), para tipo 1

Podemos observar como el comportamiento es compatible con el que uno esperaría, puesto que debido a la simetría del sistema y teniendo en cuenta que nuestra K_i nace únicamente de las propiedades geométricas del sistema, $K_1 = K_2$, que es compatible con lo medido.

■ Tipo 2:

Forzamos $\phi_1 = \pi/2 \text{ rad}$, con el objetivo de estudiar los efectos sobre K_1 y K_2 , modificando solo el ángulo ϕ_2 , aunque con especial interés en K_1 .

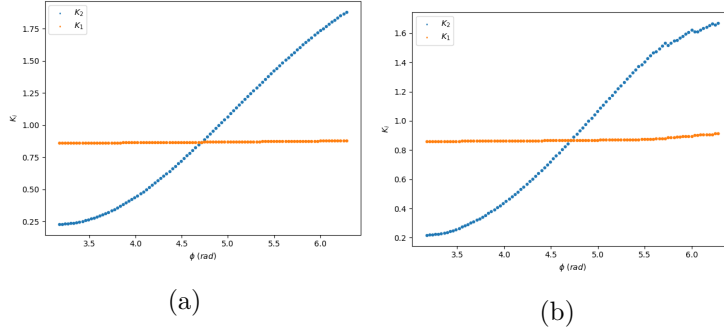


Figura 10: Evolución de K_1 y K_2 con respecto a ϕ_2 para arterias (a) y venas (b), para tipo 2

En este caso podemos notar dos cosas principales. Por un lado tenemos que el comportamiento de K_2 , parece inalterado con respecto al observado en el tipo 1, a excepción del hecho de que en las venas, se ha producido una disminución en el máximo y mínimo (especialmente grande en el máximo). Por otro lado tenemos que $K_1 = 0,87 \pm 5,2 \cdot 10^{-4}$ para arterias y $K_2 = 0,87 \pm 1,38 \cdot 10^{-3}$ en venas. Calculando el coeficiente de variación de Pearson, obtenemos 0.06 % para arterias y 0.16 % para las venas, con lo que la idealización de que K_1 toma un valor constante es un orden de magnitud peor que con las arterias, donde sí que parece una buena aproximación. Pese a ello, se puede notar una pequeña pendiente positiva en los valores de K_1 , $\beta_1 = (5,69 \pm 0,094) \cdot 10^{-3} rad^{-1}$ en arterias y $\beta_1 = (1,30 \pm 0,079) \cdot 10^{-2} rad^{-1}$ en venas.

■ **Tipo 3:**

Repetimos el proceso anterior, pero forzando $\phi_1 = \pi$, en vez.

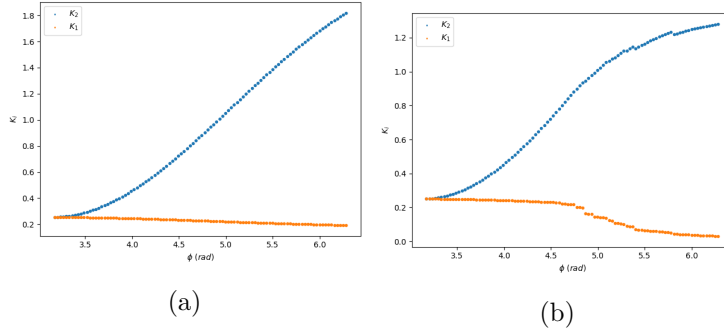


Figura 11: Evolución de K_1 y K_2 con respecto a ϕ_2 para arterias (a) y venas (b), para tipo 3

En esta configuración, la función de K_2 en arterias, continua aparentando una inalteración con respecto al tipo 1 y como diferencias principales con respecto al tipo 2, podemos observar que por un lado los valores de K_1 son próximos a 0 para ángulos próximos a π , lo que es nuevamente compatible con lo que uno esperaría de la realidad, donde este coeficiente de pérdida debería presentar un mínimo para $\phi_i = \pi$. También podemos notar como la idealización de K_1 como una constante ha incrementado su error aparente, en el caso de las venas, al contrario que con las arterias donde parece que únicamente sufrió una translación con respecto al tipo 2. Obtenemos un coeficiente de variación de Pearson de 5.27 % para el modelo constante en venas, un orden de magnitud mas que en el tipo 2, con respecto a las venas.

■ **Tipo 4:**

Esta vez forzaremos que la diferencia entre ϕ_2 y ϕ_1 permanezca constante en $\pi/2$.

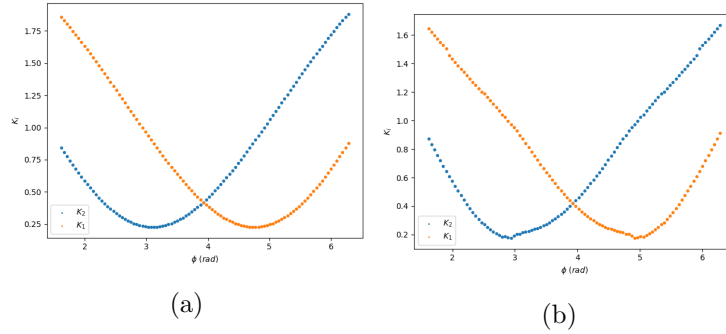


Figura 12: Evolución de K_1 y K_2 con respecto a ϕ_2 para arterias (a) y venas (b), para tipo 4

Este caso es interesante como ejemplo de sistema donde los valores de los coeficientes de perdidas transicionan de un estado a otro en el que se intercambian las posiciones con respecto al coeficiente del vaso opuesto, intercambiando posiciones en el ángulo $\phi_2 = 5\pi/4$, donde se da una configuración simétrica, como en el tipo 1. En esta configuración también podemos ver claramente el comportamiento de K_i en su mínimo ($\phi_2 = 4,71 \text{ rad}$ para K_1 y $\phi_2 = 3,14 \text{ rad}$), donde toma una forma similar a una cuadrática, aunque a medida que se aleja del mínimo se asemeja cada vez mas a una recta punto pendiente. Notar además que al igual que en los anteriores tipos, en este el ruido que aparentemente afecta a las medidas de K_i en las venas, es mayor que en las arterias.

Tras haber experimentado con varios escenarios, parece razonable establecer que la formula de K_i sigue una formula cosenoidal consecuencia directa de la formula original del coeficiente de perdida, que se ve afectado por perturbaciones dependientes del ángulo que toma el vaso opuesto, con respecto al vaso padre.

3.7.2. Viscosidad dinámica μ

Estudiamos la evolución de K_i frente a μ , medida en poises, utilizando además una pendiente $\beta_1 = 0,025 \text{ cm/s}^2$, en vez de la de $0,05 \text{ cm/s}^2$, utilizada previamente para incrementar nuestra confianza sobre la convergencia del sistema, pese a que ello incremente el tiempo de simulación. Esto lo realizamos debido a que se observo la aparición de numerosas no linealidades en la K_i frente a μ , que aparentemente provenían de que el grado de convergencia de K_i , no era el suficiente y reduciendo la pendiente se eliminaban la mayoría de las no linealidades, a excepción de algunas que se comentaran a continuación.

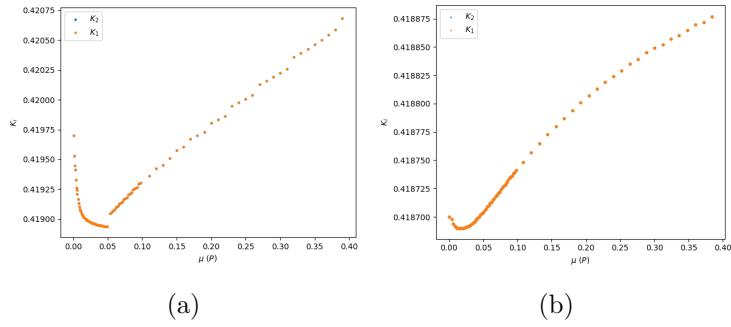


Figura 13: Evolución de K_1 y K_2 con respecto a μ para arterias (a) y venas (b)

Observando los resultados de la simulación, podemos notar varias cosas. Por un lado tenemos que en el entorno próximo a $3,5 \cdot 10^{-2} P$, aparece un mínimo absoluto para la función de K_i , tanto en arterias como en venas, aunque en el caso de las arterias, este dominio del mínimo presenta a su vez una no linealidad notable, la cual no hemos sido capaces de dar un origen certero, aunque pareciera que este esta originado en una convergencia insuficiente de K_i , debido a que otros comportamientos similares a este fueron solucionados, reduciendo la pendiente de la formula de la cota de la desviación estándar. Pese a que esta bifurcación aparenta tener su origen en ello, no lo podemos demostrar, debido a que el sistema con viscosidad no nula tiende a generar situaciones supercríticas en las uniones, pasado un tiempo de simulación y este tope en el tiempo implica que las desviaciones de las medidas de las velocidades, no pueden llegar a ser menores que la cota antes de que se de una unión supercritica, para la cual el programa utilizado no esta preparado, con lo que da error. Como apunte final a las medidas obtenidas, podemos comentar además que la gráfica parece tener una tendencia radical, al aumentar μ .

3.7.3. Caudal volumétrico q

Estudiamos la evolución de K_i frente a q , medida en cm^3/s .

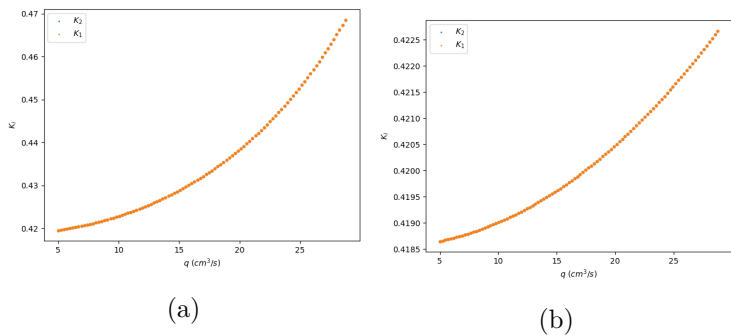


Figura 14: Evolución de K_1 y K_2 con respecto a q para arterias (a) y venas (b)

Estudiando la evolución de los coeficientes de perdida frente al caudal volumétrico del vaso padre, que es introducido en la unión, observamos un crecimiento aparentemente exponencial, que nos vendría a decir que a medida que mas fluido entra en la unión y por ende, mas energía, mayor sera el efecto de perdida energética por el proceso de compresión y descompresión, comentado previamente. Finalmente también podemos notar que la dife-

rencia entre arterias y venas en este apartado no es demasiado relevante, excluyendo el hecho de que el crecimiento de las perdidas en arterias es superior al de las venas.

4. Conclusiones

Se ha implementado una herramienta numérica de simulación predictiva para el cálculo de flujo en redes vasculares. La herramienta permite calcular las variaciones en la distribución de flujo debido a factores como: el cambio de áreas, el cambio de propiedades mecánicas, y el cambio en la geometría incluyendo los ángulos de desviación de las ramas descendentes respecto de la rama principal.

Para poder generar simulaciones realistas, la herramienta es capaz de simular escenarios transitorios, y a través de los mismos llegar a soluciones estacionarias si así se desea.

La metodología empleada en la programación incluye el desarrollo e implementación de técnicas de flujo numérico en las condiciones de contorno del dominio, el desarrollo e implementación de técnicas de flujo numérico en el interior de los vasos y finalmente el desarrollo e implementación de técnicas de flujo numérico en las condiciones de contorno internas del dominio o uniones.

El flujo en el interior de los vasos es correctamente capturado cuando aparecen condiciones de flujo transcrito y se requiere una corrección de la entropía y los términos fuente de las ecuaciones, se han discretizado adecuadamente para evitar la aparición de valores no físicos de las variables conservadas, como por ejemplo, áreas de valor negativo.

En los contornos se han implementado funciones que permiten imponer valores de caudal y área o presión en función del tiempo.

Las condiciones de contorno internas del dominio o uniones se han calculado de forma coherente con las propiedades matemáticas de las leyes de conservación hiperbólicas que definen el flujo en los vasos. De esta forma, las soluciones al problema de la unión se calculan asumiendo que las ondas pueden ser choques o rarefacciones, que las uniones no pueden almacenar masa, y que el nivel de energía en cada vaso de la unión se relaciona con el resto a través de las pérdidas de energía estimadas a partir de la conservación del momento en las uniones.

Se ha estudiado la evolución del parámetro K_i frente a cambios en los ángulos ϕ_i , caudal volumétrico del padre q y viscosidad dinámica del fluido μ , pudiendo observarse resultados aparentemente coherentes con lo esperable para las configuraciones testeadas. De ellos se puede presumir hechos como el carácter perturbativo del ángulo de un vaso, frente al valor del coeficiente de pérdida del vaso opuesto, la mayor sensibilidad al ruido por parte de las simulaciones en venas, la existencia de un mínimo absoluto de K_i frente a μ o la dependencia exponencial de K_i frente al caudal que se introduce en la unión desde el vaso padre. La corroboración total de las conclusiones presentadas requeriría la realización de mas simulaciones con un criterio de termalización mas exigente, además de bajo otras configuraciones donde estudiar la evolución de ellas ante el cambio de parámetros relevantes como μ , q , A_0 , lo que implicaría un tiempo de simulación superior al adecuado para un TFG.

Por ultimo, quedaría abierto el problema encontrado en la figura 13a de convergencia de los coeficientes K_i . Su solución requeriría un nuevo enfoque con el que obtener información mas certera.

Bibliografía

- [1] M. D. Bassett, D. E. Winterbone y R. J. Pearson. “Calculation of steady flow pressure loss coefficients for pipe junctions”. En: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 215.8 (2001), págs. 861-881. DOI: 10.1177/095440620121500801. eprint: <https://doi.org/10.1177/095440620121500801>. URL: <https://doi.org/10.1177/095440620121500801>.
- [2] S Bassez, P Flaud y M Chauveau. “Modeling of the deformation of flexible tubes using a single law: application to veins of the lower limb in man”. En: *Journal of biomechanical engineering* 123.1 (feb. de 2001), págs. 58-65. ISSN: 0148-0731. DOI: 10.1115/1.1336143. URL: <https://doi.org/10.1115/1.1336143>.
- [3] Francesca Bellamoli, Lucas O. Müller y Eleuterio F. Toro. “A numerical method for junctions in networks of shallow-water channels”. En: *Applied Mathematics and Computation* 337 (2018), págs. 190-213. ISSN: 0096-3003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.05.034>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300318304430>.
- [4] Alfredo Bermúdez, Xián López y M. Elena Vázquez-Cendón. “Treating network junctions in finite volume solution of transient gas flow models”. En: *Journal of Computational Physics* 344 (2017), págs. 187-209. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.04.066>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999117303546>.
- [5] A. Siviglia Eleuterio F. “Flow in Collapsible Tubes with Discontinuous Mechanical Properties: Mathematical Model and Exact Solutions”. En: *Communications in Computational Physics* 13.2 (2013), págs. 361-385. ISSN: 1991-7120. DOI: <https://doi.org/10.4208/cicp.210611.240212a>. URL: http://global-sci.org/intro/article_detail/cicp/7226.html.
- [6] Mohamed Elshobaki, Alessandro Valiani y Valerio Caleffi. “Numerical modelling of open channel junctions using the Riemann problem approach”. En: *Journal of Hydraulic Research* 57.5 (2019), págs. 662-674. DOI: 10.1080/00221686.2018.1534283. eprint: <https://doi.org/10.1080/00221686.2018.1534283>. URL: <https://doi.org/10.1080/00221686.2018.1534283>.
- [7] Jose-María Fullana y Stéphane Zaleski. “A branched one-dimensional model of vessel networks”. En: *Journal of Fluid Mechanics* 621 (2009), págs. 183-204. DOI: 10.1017/S0022112008004771.
- [8] MP Garcia-Navarro y JM Savirón. “Numerical simulation of unsteady flow at open channel junctions”. En: *Journal of hydraulic research* 30.5 (1992), págs. 595-609.
- [9] H. Ho, K. Mithraratne y P. Hunter. “Numerical Simulation of Blood Flow in an Anatomically-Accurate Cerebral Venous Tree”. En: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 32 (2013), págs. 85-91.

- [10] P. G. Huang y L. O. Muller. “Simulation of one-dimensional blood flow in networks of human vessels using a novel TVD scheme”. En: *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* 31.5 (2015). e02701 CNM-Sep-14-0153.R1, e02701. DOI: 10.1002/cnm.2701. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cnm.2701>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cnm.2701>.
- [11] Emilie Marchandise y Patrice Flaud. “Accurate modelling of unsteady flows in collapsible tubes”. En: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 13.2 (2010). PMID: 20373183, págs. 279-290. DOI: 10.1080/10255840903190726. eprint: <https://doi.org/10.1080/10255840903190726>. URL: <https://doi.org/10.1080/10255840903190726>.
- [12] E. Miglio, S. Perotto y F. Saleri. “Model coupling techniques for free-surface flow problems: Part I”. En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 63.5 (2005). Invited Talks from the Fourth World Congress of Nonlinear Analysts (WCNA 2004), e1885-e1896. ISSN: 0362-546X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.03.083>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X05003378>.
- [13] P. Morgan y K.H. Parker. “A mathematical model of flow through a collapsible tube—I. Model and steady flow results”. En: *Journal of Biomechanics* 22.11 (1989), págs. 1263-1270. ISSN: 0021-9290. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(89\)90229-7](https://doi.org/10.1016/0021-9290(89)90229-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021929089902297>.
- [14] Lucas O. Müller y Pablo J. Blanco. “A high order approximation of hyperbolic conservation laws in networks: Application to one-dimensional blood flow”. En: *Journal of Computational Physics* 300 (2015), págs. 423-437. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.07.056>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999115005094>.
- [15] Lucas O. Müller y Eleuterio F. Toro. “A global multiscale mathematical model for the human circulation with emphasis on the venous system”. En: *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* 30.7 (2014), págs. 681-725. DOI: 10.1002/cnm.2622. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cnm.2622>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cnm.2622>.
- [16] Lucas O. Müller y Eleuterio F. Toro. “Enhanced global mathematical model for studying cerebral venous blood flow”. En: *Journal of Biomechanics* 47.13 (2014), págs. 3361-3372. ISSN: 0021-9290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2014.08.005>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929014004291>.
- [17] J. Murillo y P. García-Navarro. “A Roe type energy balanced solver for 1D arterial blood flow and transport”. En: *Computers and Fluids* 117 (2015), págs. 149-167. ISSN: 0045-7930. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.05.003>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793015001504>.
- [18] J. Murillo y P. García-Navarro. “Augmented versions of the HLL and HLLC Riemann solvers including source terms in one and two dimensions for shallow flow applications”. En: *Journal of Computational Physics* 231.20 (2012), págs. 6861-6906. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.06.031>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999112003464>.

- [19] J. Murillo y A. Navas-Montilla. “A comprehensive explanation and exercise of the source terms in hyperbolic systems using Roe type solutions. Application to the 1D-2D shallow water equations”. En: *Advances in Water Resources* 98 (2016), págs. 70-96. ISSN: 0309-1708. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2016.10.019>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170816305917>.
- [20] J. Murillo, A. Navas-Montilla y P. García-Navarro. “Formulation of exactly balanced solvers for blood flow in elastic vessels and their application to collapsed states”. En: *Computers and Fluids* 186 (2019), págs. 74-98. ISSN: 0045-7930. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.04.008>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793019301185>.
- [21] Javier Murillo y Pilar García-Navarro. “A Solution of the Junction Riemann Problem for 1D Hyperbolic Balance Laws in Networks including Supersonic Flow Conditions on Elastic Collapsible Tubes”. En: *Symmetry* 13.9 (2021). ISSN: 2073-8994. DOI: [10.3390/sym13091658](https://doi.org/10.3390/sym13091658). URL: <https://www.mdpi.com/2073-8994/13/9/1658>.
- [22] Jonathan P. Mynard y Joseph J. Smolich. “One-Dimensional Haemodynamic Modeling and Wave Dynamics in the Entire Adult Circulation”. En: *Ann Biomed Eng* 43 (2015), págs. 1443-1460. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10439-015-1313-8>.
- [23] Jonathan P. Mynard y Kristian Valen-Sendstad. “A unified method for estimating pressure losses at vascular junctions”. English. En: *International journal for numerical methods in biomedical engineering* 31 (abr. de 2015).
- [24] T.J. Pedley y X.Y. Luo. “Modelling flow and oscillations in collapsible tubes”. En: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 10 (1998), págs. 277-294.
- [25] Alfio Quarteroni y Luca Formaggia. “Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System”. En: *Computational Models for the Human Body*. Vol. 12. Handbook of Numerical Analysis. Elsevier, 2004, págs. 3-127. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(03\)12001-7](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(03)12001-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570865903120017>.
- [26] S. J. Sherwin et al. “Computational modelling of 1D blood flow with variable mechanical properties and its application to the simulation of wave propagation in the human arterial system”. En: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 43.6-7 (2003), págs. 673-700. DOI: <https://doi.org/10.1002/fld.543>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/fld.543>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fld.543>.
- [27] S.J. Sherwin et al. “One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables”. En: *Journal of Engineering Mathematics* 47.3/4 (dic. de 2003), págs. 217-250. DOI: [10.1023/b:engi.0000007979.32871.e2](https://doi.org/10.1023/b:engi.0000007979.32871.e2). URL: <https://doi.org/10.1023%2Fb%3Aengi.0000007979.32871.e2>.
- [28] J.J. Wang y K.H. Parker. “Wave propagation in a model of the arterial circulation”. En: *Journal of Biomechanics* 37.4 (2004), págs. 457-470. ISSN: 0021-9290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2003.09.007>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929003003439>.

- [29] Nan Xiao, Jordi Alastruey y C. Alberto Figueroa. “A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models”. En: *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* 30.2 (2014), págs. 204-231. DOI: <https://doi.org/10.1002/cnm.2598>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cnm.2598>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cnm.2598>.

A. Anexo: Estudio de los efectos de la viscosidad dinámica sobre una rotura de presa subcrítica

En el siguiente gráfico podemos observar la evolución del perfil de secciones, habiendo pasado 10s, frente a la viscosidad dinámica medida en poises.

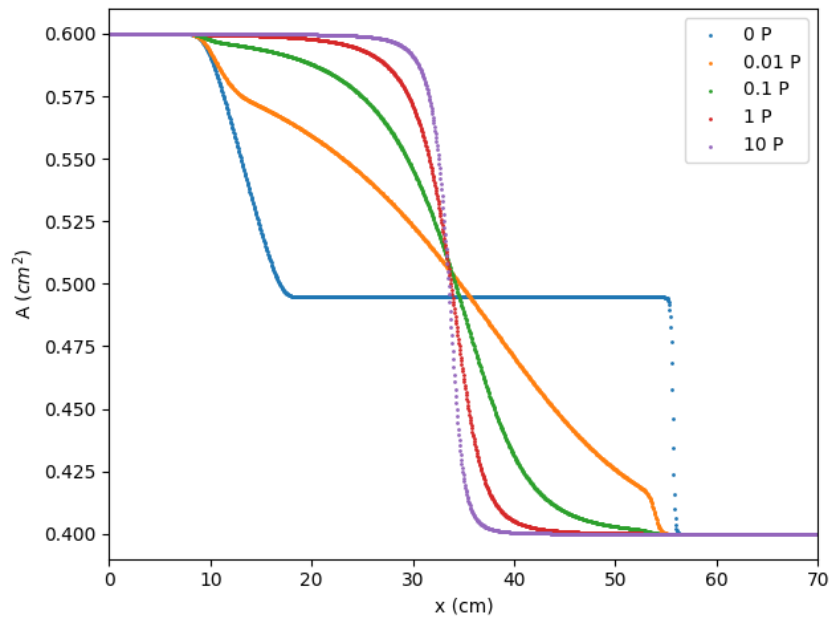


Figura 15: Comparación de la evolución de una rotura de presa supercrítica, pasados 10 s, para distintos valores de μ (medido en poises) y $\text{CFL} = 0.5$.

De manera intuitiva, esperamos que al incrementar la fricción en ordenes de magnitud, el perfil del fluido pasara de ser el típico de una rotura de presa a otro en el que la forma inicial del sistema sera casi igual al final. Esto es debido a que incrementar la fricción de un fluido, incrementa las fuerzas que se oponen a su movimiento y deformación, lo que deberá provocar esa conservación de la forma que observamos para valores altos de μ .

B. Anexo: Criterio de Termalización

Para medir los valores asociados a cada configuración de parámetros, realizaremos el cambio y dejaremos termalizar el sistema hasta que este alcance un estado estacionario, es ahí donde tomaremos el valor de K_i . Para saber si el sistema ha termalizado o no, necesitamos un criterio general que poder aplicar independientemente de la situación. Sabemos que un estado estacionario es caracterízale mediante el hecho de que las velocidades de los vasos que hacen frontera con la unión, no varían con el tiempo, con lo que parece un buen método el comparar lo parecidas que son las funciones de las velocidades frente al tiempo, a una recta horizontal. Notar que debido a que estamos simulando un sistema mediante métodos numéricos de resolución máxima definida, observamos que los valores de las velocidades sufren pequeñas variaciones que dificultarían la comparación previa, con lo que en vez de una recta horizontal, tomaremos una recta punto pendiente con pendiente próxima a 0, de manera que aunque no sea completamente horizontal, pediremos que la variación que se genera en la velocidad u con el tiempo sea reducida dentro de los intervalos de tiempo que maneamos en la simulación (10 s aproximadamente).

Para comparar lo similares que son los resultados a los de esta función, calcularemos la desviación típica de una sucesión de puntos dados por esta recta, sabiendo que esta ni depende de translaciones temporales, ni del corte con el eje de coordenadas (u).

$$\begin{aligned} x_n &= n\Delta t \in [0, N) \\ y_n &= \beta_1 x_n + \beta_0 = \beta_1 (n\Delta t) + \beta_0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - \langle y_n \rangle)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \beta_1^2 \Delta t^2 \left(n - \frac{N}{2}\right)^2} = \\ &\Delta t \beta_1 \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(n^2 + \frac{N^2}{4} - nN\right)} = \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &\Delta t \beta_1 \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\frac{N(N-1)(2N-1)}{6} + \frac{N^2(N-1)}{4} - \frac{N^2(N-1)}{2} \right)} \\ &\sigma = \Delta t \beta_1 \sqrt{N^2 - 2N} \end{aligned}$$

Notar que β_1 es la pendiente de la recta, N es el numero de medidas que tomaremos para calcular el estimador y Δt es el tiempo transcurrido entre cada medida.

Usando esta función con los valores $\beta_1 = 0,05 \text{ cm/s}^2$, $N = 100$ y $\Delta t = 0,025 \text{ s}$, obtenemos que $\sigma = 0,124 \text{ cm/s}$ y si registramos una serie de valores de las velocidades, en donde todos sus desviaciones sean menores a esta cantidad, asumiremos que el sistema se encuentra termalizado.

C. Anexo: Ecuaciones de aguas poco profundas

De cara a testear el programa y analizar si este simula de manera realista al fluido, modificaremos el modelo planteado con el objetivo de que este pueda simular el comportamiento de un liquido encerrado en un canal y sometido a una presión estática. Este modelo nos permitirá poseer una noción de cual debería ser el comportamiento esperado del fluido, de manera que sera mas fácil ver si el programa converge a una solución adecuada o incorrecta.

En este modelo tenemos que la distribución de presión, se calcula como:

$$p = g\rho h \tag{38}$$

Donde g es la aceleración gravitatoria $9,81m/s^2$ y h es la altura de la columna de liquido. Si queremos que nuestra formula previa de p coincida con la estática, sabiendo que $A = hb$, siendo b la anchura del canal, tomamos $m = 1$, $n = 0$, $K_0 = g\rho A_0$, $p_0 = K_0$ y $b = 0$.