Axiomas de Separación y Lema de Urysohn

Jorge Martínez Arbués

Trabajo de fin de grado en Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Álvaro Lozano Rojo

02 de 02 de 2023

Prólogo

Este breve ensayo nace tras un exhaustivo trabajo, decidido a tratar de facilitar la comprensión de los conceptos aquí expuestos, sin perder el rigor científico. Para ello, se ha realizado una amplia búsqueda de información y un posterior tratamiento de esta.

La información la hemos obtenido principalmente del libro *Topología*, escrito por J.R. Munkres. Este junto al resto de nuestras fuentes aparecen al final del trabajo, en la sección de bibliografía. Asimismo, algunos de los ejemplos que aparecen han sido creados por nosotros, al igual que las explicaciones que se dan sobre los demás. Esto se ha logrado razonando a partir de las definiciones dadas y apoyándonos en algún resultado que no aparece aquí, pues su mención es momentánea.

Además, todas las figuras que aparecen con la intención de facilitar la tediosa tarea de comprender ciertos razonamientos, han sido realizados por el autor sobre los puntos que se consideran más difíciles de entender, o bien sobre aquellos que se vislumbran mejor con su presencia.

Una de las aspiraciones principales ha sido discutir sobre los axiomas de separación. La idea de su estudio, puede resultar interesante en sí misma, por el simple hecho de ampliar el conocimiento en esta rama de las matemáticas. No obstante, gran parte de su importancia, se debe a la utilidad de estos, ya que, como veremos, los espacios que cumplen dichos axiomas tienen propiedades muy ricas. En particular, nos ayudan a discernir cuando un espacio topológico es equivalente a uno métrico.

Asimismo, otra parte de su riqueza, se debe a que nos sirven para dar fundamento a muchos otros conceptos matemáticos. En particular en áreas como la topología algebraica, geometría diferencial o análisis matemático. Pues, al igual que ocurre con otras ideas de la topología general, no pierden esa esencia de servir como *base* para otras áreas o como herramienta para construir nuevas matemáticas.

Además, de describir la axiomática de separación, el otro objetivo principal ha sido introducir el Lema de Urysohn. Este resultado está íntimamente relacionado con dichos axiomas, pues su planteamiento surge como respuesta a una de las dudas que uno se hace cuando estudia estos conceptos. La cual, viene motivada a la hora de ver las distintas relaciones que hay entre ellos.

En concreto, la pregunta que nos surge es saber cuando alguno de los axiomas que estudiaremos es equivalente a otro. Es decir, cuando espacios que cumplen propiedades aparentemente distintas, son en realidad el mismo. Lo cual nos responde dicho lema, afirmando que dos de ellos lo son.

Como es natural, demostraremos el lema de Urysohn. Para ello, hemos usado los racionales diádicos en lugar que el conjunto de los racionales en general. Hemos decidido tomar esta particularidad, ya que consideramos que los diádicos tienen un orden más natural.

A lo largo del trabajo no solo veremos eso, si no que, además, iremos relacionando cuando ciertos axiomas implican otros. Para esta cuestión, no interviene necesariamente el Lema de

Urysohn, pues es mucho más fácil de responder que lo anterior.

Este lema no solo sirve para responder esa pregunta, pues tiene más aplicaciones en otras áreas de las matemáticas, siendo esa una de las razones por la que recibe el título de *lema*.

Algunas de esas aplicaciones que veremos, son el teorema de extensión de Tietze y el embebimiento de m-variedades en un espacio $\mathbb{R}^n$

Sin embargo, la intención de este escrito ha sido siempre la de estudiar los axiomas de separación y el Lema de Urysohn en sí, es por eso que, las aplicaciones no son el objetivo. Por lo tanto, quedan relegadas a un segundo plano, pues nos interesa más ver como el lema interviene en su demostración.

Otra de las ideas que se ha tenido presente a la hora de realizar este trabajo ha sido la de que cualquiera, sin conocimientos previos en topología general, pueda seguir con naturalidad el trabajo. Si bien, es importante remarcar que no es en absoluto un texto divulgativo, ya que se realizan con detenimiento demostraciones y se explican ejemplos y definiciones. Por lo que es un texto científico. Sin embargo, se comienza introduciendo conceptos básicos y simples que son esenciales para la comprensión de todo lo que se relata y se va profundizando hasta llegar a ver lo deseado.

Por último, concluiremos exponiendo cuales van a ser los capítulos que componen el trabajo:

- Conceptos Básicos.
- Axiomas de Separación.
- Aplicaciones Lema de Urysohn.
- Otros Axiomas de Separación.
- Bibliografía.

Abstract

In the following document, we do a study about the separation axioms in topological spaces, which have been splited intentionally into two groups. The first is separation by neighbourhood, and the second is separation by a continuos function. We discuss if a space implies another. It is important because it allows us to distinguish when a space is metrizable. Furthermore, we delve deeper into studying the relationships between them and we examine when the two groups are equivalent or not, allowing us to switch between definitions.

This question is posed because we aim to present one of the most crucial theorems in topology; the Urysohn's lemma. We provide a complete demostration of this result, which is divided into several preceding lemmas. Additionally, we have decided to made a change. Usually, the rational numbers, $\mathbb{Q}$, are used in this proof, however, we have used the dyadic rational, which we believe provide a more natural order. We will delve into this when we use them.

The Urysohn's lemma is significant as it aids in addressing problems in the study of separation axioms. and has numerous applications, such as extending continuous functions. To be more precise, it helps us when we want to prove the Tietze' Teorem. Another use is the embedding of m-manifolds. This can be thought of as fitting a surface into a space with a higher dimension. Here, we first demostrate the existence of unit partitions in a compact and normal space, Then, we are able to use it to prove that an m-manifold can be embedded into some $\mathbb{R}^n$ space.

The last utilities are explained here, but we focus our attention on the solution provided by Urysohn´s lemma. Then, we relegate these applications to the background, since, it belong to another field of study, and we are more interested in the theorem as such.

In the end, we resumed our study on separation axioms, again. Particularly those that we have classified as separation by neighborhood. Then, we proceeded to give further information and more axioms. We chose to divide them as they are less useful. Although, they also help to distinguish metric spaces, they are not deemed that significant. Furthermore, it must be noted that their definitions are not intuitive at all.

It should be noted that this work has an appendix, where an excessively lengthy example is precisely presented and cannot be included as such in the essay.

All this document is built by several chapters, as listed below, and it concludes with a bibliography where the information for the essay was sourced.

In the first chapter, we do an introduction. Here, we briefly explain some concepts, which are essential to understand this work. If you have prior knowledge of general topology, maybe, you may not need read it. However, if you do not have this learning, it is recommended that you do.

Next, in the second chapter, we define all the axioms and we state the question that is answered by the Urysohn's lemma. Moreover, this chapter is divided into two sections. Each belonging to one of the two subdivisions previously discussed.

The following focuses on providing the statment and the proof of the Urysohn's lemma. Besides, several smaller lemmas are used to construct the proof. Although, we could do it without any previous lemma. In fact, there are alternative proofs that do not use them, and inted provide a single proof with several steps.

We then proceed to examine some applications, which have been splited into two parts. Firstly, we discuss the extension Tietze's theorem and give its proof. Next, in the second part, we demonstrate the existence of unit partitions, a new concept that we used in embebing m-manifolds.

Finally, we conclude with the last chapter *Another Separation Axioms*. Here, we discuss less important axioms, and we provide that a metrizable space checks all separation axioms.

Índice general

Capítulo 1

Conceptos Básicos

Antes de empezar con el estudio de lo que más adelante llamaremos axiomas de separación y el lema central del presente trabajo, consideramos necesario exponer algunos conceptos básicos de la topología general.

Una noción elemental en muchas áreas de las matemáticas es la del espacio métrico. Es una generalización de los espacios normados, que a su vez lo son del espacio euclídeo.

Consideremos un conjunto X y una aplicación

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

diremos que d es una **distancia** o **norma** sobre X si dados x, y y $z \in X$, cumple

1. $d(x, y) = d(y, x)$,
2. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$, y
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

En el espacio métrico (X, d) podemos definir una bola centrada en un punto $x_0 \in X$ como el conjunto

$$\mathbb{B}(x_0, r) = \{ x \in X \mid d(x_0, x) < r \},$$

es decir, los puntos de X cercanos a x_0. Las uniones (arbitrarias) de bolas se denominan conjuntos abiertos y juegan un papel fundamental. Así como, la noción de aplicación continua o sucesión convergente puede escribirse en términos de abiertos sin tener en cuenta la distancia propiamente dicha. Consideremos la continuidad por ejemplo.

Una aplicación entre espacios métricos $f : X \to Y$ es continua si para todo $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(\mathbb{B}_X(x_0, \delta)) \subset \mathbb{B}_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

Ahora bien, esta última condición es equivalente a decir que $f^{-1}(\mathbb{B}_X(f(x_0), \varepsilon))$ es abierto en X. Por lo tanto, f es continua si y solo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo abierto U de Y.

Las propiedades que satisfacen los abiertos de un métrico modelan la definición de topología. Esta noción nos permite hablar de continuidad en espacios más generales donde no hay una distancia. Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de sus partes.

Definición. Una **topología** sobre X es un subconjunto τ de $\mathcal{P}(X)$ tal que

1. El conjunto vacío $\emptyset$ y el total X pertenecen a τ.

2. La unión arbitraria de elementos de τ pertenece a τ.

3. La intersección finita de elementos de τ pertenece a τ.

Al par (X, τ) lo llamaremos **espacio topológico**, y a los elementos de τ **abiertos**. Los complementarios de los abiertos se denominan **cerrados**.

Los ejemplos más naturales de espacios topológicos son los que nos proporcionan los espacios métricos, los abiertos (métricos) forman una topología en el sentido anterior. Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R}^n$, la métrica euclídea $d_2(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ induce la **topología usual** τ_U.

Por otro lado, la topología más simple que podemos considerar sobre X es la **trivial** o **indiscreta** donde los únicos abiertos son el vacío y el propio X. Esta topología es la más pequeña que se puede definir sobre X. Si X tiene más de un punto, esta no es una topología métrica.

Otro ejemplo importante de espacio topológico (en este caso si proviene de una métrica) es la **discreta** $(X, \mathcal{P}(X))$, en la que cualquier subconjunto de X es abierto. Así, esta es la topología con más abiertos que podemos definir sobre X.

Es obvio que, en un conjunto general X, es posible formar distintos espacios topológicos. Dependerá de la topología dada. Si consideramos dos topologías τ_1, τ_2 sobre el conjunto X, decimos que son **comparables** si $\tau_1 \subset \tau_2$ ó $\tau_2 \subset \tau_1$. Además, si $\tau_1 \subset \tau_2$ decimos que τ_2 es más **fina** (tiene más abiertos) que τ_1. Dos topologías sobre el mismo conjunto no tienen por qué ser comparables.

Por ejemplo consideremos el conjunto con dos puntos $X = \{a, b\}$. La **topología de Sierpinski** es $\tau_s = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Esta es una topología intermedia entre la indiscreta y la discreta, pero no es comparable con $\{\emptyset, \{b\}, X\}$.

A partir de ahora, si no hay riesgo de confusión, se sobreentenderá la topología y se denotará como X a un espacio topológico (X, τ).

En general para describir una topología no se listan todos sus elementos como en el último ejemplo, si no que se describen los abiertos en términos de unos *pocos* elementos básicos, como hemos hecho con las bolas: Dado X decimos que el conjunto de abiertos $\beta \subset \tau$ es **base** de τ si todo elemento de τ es unión de elementos de β.

Ahora bien, en el caso de los métricos no contábamos con una topología previa, si no que hemos tomado uniones arbitrarias y hemos obtenido una topología. ¿En qué condiciones podemos hacer los mismo en general?

Lema 1.1. *Sea una familia $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de un conjunto X. Existe una única topología τ_β sobre X con β una base de la misma si y solo si*

1. *para cada $x \in X$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$, y que*

2. *dados B_1 y $B_2 \in \beta$ y $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

Se dice que τ_β es generada por β.

Demostración. Si β es base de una topología

Consideremos el conjunto $\tau_\beta \subset \mathcal{P}(X)$ definido por

$$\tau_\beta = \{U \subset X \mid \text{para todo } x \in U \text{ existe } B \in \beta \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Veamos que es una topología. Si lo es, que β es una base es obvio.

Trivialmente podemos ver que $\emptyset \in \tau_\beta$. Además, la primera hipótesis implica que $X \in \tau_\beta$.

Sea ahora una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ y $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, dado un $x \in U$ entonces existe algún $k \in I$ tal que $x \in U_k$ y existirá $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U_k \subset U$, luego $U \in \tau_\beta$.

Por último, dados $U_1, U_2 \in \tau_\beta$ veamos que su intersección pertenece a τ_β. Sea $x \in U_1 \cap U_2$, existirán $B_1, B_2 \in \beta$ tales que $x \in B \subset B_1 \subset U_1$ y $x \in B_2 \subset U_2$, entonces $x \in B = B_1 \cap B_2$, por lo que existirá $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U_1 \cap U_2$, luego $U_1 \cap U_2 \in \tau_\beta$. Por inducción finita podemos extender esto a cualquier subfamilia finita de τ_β. Así pues, se concluyes que τ_β es una topología sobre X y que β es base de dicha topología.

Finalmente, a de ser única, ya que los abiertos son las uniones de los elementos de β. □

Por otro lado, para definir la continuidad de aplicaciones entre espacios topológicos basta considerar la dada para métricos: una aplicación entre espacios topológicos $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es **continua** si $f^{-1}(U) \in \tau_X$ para todo $U \in \tau_Y$.

Notar que esta, también dependerá de las topologías del conjunto. Es decir, una misma función puede ser continua entre los mismos conjuntos o no, según las topologías que estos tengan.

Por otro lado, dado un subconjunto $S \subset X$ diremos que $x \in X$ es **punto de acumulación** de S si y solo si para cualquier abierto U_x que contiene a x se cumple $S \cap (U_x - \{x\}) \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos de acumulación de S, se le llama **derivado** de S y lo denotaremos como S'. La unión $\overline{S} = S \cup S'$, se denomina **clausura**, será el menor cerrado que contenga a S. Obviamente S será cerrado si y solo si $S = \overline{S}$.

Estas nociones están también relacionadas con la convergencia de sucesiones y la continuidad. Por ejemplo, las siguientes condiciones son equivalentes a la continuidad de una función $f : X \longrightarrow Y$,

1. $f^{-1}(F)$ es cerrado en X, para todo F cerrado en Y.
2. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.
3. Si β es una base de la topología de Y, $f^{-1}(B) \in \tau_X$ para todo $B \in \beta$.

En topología, uno de los objetivos principales es saber cuando un espacio es equivalente topológicamente a otro. Esta idea está íntimamente relacionada con la de continuidad y viene dada por la definición de **homeomorfismo**. Se llama así a una aplicación $f : X \longrightarrow Y$, biyectiva y continua, cuya inversa f^{-1} también es continua. De existir, se dice que los espacios X e Y son **homeomorfos**, o equivalentes topológicamente. Se denota como $X \cong Y$. En particular, resulta de especial interés saber cuando un espacio es metrizable, es decir, cuando es homeomorfo a un espacio métrico.

Para distinguir si dos espacios topológicos pueden o no ser homeomorfos, se usa el concepto de **invariante topológico**, son ciertas propiedades topológicas que son invariantes, valga la redundancia, bajo homeomorfismos. Es decir, si un espacio topológico posee alguna de estas propiedades, todo espacio homeomorfo a él también las poseerá. Como se puede intuir, este concepto nos ayuda a distinguir cuando dos espacios no son equivalentes topológicos, pues si uno de ellos no cumple una de estas propiedades, no será homeomorfo a otro que si las cumple.

Todos los axiomas de separación de los que hablaremos en este trabajo, son invariantes topológicos, esta es la razón de la utilidad que tiene su estudio. Además, un tipo de espacio, en particular, que satisface todos los axiomas de separación, son los espacios métricos. Esto lo probaremos en el último capítulo. Por tanto, sabemos que si un espacio topológico no satisface alguno de estos axiomas no será metrizable.

Otras nociones, que serán útiles cuando veamos las aplicaciones del lema de Urysohn, son la de **recubrimiento abierto** de un espacio topológico X. Se tarta de una colección de abiertos $U = \{U_i\}_{i\in I}$ tal que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Además, también usaremos que un espacio topológico X es **compacto** si para todo recubrimiento abierto existe un subrecubrimiento finito del mismo. Es decir, si para cualquiera de estas familias de abiertos, podemos extraer un número finito que siguen cubriendo a X.

Capítulo 2

Axiomas de separación

Dado un espacio topológico (X, τ), podemos hacer una distinción general entre los axiomas de separación. Según si la separación de puntos y conjuntos se da mediante entornos abiertos ó funciones. En esta primera sección abordaremos el primer tipo y más adelante procederemos a desarrollar el segundo. Recordad, que, si no se especifica lo contrario; denotaremos a un espacio topológico (X, τ) por X simplemente.

En ambos casos, comenzaremos definiendo desde el axioma más débil hasta el más fuerte, creando, así, una cadena de implicaciones.

2.1. Axiomas de separación por abiertos

Definición (Espacio de Kolmogorov o T_0)**.** Un espacio topológico X es T_0 si para cada par de puntos distintos x e $y \in X$ existe un abierto $U \subset X$ tal que $U \cap \{x, y\}$ se reduce a un punto.

Definición (Espacio de Fréchet o T_1)**.** Diremos que X es T_1 si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existen dos entornos U, V tales que $x \in U$, $y \in V$ pero $x \notin V$ y $y \notin U$.

Es obvio que T_1 implica T_0, pero el recíproco, en general, no es cierto. Basta considerar el espacio de Sierpinski, dado en la página 2. Evidentemente el espacio es T_0, ya que únicamente existe la pareja de puntos distintos a y b. Entonces, podemos considerar $\{a\}$ como el abierto buscado. Pero no es T_1, ya que el único abierto que contiene a b es el total.

Definición (Espacio de Hausdorff o T_2)**.** Un espacio topológico X es T_2 si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existen dos abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ e $y \in V$.

La definición que acabamos de dar es la más importante de todos los axiomas de separación, debido a sus importantes implicaciones. Por ejemplo, son usados en análisis matemático, pues proporcionan una forma natural de definir la convergencia de una sucesión de puntos. También encontramos aplicaciones en geometría diferencial, ya que para la definición de variedad diferencial se exige que sea T_2. Además, es fácil ver que un espacio métrico es T_2. Para ello, basta con tomar dos bolas $\mathbb{B}(x, r)$ y $\mathbb{B}(y, r)$ con $r < \frac{d(x,y)}{2}$.

Notar que T_2 implica T_1, y por tanto T_0. En general, el recíproco no es cierto. Ya que si tomamos como espacio topológico los reales $\mathbb{R}$ con la topología cofinita,

$$\tau_{CF} = \{ U \subset X \mid X - U \text{ es finito ó } U = \emptyset\},$$

es T_1 pero no T_2. Veámoslo para cualquier par de puntos $a, b \in \mathbb{R}$, podríamos asegurar que no existen abiertos disjuntos U, V tales que $a \in U$, $b \in V$. Puesto que de ser así, $U \subset X - V$ el cual es finito. Luego U es finito y por hipótesis $X - U$ es finito; por lo que $\mathbb{R}$ debería ser finito. En general, este razonamiento sirve para cualquier conjunto infinito con la topología cofinita.

Definición (Espacio Regular)**.** El espacio X es regular, si para cualquier punto $x \in X$ y cualquier cerrado F tal que $x \notin F$ existen dos abiertos U, V tales que $x \in U$, $F \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Esta definición no implica necesariamente ninguna de las que hemos visto con anterioridad. El siguiente ejemplo nos ayudará a vislumbrarlo.

Ejemplo 1. El espacio $\mathbb{R}$ con la topología $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$ será un espacio regular, ya que los únicos abiertos; $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son también cerrados. El resto se sigue trivial. Pero no es T_2, T_1 ni T_0, pues dados dos racionales, siempre van a pertenecer al mismo abierto $\mathbb{Q}$.

También podemos observar que T_2 no implica regular como nos dice el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Consideramos de nuevo $\mathbb{R}$, pero esta vez con la topología dada por la base $\beta = \{U \mid U \in \tau_U\} \cup \{U - C \mid U \in \tau_U\}$, dónde τ_U es la topología usual y $C = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dicho espacio será T_2 ya que la topología generada por β es más fina que la usual, pero no es regular. Notar que C es un cerrado que no contiene a 0. Sea U_C, el abierto que contiene a C, contendrá también la unión de entornos de los puntos $\frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Si ahora tomamos un abierto de 0, que denotaremos por U_0, podrá ser de dos formas. Si es uno de la topología usual, es obvio que su intersección con U_C será no vacía, pues existirá un $\frac{1}{n} \in U_0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por tanto U_0 debe ser de la forma $U - C$, pero en este caso los entornos de todos los $\frac{1}{n}$ si estarán en U_0. Luego la intersección seguirá sin ser vacía. Por lo que no es regular.

Es por eso, que si queremos que un espacio regular sea T_2, tenemos que exigirle que sea también T_1. Con esto en mente, nace la siguiente definición.

Definición (T_3)**.** Un espacio topológico es T_3 si es regular y T_1.

En este caso se cumplirá que T_3 implicará T_2 y en consecuencia T_1 y T_0. Puesto que si X es T_3 entonces es T_1 y regular. En un espacio T_1 todo punto es cerrado, y en uno regular, todo cerrado se puede separar por abiertos disjuntos de un punto. Luego los puntos se podrán separar entre sí por abiertos disjuntos, esto es ser T_2.

Definición (Normal)**.** Diremos que un espacio X es normal si para todo par de cerrados disjuntos F_1, F_2 existen dos abiertos disjuntos U_1, U_2 tales que $F_1 \subset U_1$ y $F_2 \subset U_2$.

De esta definición se derivan otros, que veremos en el último capítulo, y que nos ayudarán a crear más axiomas.

Al igual que ocurría con la regularidad, las definiciones previas no implican necesariamente ser normal. Podemos vislumbrarlo con un ejemplo que sigue una idea similar al anterior.

Ejemplo 3. Consideramos $\mathbb{R}$ con la topología dada por la base $\beta = \tau_U \cup \{U - \mathbb{Q} \mid U \in \tau_U\}$, donde τ_U es la topología usual. La topología generada por β será más fina que la usual, por tanto es T_2. Pero no es normal, ya que si tomamos los cerrados $\mathbb{Q}$ y $\{\sqrt{2}\}$ (o cualquier otro irracional) tenemos que cualquier cerrado que contenga a $\mathbb{Q}$, lo denotaremos por U_0, contendrá también la unión de entornos de racionales y el que contiene a $\sqrt{2}$ será $(\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon) - \mathbb{Q}$ cuya intersección con U_0 no es vacía, pues por muy pequeños que tomemos los entornos, siempre compartirán puntos con $(\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon) - \mathbb{Q}$.

Además, la normalidad tampoco implica el resto de axiomas de separación, ya que, si tomamos de nuevo, el espacio del ejemplo 1, hemos visto que no es T_0 y por tanto no es ni T_1, ni T_2. Pero si es normal, pues los únicos cerrados son $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ que a su vez son abiertos, por lo que ellos mismos son los abiertos disjuntos que los separan.

Contrario a lo que pueda dar a entender el ejemplo anterior, cabe destacar que regular no implica normal necesariamente, ni viceversa. Consideremos la topología sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$\tau = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}.$$

Este espacio es normal ya que no hay dos cerrados disjuntos. Pero no es regular pues el punto 1 y el cerrado $(-\infty, 0]$ no se pueden separar, ya que el único abierto que contiene ha dicho cerrado es el total.

En conclusión, si de nuevo queremos que la normalidad implique el resto de axiomas que hemos visto (salvo regularidad) debemos exigir que sea T_1. Así nace la definición:

Definición (T_4)**.** Dado un espacio topológico X, diremos que es T_4 si es normal y T_1.

En este caso, T_4 si implica T_3. Pues al ser T_1 todo punto es cerrado y al ser normal, todo cerrado disjunto se puede separar por abiertos disjuntos. En particular, los puntos se podrán separar de otros cerrados más grandes por abiertos disjuntos; lo que implica T_3 y en consecuencia el resto.

En la figura 2.1 se presenta de forma esquemática los axiomas de separación que acabamos de ver.

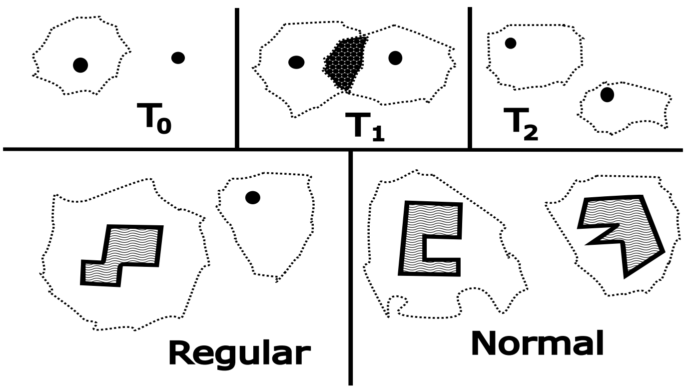

Figura 2.1: Axiomas de Separación por entornos abiertos.

2.2. Axiomas de separación por funciones

Hasta aquí llegan todos los axiomas que separan por entornos. A continuación veremos aquellos que lo hacen por funciones y también la relación que se guarda con los anteriores.

Definición (Completamente Hausdorff)**.** Un espacio X es completamente de Hausdorff si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe una función $f : X \longrightarrow [0, 1]$ continua, tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. En este caso, decimos que los puntos x, y pueden separarse por una función.

Cabe también destacar que este espacio topológico nace debido a la necesidad de ampliar las propiedades de los espacios T_2, en relación a funciones continuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Pues si solo se exige que X sea T_2, nos encontramos con que la mayoría de estas funciones son triviales. Al exigir completamente Hausdorff, ampliamos notoriamente este abanico pudiendo obtener un estudio más interesante. Veamos un ejemplo al respecto.

Ejemplo 4 (La topología de Golomb sobre $\mathbb{R}$ [1, Ex. 60])**.** Sea el conjunto $\mathbb{Z}^+$, los enteros positivos. Para cada $a, b \in \mathbb{Z}^+$ puedo definir los conjuntos $U_a(b) = \{b + n \cdot a \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces, aquellos $U_a(b)$ tales que $m.c.d.(a, b) = 1$ constituirán los entornos básicos de b. Es decir, estos $U_a(b)$ son aquellos que forman la base de la topología sobre $\mathbb{Z}^+$.

Este es un espacio T_2, ya que dados dos puntos $b, b' \in \mathbb{Z}^+$, podemos tomar como abiertos $U_a(b)$ y $U_a(b')$, con a coprimo con b y b' simultáneamente y no siendo múltiplo de $b - b'$. En ese caso, $U_a(b) \cap U_a(b') = \emptyset$. Ya que si compartieran algún punto, este debería cumplir $b + n \cdot a = b' + m \cdot a$, con $n, m \in \mathbb{Z}$ no necesariamente distintos, lo que implica $b - b' = a(m - n)$. Lo que, por construcción, sabemos que no es posible.

Pero todas las aplicaciones continuas $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ son constantes. Para verlo, primero debemos comprobar que no existen cerrados disjuntos. Es preciso tener en cuenta que $a\mathbb{Z}^+ \in \overline{U_a(b)}$. Basta fijar un $k \cdot a$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, para un $a' \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera, coprimo con $k \cdot a$ (en particular será coprimo con a) tenemos que $U_{a'}(ka) \cap U_a(b) \neq \emptyset$ si y solo si existe un $x \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x \equiv b \pmod{a}$ y $x \equiv ka \pmod{a'}$. Entonces, por el teorema chino de los restos, podemos asegurar que existe. Por tanto, como $a\mathbb{Z}^+ \in \overline{U_a(b)}$, tenemos que $a, a' \in \overline{U_a(b)} \cap \overline{U_{a'}(b')}$, luego no existen cerrados disjuntos en este espacio topológico.

Así que, si suponemos ahora que existe una función continua no constante $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, deben existir dos $b, b' \in \mathbb{Z}^+$, distintos entre ellos, tales que $f(b) \neq f(b')$. Entonces en $\mathbb{R}$ existen dos entornos cerrados disjuntos F_1 y F_2 tales que $f(b) \in F_1$ y $f(b') \in F_2$. Sus preimágenes serán entornos cerrados disjuntos de b y b', puesto que f es continua. Pero acabamos de probar que eso no existe, luego f debe ser constante.

Definición ($T_{2\frac{1}{2}}$ o de Urysohn)**.** Un espacio topológico es $T_{2\frac{1}{2}}$, si se pueden separar dos puntos distintos por entornos cerrados.

Puede parecer erróneo poner esta definición en esta sección, ya que también se realiza una separación por entornos. Sin embargo, como podemos ver, tampoco mantiene exactamente el mismo patrón que la vista en la separación por entornos. Además, es el espacio que queda antes de T_3, y después de completamente Hausdorff. Es por eso que preferimos ponerlo aquí.

Un espacio completamente Hausdorff será $T_{2\frac{1}{2}}$, el cual a su vez es T_2, y por otro lado uno T_3 será $T_{2\frac{1}{2}}$.

Es decir, $T_{2\frac{1}{2}}$ es inmediatamente más fuerte que T_2 pero más débil que T_3

Ejemplo 5 (La topología de Smirnov sobre $\mathbb{R}$ [1, Ex. 64])**.** La topología sobre $\mathbb{R}$ dada por la base formada por los abiertos de la forma $U - B$ donde $U \subset \mathbb{R}$ es un abierto de $\mathbb{R}$ con la topología usual y $B \subset K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Es $T_{2\frac{1}{2}}$, ya que su base es más fina que la usual. Pero no es T_3, por un razonamiento análogo al seguido en el ejemplo 2.

Definición. Sea X un espacio topológico, decimos que es completamente regular si para cualquier punto $x \in X$ y cerrado F, tal que $x \notin F$. Existe una función $f : X \longrightarrow [0, 1]$ continua, tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$.

Esta definición implica regularidad, pero al igual que ocurría con ser regular, no implica necesariamente el resto de axiomas, ni viceversa. De nuevo, debemos exigir T_1.

Definición ($T_{3\frac{1}{2}}$)**.** Un espacio topológico es $T_{3\frac{1}{2}}$ si es completamente regular y T_1.

Merece la pena detenernos en este punto, ya que con la inclusión de esta definición se pueden crear dos cadenas distintas de relaciones. Una que solo involucra a los axiomas de separación por funciones, $T_{3\frac{1}{2}}$ implica completamente Haussdorff, que a su vez supone $T_{2\frac{1}{2}}$. Y otra que nos permite incluirlo dentro de la cadena de los axiomas de separación por entornos, un espacio T_4 es $T_{3\frac{1}{2}}$ el cual es también T_3. Es decir, $T_{3\frac{1}{2}}$ está entre T_4 y T_3.

Con el siguiente ejemplo comprobamos que, en efecto, $T_{3\frac{1}{2}}$ no implica T_4.

Ejemplo 6 (El Cuadrado de Sorgenfrey [1, Ex. 84])**.** Sea $\mathbb{R}$ la recta de Sorgenfrey, se trata de la recta real $\mathbb{R}$ con la topología dada por la base $\beta = \{[a,b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Si consideramos el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. No es T_4, ya que $\Delta = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ la antidiagonal en el plano es un subespacio cerrado en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Además, la topología inducida en la diagonal es la discreta, pues todo punto en ella es cerrado en Δ, luego también será abierto. Con esto tenemos que todo cerrado en Δ es cerrado en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si tomamos los cerrados $A = \{(q, -q) \mid q \in \mathbb{Q}\} = \Delta \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y $B = \{(p, -p) \mid p \notin \mathbb{Q}\}$ veremos que no se pueden separar por abiertos disjuntos, ya que el abierto más pequeño que contiene a A, U_A, será unión de entornos de la forma $[q, q + \epsilon) \times [-q, -q + \epsilon)$ y el que contiene a B, U_B, será unión de entornos de la forma $[p, p + \epsilon) \times [-p, -p + \epsilon)$. Pero la intersección de estos entornos con los de los $(q, -q)$ no será vacía, pues siempre habrá un $(p, -p)$ lo suficientemente cerca de un $(q, -q)$. En cambio, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si es $T_{3\frac{1}{2}}$. Dado un $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \notin F$, F cerrado. Existe un entorno de (x, y), $[x, x + \epsilon) \times [y, y + \epsilon)$ abierto y cerrado cuya intersección con F es vacía. Por lo que la función característica χ_F, que vale 0 si el punto no está en F y 1 si sí lo está, será continua.

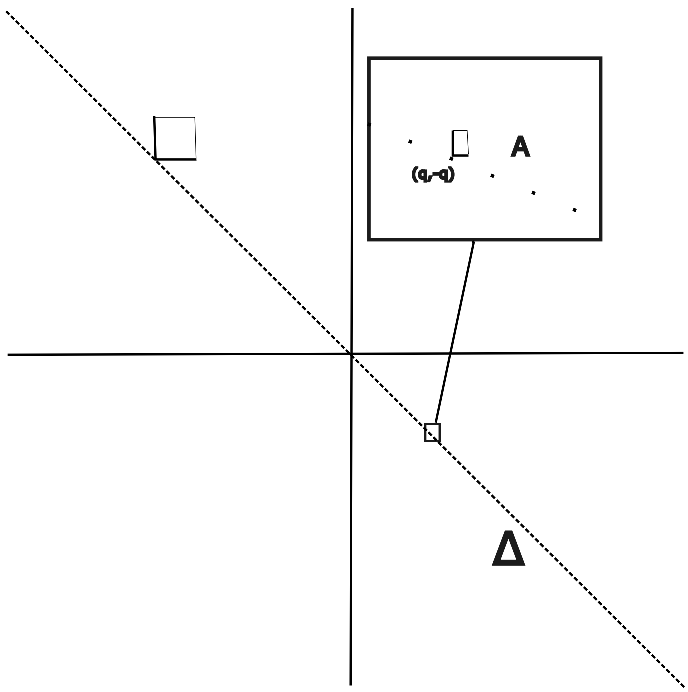

Figura 2.2: Cuadrado de Sorgenfrey.

En la figura 2.2 se muestra una ampliación de la diagonal. Ahí, cada punto es uno de la forma $(q, -q)$, y los huecos en blanco serían aquellos puntos $(p, -p)$, $p \notin \mathbb{Q}$. Como vemos es imposible separarlos, así pues, no se puede separar A de B.

La separación por funciones es más fuerte que por entornos abiertos. Entonces, nos podemos plantear si los dos tipos de definiciones son equivalentes. Es decir, si T_2, T_3 son lo mismo que $T_{2\frac{1}{2}}$ y $T_{3\frac{1}{2}}$ respectivamente. La respuesta es negativa, lo veremos con un par de contraejemplos:

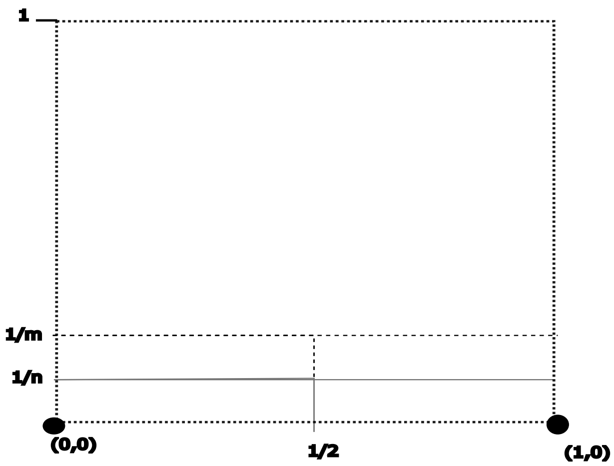

Figura 2.3: Cuadrado simplificado de Arens

Ejemplo 7 (Cuadrado simplificado de Arens [1, Ex. 81])**.** Sea $S = (0,1)^2$, consideramos el conjunto $X = S \cup \{(0,0),(1,0)\}$, y la topología usual de $\mathbb{R}^2$ para S y las bases locales de $(0,0)$ y $(1,0)$ dadas por $U_n(0,0) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \mid x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{n}\}$ y $U_n(1,0) = \{(1,0)\} \cup \{(x,y) \mid \frac{1}{2} < x, y < \frac{1}{n}\}$. Es un espacio T_2 pero no $T_{2\frac{1}{2}}$. Para ver la primera propiedad tan solo tenemos que estudiar los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ ya que el resto sabemos que se podrán separar gracias a la topología inducida. Los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ se pueden separar del resto ya que siempre podremos coger un $U_n(0,0)$ y un $U_n(0,1)$ con n suficientemente pequeña. Además, entre ellos siempre se podrán separar dado que sus entornos nunca llegan a tocar $x = \frac{1}{2}$. Pero no es $T_{2\frac{1}{2}}$, pues las intersecciones de las clausuras de cualquier entorno de $(0,0)$ y $(1,0)$ no serán vacías, dado que todas compartirán los puntos de la forma $(\frac{1}{2}, \frac{1}{n})$, tal y como se muestra en la figura 2.3. Luego su intersección no será vacía.

Ejemplo 8 (Ejemplo de A.B. Raha)**.** El espacio topológico tiene una construcción tan extensa y larga que no merece la pena detenernos a ver su explicación. Simplemente daremos una idea de como es. Los detalles aparecerán en el anexo I.

Para construir el espacio, debemos considerar primero X_1. Sería la unión de todos los segmentos de la forma; $T_n = \{(n,y) \mid n \in 2\mathbb{Z} \text{ e } y \in (-1,1)\}$. Es decir, $X_1 = 2\mathbb{Z} \times (-1,1)$. Por otro lado tenemos $X_2 = \cup_{n \in 1+2\mathbb{Z}} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n,k}$, donde $C_{n,k}$ es la circunferencia de centro $(n,0)$ y radio $1 - \frac{1}{k}$. Así pues, el espacio sería la unión de X_1 y X_2 junto a dos puntos a, b que no pertenecen a ninguno de los espacios anteriores. Luego nos queda que:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \{a,b\}.$$

La topología dada sobre este espacio es aún más compleja. Se construye de tal forma que sea T_3 pero nunca completamente regular. Para ello, el punto a debe tener como entorno, todos aquellos puntos de $X_1 \cup X_2$ que tengan como primera coordenada un número mayor que un número real arbitrario. Se hace lo propio con b, pero con la salvedad de que los puntos de su entorno tienen la primera coordenada menor que otro real arbitrario. En consecuencia, esto será lo que eventualmente provocará que X no sea completamente regular, pues de existir una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ siempre será constante en los entornos de a y b, con el mismo valor en cada caso.

Llegados a este punto, nos preguntamos si tiene sentido seguir extendiendo la axiomática de separación por funciones como lo hemos hecho hasta ahora. Es decir, ¿es útil definir un $T_{4\frac{1}{2}}$? En principio sí. De hecho podemos dar su definición como: Un espacio topológico es $T_{4\frac{1}{2}}$, si es T_1 y para cualquier par de cerrados disjuntos $F_1, F_2 \subset X$ existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(F_1) = 0$ y $f(F_2) = 1$.

Una vez planteada esta, podemos retomar la cuestión anterior ¿Es equivalente a T_4? Bien, este será uno de los objetivos del presente trabajo, ver que efectivamente son equivalentes ambas definiciones y que por tanto, no es necesario hablar de un $T_{4\frac{1}{2}}$, pues esa definición sería equivalente a T_4. Además, en este punto vemos que ambos tipos de axiomas se unen. Este resultado se desprende del teorema que veremos en la siguiente sección: "Lema de Urysohn".

Capítulo 3

Lema de Urysohn

En esta sección probaremos el Lema de Urysohn, uno de los llamados grandes resultados de la topología general, que fue demostrado por el matemático ruso que le da nombre al propio lema. Pável Samuilovich Urysohn.

La importancia de este resultado radica no solo en el hecho de que demuestra la equivalencia entre normalidad y la separación de cerrados mediante una función continua, si no que también, en que ayuda a probar otros resultados que veremos más adelante.

Teorema 3.1 (Lema de Urysohn)**.** *Sea X un espacio normal y A, B subconjuntos cerrados disjuntos en X. Dado $[a, b]$ un intervalo cerrado en la recta real, entonces existe una función continua $f : X \longrightarrow [a, b]$ tal que $f(x) = a \ \forall x \in A$ y $f(x) = b \ \forall x \in B$.*

Para seguir con mayor facilidad la argumentación daremos una idea general. La demostración consistirá en construir, usando la normalidad de X, una familia de abiertos U_p indexada por números racionales diádicos. A partir de dicha familia definiremos una función f que irá devolviendo puntos entre $[0, 1]$. Finalmente, veremos que es continua y concluiremos.

La demostración del Lema de Urysohn la daremos probando pequeños resultados cuyas demostraciones en conjunto constituyen la del teorema. Cada resultado, bebe del anterior, dando pasos que nos acercan a la solución final.

Lema 3.2. *Sea X un espacio topológico normal. Sea $U \subset X$ un abierto y $F \subset U$ un cerrado. Entonces existe V un abierto tal que*

$$C \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Demostración. Los cerrados F y $X - U$ son disjuntos, ya que $F \subset U$. Entonces, por la normalidad existen dos abiertos disjuntos V y W tales que $F \subset V$ y $X - U \subset W$. Lo que implica que, la clausura de V está contenida en el complementario de W (ya que este último conjunto es cerrado). Por lo tanto

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset X - W \subset U. \qquad \square$$

Sea $\mathbb{Q}_2 = \{\frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los racionales diádicos.

Consideramos el conjunto $\mathbb{D}$, los racionales diádicos en $[0, 1]$, esto es

$$\mathbb{D} = \mathbb{Q}_2 \cap [0, 1] = \left\{ \frac{a}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \text{ y } a \leq 2^n \right\}.$$

Lema 3.3. *Para cada $p \in \mathbb{D}$, se puede definir un abierto U_p de X, de modo que siempre que $p < q$ se cumpla $\overline{U_p} \subset U_q$.*

En particular, los conjuntos U_p estarán ordenados por la inclusión de la misma manera que los subíndices lo están por el orden usual de la recta real.

Demostración. Construiremos los abiertos U_p por inducción. Dado que el conjunto $\mathbb{D}$ es numerable podemos colocar sus elementos como una sucesión infinita. Los dos primeros elementos de la sucesión serán el 1 y el 0. A partir de ahí, el resto de números serán introducidos siguiendo el orden de lectura usual en el siguiente diagrama

$$
\begin{array}{l|llllllll}
 & \longrightarrow \\
\downarrow & \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\
 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \frac{9}{16} & \frac{11}{16} & \frac{13}{16} & \frac{15}{16} \\
 & \vdots
\end{array}
$$

Es decir, dado un diádico $\frac{a}{2^n}$, podemos saber cual será el siguiente. Si $a + 2 < 2^n$ tenemos que el próximo elemento de la sucesión es $\frac{a+2}{2^n}$. No obstante, si $a + 2 > 2^n$ entonces será $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Definimos el primer abierto $U_1 = X - B$. Observemos que $A \subset U_1$. Entonces puedo aplicar el lema 3.2 para obtener U_0 tal que $A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$. Para el paso inductivo general repetiremos esta idea.

A continuación, denotaremos por P_n al conjunto formado por los primeros n números diádicos de la sucesión. Supongamos que U_p está definido para todos los racionales $p \in P_n$ satisfaciendo:

$$p < q \Longrightarrow \overline{U_p} \subset U_q. \tag{3.1}$$

Denotaremos por r al siguiente número de la sucesión. El objetivo ahora será definir U_r. Consideramos el conjunto $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. Es un subconjunto finito del intervalo $[0, 1]$ y, como tal, tiene una ordenación simple derivada de la relación de orden usual sobre la recta real. Por lo que cada elemento tiene un inmediato predecesor y un inmediato sucesor (salvo el máximo y el mínimo) En nuestro caso, el número 0 es el mínimo y el 1 el máximo del conjunto P_{n+1}. Como r no es ni 0, ni 1 debe tener un inmediato predecesor p y un inmediato sucesor q (ambos en el conjunto P_{n+1}) Los conjuntos U_p y U_q ya están definidos y $\overline{U_p} \subset U_q$ por la hipótesis de inducción. De nuevo, gracias a la normalidad de X, podemos encontrar un abierto $U_r \subset X$ tal que: $\overline{U_p} \subset U_r$ y $\overline{U_r} \subset U_q$. Para ello hemos vuelto a aplicar el lema 3.2, esta vez, sobre el cerrado $\overline{U_p}$ y el abierto U_q.

Afirmamos que (3.1) se cumple ahora para cada par de elementos P_{n+1}. Si ambos elementos pertenecen a P_n, (3.1) se cumple por la hipótesis de inducción. Si uno de ellos es r y el otro es un punto s de P_n entonces $s \leq p$ en cuyo caso $\overline{U_s} \subset \overline{U_p} \subset U_r$, o $s \geq q$, luego $\overline{U_r} \subset \overline{U_q} \subset U_s$. Así, para cada par de elementos de P_{n+1} la relación (3.1) se cumple.

En la figura 3.1, podemos ver de forma esquemática en el plano, como se han ido construyendo los U_p. Observar que dichos abiertos envuelven todos a A, pero dejan fuera a B. A su vez, todos ellos están dentro de U_1, que sería todo lo que se muestra en la figura que vemos ahí, salvo B. Por último, todos contienen a U_0, ya que es el abierto más pequeño.

En conclusión, tenemos que por inducción, U_p está definido para todo $p \in \mathbb{D}$ quedando ordenados por la inclusión, al igual que los subíndices por la relación de orden usual. □

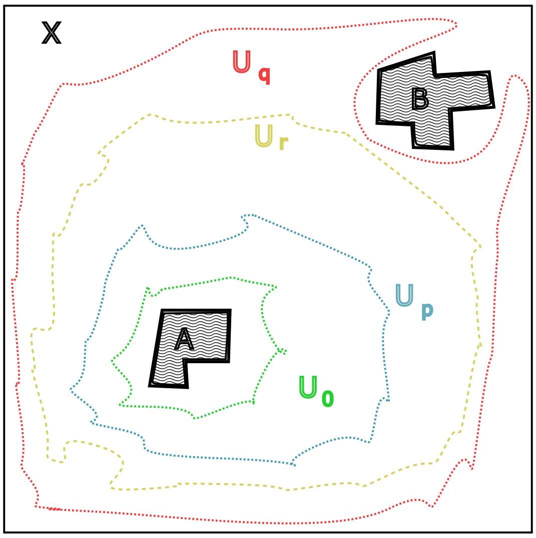

Figura 3.1: Abiertos U_p en el plano.

Lema 3.4. *Los U_p definidos en el lema 3.3 podemos extenderlos para cualquier diádico de la recta real.*

Demostración. Una vez que ya hemos definido los U_p para todos los racionales diádicos $p \in \mathbb{D}$, extenderemos la definición a todos los diádicos de $\mathbb{R}$. Para ello tomaremos

1. $U_p = \emptyset$ si $p < 0$, y
2. $U_p = X$ si $p > 1$.

Sigue siendo cierto que para cualquier par de números racionales p y q, $p < q \Longrightarrow \overline{U_p} \subset U_q$. □

En los lemas previos, lo que hemos hecho ha sido construir una cadena de abiertos indexados por los diádicos de la recta real, de modo que se cumpla 3.1 para todos ellos. A continuación, daremos otro resultado que nos permite construir una función que será la que eventualmente satisfará las condiciones del Lema de Urysohn.

Lema 3.5. *Sea X un espacio topológico normal y $A, B \subset X$ dos cerrados disjuntos, entonces podemos construir una función $f : X \longrightarrow [0, 1]$, para todo $x \in X$, tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

Demostración. Como X es normal, por los lemas 3.3 y 3.4 sabemos que para cada diádico p, existe un abierto U_p tal que si $p < q$ entonces $U_p \subset \overline{U_p} \subset U_q$. Por tanto, dado un punto $x \in X$, definimos $\mathbb{U}(x)$ como el conjunto de aquellos diádicos p tales que sus abiertos correspondientes U_p contienen a x, es decir,

$$\mathbb{U}(x) = \{p \in \mathbb{Q}_2 \mid x \in U_p\}. \tag{3.2}$$

Este conjunto no contiene a ningún número entero menor que 0, puesto que no hay $x \in X$ alguno que pertenezca a U_p, para $p < 0$. Además, contiene a cada número mayor que 1, puesto que

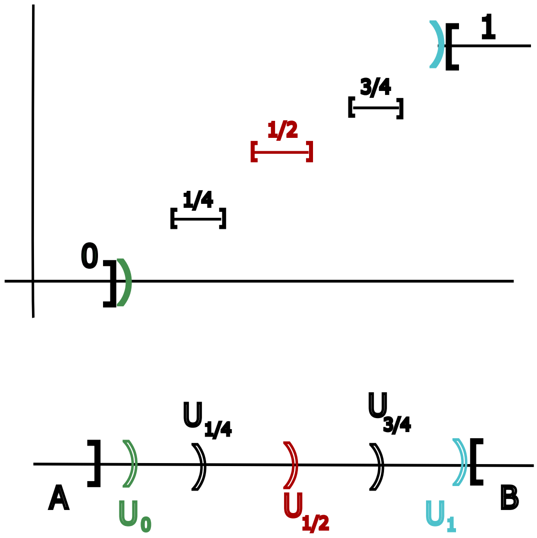

Figura 3.2: Imágenes de la función (3.3)

todo $x \in U_p$, para $p > 1$. Por tanto, $\mathbb{U}(x)$ está acotado inferiormente y su ínfimo es un punto del intervalo $[0, 1]$. Definamos:

$$f(x) = \text{ínf}\, \mathbb{U}(x) = \text{ínf}\{p \in \mathbb{Q}_2 \mid x \in U_p\}. \tag{3.3}$$

Si $x \in A$, entonces $x \in U_p$ para cada $p \geq 0$, por lo que $\mathbb{U}(x)$ es igual al conjunto de todos los diádicos no negativos, y $f(x) = \text{ínf}\, \mathbb{U}(0) = 0$. De manera similar, si $x \in B$, entonces $x \in U_p$ (siempre que $p \geq 1$) por lo que $\mathbb{U}(x)$ está formado por todos los racionales mayores que 1 y $f(x) = 1$.

En la figura 3.2 se hace una representación de la función (3.3). Observamos como la función vale p a partir de cada U_p. También vemos que la imagen de A es 0, ya que U_0 es el abierto más pequeño, y que la imagen de B es 1, pues solo queda contenido por los U_p, $p > 1$.

Por tanto, la función definida en (3.3) tiene como imagen $[0, 1]$ y por construcción cumple que $f(A) = 0$ y que $f(B) = 1$. Así pues, la aplicación queda definida como deseábamos. □

Para terminar la demostración del Lema de Urysohn, es suficiente probar que la función definida en (3.3) es continua. Para ello, primero debemos demostrar dos resultados auxiliares.

Lema 3.6. *Sea X normal y U_r el abierto definido como en los lemas 3.3 y 3.4 para el diádico r, entonces:*

1. $x \in \overline{U_r} \Longrightarrow f(x) \leq r$.

2. $x \notin U_r \Longrightarrow f(x) \geq r$.

Demostración. Comenzaremos demostrando 1. Si $x \in \overline{U_r}$, entonces $x \in U_s$ para todo $s > r$. Por tanto, $\mathbb{U}(x)$ contiene a todos los números racionales diádicos mayores que r, luego, por definición, tenemos que $f(x) = \text{ínf}\, \mathbb{U}(x) \leq r$. Para probar 2, notar que si $x \notin U_r$ entonces $x \notin U_s$, para todo $s < r$. Por tanto, $\mathbb{U}(x)$ no contiene diádico alguno menor que r. por lo que $f(x) = \text{ínf}\, \mathbb{U}(x) \geq r$. □

Ahora sí, estamos en condiciones de probar la continuidad de la función 3.3.

Lema 3.7. *Si es X normal, la función $f : X \longrightarrow [0,1]$ dada por:*

$$f(x) = \text{ínf}\,\mathbb{U}(x) = \{p \in \mathbb{Q}_2 \mid x \in U_p\} \tag{3.4}$$

es continua.

Demostración. Por la propia definición de continuidad, debemos ver que, dado un punto $x_0 \in X$ y un intervalo abierto $(c,d) \subset \mathbb{R}$, que contenga a $f(x_0)$, entonces necesitamos encontrar un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset (c,d)$. Elijamos números diádicos p y q tales que $c < p < f(x_0) < q < d$. ([1])

Veamos que el abierto $U = U_q - \overline{U_p}$ es el entorno deseado de x_0.

En primer lugar, observemos que $x_0 \in U$. Esto se verifica por el hecho de que $f(x_0) < q$ implica, por la condición 2 del lema 3.6, que $x_0 \in U_q$, mientras que el hecho de que $f(x_0) > p$ implica, por 1 de 3.6, que $x_0 \notin \overline{U_p}$.

En segundo lugar, probaremos que $f(U) \subset (c,d)$. Sea $x \in U$, entonces $x \in U_q \subset \overline{U_q}$, por lo que $f(x) \leq q$, por la condición 1, y $x \notin \overline{U_p}$, luego $x \notin U_p$ y $f(x) \geq p$, por 2.

Así, $f(x) \in [p,q] \subset (c,d)$, tal y como queríamos, luego f es continua. □

Demostración del Lema de Urysohn. Si X es normal, por el lema 3.5 sabemos que existe una función $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$, siendo A y B cerrados disjuntos de X. Por último, sabemos que esa función es continua por el lema 3.7. Finalmente, para obtener el caso general basta componer con la aplicación lineal $x \mapsto (b-a)x + a$. □

El resultado que acabamos de ver asegura que si un espacio es normal entonces existirá una función continua como la dada en la definición de $T_{4\frac{1}{2}}$.

Notar que en el Lema de Urysohn no hemos hablado en ningún momento de espacios T_4, si no que de normalidad. Pero como los espacios T_4 son también normales, en particular el lema se cumple para ellos. Por tanto, tenemos que $T_4 = T_{4\frac{1}{2}}$, como bien queríamos ver. Respondiendo así a la pregunta planteada en el capitulo anterior, y explicando porque no tiene sentido hablar de espacios $T_{4\frac{1}{2}}$.

---

[1] Podemos asegurar que existen dichos p y q ya que $\mathbb{Q}_2$ es denso en $\mathbb{R}$. Para verlo, debemos probar que dado un $p \in \mathbb{Q}_2$ entonces existirá un abierto de $\mathbb{R}$ que lo contenga. En efecto, si tomamos $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$, entonces $y - x > 0$. Por la propiedad arquimediana sabemos que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $y - x > \frac{1}{m}$. Tomaremos, sin pérdida de generalidad, $m = 2^n, n \in \mathbb{N}$. Sea ahora, p la parte entera de $x2^n$ tenemos que $p < x2^n < p+1$, entonces $\frac{p}{2^n} < x < \frac{p+1}{2^n}$. Luego $y = x + (y-x) > \frac{p}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{p+1}{2^n} > x$. Es decir, $x < \frac{p+1}{2^n} < y$. Notar, que $\frac{p+1}{2^n} \in \mathbb{Q}_2$ y $(x,y) \subset \mathbb{R}$ es el abierto que lo contiene

Capítulo 4

Aplicaciones Lema de Urysohn

Hasta ahora en el presente trabajo todo lo que hemos hecho ha sido estudiar los principales axiomas de separación. A parte de por la importancia que puedan tener cada uno de ellos, en particular, ha sido principalmente para poder introducir el Lema de Urysohn.

El motivo por el que este resultado es tan importante, a parte de porque da respuesta a la pregunta planteada en el primer capítulo, es por la gran aplicación que tiene en multitud de resultados, permitiéndonos demostrarlos y ampliar así el conocimiento matemático. En este capítulo veremos dos de las aplicaciones más importantes.

4.1. Extensión de funciones continuas

Una de las consecuencias inmediatas del Lema de Urysohn es el teorema de extensión de Tietze. Este teorema resuelve el problema de extender una función continua con valores reales, definida sobre un subespacio cerrado F, del espacio normal X. El cual tiene multitud de aplicaciones en otras áreas de la topología.

4.1.1. Teorema de extensión de Tietze

Teorema 4.1 (Teorema de extensión de Tietze)**.** *Sea X un espacio normal y $F \subset X$ un subespacio cerrado.*

a) Cualquier aplicación continua $f : F \longrightarrow [a,b] \subset \mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación de todo X en $[a,b]$.

b) Cualquier aplicación continua $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de todo X en $\mathbb{R}$.

La idea de la demostración es construir una sucesión de funciones continuas s_n definidas sobre todo X, de modo que la sucesión s_n converja uniformemente, y que su restricción a F se aproxime cada vez más a f. Entonces, la función límite será continua y la restricción a F será exactamente f.

Al igual que lo hecho con el Lema de Urysohn, la demostración de este enunciado no la daremos directamente, si no que la construiremos poco a poco dando resultados que supondrán pasos que nos acercarán a la solución. En concreto, primero veremos un resultado que nos será útil y después las demostraciones de los apartados a) y b) del teorema 4.1.

El primer resultado nos permitirá construir una función particular g definida sobre todo X que no sea demasiado grande y que aproxime a f sobre F con una precisión aceptable.

Comenzaremos con el caso en el que el espacio de llegada es el intervalo $[-r, r]$

Lema 4.2. *Sea X un espacio normal y $f : F \longrightarrow [-r, r]$. una función continua. Veamos que existe una función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple que*

a) $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$ *para cada* $x \in X$, *y*

b) $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r$ *para cada* $a \in F$.

Demostración. La función g se construye como sigue:

Dividimos el intervalo $[-r, r]$ en otros tres de longitud $\frac{2}{3}r$:

$$I_1 = [-r, -\tfrac{1}{3}r], \quad I_2 = [-\tfrac{1}{3}r, \tfrac{1}{3}r] \quad \text{y} \quad I_3 = [\tfrac{1}{3}r, r].$$

Sean ahora los subconjuntos $B = f^{-1}(I_1)$ y $C = f^{-1}(I_3)$ de F. Puesto que f es continua, B y C son cerrados y disjuntos en F. Luego serán cerrados en X. Por el Lema de Urysohn, existe una función continua $g : X \longrightarrow [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$ con la particularidad de que $g(x) = -\frac{1}{3}r \ \forall x \in B$ y $g(x) = \frac{1}{3}r \ \forall x \in C$.

Entonces $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r \ \forall x$. Afirmamos que para cada $a \in F$,

$$|g(a) - f(a)| \leq \tfrac{2}{3}r.$$

Hay tres casos: Si $a \in B$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ pertenecen a I_1. Si $a \in C$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ están en I_3. Y si $a \notin B \cup C$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ están en I_2.

En cada caso, $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r$. □

Teorema 4.3. *Sea X normal y $F \subset X$ un subespacio cerrado. Entonces cualquier aplicación continua $f : F \longrightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación de todo X en $[a, b]$.*

Demostración. En esta demostración, usaremos el lema anterior para construir una serie de funciones s_n, la cual estará acotada por construcción. Después, veremos que converge uniformemente. Así definiremos la función g la cual será la extensión de f.

Sin pérdida de generalidad podemos sustituir $[a, b]$ por $[-1, 1]$. Sea $f : X \longrightarrow [-1, 1]$ una aplicación continua, entonces f satisface las hipótesis del lema 4.2, con $r = 1$. Por tanto, existe una función g_1 continua con valores reales definida sobre todo X tal que

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leq \tfrac{1}{3} & \forall x \in X, \\ |f(a) - g_1(a)| &\leq \tfrac{2}{3} & \forall a \in F. \end{aligned}$$

Consideremos a continuación la función $f - g_1$. Esta función aplica A en el intervalo $[\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}]$, por lo que podemos utilizar el lema 4.2, otra vez, haciendo $r = \frac{2}{3}$.

Obtenemos una función g_2 con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$\begin{aligned} |g_2(x)| &\leq \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3}, & \forall x \in X, \\ |f(a) - g_1(a) - g_2(a)| &\leq (\tfrac{2}{3})^2, & \forall a \in F. \end{aligned}$$

Después, aplicamos el lema 4.2 a la función $f - g_1 - g_2$ y así, sucesivamente. Por tanto en el n-ésimo paso tendremos las funciones con valores reales $g_1, \ldots, g_n$ definidas sobre todo X, las cuales cumplirán:

$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_n(a)| \leq (\tfrac{2}{3})^n, \quad \forall a \in F.$$

Aplicando el lema 4.2 a la función $f - g_1 - \cdots - g_n$, con $r = (\frac{2}{3})^n$, obtendremos la función g_{n+1} de valores reales, definida sobre todo X, tal que:

$$|g_{n+1}(x)| \leq \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n, \quad \forall x \in X,$$
$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_{n+1}(a)| \leq (\tfrac{2}{3})^{n+1}, \quad \forall a \in F.$$

Por inducción, las funciones g_n están definidas para todo n.

Ahora para cada $x \in X$ definimos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

Llamaremos s_n a la sucesión cuyos términos son las n-ésimas sumas parciales de la serie $g(x)$, de modo que queda definida como $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$. Para probar que g es continua, debemos probar que s_n converge a g uniformemente. Esto lo podemos probar usando la "prueba M de Weierstrass"[1]. Si $k > n$, entonces

$$|s_k(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{k} g_i(x)\right| \leq \tfrac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{k} (\tfrac{2}{3})^{i-1} \leq \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{\infty} (\tfrac{2}{3})^{i-1} = (\tfrac{2}{3})^n$$

Así pues, manteniendo fijo n y haciendo $k \longrightarrow \infty$, vemos que

$$|g(x) - s_n(x)| \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^n,$$

para cada $x \in X$. Por tanto, s_n converge a g uniformemente.

Probaremos que $f(a) = g(a)$ para $a \in F$. Recordad que $s_n(x)$ era la n-ésima suma parcial de la serie. Entonces $g(x)$ es, por definición, el límite de la sucesión infinita $s_n(x)$ de sumas parciales. Puesto que:

$$\left|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)\right| = |f(a) - s_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \forall a \in F.$$

Por tanto, tenemos que $f(a) = g(a)$, para $a \in F$.

Finalmente,vamos a probar que g aplica X en el intervalo $[-1, 1]$. Está condición se satisface, automáticamente, ya que la serie $\frac{1}{3} \sum (\frac{2}{3})^n$ converge a 1. Sin embargo, si todo lo que supiéramos es que g aplica X en $\mathbb{R}$, entonces la aplicación $r \circ g$, donde $r : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ es la aplicación dada por

$$r(y) := \begin{cases} y, & \text{si } |y| \leq 1, \\ \frac{y}{|y|}, & \text{si } |y| \geq 1, \end{cases}$$

sería una extensión de f que aplicaría X en $[-1, 1]$. □

Notar que este resultado es la parte a) del Teorema de Extensión de Tietze.

Solo nos queda ver la parte b), cosa que haremos con el siguiente resultado:

Teorema 4.4. *Sea X normal y $F \subset X$. Podemos extender cualquier función continua $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ a una función continua de todo X en $\mathbb{R}$.*

[1] Prueba M de Weierstrass: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de variable real o compleja definidas en un dominio D, supongamos que para cada término de la sucesión existe una constante $M_n > 0$ tal que $|f_n| < M_n$, $\forall n \geq 1$ y $\forall x \in D$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en D.

Demostración. Podemos sustituir $\mathbb{R}$ por $(-1, 1)$, ya que este intervalo abierto es homeomorfo al propio $\mathbb{R}$.

Tomaremos f, una aplicación continua de F en $(-1, 1)$ (notar que esta función no tiene porque guardar relación alguna con la definida con anterioridad). La mitad del teorema de Tietze ya probado muestra que podemos extender f a una aplicación continua $g : X \longrightarrow [-1, 1]$ que lleva X al intervalo cerrado ¿Cómo podemos encontrar una función h que lleve X al intervalo abierto? Aquí reside la complejidad de la demostración.

Dada g definimos el subconjunto $D \subseteq X$ por la ecuación:

$$D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}).$$

Puesto que g es continua, D es un subconjunto cerrado de X. Como $g(F) = f(F)$, el cual está contenido en $(-1, 1)$, el conjunto F es disjunto de D. Por el Lema de Urysohn, existe una función continua $\Phi : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\Phi(D) = \{0\}$ y $\Phi(F) = \{1\}$.

Definamos

$$h(x) = \Phi(x)g(x).$$

Entonces h es continua, por ser el producto de funciones continuas. Además, h es una extensión de f, ya que, para $a \in F$,

$$h(a) = \Phi(a)g(a) = 1\Delta g(a) = f(a).$$

Finalmente, h aplica todo X en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Esto es así porque si $x \in D$, $h(x) = 0\Delta g(x) = 0$, y si $x \notin D$, entonces $|g(x)| < 1$. Se sigue que $|h(x)| \leq 1\Delta|g(x)| < 1$. □

Notar que este resultado corresponde a la parte **b)** del teorema original.

4.2. Embebimiento de variedades

4.2.1. Particiones de la unidad

Una de las preguntas más importantes de la topología y de la geometría diferencial es, ¿bajo qué condiciones un espacio X se puede embeber en algún espacio euclídeo finito dimensional $\mathbb{R}^n$? Demostraremos un resultado, consecuencia de Urysohn, que nos permitirá dar una respuesta a esta pregunta.

Antes de proceder, necesitaremos explicar un par de conceptos previos que son clave para poder comprender esta sección.

Dada una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ llamaremos **soporte de f** al conjunto

$$\text{sop}(f) = \{\, x \in X \mid f(x) \neq 0 \,\}.$$

Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un recubrimiento abierto finito de X. Dada una familia de funciones continuas $\Phi = \{\phi_i : X \longrightarrow [0, 1]\}_{i \in I}$ diremos que es una **partición de la unidad** dominada por $\{U_i\}$ si satisfacen:

1. Para toda función ϕ_i existe un abierto U_i perteneciente al recubrimiento abierto de X tal que $\text{sop}(\phi_i) \subset U_i$.

2. $\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1$ para cada $x \in X$.

La existencia de particiones de la unidad no solo es útil para embeber variedades, si no que además, es uno de los conceptos más importantes en geometría diferencial, ya que ayudan a probar el lema de Stokes y permite *extender* de forma global propiedades que se cumplen de forma local.

Teorema 4.5 (Existencia de particiones finitas de la unidad). *Sea $\{U_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento abierto finito del espacio normal X. Entonces existe una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}_{i=1}^n$.*

Demostración. Paso 1. Vamos a probar, por inducción, que podemos *reducir* el recubrimiento $\{U_i\}$ a un recubrimiento abierto $\{V_1, \dots, V_n\}$ de X tal que $\overline{V_i} \subset U_i$ para cada i.

Antes de empezar, observe que el conjunto:

$$A = X - (U_2 \cup \cdots \cup U_n)$$

es un subconjunto cerrado de X. Puesto que $\{U_1, \dots, U_n\}$ recubre a X, el conjunto A está contenido en el conjunto abierto U_1. Usando la normalidad, elegimos un conjunto abierto V_1 que contenga a A y tal que $\overline{V_1} \subset U_1$. Entonces la colección $\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$ recubre a X.

En general, dados conjuntos abiertos $V_1, \dots, V_{k-1}$ tales que la colección: $\{V_1, \dots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \dots, U_n\}$ recubre a X, pongamos:

$$A = X - (V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}) - (U_{k+1} \cup \cdots \cup U_n)$$

Entonces A es un subconjunto cerrado de X que está contenido en el conjunto abierto U_k. Elegimos V_k como un conjunto abierto que contiene a A tal que $\overline{V_k} \subset U_k$. Entonces

$$\{V_1, \dots, V_{k-1}, V_k, U_{k+1}, \dots, U_n\}$$

recubre a X. En el paso n-ésimo de la inducción, se prueba nuestro resultado.

Paso 2. Ahora probaremos el teorema como tal. Dado un recubrimiento abierto $\{U_1, \dots, U_n\}$ de X, elijamos otro $\{V_1, \dots, V_n\}$ de X tal que $\overline{V_i} \subset U_i$ para cada i. Después elegimos uno más $\{W_1, \dots, W_n\}$, el cual también cubre X, y además cumple que $\overline{W_i} \subset V_i$ para cada i.

Utilizando el lema de Urysohn, elijamos para cada i una función continua: $\psi_i : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $\psi_i(\overline{W_i}) = \{1\}$ y $\psi_i(X - V_i) = \{0\}$. Puesto que $\psi_i^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ está contenido en V_i, tenemos

$$\text{sop}(\psi_i) \subset \overline{V_i} \subset U_i.$$

Como la colección $\{W_i\}$ recubre a X, la suma $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)$ es positiva para cada x. Por tanto, podemos definir, para cada j,

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}.$$

Es fácil comprobar que las funciones $\phi_1, \dots, \phi_n$ forman la deseada partición de la unidad. □

4.2.2. Embebimiento de *m*-variedades compactas

Antes de dar respuesta a la pregunta original de esta sección, cosa que haremos usando el teorema anterior. Debemos dar un par de definiciones previas.

Llamaremos **m-variedad**, a un espacio de Hausdorff X con una base numerable tal que cada punto $x \in X$ tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^m$.

Por otro lado, diremos que la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es un **embebimiento** de X en Y, si es continua, inyectiva y si la función $f' : X \longrightarrow f(X)$, obtenida al restringir el rango de f, es un homeomorfismo.

Teorema 4.6. *Si X es una m-variedad compacta, entonces X se puede embeber en un $\mathbb{R}^n$ para algún entero positivo n.*

Demostración. Recubramos X por un número finito de conjuntos abiertos $\{U_1, \ldots, U_n\}$, cada uno de los cuales puede embeberse en $\mathbb{R}^m$. Elijamos embebimientos $g_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$ para cada i. Como X es Hausdorff y compacto, también es normal. Entonces, por 4.5, sabemos que existe $\psi_1, \ldots, \psi_n$ una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$ y sea $A_i = \text{sop}(\psi_i)$; para cada $i = 1, \ldots, n$.

Definimos la función $h_i : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ por la regla:

$$h_i(x) = \begin{cases} \psi_i(x)\Delta g_i(x), & x \in U_i \\ \vec{0} = (0, \ldots, 0), & x \in X - A_i. \end{cases}$$

Notar que aquí $\psi_i(x)$ es un número real c y $g_i(x)$ es un punto $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ de $\mathbb{R}^m$, el producto $c\Delta\vec{y}$ denota, naturalmente, el punto $(cy_1, \ldots, cy_m) \in \mathbb{R}^m$.

La función h_i está bien definida porque las dos definiciones de h_i coinciden en la intersección de sus dominios, y h_i es continua porque sus restricciones a los conjuntos abiertos U_i y $X - A_i$ son continuas.

Definamos ahora: $F : X \longrightarrow (\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ veces}})$ mediante la regla:

$$F(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), h_1(x), \ldots, h_n(x)).$$

Claramente, F es continua. Para probar que es un embebimiento, sólo necesitamos mostrar que F es inyectiva (por la compacidad de X). Supongamos que $F(x) = F(y)$. Entonces $\psi_i(x) = \psi_i(y)$ y $h_i(x) = h_i(y)$, para todo i. Tenemos que $\psi_i(x) > 0$ para algún i (puesto que $\sum \psi_i(x) = 1$). Por tanto, $\psi_i(y) > 0$ también, por lo que $x, y \in U_i$. Entonces

$$\psi_i(x)\Delta g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \psi_i(y)\Delta g_i(y).$$

Como $\psi_i(x) = \psi_i(y) > 0$, concluimos que $g_i(x) = g_i(y)$. Pero $g_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es inyectiva, luego $x = y$. $\square$

Capítulo 5

Otros Axiomas de Separación

Hasta ahora hemos visto la siguiente cadena de implicaciones, en los axiomas de separación por entornos: $T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$. Veremos que podemos seguir extendiendo esta cadena, es decir, daremos definición a T_5 y T_6. Para ello, vamos a ampliar la definición de normalidad y a partir de ella, daremos los otros axiomas. Además, veremos sus relaciones con los axiomas de separación por funciones tratando de hacer la cadena de implicaciones lo más completa posible.

Definición (Completamente Normal)**.** Un espacio topológico X es completamente normal si todo subespacio de X es normal. Equivalentemente, si todo par de conjuntos disjuntos se pueden separar por entornos disjuntos.

Por la propia definición, se puede intuir que completamente normal implicará Normal, pero el recíproco, en general, no es cierto. Para verlo, podemos considerar el espacio $X = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\} = \{2, 3, 4, ...\}$ y la topología dada por la base formada por los $U_n = \{x \in X : x|n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Este es un espacio topológico normal, ya que no hay cerrados disjuntos. Pero no es completamente normal, pues los subespacios $\{4\}$ y $\{6\}$ son disjuntos, pero los abiertos más pequeños que los contienen son U_4 y U_6, los cuales cumplen $U_4 \cap U_6 = U_2 = \{2\}$.

Por tanto, la propiedad completamente normal es más fuerte que ser normal. Es por eso que en principio tampoco guarda relación con el resto de axiomas T_i. Para ello, se debe exigir que el espacio sea T_1, así ve luz la siguiente definición:

Definición (T_5)**.** X es T_5 (también llamado Hausdorff Completamente Normal) si es T_1 y completamente normal.

Obviamente T_5 implica T_4. Ya que un espacio completamente normal es normal.

La siguiente definición sigue profundizando y ampliando la normalidad. Esta vez incluyendo algo que se puede asemejar a la separación por funciones que hemos visto anteriormente.

Definición (Perfectamente Normal)**.** Un espacio topológico es perfectamente normal si para cualquier par de cerrados disjuntos F_1, F_2 existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = F_1$ y $f^{-1}(\{1\}) = F_2$. Equivalentemente, un espacio es perfectamente normal si es normal y todo cerrado es G_δ [1].

Notar que la segunda definición de este espacio implica la normalidad. No obstante, podemos ir más allá, pues un espacio perfectamente normal será completamente normal. Para probarlo, tan

[1] En un espacio topológico X, un subespacio es G_δ si es una intersección numerable de abiertos.

solo hace falta notar que si $Y \subset X$ entonces Y también será perfectamente normal (sencillamente podemos coger la restricción de f a Y) por tanto Y es normal, luego X es completamente normal.

Sin embargo, el recíproco no va a ser cierto. Un contraejemplo fácil, sería el espacio de Sierpinski, que ya definimos en la página2. El cual es completamente normal, ya que no hay subespacios disjuntos. Pero no es perfectamente normal, pues no existe función continua que cumpla la definición.

De nuevo, esta definición no hace más que ahondar en el concepto de normalidad, por ese motivo si queremos que guarde relación con el resto de axiomas de separación por entornos, necesitamos exigir que sean T_1 .

Definición (T_6)**.** X es T_6 (ó Hausdorff Perfectamente Normal) si es T_1 y perfectamente normal.

Trivialmente, T_6 implica T_5.

Así pues, tras estas definiciones, podemos concluir finalmente la cadena de relaciones entre los distintos axiomas de separación:

$$T_6 \Longrightarrow T_5 \Longrightarrow T_4 \Longrightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_{2\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0.$$

Por último, daremos este resultado, que justifica que todo espacio métrico cumple los axiomas de separación.

Teorema 5.1. *Todo espacio métrico es T_6 y en consecuencia, cumple todos los axiomas de separación.*

Demostración. Sea X un espacio métrico y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ su métrica. Para ver que es T_6, debemos ver que es T_1 y perfectamente normal.

Lo primero ya sabemos que se cumple, pues con anterioridad hemos probado que un espacio métrico es T_2, luego T_1.

Para lo segundo, tomaremos dos cerrados disjuntos $A, B \subset X$. Definimos entonces la función $f : X \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

donde $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid z \in A\}$, análogamente se define $d(x, B)$. Esta función está bien definida, pues $d(x, A) + d(x, B) > 0$, para todo $x \in X$. Además, será continua por ser composición de funciones continuas. Notar que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$, más aún, se cumple que $A = f^{-1}(0)$ ya que,

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in A.$$

Además, $B = f^{-1}(1)$, pues si razonamos como antes,

$$f(x) = 1 \Longleftrightarrow d(x, A) = d(x, A) + d(x, B) \Longleftrightarrow 0 = d(x, B) \Longleftrightarrow x \in B$$

.

Luego el espacio métrico X es T_6 y en consecuencia cumple el resto de los axiomas de separación que hemos visto. $\square$

Bibliografía

[1] L.A. Steen y J.A. Seebach. *Counterexamples in Topology*. Dover, 2013.

[2] D. Hinrichsen y J.L. Fernandez. *Topología General*, 1977.

[3] J. R. Munkres. *Topología, 2ª Edición*, 2002.

[4] A.B. Raha. An example of a regular space that is not completely regular. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 102, 49–51 (1992).

Anexo I: Ejemplo de A.B. Raha

Construcción. Definimos, para cada $n \in 2\mathbb{Z}$, el conjunto $T_n = \{n\} \times (-1, 1)$ y tomamos

$$X_1 = \bigcup_{n \in 2\mathbb{Z}} T_n = \{(n, y) \mid n \in 2\mathbb{Z} \text{ e } y \in (-1, 1)\} = 2\mathbb{Z} \times (-1, 1).$$

Por otro lado, sea la sucesión $\{1 - \frac{1}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, esta es estrictamente creciente, converge a 1 y además, está contenida dentro del intervalo $(0, 1)$. A partir de dicha sucesión, construimos para cada $m \in 1 + 2\mathbb{Z}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$C_{m,k} = \left\{(x, y) \mid (x - m)^2 + y^2 = (1 - \frac{1}{k})^2\right\},$$

es decir, la circunferencia de centro $(m, 0)$ y radio $1 - \frac{1}{k}$. Entonces, tomamos como

$$X_2 = \bigcup_{m \in 1+2\mathbb{Z}} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{m,k}.$$

Por último, tomamos dos puntos a, b tales que no pertenezcan ni a X_1, ni a X_2. Con esto, ya podemos dar nuestro conjunto

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \{a, b\}.$$

Topología de X. Daremos la topología en X mediante bases locales para los puntos;

Dado $n \in 2\mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$, si $x \in C_{n,k} - \left\{\left(n, 1 - \frac{1}{k}\right)\right\}$ entonces x será un punto aislado y su base local será $\{x\}$. De esta forma, $C_{n,k} - \left\{\left(n, 1 - \frac{1}{k}\right)\right\}$ es discreto.

Para los puntos $(n, 1 - \frac{1}{k})$, definidos como antes, tomamos su base de entornos de la siguiente forma;

$$\left\{C_{n,k} - A \;\middle|\; A \subset C_{n,k} - \left\{\left(n, 1 - \frac{1}{k}\right)\right\} \text{ y } |A| < \aleph_0\right\}. \tag{I.1}$$

Sea, para cada $m \in 1 + 2\mathbb{Z}$, el conjunto $C_m = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_{m,k}$. Entonces, definimos para todo $p = (n, y) \in T_n$, con $n \in 2\mathbb{Z}$, el conjunto

$$J_p = \{(z, y) \mid z \in (n - 1, n + 1)\} \cap (C_{m-1} \cup C_{m+1} \cup T_n) \subset X.$$

De esta forma, los abiertos básicos de p serán;

$$\{J_p - C \mid C \subset J_p - \{p\} \text{ y } |C| < \aleph_0\}. \tag{I.2}$$

Por último, solo nos quedan los de los entornos de los puntos a, que serán de la forma

$$\{((X_1 \cup X_2) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > r\}) \cup \{a\} \mid r \in \mathbb{R}\} \tag{I.3}$$

y los de b, que los construimos de forma similar como;

$$\{((X_1 \cup X_2) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < r\}) \cup \{b\} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

El r que hemos dado en ambos conjuntos no es necesariamente el mismo.

Luego hemos logrado construir una base local para cada punto, la cual dará luz a una topología sobre X. Esto lo sabemos ya que existe una proposición que dice:

Lema I.2. *Dado un conjunto X, si tenemos para cada $x \in X$ una familia no vacía $\beta_x \subset \mathbb{P}(X)$, que cumple:*

1. $\forall B \in \beta_x, x \in B$.
2. *Si $B_1, B_2 \in \beta_x$ entonces existe $B_3 \in \beta_x$ de forma que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*
3. $\forall B \in \beta_x$, *existe $B_0 \in \beta_x$ tal que $\forall y \in B_0$, existe $B_y \in \beta_y$ tal que $B_y \subset B$.*

Entonces podemos construir una topología para X definida de la siguiente manera;

$$U \in \tau \Longleftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \beta_x \mid B \subset U.$$

Luego debemos probar que, efectivamente, la base local que hemos dado cumple estas propiedades y en consecuencia genera una topología.

1 Esta es obvia, ya que se cumple por construcción.

2 Para los puntos de $C_{m,k} - \left\{\left(m, 1 - \frac{1}{k}\right)\right\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $m \in 1 + 2\mathbb{Z}$, la propiedad se cumple trivialmente.

Para aquellos de la forma $x = \left(m, 1 - \frac{1}{k}\right)$, con m como en el caso anterior, los entornos básicos están definidos en (I.1). Consideramos dos de estos conjuntos, que serán $C_{m,k} - A_1$ y $C_{m,k} - A_2$ con $A_1, A2$ finitos y además, no contienen el punto x. Luego

$$(C_{m,k} - A_1) \cap (C_{m,k} - A_2) = C_{m,k} - (A_1 \cup A_2),$$

y $A_1 \cup A_2$ es finito y no contiene a x, por tanto, $C_{m,k} - (A_1 \cup A_2)$ es un entorno básico de x, así que se cumple (2).

Sea $p = (n, y) \in T_n$, si tomamos dos entornos básicos de este punto, y atendiendo a (I.2), los podemos escribir como $J_p - C_1$ y $J_p - C_2$, con C_1 y C_2 finitos y con p no perteneciente a ellos. Luego, al intersecarlos nos queda,

$$J_p - (C_1 \cup C_2),$$

donde $C_1 \cup C_2$ es finito y no contendrá a p, ergo $J_p - (C_1 \cup C_2)$ es un básico para p.

Por último, si consideramos dos entornos de a (resp. b), por (I.3) deben tener la forma

$$B_1 = (X_1 \cup X_2) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > r_1(\text{resp. } x < r_1)\},$$
$$B_2 = (X_1 \cup X_2) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > r_2(\text{resp. } x < r_2)\}.$$

Recordar, que dichos básicos contienen a a (resp. b), pero hemos decidido no ponerlos explícitamente por simplicidad. Si los intersecamos, nos queda

$$B = (X_1 \cup X_2) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > \text{máx}\,\{r_1, r_2\}(\text{resp. } x < \text{mín}\,\{r_1, r_2\})\},$$

el cual obviamente también es un abierto, por definición. Luego se verifica para todos los entornos 2.

3 Para los puntos de $C_{m,k} - \left\{\left(m, 1 - \frac{1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $m \in 1 + 2\mathbb{Z}$ se cumple trivialmente, pues el único entorno básico es el propio punto.

Para los puntos de la forma $x = (m, 1 - \frac{1}{k})$, con m un entero impar y k natural, consideramos un entorno cualquiera B, entonces para cada $x_0 \in B - \{x\}$ tenemos que $\{x_0\} \subset B$ y para cada x podemos usar al propio B como el B_0.

Sea ahora $p = (n, y) \in T_n$ y sea B un abierto básico del punto, entonces existen dos posibilidades, puede ocurrir que $(n \pm 1, 1 - \frac{1}{k}) \in C$ o no. Notar, que en el peor de los casos podría ser que $(n - 1, 1 - \frac{1}{k}), (n + 1, 1 - \frac{1}{k}) \in C$, pero no más de este tipo de puntos ya que una condición necesaria para que alguno de estos puntos pertenezca a T_n es que $1 - \frac{1}{k} = y$. Entonces si al entorno C le quitamos esos puntos seguiremos teniendo un abierto de p, luego podemos tomar $B_0 = B - \{(n, 1 - \frac{1}{k})\}$, lo cual, a lo más, elimina dos puntos de B. Además, como $x_0 \in B_0 - \{p\}$ se tiene que $\{x_0\} \subset B$.

Finalmente, si tomamos un entorno de a (resp. b), al que llamaremos $B(r)$. Entonces si tomamos $n \in 2\mathbb{Z}$ tal que $n > r$, tenemos que $B(r) \subset B(n) = B_0$, es evidente que para cada $x_0 \in B_0$ existe algún abierto básico de x_0 que está en $B(r)$, de hecho todos los abiertos de x_0 estarán en $B(r)$. Luego se cumple la proposición y análogamente lo veríamos para b.

***X* es *T*$_3$.** Una simple comprobación prueba que X es un espacio T_2, pues los entornos básicos se han tomado deliberadamente para que separen puntos. Además, es T_3, ya que es T_2 y para ver la regularidad basta ver que cada punto tiene una base de entornos cerrados. Para los puntos de X_2 y X_1 nos vale la base de entornos dada anteriormente. Por último, para los puntos a y b, las bases a tomar serían las dada en (I.3) pero con $r \in 2\mathbb{Z}$ en lugar de un $r \in \mathbb{R}$ cualquiera.

***X* no es completamente regular.** Antes de proceder, un pequeño apunte de notación. Llamaremos a_n al punto $(n, 1 - \frac{1}{k})$ y como $C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n,k}$.

Para cualquier función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ veremos que $f(a) = f(b)$, lo que en consecuencia provoca que X no sea completamente regular.

Para verlo, primero, notar que si h es una función continua definida en $C_{n,k}$, entonces el conjunto

$$\{(x, y) \in C_{n,k} \mid h(x, y) \neq h(a_n)\} = \left\{(x, y) \in C_{n,k} \mid h(x, y) \notin \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(h(a_n) - \frac{1}{m}, h(a) + \frac{1}{m}\right)\right\}$$

es un conjunto contable de $C_{n,k}$.

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sean los conjuntos $B_{n,k} = \{(x, y) \in C_{n,k} \mid f(x, y) \neq f(a_n)\}$ y D_n el de las ordenadas de los puntos en $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$. Por la observación anterior, tenemos que cada $B_{n,k}$ es contable y en consecuencia, cada D_n lo es también. Luego, el conjunto D unión de todos los D_n será contable y estará contenido en $(-1, 1)$. Supongamos que cogemos $p = (n, y) \in T_n$ tal que la coordenada y no pertenece a D. Consideramos

$$\{(z, y) \mid n - 1 < z < n + 1\} \cap (C_{n-1} \cup C_{n+1})$$

Si $(z, y) \in C_{n-1,k}$, entonces $f(z, y) = f(a_{n-1})$ y si $(z, y) \in C_{n+1,k}$, tenemos que $f(z, y) = f(a_{n+1})$.

Por la forma de los abiertos de p, es claro que

$$f(p) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n+1}).$$

Sea $q \in X_1$ tal que $q \in T_{n+2}$ y cuya primera coordenada no pertenezca a D, por lo visto anteriormente, tenemos que

$$f(q) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n+3}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n+1}).$$

Por lo tanto, $f(p) = f(q)$.

Si $G = \{(n, y) \mid n \in 2\mathbb{Z} \text{ e } y \in (-1, 1) - D\}$ siguiendo la argumentación antes dada llegamos a que para cualquier $p \in G$, $f(p) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n+1})$. Luego f es constante en G, suponiendo que su valor es c, tenemos que para cualquier entorno de a y b, $f(a) = c = f(b)$. Lo que contradice que X pueda ser completamente regular y en consecuencia $T_{3\frac{1}{2}}$.