Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Propuesta didáctica para Funciones en 3º ESO Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas

A didactic proposal for Functions in 3rd of ESO Mathematics oriented to Academic Teaching

Autora:

Elisa Lupón Monge

Tutora:

Nuria Begué Pedrosa

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2021-2022

Índice

Nota - Referencia de género: *Todas las referencias contenidas en este trabajo para las que se utiliza la forma de masculino genérico, deben entenderse aplicables, indistintamente, a mujeres y hombres.*

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar e indica el curso y la asignatura en la que sitúas el objeto matemático

En el presente Trabajo Fin de Máster se expone una propuesta didáctica para la enseñanza del **concepto de función, formas de representación y características generales** en el curso 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). En concreto, nos centraremos en la asignatura “Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas” cuyo currículo oficial vigente en el curso escolar 2021-2022 está recogido en la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo del 2016, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, y el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Según establece la ORDEN ECD/489/2016, toda acción didáctica debe buscar el desarrollo en el alumnado de competencias clave, definidas como la capacidad de poner en práctica de forma integrada los conocimientos adquiridos, las habilidades, aptitudes, actitudes y rasgos de la personalidad que permiten enfrentarse con éxito y eficazmente a situaciones diversas para la realización personal, la inclusión social y la vida laboral. Entre dichas competencias se encuentra la **competencia matemática**, consistente en la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento lógico-matemático con el fin de resolver eficazmente problemas en situaciones cotidianas.

El objeto matemático seleccionado, las funciones, está presente de forma continua en la **vida cotidiana** de cada persona. En la actualidad, resulta común encontrar funciones día a día en los medios de comunicación en forma de gráficas y tablas. Dado que constituyen un importante método para la transmisión de información en nuestra sociedad, es especialmente relevante que los jóvenes sean capaces de analizarlas correctamente para tener una visión crítica y racional del mundo que les rodea. Asimismo, el aprendizaje de funciones no tiene solo un carácter político-ético, sino que es fundamental desde el punto de vista formativo y funcional. Las funciones son un excelente instrumento a través del cual el alumnado puede desarrollar el pensamiento lógico-matemático, establecer relaciones entre diversos campos de las matemáticas y otras materias, así como modelizar situaciones del mundo real para obtener información y hacer predicciones.

La importancia del aprendizaje de funciones queda patente en el propio currículo oficial de la ESO. Comenzando en la asignatura Matemáticas en 1º y 2º de ESO, hasta las Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas y Aplicadas en 3º y 4º de ESO, las funciones cuentan con un Bloque de contenido específico denominado **"Bloque 4: Funciones"**.

Centrándonos en la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas en 3º de ESO, los contenidos que abarca el "Bloque 4: Funciones" tienden a dividirse en dos sub-bloques. El primero de ellos hace referencia al análisis de las características generales de las funciones y su interpretación, mientras que el segundo se centra en estudiar los casos particulares de las funciones lineales y cuadráticas. En lo que respecta a nuestra propuesta didáctica, vamos a tratar el primer sub-bloque cuyos contenidos describimos a continuación:

- Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.

El motivo por el cuál optamos por centrarnos en estos contenidos se debe a que consideramos que, para lograr un correcto aprendizaje de las funciones, es preciso dotar al alumnado de unos conocimientos básicos (concepto de función, formas de representación y características generales) que sustenten el posterior estudio de casos particulares.

Por otro lado, consideramos pertinente señalar que si bien la presente propuesta didáctica se ha desarrollado tomando como punto de partida la legislación vigente a nivel nacional en el curso 2021-2022, es decir, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), durante su elaboración se han tenido en consideración las pautas presentes en la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la LOE de 2006 (LOMLOE) cuya entrada en vigor en los institutos españoles a nivel 3º de ESO está prevista para el curso escolar 2022-2023. En concreto, se valorarán los principios pedagógicos y metodológicos que deben regir la práctica educativa, como por ejemplo el trabajo en grupos heterogéneos, así como las características del proceso de evaluación.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático se pretende enseñar?

Teniendo en cuenta los contenidos descritos en la sección anterior, los campos de problemas (CP) con los que vamos a trabajar a lo largo de nuestra propuesta didáctica se pueden agrupar en tres categorías principales:

- CP1. Concepto de función.
- CP2. Cambios entre formas de representación.
- CP3. Interpretación de las características de una función.

Dentro de cada categoría podemos desarrollar los siguientes sub-campos de problemas, cada uno de los cuáles tendrá sus respectivas técnicas (T) y tecnologías asociadas:

CP1. Concepto de función
1.1. Identificar una función representada por un enunciado. 1.2. Identificar una función representada por una gráfica. 1.3. Identificar una función representada por una tabla. 1.4. Identificar una función representada por una fórmula.
○ T1.1. Se establece una relación entre la variable dependiente (y) y la variable independiente (x), donde se estudia si a cada valor de x le corresponde un único valor de y. ○ T1.2. Los puntos del plano en un sistema de coordenadas cartesianas se representan mediante los pares (x, y), de modo que para cada valor de x (variable independiente) se tiene un único valor de y (variable dependiente).
Tecnologías: Definición del concepto de función, sistemas de representación.
CP2. Cambios entre formas de representación
En esta categoría se pretenden trabajar los cambios entre las distintas formas de representación de una función (enunciado, tabla, gráfica y fórmula), tomando como referencia a Sierra Vázquez, González Astudillo y López Esteban (1998):

	Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Expresiones algebraicas
Descripción verbal		Medida	Croquis	Modelo
Tablas	Lectura de relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste numérico
Gráficas	Lectura de relaciones gráficas	Tabulación		Ajuste gráfico
Expresiones algebraicas	Lectura de relaciones simbólicas	Tabulación	Croquis	

Figura 1. Relaciones entre las formas de representación (Sierra *et al.*, 1998, p. 97).

- T2.1. De enunciado a tabla. Seleccionar las variables independiente y dependiente del enunciado y realizar una tabla de valores.
- T2.2. De enunciado a gráfica. Bocetar los datos del enunciado en un eje de coordenadas.
- T2.3. De enunciado a fórmula. Identificar las variables independiente y dependiente del enunciado y pasarlas a su forma algebraica estableciendo la relación entre ambas.
- T2.4. De tabla a enunciado. Identificar las variables independiente y dependiente y establecer verbalmente la relación funcional de los pares (x, y).
- T2.5. De tabla a gráfica. Tomar los pares (x, y) de la tabla y representarlos en un sistema de coordenadas cartesianas.
- T2.6. De tabla a fórmula. Identificar las variables independiente y dependiente y establecer la relación funcional de los pares (x, y) en forma de fórmula $y = f(x)$.
- T2.7. De gráfica a enunciado. Interpretar las variables independiente y dependiente y asociarles un enunciado en el que se verifiquen los valores de la gráfica.
- T2.8. De gráfica a tabla. Leer puntos de coordenadas (x, y) de la gráfica y convertirlos en parejas en la tabla de valores.
- T2. 9. De gráfica a fórmula. Realizar un ajuste gráfico para expresar la relación funcional como fórmula.
- T2.10. De fórmula a enunciado. Dada la ecuación de una función, crear un enunciado que se ajuste a la forma de dicha ecuación.

- T2.11. De fórmula a tabla. Sustituir valores de la variable independiente en la fórmula para obtener parejas de datos.
- T2.12. De fórmula a gráfica. Calcular el valor de la variable dependiente para valores del dominio de la función y representarlo en un sistema de coordenadas (solo aplicable en casos sencillos). Utilizar calculadoras gráficas.

Tecnologías: Definición de enunciado, tabla, gráfica y fórmula.

CP3. Interpretación de las características de una función

3.1. Dominio y recorrido de una función dada por su enunciado.
3.2. Dominio y recorrido de una función dada por su gráfica.
3.3. Dominio de una función dada por su fórmula.
3.4. Continuidad de una función dada por su gráfica.
3.5. Cálculo de la imagen de un punto a partir de la fórmula.
3.6. Crecimiento y decrecimiento a partir de la gráfica.
3.7. Máximos y mínimos a partir de la gráfica.
3.8. Simetría de una función dada gráficamente.
3.9. Periodicidad de una función dada gráficamente.

- T3.1. Seleccionar el intervalo de los valores que puede tomar la variable independiente y la variable dependiente.
- T3.2. Identificar los valores de la variable independiente y la variable dependiente para los que se representa gráficamente la función.
- T3.3. Hallar los valores de la variable independiente para los que la función no está definida, estos serán los que quedan fuera del dominio.
- T3.4. Ver si la función puede dibujarse con un solo trazo (es una técnica que conduce a soluciones incorrectas) o comprobar si no hay saltos en su dominio.
- T3.5. Sustituir en la fórmula un valor en el lugar que ocupa la variable independiente y obtener el valor de la imagen.
- T3.6. Dado un intervalo (a, b) donde $a < b$, estudiar si $f(b) > f(a)$ la función es creciente, si $f(b) < f(a)$ es decreciente y si $f(b) = f(a)$ es constante en el intervalo.

○ T3.7. Se identifican los máximos y mínimos al encontrar los puntos en los que una gráfica pasa de creciente a decreciente, o de decreciente a creciente, respectivamente. ○ T3.8. Comprobar si una función cumple $f(x) = f(-x)$ gráficamente viendo si la gráfica coincide a ambos lados al doblarla por el eje de ordenadas, o si se cumple $-f(x) = f(-x)$ al doblar por el origen de coordenadas. ○ T3. 9. Observar si la gráfica de una función se repite en intervalos de la misma longitud.
Tecnologías: Definición de dominio, recorrido, continuidad, cortes con los ejes, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, simetría y periodicidad.

Tabla 1. Campos de problemas, técnicas y tecnologías a enseñar.

En cuanto a las tecnologías que justifican las técnicas, estas se apoyarán sobre las definiciones y propiedades asociadas a las funciones. Dado que el nivel de abstracción y formalismo matemático requeridos para realizar demostraciones rigurosas queda fuera de los objetivos de un curso como 3º de ESO, no se espera que el alumnado profundice en ellas más allá de adquirir una visión general e intuitiva. Dichas definiciones pueden encontrarse desarrolladas punto por punto en la Sección G.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Según señalan Azcárate y Deulofeu (1990), a la hora de desarrollar cualquier estudio sobre la didáctica de un objeto matemático conviene conocer en profundidad dicho objeto, su origen y evolución. En el caso de las funciones, los autores remarcan que el estado de la enseñanza-aprendizaje está condicionado por la dificultad histórica de la definición de función, la complejidad de su simbolismo y su representación, la diversidad de problemas y modelos existentes así como la amplia gama de sus aplicaciones.

Históricamente, la razón de ser de las funciones ha sido **modelizar** situaciones o fenómenos en los que se relacionan dos o más variables. De una forma intuitiva, se puede decir que una función es una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables. Si bien este tipo de definiciones intuitivas carecen de rigor, se observa que definiciones más rigurosas resultan muy lejanas de los problemas concretos que pueden encontrarse los estudiantes en la vida cotidiana. Este hecho contribuye a que la introducción del concepto de función en la enseñanza sea muy variada, no existiendo una definición y metodología únicas.

Para poder analizar las formas de introducción de las funciones presentes en la enseñanza actual, conviene conocer primero su origen y evolución histórica. En este aspecto, Azcárate y Deulofeu (1990) señalan la ambigüedad de opiniones de distintos autores a la hora de situar el origen del concepto de función y optan por dividir su proceso de evolución en tres grandes períodos tomando como referencia el estudio de Youschkevitch (1976):

- La Antigüedad, la etapa en la que, a pesar de la existencia de estudios sobre casos particulares de dependencias entre dos cantidades, aún no aparecen las nociones generales de cantidades variables y funciones.

- La Edad Media, época en la que, dentro de la ciencia de la Europa del siglo XIV, estas nociones generales se expresaron por vez primera de un modo definido, tanto mediante formas geométricas como mecánicas, pero en la que cada caso concreto de dependencia entre dos cantidades era definido por medio de una expresión verbal, o con una gráfica, en vez de darle una fórmula.

- El Período Moderno, en el que a partir del siglo XVI con el estudio del movimiento y el descubrimiento de la geometría analítica, y especialmente durante el XVII con las series de potencias, comienzan a prevalecer las expresiones analíticas de las funciones. Posteriormente, esta interpretación de funciones como expresiones analíticas resultó demasiado restrictiva, dando lugar a nuevas definiciones más generales de la mano de la teoría de conjuntos.

Por tanto, vemos cómo el concepto de función ha evolucionado a lo largo de la historia, encontrando diversas definiciones en creciente nivel de abstracción, todas ellas en función de las necesidades y conocimientos matemáticos existentes en cada etapa.

Conocida la evolución histórica, procedemos a analizar cómo se introducen en la práctica las funciones en el ámbito escolar. Para ello, hemos seleccionado **tres libros de texto** destinados a Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º ESO pertenecientes a editoriales ampliamente extendidas en los institutos españoles actuales: **SM**, **Anaya** y **Santillana**.

A la hora de plantear el análisis hemos decidido buscar, en primer lugar, si los libros ofrecen algún tipo de justificación para la enseñanza de las funciones y, en segundo lugar, si incluyen alguna contextualización de carácter histórico.

- **SM (Alcaide *et al*., 2015)**

En el libro de SM, se expone en la página dedicada a la introducción de la unidad 11 “Funciones” el caso concreto de un salto en caída libre realizado por Felix Baumgartner y se plantean preguntas acerca de la existencia de algún tipo de correspondencia entre la altura y la velocidad. Los contenidos de la unidad propiamente dichos comienzan con una definición de correspondencia utilizando el concepto de relación entre elementos de dos conjuntos, los cuáles no se han definido previamente. Cabe destacar que el currículo oficial no menciona los conceptos de “correspondencia” ni “conjunto” y, como veremos posteriormente, esta forma de introducir las funciones es desaconsejada por diversos autores tales como Malik (1980), Vinner (1983) y Azcárate y Deulofeu (1990).

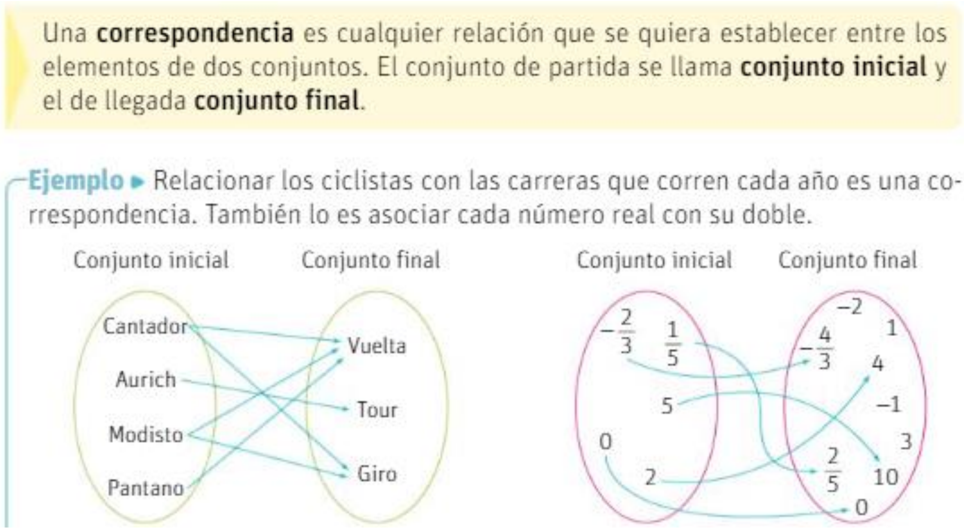


Figura 2. Definición de correspondencia (Alcaide *et al*., 2015, p. 232).

A continuación, se ofrece una definición de función como caso particular de correspondencia entre conjuntos, es decir, la última definición en aparecer históricamente y la que requiere mayor nivel de abstracción:

Una **función** es una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde **un único valor** del conjunto final.

- Los elementos del conjunto inicial forman la **variable independiente**.
- Los elementos del conjunto final forman la **variable dependiente** o **imagen**.

Figura 3. Definición de función (Alcaide *et al*., 2015, p. 232).

- **Anaya (Colera *et al*., 2015)**

En el caso de la editorial Anaya, la unidad 8 “Funciones y gráficas” empieza con una breve introducción histórica sobre la aparición de las funciones y su evolución en el tiempo: “Sin duda, el origen de las funciones se debe a la necesidad de dar explicación a los fenómenos físicos. En la antigüedad, la explicación de estos era fruto de la observación y la especulación” (Colera *et al*., 2015, p. 144). Además, comenta el proceso de medición y cuantificación, destacando figuras como Galileo y Euler, entre otros.

Posteriormente, da inicio a los contenidos de la unidad mediante una gráfica que representa la relación entre tiempo y altura de un helicóptero, la cual utiliza para repasar los conceptos de variables, ejes, escala, dominio y recorrido. Tras repasar dichos conceptos generales mediante una serie de cuestiones, se introduce la definición de función como relación entre dos variables:

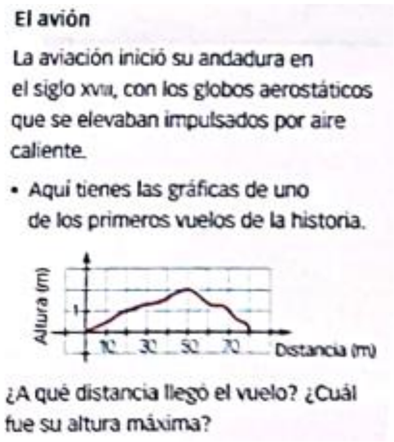
Una **función** es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.

- x es la **variable independiente** (en el ejemplo del helicóptero, el tiempo).
- y es la **variable dependiente** (en el ejemplo del helicóptero, la altura).
- La función asocia a cada valor de x un único valor de y. Se dice que y **es función** de x.

Figura 4. Definición de función (Colera *et al*., 2015, p. 147).

- **Santillana (De la Prida *et al*., 2015)**

Por otro lado, en el libro de Santillana se proporcionan al inicio de la unidad 11 “Funciones” unas claves básicas (sistema de coordenadas, abscisa y ordenada), y se nombran los contenidos que se aprenderán a lo largo de dicha unidad. En la misma página, se incluye una breve presentación histórica de la aviación y se muestra una gráfica de uno de los primeros vuelos del siglo XVIII.



El avión

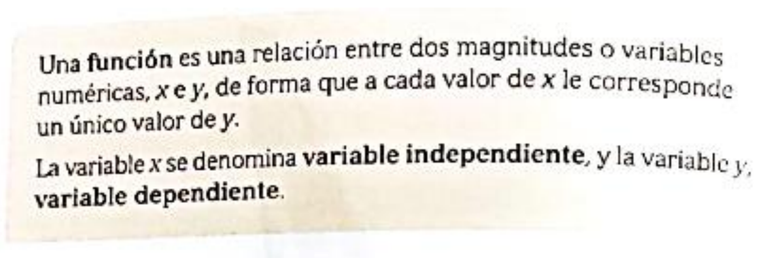
La aviación inició su andadura en el siglo XVIII, con los globos aerostáticos que se elevaban impulsados por aire caliente.

- Aquí tienes las gráficas de uno de los primeros vuelos de la historia.

¿A qué distancia llegó el vuelo? ¿Cuál fue su altura máxima?

Figura 5. Problema de presentación (De la Prida *et al*., 2015, p. 221).

Después, comienza la unidad ofreciendo directamente la siguiente definición de función:



Una **función** es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, *x* e *y*, de forma que a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*.

La variable *x* se denomina **variable independiente**, y la variable *y*, **variable dependiente**.

Figura 6. Definición de función (De la Prida *et al*., 2015, p. 222).

Concluimos por tanto que solo uno de los libros de texto analizados, el de la editorial Anaya, ofrece una justificación histórica de la introducción del concepto de función. Por otro lado, tanto el de Anaya como el de Santillana presentan un caso concreto en forma de gráfica contextualizada para interpretar antes de definir el concepto de función. Asimismo, ambas editoriales optan por definir las funciones como “relación entre dos magnitudes o variables”, indicando la variable independiente y la dependiente. Por el contrario, el libro de SM opta por definir directamente las funciones en términos de correspondencia entre conjuntos, elección que desaconsejan los autores estudiados en estos niveles y que induce a la aparición de dificultades a la hora de comprender e interpretar las funciones.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Procedemos ahora a comparar los campos de problemas, técnicas y tecnologías presentes en los tres libros de texto. Para ello, hemos elaborado una tabla comparativa con las categorías desglosadas de campos de problemas planteados en la Sección A.3:

Campos de problemas	SM	Anaya	Santillana
CP1. Concepto de función			
1.1. Identificar una función representada por un enunciado	X	X	X
1.2. Identificar una función representada por una gráfica	X	X	X
1.3. Identificar una función representada por una tabla	X		X
1.4. Identificar una función representada por una fórmula			
CP2. Cambios entre formas de representación			
2.1. De enunciado a tabla de valores	X	X	X
2.2. De enunciado a gráfica	X	X	X
2.3. De enunciado a fórmula	X	X	X
2.4. De tabla de valores a enunciado			
2.5. De tabla de valores a gráfica	X	X	X
2.6. De tabla de valores a fórmula			
2.7. De gráfica a enunciado		X	X
2.8. De gráfica a tabla de valores			X
2.9. De gráfica a fórmula		X	X
2.10. De fórmula a enunciado			X
2.11. De fórmula a tabla de valores	X	X	X
2.12. De fórmula a gráfica	X	X	X
CP3. Interpretación de las características de una función			
3.1. Dominio y recorrido de una función dada por su enunciado			X
3.2. Dominio y recorrido de una función dada por su gráfica	X	X	X
3.3. Dominio de una función dada por su fórmula	X		X
3.4. Continuidad de una función dada por su gráfica	X	X	X
3.5. Cálculo de la imagen de un punto a partir de la fórmula	X		X

3.6. Crecimiento y decrecimiento a partir de la gráfica	X	X	X
3.7. Máximos y mínimos a partir de la gráfica	X	X	X
3.8. Simetría de una función dada gráficamente	X	X	X
3.9. Periodicidad de una función dada gráficamente	X	X	X

Tabla 2. Campos de problemas en los libros de texto.

Los campos de problemas comparados en la tabla muestran como el libro de Santillana recopila un número de problemas más completo que los libros de SM y Anaya. Además, apreciamos que en los tres libros de texto hay cambios entre formas de representación que no quedan cubiertos, como es el caso del paso de tabla de valores a enunciado (2.4) y de tabla de valores a fórmula (2.6). Destaca también que solo en Santillana se incluyen problemas para cambiar de gráfica a tabla de valores (2.8) y de fórmula a enunciado (2.10).

En cuanto a la identificación de funciones en distintas formas de representación, ninguno de los libros de texto analizados contiene problemas en los que identificar si una fórmula es o no una función. Esto puede provocar que los estudiantes interpreten que cualquier expresión algebraica es una función, lo cual es erróneo.

En cuanto a las técnicas asociadas a cada campo de problemas, observamos que los libros de texto tienden a ofrecer algún ejemplo resuelto a partir del cual el alumno debe ser capaz de extraer las técnicas usadas para su resolución y aplicarlas en ejercicios similares. De forma general, las técnicas no aparecen descritas de forma explícita ni se justifica paso a paso el proceso seguido. Adicionalmente, no se observan tecnologías que justifiquen las técnicas más allá de las propias definiciones de los conceptos dadas por el libro de texto, las cuales tienden a generar errores de comprensión.

Dado que la metodología general es ofrecer definiciones acompañadas de ejemplos puntuales resueltos para después plantear ejercicios no contextualizados y problemas del mismo estilo, consideramos que el modelo implícito de los libros de textos es el de una enseñanza para la resolución de problemas. Este hecho pone de manifiesto la discordancia entre la filosofía del currículo oficial y el currículo implementado en la mayoría de aulas al abordar la enseñanza y aprendizaje de funciones.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

A continuación, se van a presentar algunos de los obstáculos, dificultades y errores de los estudiantes detectados al trabajar con funciones en niveles de la ESO derivados de los métodos de enseñanza habituales. La información extraída de las investigaciones en educación matemática en este ámbito será acompañada de las dificultades observadas de primera mano durante el período de prácticas del Máster.

Por un lado, Dubinsky y Wilson (2013) clasifican las dificultades conceptuales que surgen durante el aprendizaje de funciones en tres categorías: saber qué es y qué no es una función, la representación de funciones y la notación funcional. En la primera categoría, encontraron que parte del alumnado asocia una función con la existencia de una expresión analítica particular o un trazo continuo despojando a las funciones a trozos, las funciones constantes o los puntos discretos de la condición de función en su concepto imagen.

Para la segunda categoría, es decir, la representación de funciones, Dubinsky y Wilson toman como referencia el estudio de Akkoç y Tall (2002), en el cuál se establecen conexiones entre las distintas formas de representación. El principal obstáculo encontrado es la presentación de cada representación de forma aislada, lo que dificulta que los estudiantes puedan construir un concepto imagen adecuado de la noción de función. Asimismo, la presentación de tipos específicos de funciones empleando una única forma de representación conlleva a que los estudiantes no sean capaces de traducirlas a otros lenguajes o crean que es imposible.

En la tercera categoría, Dubinsky y Wilson se remiten a Vinner y Dreyfus (1989), quienes encontraron en sus estudiantes serias dificultades para la interpretación de la expresión general $y = f(x)$. En sus investigaciones, vieron que muchos estudiantes interpretan dicha expresión como producto de una variable “f” por una variable “x”, concluyendo que no se encuentran todavía en un nivel de desarrollo cognitivo necesario para comprender conceptos y símbolos que requieren una mayor capacidad de abstracción.

En cuanto a los procesos cognitivos dentro de la enseñanza-aprendizaje, Díaz Gómez (2013) recopila una serie de investigaciones acerca de la comprensión de los estudiantes del concepto de función. Resultan de gran interés los estudios que analizan las diferencias entre la imagen y la definición conceptual de las funciones entre los estudiantes. En este sentido, Vinner (1983) señala que las definiciones que dan los estudiantes de algunos conceptos difieren mucho de su definición formal, siendo estas una descripción de la imagen conceptual que personalmente han construido. En concreto, al preguntar a un conjunto de estudiantes qué era para ellos una función (*In your opinion what is a function?*) se encontró que las respuestas podían ser clasificadas en cuatro categorías:

- *Categoría I: La definición del libro mezclada con palabras propias de los estudiantes.* Ejemplo: Es una correspondencia de un número perteneciente a un conjunto (dominio) a un número en otro conjunto (rango). A cada número en el dominio le corresponde solo un número en el rango, pero números en el rango pueden tener varios números en el dominio. No tienen que ser números, cualquier cosa vale (objetos concretos, animales, etc).

- *Categoría II: La función es una regla de correspondencia.* Ejemplo: Una función es una relación entre dos factores que dependen entre sí.

- *Categoría III: La función es un término algebraico, una fórmula, una ecuación, una manipulación aritmética, etc.* Ejemplo: Una función es una ecuación que tiene un rango a un lado y un dominio al otro lado. A cada número (o factor) en el dominio le corresponde un factor en el rango.

- *Categoría IV: Algunos elementos de la imagen mental son tomados como definición de los conceptos.* Ejemplo: Una función son los valores de un eje y dependiendo de otro eje x según $y = f(x)$.

Vinner (1983) sugiere que la imagen, en ocasiones errónea, del concepto de función de los estudiantes está ligada a la forma de presentarlas en los libros de texto, los cuáles a menudo optan por introducirlas como un tipo de correspondencia entre dos conjuntos. Malik (1980) indica que la definición moderna enseñada en los libros de texto difiere del concepto de función que tenían matemáticos como Euler, D'Alembert y Lagrange, y señala que dadas las dificultades que conlleva debería ser evitada en todos los cursos precedentes a Análisis, Topología y Álgebra a nivel universitario.

Por su parte, Azcárate y Deulofeu (1990) toman una postura similar en contra de las definiciones empleadas comúnmente por los libros de texto, añadiendo que "considerar que tales definiciones son más simples que las clásicas, cuando en realidad proceden de sucesivas abstracciones de aquéllas, y que por tanto su introducción en niveles elementales de la enseñanza es recomendable, es desconocer el largo camino que ha sido necesario para llegar a ellas, al mismo tiempo que se las despoja de su auténtico significado convirtiéndolas en instrumentos de escasa validez” (Azcárate y Deulofeu 1990, p. 53).

Por otro lado, otros autores señalan la existencia de dificultades a la hora de asociar los conceptos abstractos de las funciones con fenómenos de la vida cotidiana. Según Alayo (1990), muchos estudiantes están familiarizados con gráficas, tablas de valores y expresiones algebraicas, y pueden manipularlas con razonable exactitud; pero son incapaces de interpretar características globales de funciones cuando estas están incrustadas en contextos realistas.

En esta línea, Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) tratan errores que surgen mayoritariamente entre estudiantes que han estado expuestos a funciones que se relacionan con contenidos concretos de la vida cotidiana. En estos casos, los estudiantes tienden a equiparar el concepto de dependencia con el concepto de causalidad. Otros errores típicos derivados de un tratamiento no abstracto de las funciones son el interpretar un gráfico como una imagen o asociar la pendiente como altura en vez de como medida de la tasa de variación media.

Sobre el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones, Ortega y Pecharromán (2014) señalan errores al identificar los puntos que pertenecen o no al dominio y recorrido de la función, confusiones identificando los ejes de abscisas y ordenadas, entre otros.

Durante el periodo de prácticas del Máster, se observó que los estudiantes de 3º y 4º de ESO encontraban demasiado abstractos conceptos tales como “conjunto”, “dominio” o “imagen”. Sin embargo, al presentarles casos prácticos para analizar gráficas de fenómenos físicos contextualizados (distancia recorrida en una excursión, evolución de la temperatura a lo largo de un día, etc.), la mayoría de los estudiantes interpretaban correctamente la información presentada y eran capaces de identificar el crecimiento, decrecimiento, cambios de tendencia, máximos y mínimos, e incluso plantear funciones de elaboración propia en nuevas condiciones justificando su comportamiento.

Otro obstáculo detectado fue que los estudiantes no eran capaces de identificar inicialmente como funciones fórmulas expresadas con letras distintas a las usuales como, por ejemplo, $d = f(t)$. Sin embargo, al dar dotar a las letras de un significado físico asociándoles una magnitud concreta (distancia y tiempo) sí que lo admitían como función.

De la experiencia obtenida durante las prácticas podemos concluir que los estudiantes están acostumbrados a convivir con gráficas en el día a día y son capaces de interpretar su contenido dentro de un contexto real, encontrando la mayor dificultad en la comprensión de la simbología más abstracta y la asociación de dicha simbología con los fenómenos de la vida cotidiana. Por este motivo, nuestra propuesta se centrará en la exploración de las funciones a partir de la resolución de problemas que pueden encontrarse en el día a día, alejándonos de las metodologías de los libros de texto y optando por un aprendizaje a través de la resolución de problemas, principalmente trabajando de forma colaborativa en grupos de estudiantes.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Para poder afrontar el aprendizaje de funciones dentro de nuestra propuesta didáctica, es recomendable que los estudiantes tengan nociones básicas de los siguientes conocimientos previos (CPV):

- CPV 1. Números reales, su distribución en la recta real e intervalos.
- CPV 2. Representación e identificación de puntos en un sistema de coordenadas cartesianas.
- CPV 3. Concepto de variable independiente y variable dependiente.
- CPV 4. Expresión de una relación funcional entre dos variables en forma de gráfica, enunciado y tabla.
- CPV 5. Expresión de una relación funcional lineal entre dos variables en forma de fórmula.
- CPV 6. Uso del lenguaje algebraico para simbolizar relaciones.
- CPV 7. Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Como se ha mencionado anteriormente, al realizar un análisis general del currículo oficial aprobado por la ORDEN ECD/489/2016, encontramos que las funciones están presentes en **todos los niveles de la ESO**. En todas las asignaturas de Matemáticas, obligatorias ya sea en una u otra modalidad, las funciones constituyen uno de los bloques principales de contenidos.

Poniendo el foco en los cursos previos, es decir, **1º** y **2º de ESO**, vemos que los alumnos que hayan pasado por la asignatura de Matemáticas deberían estar familiarizados con los siguientes contenidos referentes a las funciones:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
- Funciones de proporcionalidad directa. Representación. (solo en 1º)
- Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas. (solo en 2º)
- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta. (solo en 2º)
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas. (solo en 2º)

Como puede observarse, en los primeros cursos se da gran importancia al concepto de función y a sus formas de representación, especialmente las **gráficas**. Se incluye también el estudio de casos particulares de funciones con expresiones algebraicas simples en creciente nivel de dificultad (proporcionalidad directa, lineal).

El conocimiento de dichas nociones daría paso en 3º de ESO al análisis y descripción cualitativa de funciones (principalmente gráficas) que describen fenómenos de la vida cotidiana y la utilización de otras formas de representación.

Cabe destacar que la introducción temprana del lenguaje de las gráficas permite estudiar las características globales de las funciones sin necesidad de recurrir prematuramente a definiciones rigurosas de conceptos más abstractos, los cuáles quedan fuera del alcance y propósito general de la enseñanza obligatoria. Esto concuerda con la filosofía de la legislación educativa actual, pues el objetivo es que los estudiantes adquieran las habilidades y destrezas necesarias para enfrentarse con éxito a los retos y situaciones de la vida cotidiana. No obstante, debemos recordar la discrepancia existente entre el currículo oficial y el currículo implementado en las aulas influenciado por los libros de texto. Por ello, es de esperar que buena parte de las dificultades y errores anteriormente descritos se encuentren ya presentes en el alumnado.

Por otro lado, los conocimientos previos necesarios referentes a los número decimales y la resolución de sistemas de ecuaciones aparecen a lo largo de 2º y 3º de ESO dentro del "Bloque 2: Números y Álgebra". Sin embargo, no hay menciones explícitas en el currículo a la representación de números en la recta real e intervalos hasta 4º de ESO, por lo que deberemos tenerlo en consideración al plantear nuestra propuesta didáctica.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

La primera sesión de la unidad didáctica se dedicará a la realización de una prueba de evaluación inicial en la que el alumnado deberá resolver individualmente una serie de actividades diseñadas para trabajar algunos de los conocimientos previos necesarios para poder afrontar el aprendizaje de funciones en este curso. El objetivo de la prueba es, por un lado, facilitar que el alumnado recuerde contenidos estudiados anteriormente y, por otro lado, permitir al docente conocer las fortalezas, debilidades y posibles dificultades que pueden aparecer durante la impartición de la unidad. Se trata por tanto de una prueba de carácter diagnóstico sin valor numérico dentro de la calificación final de la unidad.

Al inicio de la sesión se entregará a cada estudiante una hoja con las actividades descritas a continuación. Los estudiantes dispondrán de 30 minutos para enfrentarse a la prueba, tras los cuales el docente procederá a dirigir un debate en el que se comentarán las dificultades encontradas y se corregirán en común los ejercicios dando pie a la colaboración de los estudiantes.

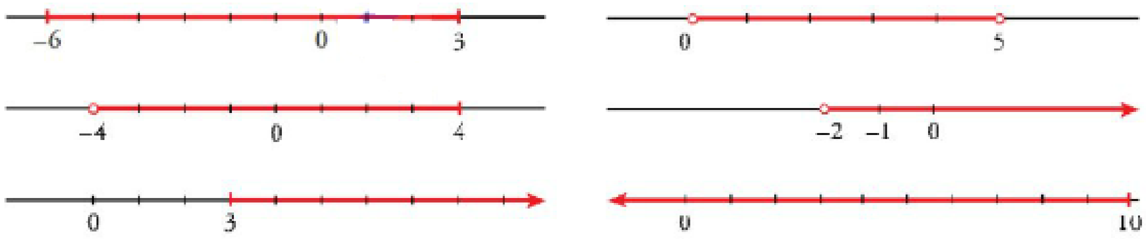
La prueba de evaluación inicial constará de las siguientes actividades:

Actividad 1. Dibuja un sistema de ejes cartesianos y sitúa los siguientes puntos en las correspondientes coordenadas (CPV 1 y 2):

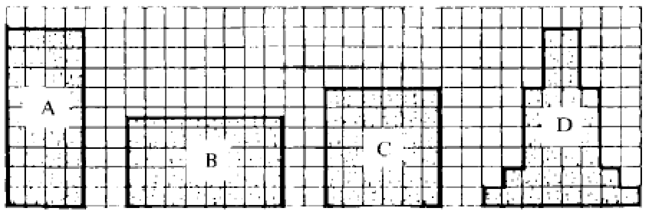
$$A = (0,\ 1) \qquad B = (2,\ 2) \qquad C = (-2,\ 0.5)$$

$$D = (4,\ -5) \quad E = (-3,\ 5) \quad F = (0.75,\ 3)$$

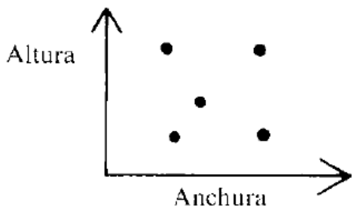
Actividad 2. Indica en forma de intervalos los números señalados en rojo sobre la recta real en cada caso (CPV 1):



Actividad 3. Adaptación del libro *El lenguaje de gráficas y funciones* (Alayo, 1990, p. 20). Cada una de estas cuatro figuras tiene un área de 36 unidades cuadradas (CPV 2, 3 y 4):



a) Relaciona cada punto de la gráfica con la figura que le corresponde:



b) ¿Puedes dibujar una quinta figura de 36 unidades cuadradas que corresponda al 5º punto? Explícalo.

Actividad 4. Adaptación del libro *El lenguaje de gráficas y funciones* (Alayo, 1990, p. 26). Elige la gráfica que mejor se ajuste a cada una de las cinco situaciones descritas abajo. (Algunas gráficas pueden ajustarse a más de una situación.) Asocia la gráfica al enunciado, pon nombres a los ejes y explica tu elección, indicando todas las suposiciones que hagas. Si no encuentras la gráfica que quieres, dibuja tu propia versión. (CPV 2, 3 y 4)

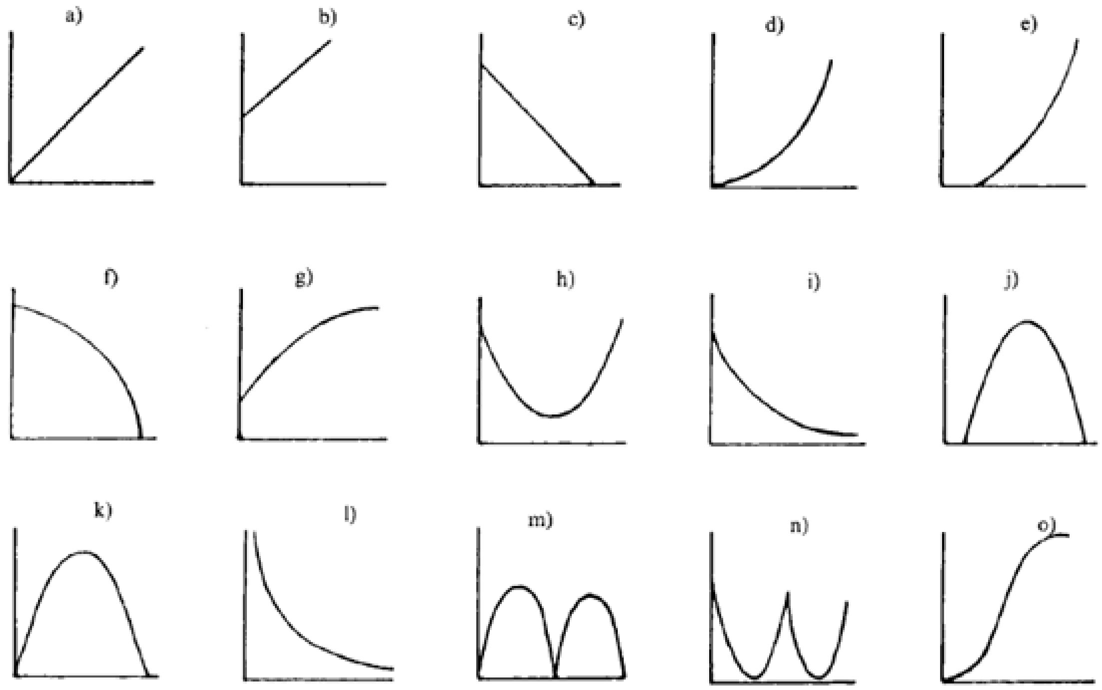
1. «Los precios están subiendo ahora más deprisa que en ningún otro momento de los últimos cinco años.»

2. «Me gusta bastante el café frío y el café caliente, pero ¡detesto el café templado!»

3. «Cuanto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camión de la mudanza.»

4. «Después del concierto hubo un silencio abrumador. Entonces una persona de la audiencia empezó a aplaudir. Gradualmente, los que estaban alrededor se le unieron y pronto todo el mundo estaba aplaudiendo y vitoreando.»

5. «Si las entradas del cine son muy baratas, los dueños perderán dinero. Pero si son demasiado caras, irá poca gente y también perderán. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.»



Actividad 5. Un servicio de *streaming* ofrece una tarifa de 5,99 euros por crear una cuenta de usuario más 1,25 euros por cada suscripción a otros canales. (CPV 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7)

a) Rellena la tabla de valores:

Nº de suscripciones	0	1	2	3	4
Coste total (euros)	5,99				

b) Representa gráficamente la función en un sistema de coordenadas cartesianas.

c) Si he pagado 14,74 euros, ¿a cuántos canales estoy suscrito?

c) Obtén la fórmula o expresión algebraica que modelice la situación.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser elegida para introducir las funciones es su uso como **instrumento de modelización** de las relaciones que ocurren en la vida real en las existe una dependencia entre dos variables, a partir de cuyo análisis se puede **extraer información, tomar decisiones y hacer predicciones.**

Dependiendo de la situación a modelizar y de la información que deseemos extraer, será más útil representar la relación de dependencia entre variables mediante un enunciado verbal, una tabla, una gráfica o una fórmula algebraica. Azcárate y Deulofeu (1990) clasifican dichas formas de representación en creciente orden de abstracción, siendo el modelo físico o la simulación la experiencia más cercana al fenómeno real.

Modelo físico o simulación	Descripción verbal (enunciado)	Tabla de valores	Gráfica	Fórmula algebraica

Tabla 3. Formas de representación.

A continuación, la primera forma de representación que aparece al intentar describir un fenómeno es la descripción verbal, la cual utiliza el lenguaje común para dar una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional. La tabla de valores aporta una visión cuantitativa, fácilmente interpretable como una correspondencia entre pares de valores, pero insuficiente para extraer las características globales de la función. Los dos lenguajes de mayor abstracción, la gráfica y la fórmula o expresión algebraica, permiten obtener una visión general de la función estudiada, tanto cualitativa como cuantitativa, al mismo tiempo que posibilitan la caracterización de modelos.

Por un lado, la gráfica permite describir las características globales de la función (variaciones, tramos constantes, crecimiento, continuidad, periodicidad, máximos y mínimos, etc.) de forma más sencilla de interpretar que la fórmula, pues la determinación de esta última a través del lenguaje algebraico requiere del conocimiento del significado de los símbolos utilizados y la interpretación de conceptos abstractos, los cuales son más fáciles de intuir gráficamente. Por otro lado, la fórmula permite calcular valores con mayor precisión, siempre que se conozca el algoritmo de resolución de la ecuación correspondiente.

De esta forma, se considera que el aprendizaje de las funciones pasa por el conocimiento de cada lenguaje de representación, la adquisición de la capacidad de leer e interpretar cada uno de ellos y, posteriormente, traducir de uno a otro.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Como hemos visto en la evolución histórica del concepto de función presentada en la Sección B.1, la razón de ser elegida en nuestra propuesta **coincide con la razón de ser histórica** de las funciones: la modelización de la relación de dependencia entre dos cantidades para la obtención de información útil para las personas. Esta elección permitirá acercar a los estudiantes al aprendizaje de las funciones desde una perspectiva próxima a su realidad cotidiana, dotándoles de una razón de ser práctica. Asimismo, consideramos que trabajar las funciones desde la modelización posibilita la aparición natural de casos particulares como son las funciones lineales y cuadráticas, contenidos curriculares a tratar tras la finalización de la unidad didáctica aquí presentada.

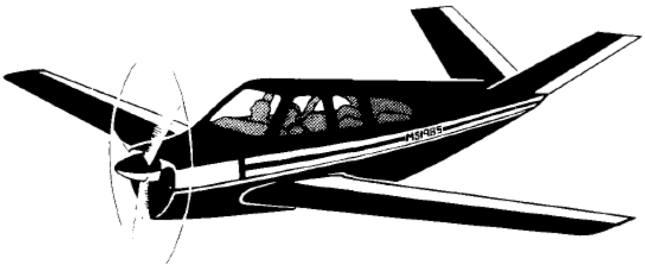
3. Diseño de problemas que se constituyen en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar

En nuestra propuesta de enseñanza vamos a introducir el concepto de función proponiendo al alumnado dos situaciones problemáticas que pueden solucionarse a través de la interpretación y la traducción entre diferentes formas de representación. Ambos problemas se encuentran contextualizados y exploran la modelización de fenómenos de la vida real para tomar decisiones (Problema A) y hacer predicciones (Problema B). Adicionalmente, el Problema B cuenta con una contextualización histórica que se espera sirva para reflexionar y dar pie a un debate acerca de la importancia histórica de las funciones y sus aplicaciones en la sociedad actual.

Problema A. El punto de no retorno. (CP 1.1, 1.2 y 2.2) Adaptación del libro *El lenguaje de gráficas y funciones* (Alayo, 1990, p. 193).

Imagina que eres el piloto de una avioneta capaz de viajar a una velocidad constante de 300 km/h en aire tranquilo (sin viento). Tienes combustible suficiente para cuatro horas.

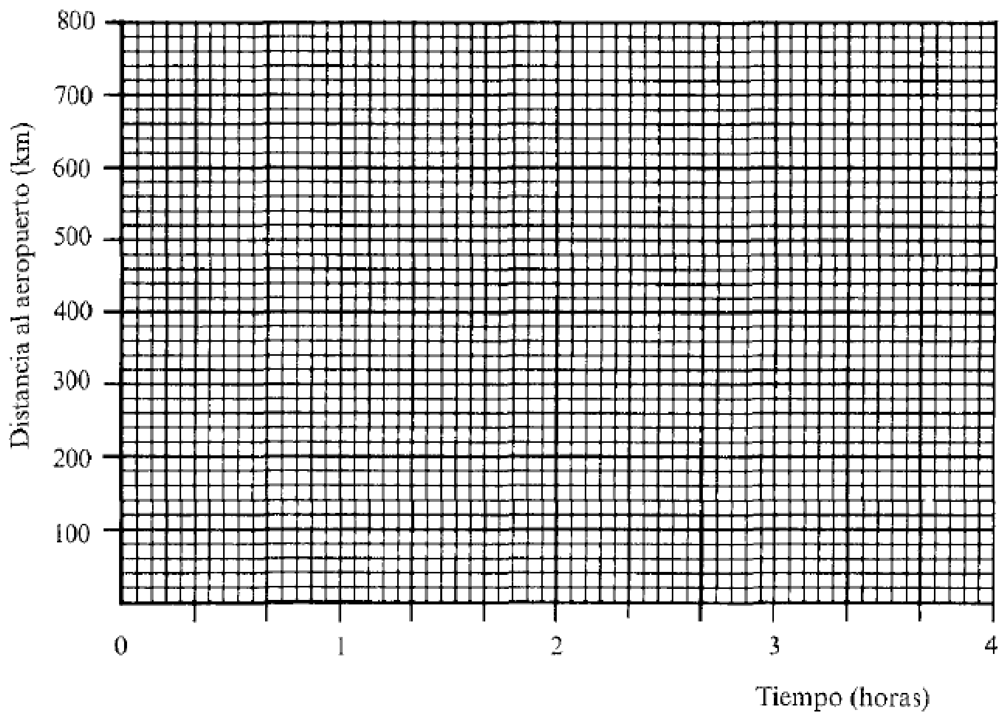
Despegas del aeropuerto y, en el viaje de ida, eres ayudado por un viento de 50 km/h que aumenta tu velocidad de crucero con respecto a tierra a 350 km/h. De repente, te das cuenta de que en el viaje de vuelta estarás volando contra el viento y por lo tanto bajarás a 250 km/h.



— ¿Cuál es la máxima distancia a la que puedes volar desde el aeropuerto, y estar seguro de que tienes combustible suficiente para hacer el viaje de regreso?

a) Dibuja una gráfica que muestre cómo variará la distancia de la avioneta desde el aeropuerto a lo largo del tiempo de vuelo (inicialmente puedes dibujar la forma de la gráfica sin unidades en los ejes). ¿Cómo sería la gráfica si la velocidad fuera la misma a la ida y a la vuelta (es decir, sin viento)? Comenta con tus compañeros.

b) ¿Cómo puedes mostrar una velocidad de ida de 350 km/h? ¿Y una velocidad de regreso de 250 km/h? Dibuja de nuevo la gráfica dando unidades a los ejes. Recuerda que la velocidad (km/h) es igual a la distancia recorrida (km) entre un determinado tiempo (h).



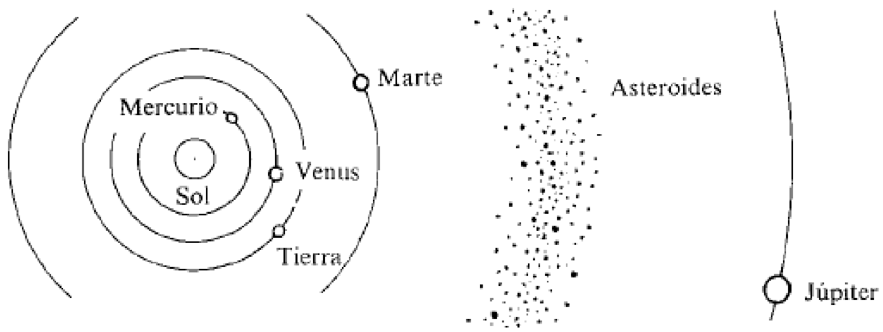
c) Usa tu gráfica para hallar aproximadamente la máxima distancia a la que puedes viajar desde el aeropuerto, y el momento en que deberías dar la vuelta.

d) Comenta con tus compañeros cómo crees que variaría la distancia máxima para otras velocidades de viento. Calcula la distancia máxima y el tiempo de regreso para al menos otras dos velocidades de viento.

e) Sitúa los puntos calculados en una misma gráfica, ¿forman una línea recta? ¿Podrías darle una explicación?

Problema B. El planeta desaparecido. (CP 1.2, 1.3 y 2.5) Adaptación del libro *El lenguaje de gráficas y funciones* (Alayo, 1990, p. 221).

En nuestro sistema solar hay ocho planetas mayores y muchos otros cuerpos como cometas y meteoritos. Los cinco planetas más próximos al Sol están representados en el siguiente diagrama *(Nota: el dibujo no está a escala*):



Entre Marte y Júpiter hay un cinturón de fragmentos rocosos llamados asteroides. Los astrónomos creen que podrían ser los restos de un noveno planeta desintegrado hace muchos años. Le llamaremos planeta X. Nuestra misión es descubrir todo lo que podamos sobre el Planeta X buscando los modelos que siguen los otros planetas. ¿A qué distancia del Sol estaba el Planeta X antes de desintegrarse?

La tabla inferior compara las distancias al Sol de algunos planetas con la de la Tierra. Las distancias están medidas en U.A. (Unidades Astronómicas), de forma que la distancia del Sol a la Tierra es 1 U.A. y la del Sol a Saturno 10 U.A. (es decir, Saturno está 10 veces más alejado del Sol que la Tierra).

Planeta	Nº	Distancia al Sol (U.A.)
Mercurio	1	
Venus	2	0,7
Tierra	3	1
Marte	4	1,6
Planeta X	5	
Júpiter	6	5,2
Saturno	7	10
Urano	8	19,6
Neptuno	9	

a) Representa los datos de la tabla en una gráfica asignando a cada planeta su número y su distancia al Sol. Describe qué observas. ¿Siguen los puntos una línea de tendencia? En caso afirmativo, dibújala.

b) A partir de la gráfica que has dibujado intenta hallar un valor aproximado de la distancia a los planetas que faltan en la tabla. ¿A qué distancia están Mercurio y Neptuno? ¿Y dónde estaría el Planeta X?

c) Compara las distancias obtenidas a partir del modelo con los datos reales (Mercurio 0,387 U.A. y Neptuno 30,1 U.A.). ¿Crees que el modelo se ajusta a los datos?

d) Lee el siguiente fragmento y reflexiona:

En 1772, cuando las distancias planetarias sólo eran conocidas en términos relativos, un astrónomo alemán llamado David Titius descubrió el mismo modelo que tú has estado mirando. Esta «ley» fue publicada por Johann Bode en 1778 y es comúnmente conocida como «Ley de Bode». Bode utilizó el modelo, como lo has hecho tú, para predecir la existencia de un planeta a 2,8 U.A. del Sol (2,8 veces la distancia de la Tierra al Sol) y hacia finales del siglo XVIII comenzaron a buscarlo de forma sistemática. Esta búsqueda resultó infructuosa hasta el día de Año Nuevo de 1801, en que el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi observó un asteroide muy pequeño, al que llamó Ceres, a una distancia de 2,7 U.A. del Sol —sorprendentemente próxima a la prevista por la Ley de Bode—. (Desde entonces, miles de pequeños asteroides han sido descubiertos a distancias entre 2,2 y 3,2 U.A. del Sol.)

En 1781, la ley de Bode fue aparentemente confirmada de nuevo cuando William Herschel descubrió el planeta Urano, orbitando alrededor del Sol a una distancia de 19,2 U.A., nuevamente muy próxima a los 19,6 U.A. que predice la ley de Bode. Animados por esto, otros astrónomos usaron la «ley» como punto de partida en la búsqueda de otros planetas lejanos. Sin embargo, cuando finalmente fueron descubiertos Neptuno y Plutón, a 30,1 U.A. y 39 U.A. del Sol respectivamente, se comprobó que, a pesar de su utilidad pasada, la ley de Bode no gobierna realmente el diseño del sistema solar.

e) Como has visto, las funciones han sido muy útiles a lo largo de la historia para realizar descubrimientos y confirmar o descartar modelos físicos. Enumera otras aplicaciones que crees que tienen las funciones en la actualidad.

4. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Para implementar en el aula los dos problemas anteriormente descritos consideramos que la metodología más adecuada es el trabajo en pequeños grupos heterogéneos de 3 o 4 estudiantes. El momento en el que se propondrían ambos problemas sería en la sesión posterior a la prueba de evaluación inicial, dando así comienzo a los contenidos propios de la unidad didáctica. Al inicio de la sesión, el docente repartiría a cada estudiante una hoja con los enunciados y se les pediría que lean ambos problemas y piensen en formas de resolverlos. A continuación, los estudiantes deberán comentar con los compañeros de su grupo las posibles estrategias y dudas que surjan durante su resolución. Se prevé que la resolución y puesta en común de los problemas abarque en conjunto la duración aproximada de dos sesiones (90 minutos).

Dada la naturaleza de los problemas propuestos, se espera que se genere en cada grupo un ambiente de debate acerca de cómo enfrentarse al reto que suponen. En dicho proceso, el concepto de función aparecería de manera natural como un instrumento que permite modelizar las situaciones presentadas y obtener soluciones. Para ello, los estudiantes deberán comprender la situación que presenta cada enunciado, identificar la información disponible y representarla gráficamente. Al dibujar las gráficas, los estudiantes estarán elaborando un modelo que mostrará visualmente la relación de dependencia entre las variables de los problemas y les permitirá llegar a sus propias conclusiones.

Durante el tiempo dedicado al trabajo en grupo el docente adoptará un rol de apoyo, resolviendo dudas y guiando a cada grupo dando las indicaciones precisas. Los últimos veinte minutos de la segunda sesión serán dedicados a realizar una puesta en común en la que cada grupo podrá exponer sus resultados y conclusiones. A modo de cierre, el docente institucionalizará el concepto de función, dando importancia a su razón de ser histórica y su presencia en la sociedad actual.

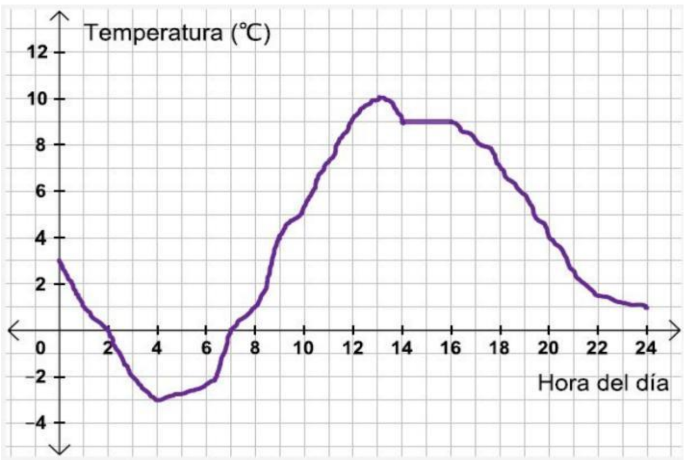
E. Sobre el campo de problemas

1. Diseño de los distintos tipos de problemas que se van a presentar en el aula

A continuación se muestran los problemas diseñados para trabajar los campos de problemas detallados en la Sección B.2. Resulta preciso señalar que estos se han diseñado de forma que permitan abordar varios aspectos de las funciones en un mismo problema, buscando explorar situaciones de la vida cotidiana y contextos físicos.

Problema 1. La estación meteorológica. (CP 1.1, 1.2, 2.2, 2.7, 3.2, 3.4, 3.6 y 3.7)

En la estación meteorológica de la ciudad S se ha registrado la temperatura a lo largo del día obteniendo la siguiente gráfica:



Redacta un informe en el que des respuesta a las cuestiones planteadas a continuación, así como cualquier otro detalle relevante de la función o reflexión que desees incluir:

a) Indica la variable independiente y la variable dependiente.

b) ¿Durante qué intervalo de tiempo se ha realizado la medida?

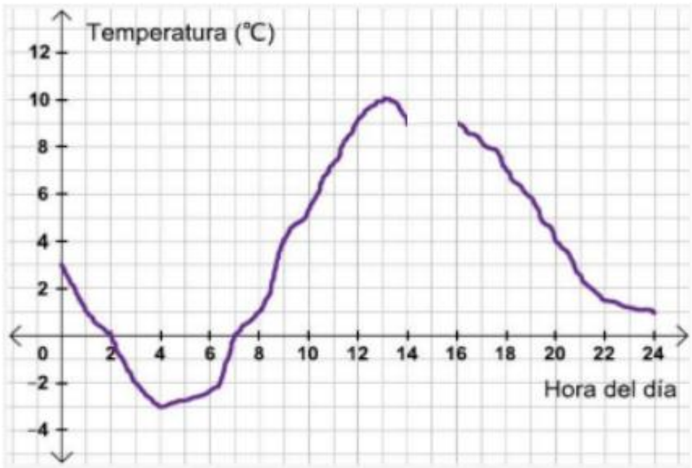
c) ¿Entre qué valores mínimos y máximos ha variado la temperatura?

d) Indica los tramos del día en los que la temperatura ha descendido y los tramos en los que la temperatura ha ascendido.

e) ¿A qué hora se alcanzó la temperatura mínima? ¿Y la máxima?

f) ¿Se ha mantenido estable la temperatura en algún intervalo de tiempo? Indica cuál.

g) Una científica ha detectado que el tramo en el que la función es constante se debe a un fallo del termómetro de la estación debido a una fuerte tormenta. Por suerte, contamos con la medida de un dispositivo de emergencia que indica que a las 15h la temperatura era de 8ºC. Dibuja aproximadamente cómo quedaría la gráfica con esta nueva información. ¿Tendría sentido que la función fuera discontinua? Razona tu respuesta.

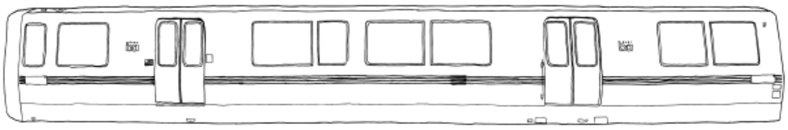


h) La cadena de radio de la ciudad S ha pedido a la estación meteorológica un informe por escrito de la variación de la temperatura a lo largo del día. Describe con palabras la información de la gráfica modificada en el apartado anterior para su retransmisión.

i) Conociendo que la ciudad S está en el hemisferio norte, dibuja cómo podría ser la gráfica de la temperatura a lo largo de un día de verano. Explica el comportamiento de la función.

Problema 2. El tren Zaragoza-Valencia. (CP 1.1, 1.3, 2.2, 2.5, 3.2, 3.4 y 3.6)

Un tren media distancia con salida programada el 17 de Agosto de la estación Zaragoza-Delicias a las 11:20 h tiene llegada prevista a la estación Valencia-Nord a las 16:18 h. Sin embargo, debido a un incendio forestal cerca de las vías del tren los pasajeros deben realizar un trasbordo en bus entre las localidades de Sarrión y Jérica.



El viaje que realizan los pasajeros queda modificado de la siguiente manera:

Parada	**Distancia a Zaragoza (km)**	**Hora de llegada / salida**
Zaragoza-Delicias	0	11:20 / 11:36 h
Teruel	175	14:01 / 14:06 h
Sarrión	215	14:37 / 15:03 h
Jérica	256	15:40 / 15:50 h
Valencia-Nord	320	17:05 h / FIN

a) Dibuja en forma de gráfica la función que representa el viaje modificado por el incendio incluyendo las paradas en las estaciones indicadas en la tabla.

b) ¿A qué puedes asociar los tiempos de espera en cada estación? ¿Están relacionados con causas externas al recorrido original del tren?

c) A partir de la gráfica dibujada, indica el dominio y el recorrido de la función. ¿Qué significado encuentras que tienen estos conceptos en el contexto del viaje?

d) Renfe ofrece a sus pasajeros las siguientes opciones de reembolso por retrasos en billetes de trenes media distancia:

- 15 minutos / 25% del precio original

- 40 minutos / 50% del precio original

- 60 minutos o más / 100% del precio original

Dibuja una gráfica que represente el porcentaje a reembolsar en función de los minutos de retraso. ¿Cómo es la gráfica resultante?

e) Si habíamos pagado por el billete 28,16 euros, ¿cuánto nos será reembolsado?

Problema 3. Música. (CP 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.5 y 3.5)

Marcos es fan del disco *Motomami* de Rosalía y quiere tener acceso a descargar toda su música (y la de otros artistas) en su móvil de forma legal. Una búsqueda entre las distintas aplicaciones disponibles le ha mostrado las siguientes opciones:

- Opción A: 1,99 € fijos al mes más 20 céntimos por canción descargada.
- Opción B: 4,75 € fijos al mes sin límite de descargas.
- Opción C: 3,25 € fijos al mes con un límite de 20 descargas y un extra de 0,90 € por cada descarga una vez superado el límite.

Responde a las cuestiones:

a) ¿Pueden expresarse las tres opciones en forma de función? ¿Cuál sería la variable independiente y la dependiente?

b) Elabora tres tablas de datos (una para cada opción) dando valores a la variable independiente y calculando el correspondiente valor de la variable dependiente.

Opción A

x					
y					

Opción B

x					
y					

Opción C

x					
y					

c) Encuentra la fórmula (expresión algebraica) de la función que describe cada caso.

d) Si Marcos descarga una media de 25 canciones al mes, ¿qué opción le saldría más rentable?

e) Representa gráficamente las tres funciones e indica en qué caso es recomendable cada una de las opciones.

Problema 4. Latidos del corazón. (CP 1.4, 2.5, 2.11, 2.12 y 3.5) Adaptación de *Preguntas liberadas del Proyecto PISA*, Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE, 2015).

Por razones de salud las personas deben limitar sus esfuerzos al hacer deporte para no superar una determinada frecuencia cardiaca. Durante años la relación entre la máxima frecuencia cardiaca recomendada para una persona y su edad se describía mediante la fórmula:

Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 220 – edad

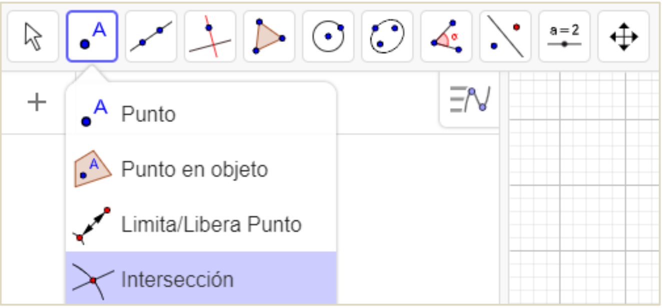
Sin embargo, investigaciones recientes han demostrado que esta fórmula debería modificarse ligeramente. La nueva fórmula propuesta es la siguiente:

Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 208 – (0,7 · edad)

Con esta nueva fórmula, la frecuencia máxima recomendada disminuye ligeramente para los jóvenes y aumenta ligeramente para los mayores.

a) ¿A partir de qué edad aumenta la máxima frecuencia cardiaca recomendada como resultado de introducir la nueva fórmula? Muestra tus cálculos y realiza a mano una representación gráfica de ambas funciones en el mismo sistema de ejes coordenados.

b) Abre el programa GeoGebra para representar gráficamente las funciones y obtén los puntos de intersección. ¿Coincide con el resultado obtenido algebraicamente? Guarda el archivo y envíalo en la tarea habilitada para el Problema 4.



Nota: La herramienta *Intersección* permite obtener los puntos de intersección entre dos objetos (si existen). Para utilizarla, selecciona la opción *Intersección* en la barra de herramientas y pulsa sobre los objetos que desees obtener la intersección.

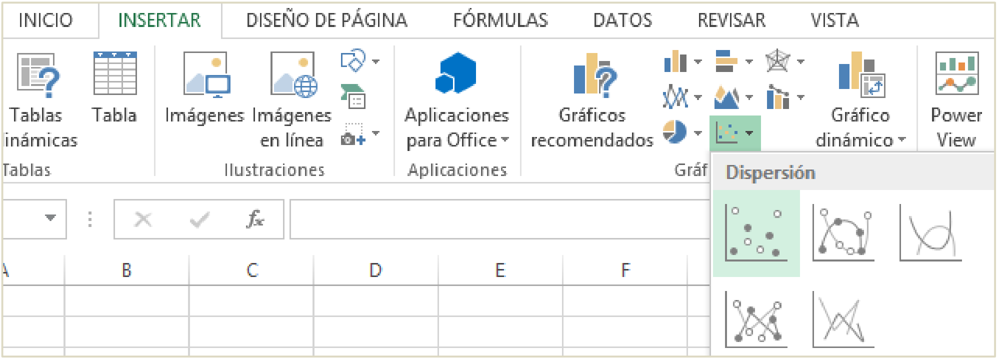
Problema 5. El ciclo lunar. (CP 1.2, 1.3, 2.4, 2.5, 2.7, 3.6, 3.7 y 3.9)

La Luna es el único satélite natural que orbita alrededor de la Tierra. Se trata de un cuerpo rocoso, por lo que no emite luz propia. Es gracias al reflejo de la luz del Sol sobre la superficie de la Luna que podemos verla desde nuestro planeta. Sin embargo, el porcentaje que vemos iluminado varía cada noche en función de la posición relativa entre el Sol, la Tierra y la Luna.

a) Busca en la siguiente página web el calendario lunar de este mes y el próximo. Enlace: [Calendario Lunar Abril Año 2022 | Fases Lunares]

b) Elabora una tabla de datos en Excel que recoja el porcentaje de luna iluminado en función del día a lo largo de los dos meses.

c) Representa los datos de la tabla en una gráfica de dispersión. ¿Qué observas?



Nota: Selecciona los datos a representar y busca en *Insertar* > *Gráfico de dispersión*.

d) El ciclo lunar tiene una duración aproximada de 29 días durante los cuales la Luna pasa por cuatro fases: luna nueva, creciente, luna llena y menguante. Calcula la duración de los ciclos que forman la gráfica. ¿Se aproxima a lo esperado?

e) Si estamos a 25 de abril, ¿cuántos días quedan para ver la luna llena? ¿Cuándo es la próxima luna nueva?

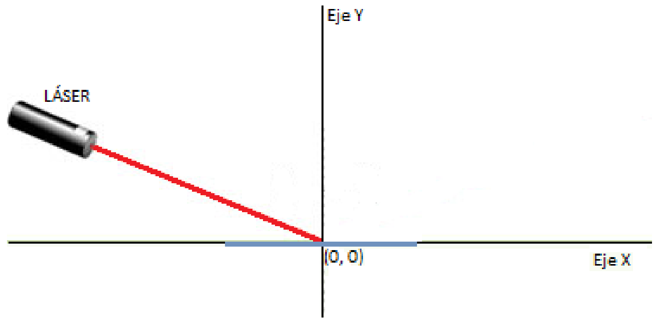
f) ¿Durante qué días del próximo mes la Luna estará en fase creciente?

g) Explica verbalmente si se trata o no de un fenómeno periódico. Puedes ayudarte de la visualización del siguiente vídeo al que acceder a partir del enlace o escaneando el código QR: https://www.youtube.com/watch?v=9jMdAaniYqQ

h) Guarda el fichero de Excel con la tabla de datos utilizada en el apartado b) y la gráfica del apartado c). Envíalo en la tarea habilitada correspondiente al Problema 5.

Problema 6. Láser. (CP 1.1, 2.2 y 3.8)

En un laboratorio de óptica se quiere montar un sistema que permita estudiar los fenómenos que ocurren cuando un haz de luz lineal procedente de un dispositivo láser incide sobre dos superficies distintas (A y B). En ambos casos las superficies se disponen de manera horizontal en el eje X de forma que el haz de luz procedente del dispositivo láser incide sobre el punto $(0, 0)$.



a) Dibuja una gráfica para cada situación:

Experimento nº 1: El dispositivo láser se coloca en el punto $(-5, 5)$ y el haz incide sobre la superficie A en el punto $(0, 0)$ formando un ángulo de 45º con el eje vertical. El haz sale reflejado y es detectado por el dispositivo de medida en el punto $(5, 5)$.

Experimento nº 2: Con la misma superficie A, movemos el dispositivo láser al punto $(-5, 3)$ y hacemos que el haz incida en el punto $(0, 0)$. En esta ocasión el haz reflejado es detectado en el punto $(5, 3)$.

Experimento nº 3: Cambiando a la superficie B, se coloca el haz nuevamente en la posición $(-5, 5)$ y se hace incidir sobre el punto $(0, 0)$. El haz atraviesa la superficie y se detecta en el punto $(5, -5)$.

Experimento nº 4: Con la superficie B se modifica la posición del dispositivo láser al punto $(-7, -4)$ y se hace incidir sobre el punto $(0, 0)$. El haz atraviesa la superficie y se detecta en el punto $(7, 4)$.

b) Con los experimentos realizados, ¿qué podemos decir de cada superficie? ¿Qué características tienen en común las funciones representadas?

c) Si colocamos el dispositivo láser en el punto $(6, 4)$ dibuja por separado cómo quedaría la gráfica si el haz incidiera sobre la superficie A y sobre la superficie B.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Los problemas descritos en el apartado anterior buscan promover el aprendizaje de los estudiantes a través de la resolución de problemas. Las técnicas y tecnologías que se pretenden enseñar surgen a raíz del proceso de resolución de los mismos, justificando así su razón de ser. Por orden de aparición, se pretenden trabajar en cada problema los siguientes contenidos:

Problema 1

En línea con la filosofía del currículo oficial y los estudios en investigación educativa referenciados en anteriores secciones, se ha optado por elegir la representación gráfica de un fenómeno de la vida cotidiana como primer acercamiento al estudio de las características de las funciones. En concreto, se trata de una gráfica que indica la temperatura a lo largo de un día. En los primeros apartados se hacen preguntas para obtener información relevante de la función a través del análisis de la gráfica dentro de su contexto: variable independiente (hora del día), variable dependiente (temperatura), dominio (duración de la medida), recorrido (valores entre los que oscila la temperatura), crecimiento, decrecimiento y valores extremos (máximos y mínimos). Esto se corresponde con las técnicas T1.1/1.2, T3.2, T3.6 y T3.7.

En los siguientes apartados los estudiantes deben identificar el intervalo en el que la temperatura se mantiene constante y posteriormente redibujarlo siguiendo unas indicaciones dadas en forma de enunciado (T2.2). En este punto puede surgir entre los estudiantes un debate acerca de si la función debe ser continua para ser fiel al fenómeno estudiado (T3.4). En la nueva gráfica resultante aparece un mínimo relativo que deberá asociarse a una breve bajada de temperatura a causa de la tormenta.

A continuación, se pone a los estudiantes en una situación que requiere describir con palabras de forma detallada la información que contiene la gráfica para comunicársela a otras personas. Aquí se trabaja la habilidad de interpretar la información visual y la capacidad de transformarla al lenguaje verbal (T2.7). En el último apartado, se propone a los estudiantes dibujar una nueva función cambiando el contexto a un día de verano en el hemisferio norte. Se trata un apartado de respuesta abierta en el que los estudiantes deberán justificar la forma de su gráfica en relación a sus experiencias en la vida real.

Por último, destacamos que plantear la resolución del problema mediante la redacción de un informe para dar respuesta a las cuestiones planteadas permite a los estudiantes una mayor libertad a la hora de expresar sus ideas, favoreciendo la construcción e integración de nuevo conocimiento y la habilidad de expresar verbalmente conceptos matemáticos.

Problema 2

El Problema 2 está contextualizo en otra posible situación cotidiana para los estudiantes: un viaje en tren. La particularidad del problema reside en que el enunciado expone que la ruta prevista del tren ha sido modificada y los datos reales son aportados en forma de tabla que debe ser interpretada correctamente dentro del contexto para comprenderla (T1.1). Los datos de la tabla no deben dibujarse directamente como parejas de datos sino que hay que interpretar que en cada estación el tren se para un determinado intervalo de tiempo hasta que sigue su recorrido. Este hecho se traducirá en que la gráfica deberá estar formada por una alternancia de tramos en los que la función es creciente y tramos en los que es constante (T2.5 y T3.6). La parada de mayor duración deberá asociarse con el tiempo de espera entre que los pasajeros salen del tren y son recogidos por el bus para continuar el trayecto.

Una vez dibujada la gráfica, el apartado c) pretende que los estudiantes relacionen el dominio de la función con la duración temporal total del trayecto y el recorrido con la distancia recorrida (T3.2). En los últimos apartados se introduce una nueva situación a modelizar: el porcentaje de reembolso en función de los minutos de retraso. Con la representación gráfica se pretende que los estudiantes lleguen a representar una función a trozos en la que habrá discontinuidades (T2.2 y T3.4). Finalmente, en el apartado e) hay que calcular la diferencia de tiempo entre la llegada prevista y la real para obtener la cantidad de dinero a reembolsar, relacionando así el problema con otros contenidos del currículo.

Problema 3

El Problema 3 explora nuevamente el uso de funciones como herramienta para la toma de decisiones. En él se describe una situación de la vida cotidiana (tarifas de plataformas para descargar música) en la que se quiere conocer cuál es la opción óptima en función de las características del usuario. El problema está diseñado de forma que cada apartado guie a los estudiantes a cambiar de una forma de representación a otra hasta llegar a la expresión de mayor abstracción en forma de fórmula.

Inicialmente las funciones se dan en forma de enunciado desde los cuales se deberán extraer las variables independiente y dependiente así como la relación funcional entre ellas (T1.1). A continuación, se pasará por la representación en forma de tabla (T2.1) para facilitar la obtención de expresiones algebraicas (T2.3). Se espera que este punto sea el que suponga un mayor reto a los estudiantes al requerir una mayor capacidad de abstracción para expresar la relación funcional en lenguaje simbólico.

Los dos últimos apartados abordan dos maneras de comparar entre las tres funciones. En el apartado d) se pide calcular la opción más rentable para un caso concreto (25 canciones). Para resolverlo basta con sustituir en cada función el valor de la variable independiente, obtener la imagen y ver cuál es menor (T3.5). Por otro lado, el apartado e) amplía la cuestión a todo el dominio de posibles valores siendo beneficiosa la visualización en forma de representación gráfica (T2.2/2.5).

Problema 4

El objetivo del Problema 4 es analizar de forma contextualizada dos funciones dadas inicialmente en forma de fórmula. Para ello se propone primero la realización de cálculos algebraicos y la representación a mano de ambas funciones, para lo cual los estudiantes deberán obtener la imagen de la función para varios puntos (T3.5) y después construir la gráfica (T2.12). Cabe destacar que en este punto se espera encontrar el paso intermedio de construir una tabla con los pares de datos (T2.11) y después representarlos gráficamente (T2.5).

La segunda forma de resolución consiste en representar las funciones utilizando GeoGebra como calculadora gráfica (T2.12). Una vez representadas, se propone a los estudiantes obtener los puntos de intersección para familiarizarse con las herramientas del programa.

Problema 5

El Problema 5 consiste en estudiar un fenómeno físico que puede aproximarse a una función periódica: el ciclo lunar. Dado su carácter práctico, el problema está pensado para resolverse en el aula de informática haciendo uso de Internet para buscar los datos y el programa Excel para la creación de tablas de valores y su representación en forma de gráfica de dispersión (T2.5). Antes de representar la gráfica deberá elegirse correctamente cual es la variable independiente (día del mes) y la dependiente (porcentaje de superficie iluminada) para que la representación pueda considerarse una función (T1.1/1.2).

A partir de la representación gráfica de los datos los estudiantes deberán inducir como una de las características relevantes del fenómeno estudiado su repetición en intervalos regulares fijos, es decir, su periodicidad (T3.9). A continuación, deberán obtener el periodo y compararlo con el periodo estimado, argumentando si creen que el modelo se aproxima a la realidad y realizando estimaciones de cuándo será la próxima luna nueva (mínimo), luna llena (máximo) y fase creciente (T3.6 y T3.7). Por último, con el apartado g) se busca que los estudiantes expliquen el fenómeno verbalmente tomando como base los datos analizados y la visualización de una simulación del modelo con un vídeo de apoyo (T2.4/2.7).

Problema 6

El objetivo principal de este último problema es introducir dentro de un contexto físico las funciones simétricas. En primer lugar se describe verbalmente el contexto y el sistema que se quiere estudiar apoyándose en una representación gráfica. A continuación, se detallan las condiciones de los experimentos que los estudiantes deben representar gráficamente (T1.1 y T2.2). Dadas las características del montaje, podría realizarse tomando las precauciones oportunas una demostración práctica del experimento para motivar a los estudiantes y acercarles más al fenómeno descrito.

Una vez hechas las representaciones gráficas se pregunta por las similitudes y diferencias de las funciones obtenidas. Se espera que surja una idea intuitiva de simetría que será institucionalizada en la puesta en común del problema por parte del docente, donde se comprobará el cumplimiento de las condiciones de la simetría par en los experimentos con la superficie A y simetría impar en los experimentos con la superficie B (T3.8).

3. Metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología a seguir para la implementación en el aula de los problemas propuestos será el trabajo en pequeños grupos heterogéneos de 3 o 4 personas. Los Problemas 1, 2, 3 y 6 se trabajarán en el aula ordinaria durante las Sesiones 4, 5 y 7 de la unidad didáctica (el cronograma completo puede verse en la Sección H). Tras la realización de las actividades destinadas a la puesta en común y corrección de tareas pendientes, el docente procederá a repartir a cada estudiante una ficha con el enunciado de los problemas a tratar durante la sesión y se organizarán los grupos de trabajo.

En primer lugar, los estudiantes deberán leer con atención el caso presentado en cada problema, preguntando posibles dudas que carácter semántico, si las hubiera. A continuación, deberá abrirse en cada grupo de trabajo un pequeño debate sobre cómo afrontar las cuestiones que se plantean y los posibles métodos de resolución. Una vez realizado un primer acercamiento, se repartirá a cada grupo una ficha para escribir las soluciones a los problemas presentados.

El rol del docente será supervisar el trabajo de cada grupo, identificando los conceptos y las técnicas que surgen a medida que progresa su resolución. Asimismo, el docente será una figura de guía y apoyo para atender dudas, procurando que todos los estudiantes puedan avanzar sin dificultades. Una vez concluido el tiempo estimado, se procederá a realizar una puesta en común de las respuestas obtenidas con el conjunto de la clase. El docente modulará el debate promoviendo la participación equitativa de todos los estudiantes y destacará las aportaciones, métodos y errores identificados durante el trabajo por grupos. Finalmente el docente recogerá la ficha asignada a cada grupo con las soluciones en la cual se deberá indicar el nombre de sus integrantes.

Por su parte, los Problemas 4 y 5 se trabajarán en parejas en el aula de informática durante las Sesiones 6 y 7. Previamente a la resolución de los mismos, el docente explicará al alumnado las nociones básicas de GeoGebra y Excel, respectivamente, necesarias para la resolución de los problemas. Cada pareja dispondrá de un ordenador con conexión a Internet en el que previamente se habrán instalado los programas. Se repartirá una ficha por pareja con el enunciado de los problemas y se abrirá una tarea en la plataforma empleada por el centro (*Edmodo, Google Classroom,* etc.) para la entrega de los archivos pertinentes. Al final de la sesión los estudiantes deberán entregar sus fichas con las soluciones y enviar los archivos requeridos. Asimismo, se realizará una puesta en común dirigida por el docente en la que se expondrán los contenidos y técnicas introducidos para su posterior institucionalización.

F. Sobre las técnicas

1. Diseño de los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula

Durante el transcurso de la unidad didáctica, los problemas presentados en la anterior sección serán acompañados por una serie de ejercicios destinados a trabajar y practicar las técnicas asociadas a cada campo de problemas. Dichos ejercicios vienen descritos a continuación:

- **CP1. Concepto de función.**

Ejercicio 1. Razona cuales de los siguientes enunciados pueden representar una función. En caso afirmativo, indica cual sería la variable independiente y la variable dependiente:

a) A cada número real le corresponde su mitad.

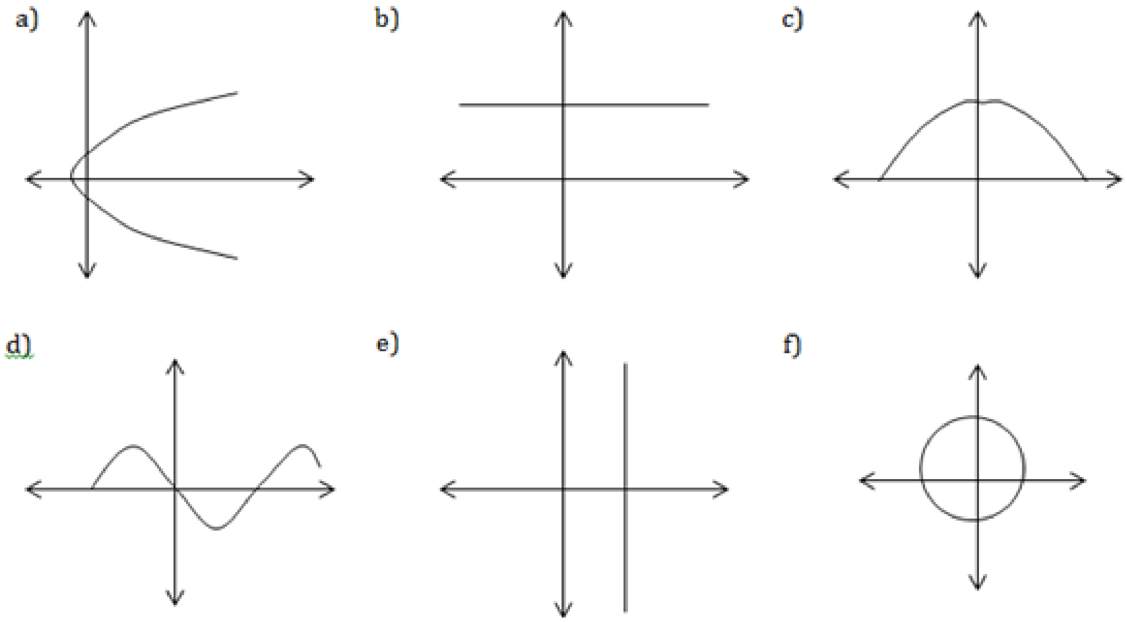
b) La distancia recorrida por una persona en un viaje en bicicleta.

c) A cada ecuación de segundo grado le corresponden sus soluciones.

d) El número de patas de un animal y su tamaño.

e) El volumen de un gas al aumentar la temperatura a presión constante.

Ejercicio 2. Justifica si las siguientes gráficas representan o no una función:



Ejercicio 3. Razona si las siguientes tablas de valores podrían representar funciones. En caso afirmativo, indica cual sería la variable independiente y la variable dependiente:

a)

x	1	2	1	0
y	0	1	2	3

b)

Distancia (m)	3	15	25	10
Tiempo (s)	0	5	10	5

c)

V	50	40	30	20
P	1	3,4	5,8	11

Ejercicio 4. Indica si las siguientes expresiones pueden representar funciones. Razona tu respuesta:

a) $y = x^2 + 5$ b) $x^2 + y^2 = r^2$ c) $f(x) = \pm\sqrt{x}$

d) $d(t) = 3t$ e) $A(r) = \pi r^2$ con $r > 0$ f) $y = 3$

- **CP2. Cambios entre formas de representación.**

Ejercicio 5. Determina para cada enunciado la fórmula que represente la función que describen, elabora una tabla de datos y representa los puntos en un sistema de coordenadas cartesianas:

a) A cada número natural le corresponde su triple.

b) El área de un cuadrado en función de su lado.

c) A cada número real le corresponde él mismo más la unidad.

d) La distancia recorrida en bicicleta a velocidad constante 15 km/h durante 1 hora.

Ejercicio 6. Representa gráficamente las funciones dadas por las siguientes tablas, elabora un enunciado que se corresponda con ellas e intenta obtener una expresión algebraica que pase por los valores dados:

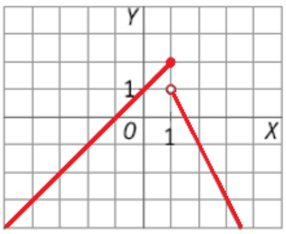
a)

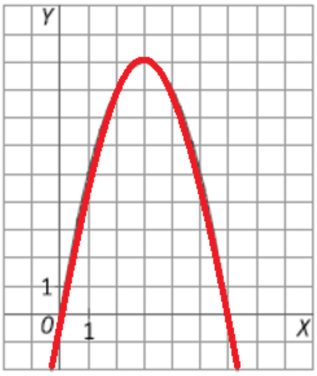
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	-2	1	4	7

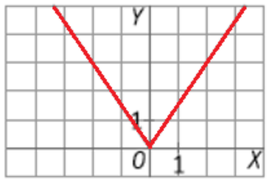
b)

r	-2	-1	0	1	2
$h(r)$	0	1	2	1	0

Ejercicio 7. Elabora para cada una de las siguientes gráficas una tabla de datos:







Asocia razonadamente cada función representada en las gráficas con su correspondiente fórmula:

a) $f(x) = |\frac{3}{2}x|$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x+3 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

c) $f(x) = 6x - x^2$

¿Serías capaz de pensar un enunciado para alguna de ellas? Escríbelo.

Ejercicio 8. Dada la siguiente función en forma de fórmula:

$$d(t) = 120t + 10$$

a) Completa la tabla con los valores correspondientes:

t	0		1		2
$d(t)$		70		190	

b) Representa la función gráficamente a mano y/o utilizando GeoGebra.

c) Elabora un enunciado que se pueda corresponder con la función dada.

- **CP3. Interpretación de las características de una función.**

Ejercicio 9. Indica el dominio y el recorrido de las funciones dadas por los siguientes enunciados:

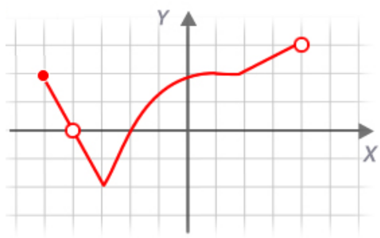
a) A cada número real le corresponde su quinta parte.

b) El porcentaje de ocupación de una sala de cine hasta completar un aforo máximo de 200 personas.

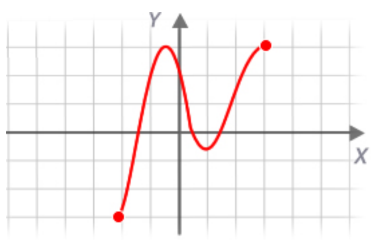
c) El diámetro de un círculo en función de su radio.

d) La velocidad de un coche durante un trayecto de 2 horas sin sobrepasar el límite de velocidad permitido.

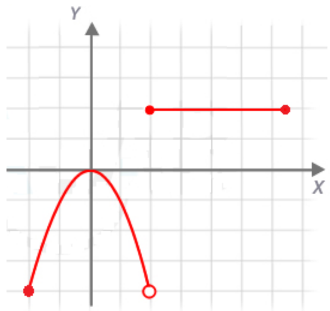
Ejercicio 10. Expresa el dominio y el recorrido de las siguientes funciones dadas en forma de gráfica. Nota: cada cuadrado equivale a una unidad.



a)



b)



c)

Las funciones anteriores, ¿presentan alguna discontinuidad? En caso afirmativo indica dónde.

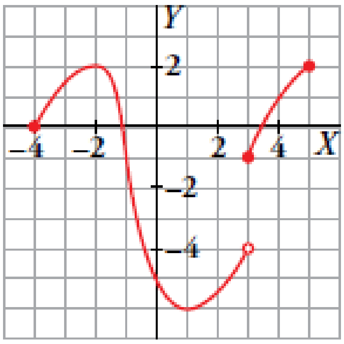
Ejercicio 11. Calcula el dominio de las funciones dadas por las siguientes fórmulas:

a) $f(x) = +\sqrt{x}$ b) $g(x) = \frac{2}{3}(x+1)$ c) $f(x) = 5 + \frac{1}{x-2}$

Comprueba tus respuestas representando las funciones en GeoGebra.

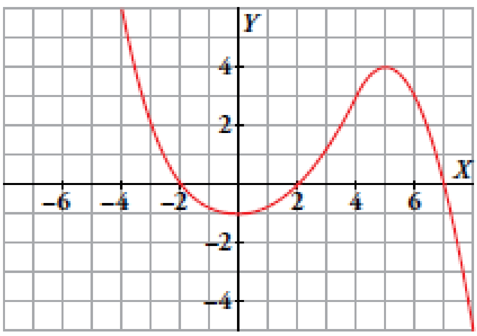
Ejercicio 12. Dada la función $f(x) = 2{,}75x + 0{,}33$ calcula su imagen cuando $x = -0{,}5$, $x = 0$, $x = 1{,}4$ y $x = 17$. ¿Para qué valor (o valores) de x se cumple $f(x) = 0$?

Ejercicio 13. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la siguiente gráfica:

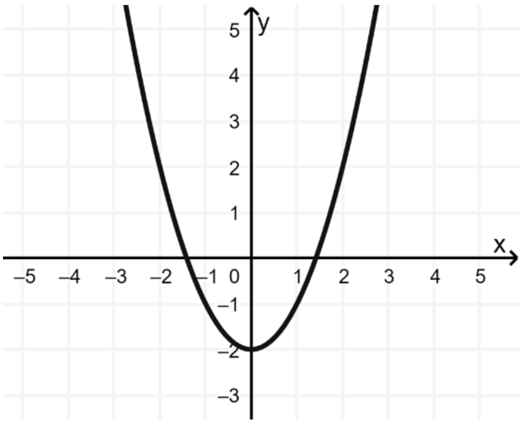


¿Cuál es su dominio $Dom(f)$ y recorrido $Im(f)$? ¿Es continua?

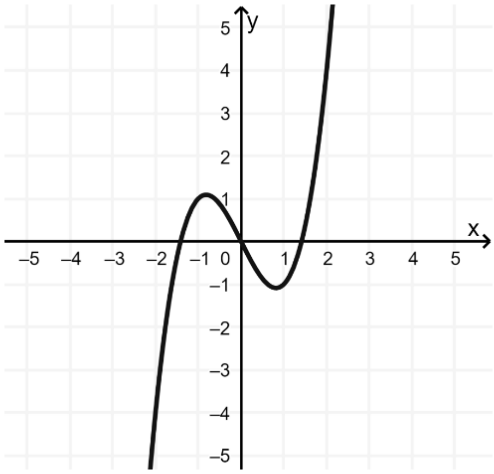
Ejercicio 14. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función representada en la gráfica. ¿Tiene algún máximo o mínimo? ¿Son relativos o absolutos? Razona tu respuesta.



Ejercicio 15. Estudia el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de las siguientes funciones:



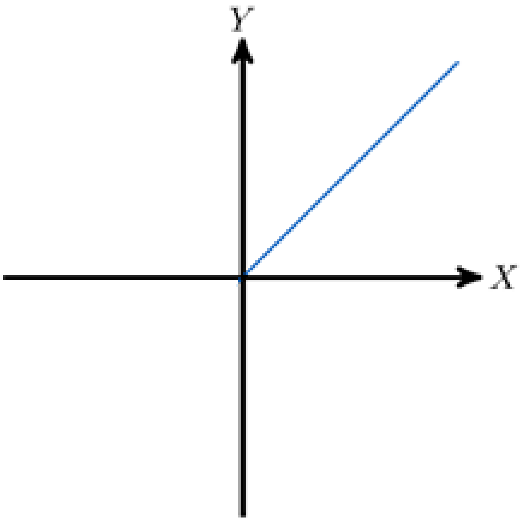
a)

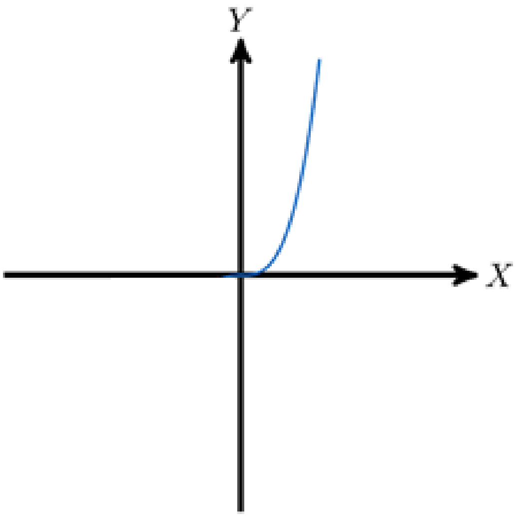


b)

¿Se trata de funciones con simetría? En caso afirmativo, razona si presentan simetría par o impar.

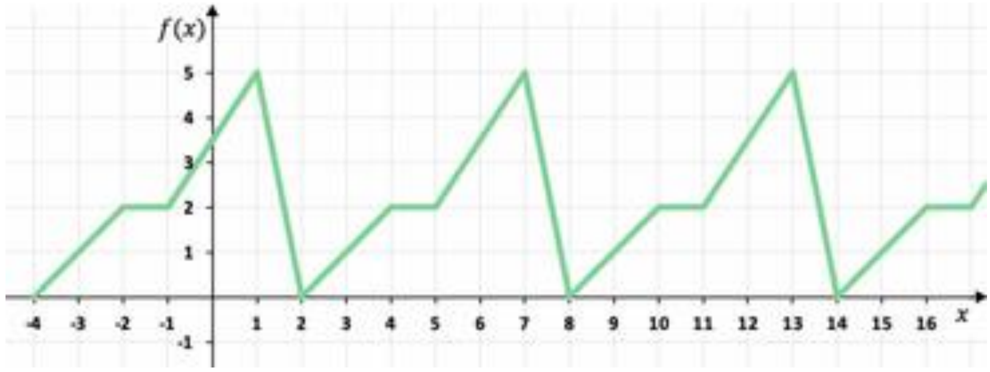
Ejercicio 16. Completa las siguientes gráficas de forma que representen funciones con simetría par:





Dibuja también la forma que tendrían si tuvieran simetría impar.

Ejercicio 17. Estudia la función representada en la gráfica, ¿posee alguna característica especial? Razona tu respuesta.



Calcula el periodo y comprueba que se verifica $f(x) = f(x+T) = f(x+2T)$ siendo x cualquier valor de la variable independiente.

Ejercicio 18. Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes características:

a) El dominio de la función son todos los números reales entre el -10 y 15, ambos incluidos. Es decir, $Dom(f) = [-10, 15]$.

b) El recorrido de la función va de -12 a 20, ambos incluidos. Es decir, $Im(f) = [-12, 20]$.

c) La función pasa por los puntos $A = (-10, 4), B = (-2, 20), C = (3, 15), D = (8, -12)$ y $E = (15, -7)$.

d) La función corta con el eje OX en $x = 5$.

e) La función es creciente de A a B y de D a E. Es decir, creciente en $(-10, -2) \cup (8, 15)$.

f) La función es decreciente de B a D. Es decir, decreciente en $(-2, 8)$.

Siguiendo el ejemplo anterior, dibuja una nueva función en forma de gráfica (la que tú elijas) y describe sus características. Cuando la tengas, comparte la lista de características con tu compañero para que dibuje la función sin mostrarle el dibujo original. Compara ambas gráficas, ¿son iguales?

Ejercicio 19. Utilizando el *software* GeoGebra, representa gráficamente las siguientes funciones e indica en cada caso:

	$Dom(f)$	$Im(f)$	Corte OX	Corte OY	Max. relativo(s)	Min. relativo(s)
$f(x) = x^3 - 5x$						
$f(x) = \frac{2}{(x^2 - 1)}$						
$f(x) = 3x - x^4$						
$f(x) = (x + 2)^2$						

Nota: Recuerda que GeoGebra contiene herramientas que pueden ser útiles para analizar funciones como, por ejemplo, *Intersección*, *Limita/Libera Punto* y *Extremos relativos*.

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

En los ejercicios correspondientes al primer campo de problemas (Ejercicios 1, 2, 3 y 4), los estudiantes deberán poner de manifiesto la comprensión del concepto de función identificando cuales de los casos presentados cumplen con la definición proporcionada (ver Sección G). Para ello, se pondrán en práctica las técnicas T1.1 y T1.2 según las cuales habrá que analizar, en primer lugar, si existe una relación entre una variable independiente y otra dependiente, y en segundo lugar, comprobar que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente. De manera general, la T1.1 podrá ser aplicada para enunciados, tablas y fórmulas, mientras que la T1.2 es específica para gráficas.

En cuanto a los ejercicios destinados a trabajar los cambios entre formas de representación (Ejercicios 5, 6, 7 y 8), se busca que los estudiantes adquieran cierta destreza a la hora de traducir la información de una función dada de una forma a otras.

En el Ejercicio 5 se propone el paso de enunciado a fórmula, tabla y gráfica (T2.3, T2.1 y T2.2). Se espera que entre los estudiantes puedan surgir diferentes estrategias dependiendo de su experiencia trabajando con expresiones algebraicas. Por un lado, los estudiantes pueden abstraer directamente la información del enunciado escribiendo la fórmula equivalente (modelo) y sustituir en ella valores de la variable independiente para obtener pares de valores (x, y), los cuales pueden organizar en una tabla para posteriormente representarlos en un sistema de coordenadas cartesianas. Por otro lado, es posible que existan estudiantes para los que sea más intuitivo obtener pares de valores con los que construir una tabla (medida) y, una vez representados gráficamente, obtener la expresión algebraica.

Por su parte, en el Ejercicio 6 se presentan dos funciones en forma de tabla de datos para que los estudiantes representen los pares de valores en un sistema de coordenadas, asociando al eje de abscisas la variable independiente y al de ordenadas la variable dependiente (T2.5). A continuación, se les pide dar un posible enunciado (T2.4) y finalmente obtener una expresión algebraica que pase por los puntos (T2.6). En este último punto cabe destacar que existen infinitas soluciones a la hora de obtener la fórmula de una función que pase por los puntos dados, hecho que se abordará en la puesta en común del ejercicio. No obstante la respuesta esperada es que los estudiantes recurran a las expresiones conocidas de la función lineal o funciones a trozos lineales.

Análogamente, en el Ejercicio 7 se parte de varias funciones dadas en forma de gráfica y se pide, en primer lugar, obtener tablas de datos a partir de ellas (T2.8), asociar con la fórmula correspondiente (T2.9) y describir las funciones mediante un enunciado (T2.7). Dado que previamente los estudiantes habrán obtenido pares de valores para construir las tablas de datos (tabulación), estos podrán ser empleados para el ajuste gráfico, sustituyendo los valores en las fórmulas para comprobar si verifican la igualdad.

En el Ejercicio 8 la función se da inicialmente en forma de fórmula y los estudiantes deben sustituir valores de la variable independiente y dependiente para completar la tabla de datos (T2.11), dibujar la gráfica de la función a partir de los pares obtenidos o bien introduciendo la fórmula en GeoGebra (T2.12) y, por último, escribir un enunciado que describa la relación funcional presentada (T2.10).

Finalmente, las técnicas asociadas al tercer campo de problemas para la identificación de las características de una función serán trabajadas en los Ejercicios 9 al 19. En concreto, la técnica T3.1 se pondrá en práctica en el Ejercicio 9, la técnica T3.2 aparecerá en los Ejercicios 10 y 13, la técnica T3.3 se ejercitará en el Ejercicio 11 y la T3.4 en los Ejercicios 10 y 13.

Por otro lado, la técnica T3.5 se trabajará de forma directa en el Ejercicio 12 y se ampliará para el caso inverso, es decir, obtener los valores de la variable independiente (si existen) para los que la imagen de la función es un cierto valor. En el caso presentado, los puntos a obtener coinciden con los cortes de la función con el eje de abscisas OX.

Las técnicas T3.6 y T3.7 se ejercitarán en los Ejercicios 13, 14 y 15. La distinción entre máximos y mínimos relativos y absolutos será abordada en el Ejercicio 14. Asimismo, el Ejercicio 15 servirá para tratar también la técnica T3.8, la cuál será modificada ligeramente en el Ejercicio 16 en el que los estudiantes deberán completar las gráficas de las funciones para que cumplan las condiciones de simetría par o impar. La técnica T3.9 asociada a identificar la periodicidad se ejercitará en el Ejercicio 17.

Por último, los Ejercicios 18 y 19 están destinados a complementar algunas de las técnicas trabajadas en los anteriores ejercicios. El Ejercicio 18 invierte el formato de anteriores ejercicios, siendo los estudiantes los que deben dibujar la gráfica de una función dadas sus características. Por otro lado, el Ejercicio 19 incide en la representación gráfica y análisis de funciones empleando herramientas informáticas (en este caso GeoGebra).

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Como acabamos de ver, los ejercicios aquí propuestos han sido diseñados de forma que permitan practicar las técnicas asociadas a los conceptos que abarca cada uno de los tres campos de problemas. Dichos conceptos son introducidos al alumnado a través del planteamiento de problemas en contextos físicos y situaciones de la vida cotidiana en cuyo proceso de resolución surgen las técnicas y tecnologías que queremos que los estudiantes conozcan y asimilen a lo largo de su proceso de aprendizaje. Se pretende que los ejercicios ayuden a este proceso de asimilación, permitiendo trabajar las técnicas de manera dirigida y más descontextualizada para facilitar su abstracción.

Adicionalmente, algunos de los ejercicios incluyen variaciones de las técnicas iniciales que buscan fomentar la capacidad resolutiva de los estudiantes y ampliar su conocimiento en el uso de herramientas TIC para el aprendizaje en matemáticas. Por tanto, consideramos que las técnicas que se trabajan en los ejercicios son adecuadas a los campos de problemas de nuestra propuesta didáctica.

4. Metodología a seguir en su implementación en el aula

De forma general, los ejercicios propuestos serán realizados por los estudiantes a medida que se resuelvan los problemas que introducen los conceptos, técnicas y tecnologías asociadas a los mismos. La mayoría de los ejercicios serán realizados en el aula en grupos de trabajo y recogidos al final de cada sesión. Esto permitirá al docente analizar el trabajo realizado, anotar observaciones y preparar de antemano los aspectos a destacar durante la posterior puesta en común. En caso de no disponer del tiempo necesario, se dará a los estudiantes la opción de enviar a través de una plataforma digital la solución de los ejercicios a lo largo de ese mismo día lectivo. La puesta en común y corrección de los ejercicios se llevará a cabo por regla general al inicio de la siguiente sesión tal como se detalla en el cronograma de la Sección H. Para ello, el docente devolverá a los estudiantes sus ejercicios con las observaciones realizadas sirviendo así como una herramienta de retroalimentación.

Al final de la Sesión 3 de la unidad didáctica, después de la puesta en común de los Problemas A y B e institucionalización del concepto de función, se entregará a cada estudiante una ficha con los enunciados de todos los ejercicios a realizar durante la unidad. En ese mismo momento se propondrá la resolución de los Ejercicios 1, 2, 3 y 4, los cuales podrían empezar a resolverse en clase manteniendo los grupos de trabajo y, en caso de ser necesario, completarse de manera individual como tarea para casa a entregar a lo largo de dicho día.

Al inicio de la Sesión 4 se llevará a cabo la puesta en común y corrección de los Ejercicios 1, 2, 3 y 4 durante la cual los estudiantes podrán consultar sus posibles dudas al respecto. El docente pedirá durante la corrección la colaboración de los estudiantes para comprobar si han comprendido correctamente los conceptos y técnicas a aplicar. Tras la realización de las actividades de aula planeadas para el resto de la sesión, los estudiantes podrán trabajar en grupo los Ejercicios 5, 9, 13 y 14. La puesta en común y corrección de los mismos tendrá lugar al inicio de la Sesión 5.

Las técnicas introducidas por los problemas trabajados en el aula durante la Sesión 5 serán puestas en práctica a través de los Ejercicios 6, 7, 10 y 12. El docente supervisará el trabajo grupal de los estudiantes, resolviendo las posibles dudas e identificando las estrategias utilizadas para su resolución. Se pedirá a los estudiantes que revisen sus dudas para su posterior puesta en común al comienzo de la Sesión 6.

El resto de actividades de la Sesión 6 se llevarán a cabo en el aula de informática con el objetivo de introducir el uso de GeoGebra para la representación gráfica de funciones y estudio de sus características generales. A través de un ejemplo, el docente mostrará a los estudiantes las distintas herramientas útiles para el análisis de funciones. Los estudiantes pondrán familiarizarse con estas herramientas trabajando el Ejercicio 19, el cual se corregirá al final de la sesión, y los Ejercicios 8 y 11, que serán corregidos más adelante.

Finalmente, en la Sesión 8 se dedicará parte de la clase al trabajo de los Ejercicios 15, 16, 17 y 18 como preparación para la prueba escrita. El apartado final del Ejercicio 18 se realizará rotando por parejas para dinamizar la clase y favorecer el intercambio entre iguales. Como última sesión de la unidad previa a la prueba escrita de evaluación, se procederá a la puesta en común y corrección de los Ejercicios 8, 11 y los realizados durante la propia sesión. Los estudiantes podrán consultar al docente las dudas que tengan referentes a los contenidos dados a lo largo de la unidad.

Cabe mencionar que la realización y entrega continua de los ejercicios no sólo supone un pequeño porcentaje de la calificación final de la unidad, sino que el trabajo diario de estos es fundamental para la adquisición de un correcto aprendizaje, permitiendo detectar errores en el proceso de enseñanza por parte del docente y en la comprensión de los estudiantes, es decir, contribuyen a la evaluación formativa.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Las técnicas presentadas a lo largo de la unidad didáctica encuentran su justificación en las definiciones asociadas a las propias funciones y su representación gráfica. A continuación, se muestran las definiciones correspondientes a cada campo de problemas que serán proporcionadas durante el transcurso de las sesiones:

- **CP1. Concepto de función.**

Las técnicas que permiten la identificación de una función en sus diversas formas de representación se justifican en la definición de función. En el nivel al que nos encontramos, consideramos adecuada la siguiente definición:

Definición: *Una **función** es **una relación entre dos magnitudes o variables**, de forma que a cada valor de la **variable independiente** le corresponde un **único valor** de la **variable dependiente**. Típicamente se denomina $\boldsymbol{x}$ a la variable independiente, e $\boldsymbol{y}$ a la variable dependiente, de forma que $\boldsymbol{y = f(x)}$.*

- **CP2. Cambios entre formas de representación.**

Por otro lado, las técnicas presentadas en el campo de problemas asociado a los cambios entre los distintos sistemas de representación de una función se justifican mediante las definiciones de dichos sistemas:

- *La relación entre las dos variables de una función puede expresarse verbalmente mediante un **enunciado**.*
- *La relación entre las dos variables de una función puede expresarse a través de pares de valores $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ que se recogen en una **tabla**.*
- *La relación entre las dos variables de una función puede expresarse mediante una **gráfica** al representar pares de valores $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ en un sistema de ejes coordenados donde la variable independiente $\boldsymbol{x}$ se representa en el **eje de abscisas** y la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ en el **eje de ordenadas**.*
- *La relación entre las dos variables de una función puede expresarse a través de una **expresión algebraica**, $\boldsymbol{y = f(x)}$, que hace referencia a la ecuación que cumplen todos los puntos del dominio de la función.*

- **CP3. Interpretación de las características de una función.**

En este tercer campo de problemas, las técnicas asociadas encuentran su justificación en las siguientes definiciones:

*El **dominio** una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente x para los cuales existe un valor de la variable dependiente y tal que $y = f(x)$. Lo escribimos como $Dom(f)$.*

*El **recorrido** o imagen de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente y. Lo escribimos como $Im(f)$.*

La imagen de cierto valor de la variable independiente x_0 se obtiene al evaluar el valor de la función en dicho punto, es decir, $y_0 = f(x_0)$.

*Se dice que una función es **continua** si no presenta discontinuidad en su dominio $Dom(f)$. En caso contrario, si la función presenta algún tipo de discontinuidad en un punto de su dominio se dice que este es un punto de discontinuidad de la función.*

*Los **puntos de corte con los ejes** de una función son los puntos de intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas.*

- ***Cortes con el eje de abscisas OX** (si los hay): son los puntos $(x_0, 0)$ donde x_0 se obtiene calculando los valores para los que se cumple $f(x) = 0$.*
- ***Cortes con el eje de ordenadas OY** (si los hay): son los puntos $(0, y_0)$ donde y_0 se obtiene calculando $f(0)$.*

Dada una función $f(x)$ en un intervalo de su dominio $[a, b]$ tal que $a < b$ siendo valores muy próximos entre sí:

- *Si $f(b) > f(a)$, se dice que la función es **creciente** entre a y b, es decir, al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el valor de la variable dependiente.*
- *Si $f(b) < f(a)$, se dice que la función es **decreciente** entre a y b, es decir, al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la variable dependiente.*
- *Si $f(b) = f(a)$, se dice que la función es **constante** entre a y b, es decir, al aumentar el valor de la variable independiente la variable dependiente se mantiene constante.*

*Se dice que una función continua tiene un **máximo relativo** en un punto $(x_0, f(x_0))$ cuando pasa de ser creciente a ser decreciente en dicho punto. Por otro lado, una función continua tiene un **mínimo relativo** en $(x_0, f(x_0))$ si pasa de ser decreciente a creciente en dicho punto.*

*Se dice que una función tiene un **máximo absoluto** si existe un punto de la gráfica $(x_0, f(x_0))$ en el que el valor de la función es máximo en la variable dependiente (eje de ordenadas). Análogamente, una función tiene un **mínimo absoluto** si existe un punto de la gráfica $(x_0, f(x_0))$ en el que el valor de la función es mínimo en la variable dependiente.*

Se dice que una función es ***simétrica*** *si:*

- *Si para todo valor perteneciente al dominio de la función se cumple* $f(x) = f(-x)$. *En este caso se dice que la función tiene* ***simetría par*** *y gráficamente es simétrica respecto al eje de ordenadas OY.*
- *Si para todo valor perteneciente al dominio de la función se cumple* $-f(x) = f(-x)$. *En este caso se dice que la función tiene* ***simetría impar*** *y gráficamente es simétrica respecto al origen de coordenadas.*

Una función es ***periódica*** *si su gráfica está formada por un patrón que se repite de igual forma en intervalos sucesivos, es decir, los valores que adopta la variable dependiente se repiten cada cierto intervalo de la variable independiente. Dicho intervalo recibe el nombre de* ***periodo*** *y típicamente se denota con la letra T de forma que se cumple:*

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \cdots$$

2. ¿Quién va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

La justificación de las técnicas será asumida por el docente a medida que los estudiantes realicen los problemas presentados en la Sección E. Durante las sesiones dedicadas a estos problemas, los estudiantes trabajarán en pequeños grupos y el docente tendrá un rol de apoyo. La labor del docente consistirá en supervisar el trabajo, ofreciendo ayuda a los grupos que lo precisen, y observar las posibles técnicas, ideas o dudas que surgen en los estudiantes al enfrentarse a la tarea. Durante la puesta en común, el docente llevará a cabo la institucionalización de conceptos y justificación de las técnicas asociadas.

3. Diseño del proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático y metodología a seguir en su implementación en el aula

La institucionalización de los conceptos que se van a trabajar a lo largo de la unidad didáctica se realizará de forma progresiva a medida que estos sean introducidos en los problemas propuestos. En primer lugar, el concepto de función será institucionalizado durante la puesta en común y debate tras la realización de los Problemas A y B. En dicho proceso de institucionalización se hará referencia a las distintas formas de representar funciones, si bien las características de cada forma de representación y los cambios de una a otra se abordarán con mayor detalle tras el Problema 1 (gráfica y enunciado), Problema 2 (enunciado, tabla y gráfica), Problema 3 (enunciado, tabla, fórmula y gráfica) y Problema 4 (fórmula y gráfica).

En cuanto a la institucionalización de los conceptos asociados a las características de funciones, el dominio y el recorrido serán introducidos con el Problema 1 tomando la representación gráfica como apoyo. Este mismo problema servirá también para introducir el crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, cortes con los ejes y continuidad. Dichos conceptos se seguirán trabajando en los posteriores problemas y ejercicios. Respecto a los conceptos de periodicidad y simetría, estos serán introducidos mediante el Problemas 5 y el Problema 6, respectivamente. La institucionalización formal de los conceptos correrá a cargo del docente durante la puesta en común en el aula al final de cada sesión. Tras dicho proceso, se facilitará a cada estudiante una hoja de carácter informativo con las correspondientes definiciones. Es importante remarcar que el objetivo no es que los estudiantes memoricen las definiciones sino apoyar la comprensión de los conceptos de forma que cada alumno construya con sus propias palabras las definiciones y las integre dentro de su conjunto de saberes.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Secuenciación de las actividades propuestas y duración aproximada

A continuación, se muestra la secuenciación de las actividades propuestas para realizar a lo largo de la unidad didáctica. Cada sesión tiene una duración de 50 minutos y, dado que la asignatura Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas en 3º de ESO cuenta solo con tres periodos lectivos semanales, se espera que la unidad se prolongue durante mínimo tres semanas lectivas.

Sesión	Contenidos	Actividades
1	Prueba evaluación inicial	Actividades 1, 2, 3, 4 y 5 (Individual) Puesta en común y corrección
2-3	Razón de ser del objeto matemático y concepto de función	Problemas A y B (Trabajo en grupo) Puesta en común e institucionalización del concepto de función

	Concepto de función. Práctica de la técnica	Trabajo en clase / tarea para casa: Ejercicios 1, 2, 3 y 4
4	Interpretación de las características generales de una función en forma de gráfica y transformación a enunciado Práctica de la técnica	Puesta en común y corrección de los ejercicios 1, 2, 3 y 4 Problema 1 (Trabajo en grupo) Puesta en común e institucionalización características generales y cambios de representación Trabajo en clase: Ejercicios 5, 9, 13 y 14
5	Cambios entre formas de representación (enunciados, tablas, gráficas y fórmulas) Práctica de la técnica	Puesta en común y corrección de los ejercicios 5, 9, 13 y 14 Problemas 2 y 3 (Trabajo en grupo) Puesta en común e institucionalización Trabajo en clase: Ejercicios 6, 7, 10 y 12
6	Cambios entre formas de representación Uso de medios informáticos para representar funciones Práctica de la técnica	Puesta en común y corrección de los ejercicios 6, 7, 10 y 12 Introducción a GeoGebra Problema 4 (Por parejas) Aula informática Trabajo en aula de informática: Ejercicios 19, 8 y 11 Puesta en común y corrección ejercicio 19
7	Interpretación de características (periodicidad y simetría)	Introducción a Excel Problema 5 (Por parejas) Aula informática

	Uso de medios informáticos para representar funciones	Problema 6 (Trabajo en grupo) Puesta en común e institucionalización
8	Práctica de la técnica	Ejercicios 15, 16, 17 y 18 Puesta en común y corrección ejercicios 8, 11, 15, 16, 17 y 18 Resolución de dudas previa a la prueba escrita de evaluación
9	Evaluación: prueba escrita	Realización de la prueba escrita de evaluación de la unidad
10	Corrección de la prueba escrita	Entrega a los estudiantes de los resultados de la prueba escrita, puesta en común y corrección en la pizarra

Tabla 3. Cronograma y secuenciación de actividades.

Cabe mencionar que el cronograma tiene un carácter orientativo y puede verse sujeto a modificaciones para adaptarse a las necesidades del grupo-clase detectadas por el docente a lo largo del transcurso de la unidad didáctica, pudiendo ampliar el número de sesiones en busca de la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

I. Sobre la evaluación

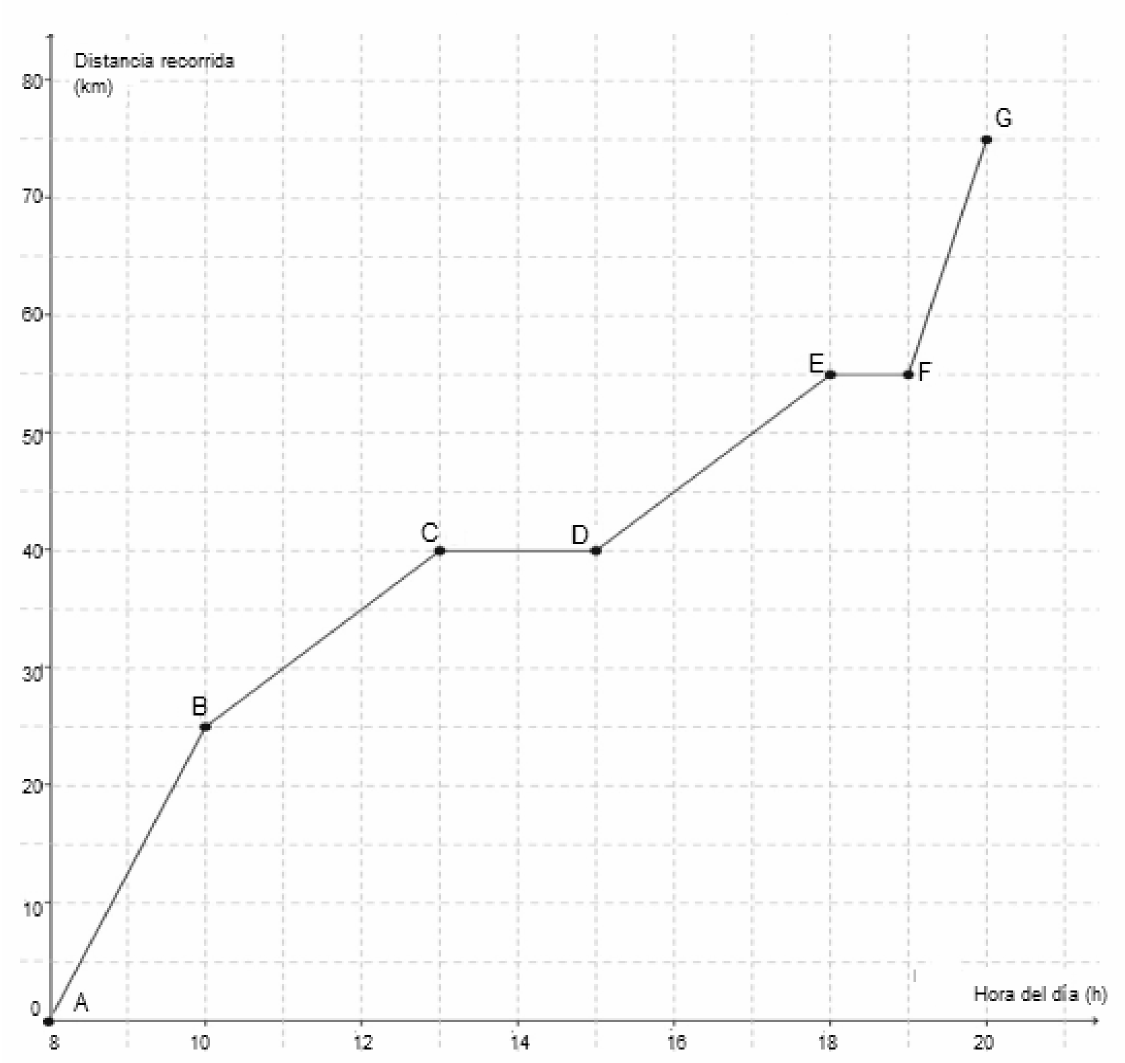
1. Diseño de una prueba escrita que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos

En la penúltima sesión de la unidad didáctica los estudiantes deberán realizar una prueba escrita con la que se evaluarán los conocimientos adquiridos a lo largo de las sesiones. La prueba constará de una serie de problemas en línea con los trabajados en clase. La puntuación total obtenida en la prueba escrita se calculará como la suma de los puntos asignados a cada apartado, siendo la puntuación total máxima posible 10 puntos. La prueba se realizará en el aula ordinaria de manera individual y tendrá una duración estimada de 45 minutos.

La calificación obtenida en la prueba escrita constituirá el 50% de la nota final de la unidad didáctica. El restante 50% se destinará al trabajo continuo del alumnado a lo largo de las sesiones, evaluando la realización y entrega de las actividades propuestas (30% Problemas y 20% Ejercicios). Los problemas que conforman la prueba escrita son los siguientes:

Problema 1. Adaptación de los Apuntes Marea Verde *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. TERCERO B DE ESO DE MATEMÁTICAS. LOMCE* (Gallegos Fernández, 2022, p. 295).

La siguiente gráfica representa la distancia recorrida por un grupo de excursionistas desde el punto de partida A hasta el punto de llegada G.



a) Indica la variable independiente y la variable dependiente. (0,25 puntos)

b) ¿A qué hora salieron los excursionistas? ¿Cuánto duró la excursión? (0,25 puntos)

c) ¿Cuánto tiempo descansó el grupo de excursionistas? ¿Entre qué horas? (0,5 puntos)

d) ¿Cuántos kilómetros recorrieron los excursionistas en total? (0,25 puntos)

e) Completa la siguiente tabla con la información de la gráfica: (0,75 puntos)

Punto	Hora del día (h)	Distancia total recorrida (km)
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		

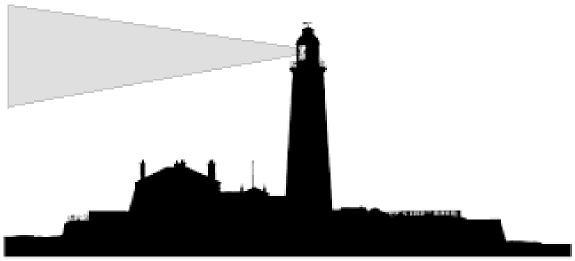
f) Haz una breve descripción con palabras del desarrollo de la excursión que contenga el máximo de información posible extraíble de la gráfica. (1 punto)

g) ¿En qué intervalo de tiempo los excursionistas avanzaron más rápido? (0,5 puntos)

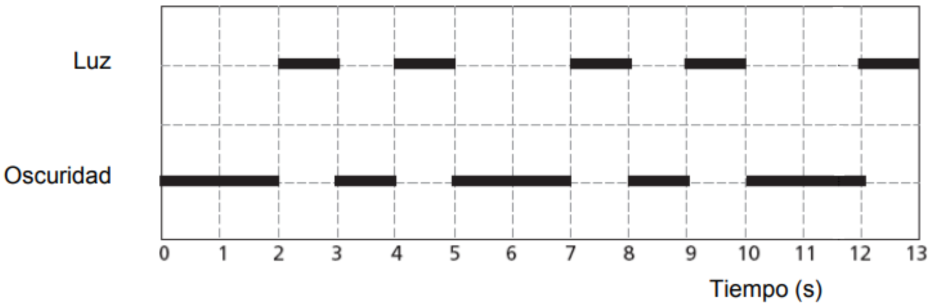
h) Si en el eje vertical representáramos la variable "*Distancia al punto de llegada*", ¿sería la misma gráfica? Razona tu respuesta con palabras y, en caso de ser diferente, dibuja cómo sería la gráfica. (1,5 puntos)

Problema 2. Adaptación de *Preguntas liberadas del Proyecto PISA*, Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE, 2015).

Los faros son torres con un foco luminoso en la parte superior que ayudan a los barcos a seguir su rumbo durante la noche cuando navegan cerca de la costa. Cada faro emite destellos de luz según una secuencia regular fija que permite diferenciarlos del resto.



En el diagrama de abajo se puede ver la secuencia que emite el Faro de la Bahía:

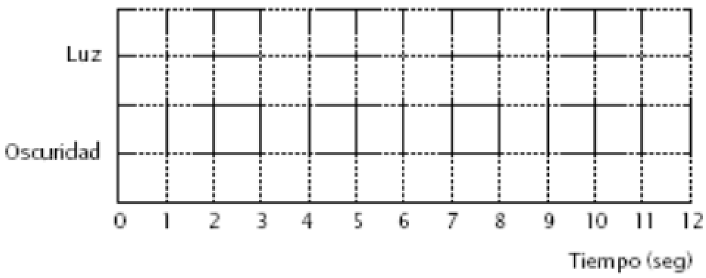


a) ¿Se trata de una función periódica? Razona tu respuesta. (0,25 puntos)

b) ¿Cuánto dura el período de la secuencia de este faro? (0,5 puntos)

c) ¿Durante cuántos segundos emite este faro destellos de luz a lo largo de 1 minuto? (0,25 puntos)

d) Un marinero perdió el rumbo a causa de una tormenta nocturna y desde su barco ve una secuencia de 20 destellos de luz cada minuto con un periodo de 6 segundos. Dibuja en la cuadrícula de abajo un gráfico que se pueda corresponder con lo observado por el marinero. (0,75 puntos)

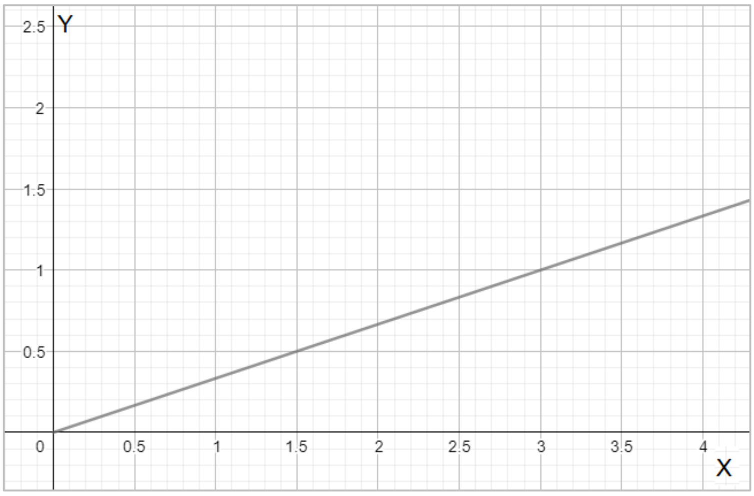


e) Con la información que conocemos, ¿podemos afirmar que el marinero se encuentra próximo al Faro de la Bahía? Justifica tu respuesta. (0,25 puntos)

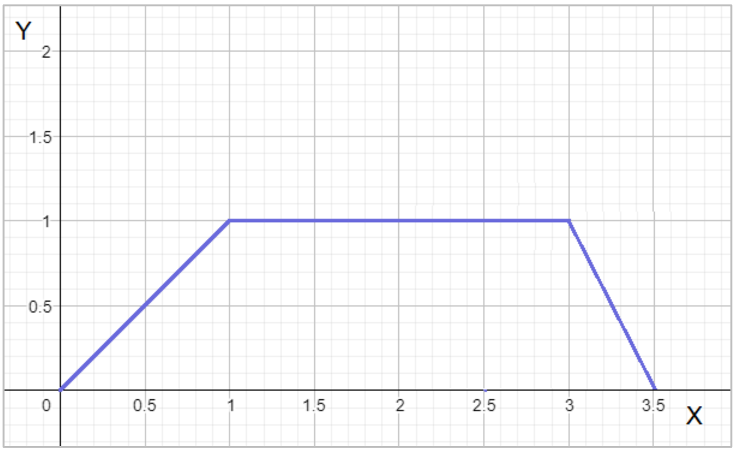
Problema 3. Lee atentamente los siguientes enunciados y responde a las cuestiones:

- Un depósito lleno de agua de 2 litros de capacidad que se vacía a un ritmo constante de medio litro por hora.
- El precio de un producto que se vende a 1/3 euros por kilogramo.
- El recorrido de un gato que sube a la rama de un árbol situada a un metro de altura con velocidad constante 1 metro por segundo, reposa en la rama durante dos segundos y baja el doble de rápido que la velocidad de subida.

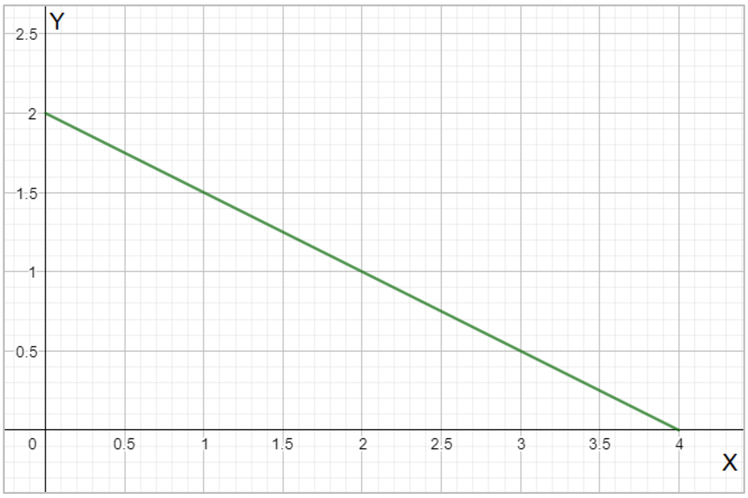
a) Asocia a cada enunciado la gráfica que le corresponda. Razona tu respuesta e indica en los ejes el nombre y las unidades de las variables independiente y dependiente en cada caso: (1,5 puntos)



Gráfica 1.



Gráfica 2.



Gráfica 3.

b) Relaciona la gráfica de las funciones anteriores con su expresión analítica. Justifica tu respuesta. (1,5 puntos)

$$f(x) = 2 - 0.5x \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 7 - 2x & \text{si } 3 < x \leq 3.5 \end{cases} \qquad f(x) = \frac{1}{3}x$$

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático se pretende evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Para el diseño de la prueba escrita se han tomado como referencia los siguientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje pertenecientes al Bloque 4: Funciones de 3º ESO Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas según la ORDEN ECD/489/2016:

Crit.MAAC.4.1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.

- Est.MAAC.4.1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
- Est.MAAC.4.1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.
- Est.MAAC.4.1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.

- Est.MAAC.4.1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.

Cabe mencionar que los estándares de aprendizaje asociados a los Crit.MAAC.4.2 y Crit.MAAC.4.3 serían abordados en una unidad didáctica posterior a la aquí presentada dado que estos hacen referencia a las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta y a las funciones cuadráticas, contenidos que no han sido tratados en profundidad en esta propuesta.

Por tanto, los problemas que componen la prueba escrita pretenden evaluar los siguientes estándares de aprendizaje:

	Estándares de aprendizaje evaluables
Problema 1	Est.MAAC.4.1.1., Est.MAAC.4.1.2., Est.MAAC.4.1.3.
Problema 2	Est.MAAC.4.1.1., Est.MAAC.4.1.2., Est.MAAC.4.1.3.
Problema 3	Est.MAAC.4.1.1., Est.MAAC.4.1.4.

En cuanto a las técnicas específicas y tecnologías que se espera que los estudiantes apliquen para resolver los problemas de la prueba escrita, podemos encontrar por orden de aparición las siguientes:

Problema 1

En el apartado a) los estudiantes deberán identificar a partir de la gráfica la variable independiente y la variable dependiente de la función representada (T1.2). Para ello se requiere conocer el concepto de función y su representación en forma de gráfica donde la variable independiente se asocia al eje de abscisas y la variable dependiente al eje de ordenadas.

En los apartados b), c) y d) se preguntan características de la función representada en forma de gráfica que los estudiantes deberán interpretar dentro del contexto del problema. En los apartados b) y d) se pregunta por el dominio y el recorrido de la función (T3.2) haciendo referencia a la hora de inicio, la duración de la excursión y la distancia total recorrida. Por su parte, en el apartado c) los estudiantes deberán interpretar los intervalos en los que la función es constante como descansos en el trayecto (T3.6).

En los apartados e) y f) se pide traducir la información de la gráfica a una tabla y redactar un enunciado que explique el transcurso de la excursión. En el primer caso, los estudiantes deberán identificar los pares de datos en los puntos marcados de la gráfica y escribirlos en el lugar que les corresponde en la tabla (T2.8). En el segundo, los estudiantes deberán expresar con palabras la información contenida en la gráfica interpretando la forma de la función dentro del contexto del problema (T2.7).

Para resolver el apartado g) puede analizarse el aumento del valor de la variable dependiente para cada intervalo de la variable independiente. En términos del problema se estaría calculando la distancia recorrida en función del tiempo transcurrido, es decir, la velocidad del grupo de excursionistas en cada tramo. Intuitivamente el tramo de mayor velocidad correspondería con el tramo en el que la distancia recorrida aumenta más rápidamente. Este concepto está ligado a la idea de pendiente de la recta y la tasa de variación media, de modo que su resolución y posterior puesta en común en la Sesión 10 podría dar pie a la introducción de dichos contenidos de cara a la siguiente unidad didáctica.

Por último, el apartado h) plantea la modificación de la gráfica de forma que el eje vertical se corresponda con la variable "*Distancia al punto de llegada*". La resolución requiere que los estudiantes establezcan la relación entre esta nueva variable y las variables originales, explicándola verbalmente para su posterior representación en forma de gráfica (T2.2).

Problema 2

El Problema 2 permite profundizar en el concepto de función ya que presenta una situación modelizada por una función en la que la variable dependiente alterna entre dos únicos valores (luz/oscuridad). Partiendo de una gráfica contextualizada, los estudiantes deberán identificar que se trata de una función que se repite cada un cierto intervalo fijo de la variable independiente (T3. 9). Los apartados a), b) y c) servirán para comprobar la comprensión de la definición de función periódica y la habilidad de obtener información relevante y realizar predicciones a partir de los datos representados.

En el apartado d) se plantea en forma de enunciado las características de una función la cual se pide representar (T2.2). Cabe destacar que existe más de una solución correcta que cumpla con las condiciones indicadas, por lo que se tomará como válida cualquier respuesta que se adapte a lo solicitado. Finalmente, en el apartado e) se pide razonar si dichas condiciones son compatibles con la gráfica del apartado a) para lo cual es necesario establecer una comparación entre las características de dos funciones contextualizadas.

Problema 3

En el Problema 3 se parte de una serie de enunciados que describen situaciones contextualizadas que pueden ser modelizadas mediante funciones. En el apartado a) los estudiantes deberán asociar cada enunciado con su gráfica correspondiente de manera razonada haciendo referencia a las características de las mismas (T3.6) e indicando las variables independientes y dependientes. Esto permitirá ver si son capaces de extraer las variables de una función dada en forma de enunciado (T1.1) y la relación entre la representación en forma de enunciado y gráfica (T2.2).

Por su parte, en el apartado b) se pide asociar a las funciones anteriores sus expresiones analíticas. Para justificar la relación entre gráficas y fórmulas los estudiantes pueden seleccionar pares de valores de las gráficas construyendo opcionalmente tablas de datos como paso intermedio y sustituirlos en las expresiones para comprobar si se cumple la igualdad o viceversa (T2.8/T2.6, T2.9, T2.11/T2.5 o T2.12).

3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

A continuación se detallan las respuestas que se esperan en cada apartado de los problemas así como los posibles errores y dificultades en función del conocimiento de los estudiantes:

Problema 1

a) Indica la variable independiente y la variable dependiente.

Respuesta: La variable independiente es la hora del día y la variable dependiente la distancia recorrida.

Posibles errores y/o dificultades: confundir las variables, escribir que la variable independiente es el eje X y la dependiente el eje Y sin especificar el nombre de las variables o indicar solo las unidades.

b) ¿A qué hora salieron los excursionistas? ¿Cuánto duró la excursión?

Respuesta: Los excursionistas salieron a las 8 h y la excursión duró 12 h (de 8 h a 20 h).

Posibles errores y/o dificultades: No fijarse en que la variable independiente comienza en el 8 en lugar del 0, errores de cálculo al sumar las horas e indicar la hora final pero no la suma total.

c) ¿Cuánto tiempo descansó el grupo de excursionistas? ¿Entre qué horas?

Respuesta: El grupo descansó 3 horas en total, de 13 h a 15 h y de 18 h a 19 h.

Posibles errores y/o dificultades: No identificar como descansos los tramos en los que la función es constante, poner los puntos o los kilómetros en lugar de las horas y errores de lectura, cómputo o cálculo al sumar las horas.

d) ¿Cuántos kilómetros recorrieron los excursionistas en total?

Respuesta: En total recorrieron 75 kilómetros.

Posibles errores y/o dificultades: Errores numéricos al no fijarse o leer mal la graduación de los ejes.

e) Completa la siguiente tabla con la información de la gráfica:

Respuesta:

Punto	Hora del día (h)	Distancia total recorrida (km)
A	8	0
B	10	25

C	13	40
D	15	40
E	18	55
F	19	55
G	20	75

Posibles errores y/o dificultades: Errores numéricos debido a una lectura errónea, despistes o confusión entre pares de datos.

f) *Haz una breve descripción con palabras del desarrollo de la excursión que contenga el máximo de información posible extraíble de la gráfica.*

Respuesta: El grupo de excursionistas salió del punto A a las 8 de la mañana y en el primer tramo avanzaron 25 km en dos horas a velocidad constante. A continuación, redujeron la marcha recorriendo 15 km en tres horas. A las 13 h hicieron una pausa de dos horas para comer y descansar. Después, reiniciaron el camino volviendo a recorrer 15 km en tres horas, tras las cuales realizaron una segunda pausa para merendar, esta vez de tan solo una hora. A las 19 h, los excursionistas aumentaron su velocidad a 20 km/h hasta llegar al punto de llegada G a las 20 h, habiendo recorrido en total 75 km.

Posibles errores y/o dificultades: Errores al interpretar los tramos en los que la función crece o es constante, no incluir información relevante como las horas y los kilómetros en cada tramo, no hacer referencias a la velocidad ni al contexto de la excursión.

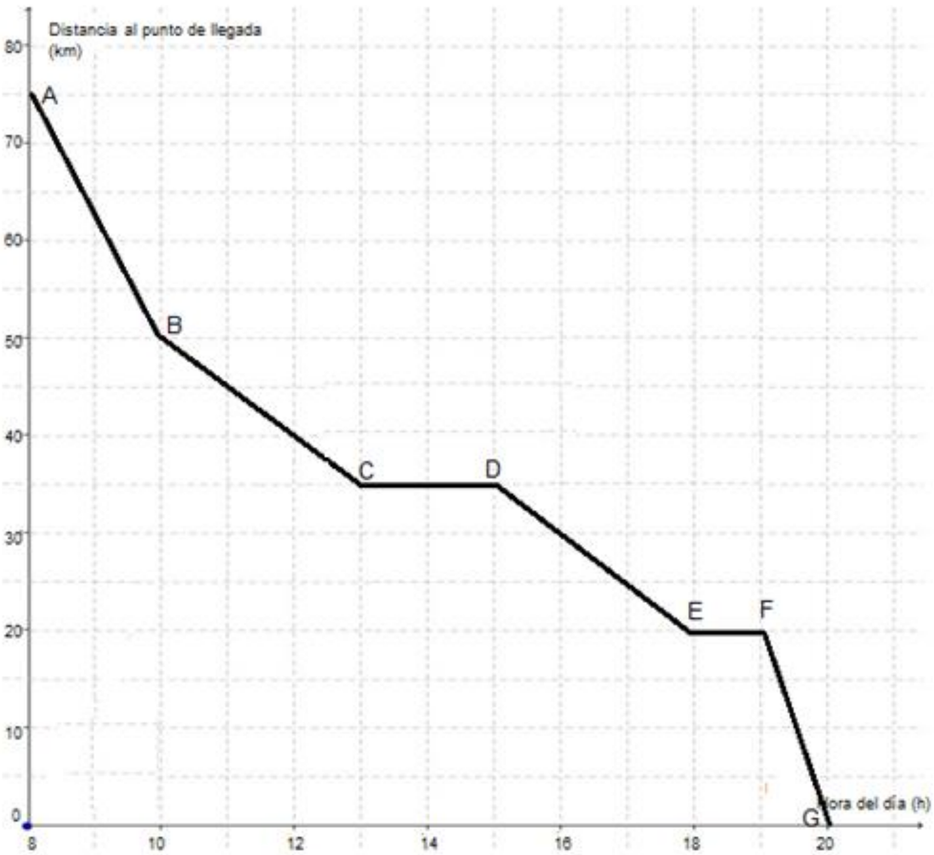
g) ¿En qué intervalo de tiempo los excursionistas avanzaron más rápido?

Respuesta: En el intervalo de 19 h a 20 h los excursionistas avanzaron más rápido. La pendiente del tramo F-G es mayor avanzando con una velocidad de 20 km/h.

Posibles errores y/o dificultades: Confundir el tramo de mayor velocidad con el A-B puesto que es en el que se avanzan más kilómetros (25 km) sin tener en cuenta que se reparten entre dos horas. No asociar la velocidad al ritmo de crecimiento de la función.

h) *Si en el eje vertical representáramos la variable "Distancia al punto de llegada", ¿sería la misma gráfica? Razona tu respuesta con palabras y, en caso de ser diferente, dibuja cómo sería la gráfica.*

Respuesta: No, la gráfica cambiaría puesto que al inicio de la excursión la distancia al punto de llegada sería máxima (75 km) y decrecería conforme el grupo de excursionistas se aproxima al final de la excursión. La gráfica resultante tendría la siguiente forma:



Posibles errores y/o dificultades: Errores al entender la modificación que se pide, dibujar la gráfica con el recorrido en sentido contrario (G-F-E-D-C-B-A), errores al graduar los ejes, no indicar el nombre de las variables y las unidades en los ejes.

Problema 2

a) ¿Se trata de una función periódica? Razona tu respuesta.

Respuesta: Con la información que disponemos a partir de la gráfica se observa que la función se repite con un mismo patrón cada un cierto intervalo fijo de la variable independiente (en este caso cada 5 segundos), por tanto es una función periódica.

Posibles errores y/o dificultades: No identificar el patrón de repetición de la función, no hacer referencia a la definición que caracteriza a las funciones periódicas, no identificar la gráfica como función al no adoptar la variable dependiente valores numéricos.

b) ¿Cuánto dura el período de la secuencia de este faro?

Respuesta: El periodo es 5 segundos, ya que se verifica $f(x) = f(x+5) = f(x+2\cdot 5)$. Por ejemplo:

$$f(1) = f(6) = f(11) = Oscuridad$$

$$f(2.5) = f(7.5) = f(12.5) = Luz$$

Posibles errores y/o dificultades: Interpretar como periodo el tiempo que pasa entre intervalos de luz o todo el dominio representado en la gráfica, no recordar la expresión que cumplen las funciones periódicas y errores de cómputo o cálculo.

c) ¿Durante cuántos segundos emite este faro destellos de luz a lo largo de 1 minuto?

Respuesta: A partir de la gráfica podemos extraer que se emiten dos segundos de luz (dos destellos de un segundo cada uno) cada 5 segundos. Por tanto, si la función es periódica, en 1 minuto (60 segundos) se habrán emitido:

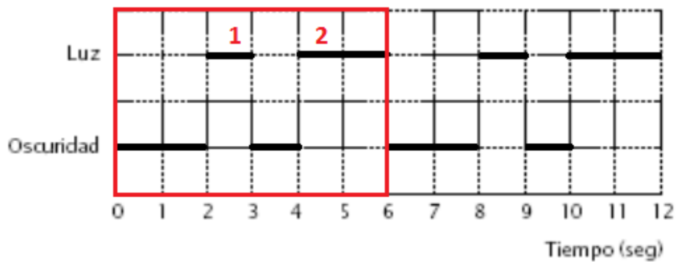
Tiempo (s)	Segundos de luz
5	2
60	x

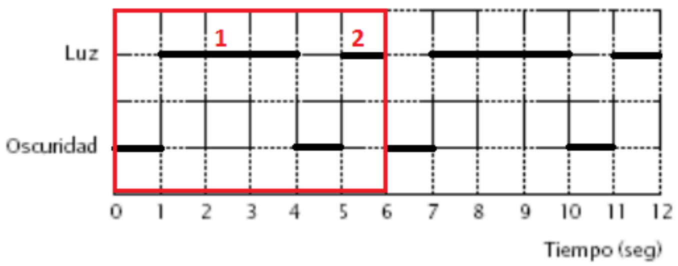
$$x = \frac{60}{5}\cdot 2 = 12\cdot 2 = 24\ segundos\ de\ luz$$

Posibles errores y/o dificultades: Errores derivados de haber calculado mal el periodo en el apartado anterior, errores en el cambio de unidades de minutos a segundos, errores de cálculo al operar o al plantear el reparto proporcional.

d) Un marinero perdió el rumbo a causa de una tormenta nocturna y desde su barco ve una secuencia de 20 destellos de luz cada minuto con un periodo de 6 segundos. Dibuja en la cuadrícula de abajo un gráfico que se pueda corresponder con lo observado por el marinero.

Respuesta: Si cada minuto hay 20 destellos de luz, en 6 segundos habrá 2 destellos de luz de duración no definida. No existe una única solución correcta, se valorará que la gráfica cumpla con las dos condiciones especificadas. Ejemplos:





Posibles errores y/o dificultades: No obtener el número de destellos a representar por periodo, representar funciones que no son periódicas o con un periodo distinto al indicado.

e) Con la información que conocemos, ¿podemos afirmar que el marinero se encuentra próximo al Faro de la Bahía? Justifica tu respuesta.

Respuesta: No, las características de la secuencia de destellos observada por el marinero no es compatible con la del Faro de la Bahía porque tanto la cantidad de destellos por minuto como el periodo son distintos:

	Faro de la Bahía	Secuencia marinero
Nº de destellos por minuto	24	20
Periodo (s)	5	6

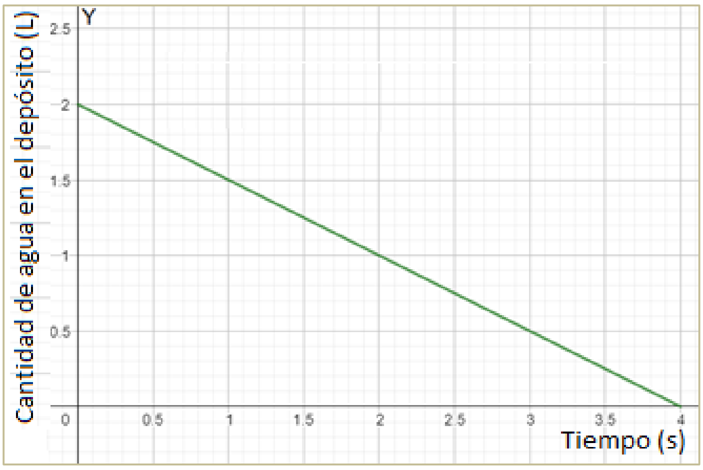
Posibles errores y/o dificultades: Errores al comparar las características de las funciones derivados de no comprender la situación que se expone, errores de lectura o de cálculo, no razonar la respuesta.

Problema 3

a) Asocia a cada enunciado la gráfica que le corresponda. Razona tu respuesta e indica en los ejes el nombre y las unidades de las variables independiente y dependiente en cada caso:

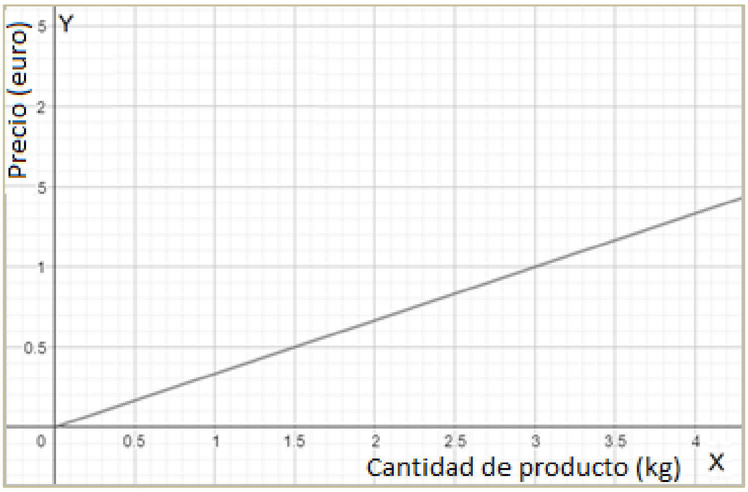
Respuesta:

- Un depósito lleno de agua de 2 litros de capacidad que se vacía a un ritmo constante de medio litro por hora.



Se corresponde con la Gráfica 3 porque se trata de una función que decrece a ritmo constante. La variable independiente es el tiempo y la variable dependiente es la cantidad de agua en el depósito que al inicio está al máximo de capacidad (2 litros).

- El precio de un producto que se vende a 1/3 euros por kilogramo.



Se corresponde con la Gráfica 1 porque se trata de una función que crece a ritmo constante (al aumentar la cantidad de producto aumenta proporcionalmente el precio). La variable independiente es la cantidad de producto y la variable dependiente el precio.

- El recorrido de un gato que sube a la rama de un árbol situada a un metro de altura con velocidad constante 1 metro por segundo, reposa en la rama durante dos segundos y baja el doble de rápido que la velocidad de subida.

Se corresponde con la Gráfica 2 porque se trata de una función a trozos donde en el primer tramo aumenta (el gato sube a la rama), en el segundo se queda constante (reposa) y en el tercero decrece (baja de la rama). La variable independiente es el tiempo y la variable dependiente la altura a la que se encuentra el gato.

Posibles errores y/o dificultades: Errores al visualizar la forma de las funciones descritas en los enunciados, no distinguir las variables independiente y dependiente, errores de unidades o no especificación de estas.

b) Relaciona la gráfica de las funciones anteriores con su expresión analítica. Justifica tu respuesta.

Respuesta: Para resolver este apartado los estudiantes pueden seguir varios métodos. Una opción es seleccionar pares de valores (x, y) a partir de las gráficas y sustituirlos en las fórmulas para verificar si se cumple la igualdad. Ejemplo:

Gráfica 1: La función pasa por $(0,0)$, $(1.5\,,0.5)$ y $(3,1)$. La fórmula que verifica estos valores es $f(x) = \frac{1}{3}x$. Lo comprobamos:

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 \qquad f(1.5) = \frac{1}{3} \cdot 1.5 = 0.5 \qquad f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Gráfica 2: La función pasa por $(1,1)$, $(2,1)$ y $(3.5\,,0)$. La fórmula que verifica estos valores es $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 7 - 2x & \text{si } 3 < x \leq 3.5 \end{cases}$. Lo comprobamos:

$$f(1) = 1 \qquad f(2) = 1 \qquad f(3.5) = 7 - 2 \cdot 3.5 = 0$$

Gráfica 3: La función pasa por $(0,2)$, $(2\,,1)$ y $(4,0)$. La fórmula que verifica estos valores es $f(x) = 2 - 0.5x$. Lo comprobamos:

$$f(0) = 2 - 0.5 \cdot 0 = 2 \qquad f(2) = 2 - 0.5 \cdot 2 = 1 \qquad f(4) = 2 - 0.5 \cdot 4 = 0$$

Otro posible método de resolución es obtener pares de datos de cada fórmula obteniendo la imagen para diversos valores de la variable independiente y comprobar si son compatibles con la función sobre la gráfica.

Posibles errores y/o dificultades: Errores al leer los pares de datos de la gráfica, errores al sustituir en las fórmulas, errores de cálculo, errores al copiar las fórmulas o asociar sin dar una justificación.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

La prueba escrita será evaluada utilizando el conocido como **modelo de tercios** propuesto por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Este modelo se basa en la diferenciación de tres tipos de tareas a la hora de resolver un problema: tareas principales, tareas auxiliares específicas y tareas auxiliares generales.

Las tareas principales son aquellas que constituyen la razón de ser del problema planteado y se podrán penalizar hasta con la totalidad de la puntuación asignada al apartado. Las tareas auxiliares específicas son aquellas tareas secundarias relacionadas con las principales y podrán penalizarse con hasta dos tercios de la puntuación asignada al apartado. Por último, las tareas auxiliares generales son aquellas tareas secundarias no relacionadas directamente con los contenidos específicos a evaluar y podrán penalizarse con hasta un tercio de la puntuación asignada al apartado.

En nuestra prueba de escrita, las tareas principales serán todas aquellas que impliquen la comprensión de los conceptos relacionados con las funciones y las técnicas asociadas a estos. Las tareas auxiliares específicas serán aquellas que intervengan en la resolución pero no sean contenidos fundamentales como, por ejemplo, la graduación de los ejes de coordenadas, la exactitud de las representaciones o la justificación de respuestas. Finalmente, las tareas auxiliares generales serán todos los cálculos aritméticos y algebraicos que se necesiten para obtener las soluciones numéricas.

Como ejemplo para mostrar la aplicación del modelo de tercios para la evaluación de la prueba escrita, procedemos a detallar las diversas tareas encontradas en la resolución de uno de los problemas propuestos, así como su máxima penalización atendiendo a la puntuación otorgada a cada apartado:

Ejemplo: Aplicación del modelo de tercios en el Problema 3

Apartado a)

- No identificar los enunciados y las gráficas como formas diferentes de representar una misma función: hasta -1,5 puntos (Tarea principal).

- Asociar un enunciado con una gráfica que no le corresponde sin ofrecer justificación: hasta -0,5 puntos por función (Tarea principal).

- Asociar correctamente un enunciado con su gráfica sin justificar ni hacer referencia al comportamiento de la función dentro de su contexto: hasta -0,3 puntos por función (Tarea auxiliar específica).

- No especificar o confundir el nombre de las variables independiente y dependiente en los ejes: hasta -0,3 puntos por función (Tarea auxiliar específica).

- No indicar o poner unidades en los ejes que no se corresponden con las magnitudes de las variables representadas: hasta -0,3 puntos por función (Tarea auxiliar específica).

- Errores numéricos o semánticos en las justificaciones derivados de despistes al trascribir la información: hasta -0,17 puntos por función (Tarea auxiliar general).

Apartado b)

- No identificar las fórmulas como una forma de representar las funciones: hasta -1,5 puntos (Tarea principal).

- Asociar una fórmula con una gráfica que no le corresponde sin ofrecer justificación: hasta -0,5 puntos por función (Tarea principal).

- Asociar correctamente una fórmula con su gráfica sin justificar ni aplicar ninguna de las técnicas para pasar de una representación a otra: hasta -0,3 puntos por función (Tarea auxiliar específica).

- Fallos derivados de una aplicación errónea de las técnicas para obtener pares de puntos a partir de la gráfica o en la obtención de pares a partir de la fórmula calculando la imagen: hasta -0,3 puntos por función (Tarea auxiliar específica).

- Errores numéricos al sustituir valores en las expresiones algebraicas y errores de cálculo: hasta -0,17 puntos por función (Tarea auxiliar general).

J. Bibliografía

Akkoç, H. y Tall, D. (2002). The simplicity, complexity and complication of the function concept. In *PME conference* (Vol. 2, pp. 2-025).

Alayo, F. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Shell Centre for Mathematical Education. Madrid: MEC Centro de publicaciones.

Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M. y Pérez, A. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3 ESO. Savia*. Madrid: Grupo SM.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M.J. y Colera Cañas, R. (2015). *ESO 3 Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*. Madrid: Anaya.

De la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A.M., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C. y Sánchez Figueroa, D. (2015). *Matemáticas Enseñanzas académicas 3º ESO*. Serie Resuelve. Madrid: Santillana.

Díaz Gómez, J. (2013). El concepto de Función: Ideas pedagógicas de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, 13-25.

Dubinsky, E. y Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 83-101.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM.

Gallegos Fernández, J. (2022). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. TERCERO B DE ESO DE MATEMÁTICAS. LOMCE.* Apuntes Marea Verde. Recuperado de: https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3Beso.htm

INEE (2015). *Preguntas liberadas del Proyecto PISA.* Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Recuperado de: http://educalab.es/inee/evaluaciones-internacionales/preguntas-liberadas-pisa-piaac/preguntas-pisa-matematicas

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments*. PhD Thesis. Shell Center for Mathematical Education. Montreal: University of Québec.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: *Tasks, learning, and teaching. Review of Educational Research*, 60(1), 1–63.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE-A-2020-17264.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE-A-2013-12886.

Malik. M. A. (1980) Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11:4, 489-492.

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la ESO y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Ortega, T., y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Sierra M., González T., López C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, 10(0), pp. 89-104. Ediciones Universidad de Salamanca.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *The International Journal of Mathematical Education Science And Technology*, 14, 293-305.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, 20(4), 356-366.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function Up to the Middle of the 19th Century, *Arch. Hist. Exact. Sci.* 16.