



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
Una propuesta didáctica para 2º de E.S.O.

Second degree equations with one unknown.
A didactic proposal for 2nd of Secondary
School.

Autora

Irene Nogués Martín

Directora

Alejandra Córdova Martínez

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Año 2022

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	3
A. OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR	4
A1. Definición del objeto matemático a enseñar	4
A2. Curso y asignatura en la que se sitúa el objeto matemático	4
A3. Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que se pretende enseñar	5
B. ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO	8
B1. Introducción escolar del objeto matemático	10
B2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente	12
B3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?	16
C. CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO	19
C1. Conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático	19
C2. Influencia de la enseñanza anterior	19
C3. Actividades para asegurar que los alumnos poseen los conocimientos previos	21
D. RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO	23
D1. Razón de ser a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático	23
D2. Coincidencia con las razones de ser históricas	23
D3. Problemas que constituyen la razón de ser del objeto matemático	25
E. CAMPOS DE PROBLEMAS	27
E1. Distintos tipos de problemas que se van a presentar en el aula	27
E2. Modificaciones de la técnica inicial que va a exigir la resolución de dichos problemas	30
F. TÉCNICAS	31
F1. Distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula	31
F2. Técnicas o modificaciones de la técnica que se ejercitan con ellos	35

F3. Adecuación de las técnicas a los campos de problemas	38
G. TECNOLOGÍAS	39
G1. Razonamientos que justifican las técnicas	39
G2. Responsable de justificar las técnicas y proceso de institucionalización	40
H. METODOLOGÍA A SEGUIR EN LA IMPLEMENTACIÓN DE LA RAZÓN DE SER, LOS CAMPOS DE PROBLEMAS, LAS TÉCNICAS Y LAS TECNOLOGÍAS EN EL AULA	42
I. SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA	44
J. EVALUACIÓN	48
J1. Prueba escrita que evalúe el aprendizaje de los alumnos	48
J2. Conocimientos que se pretenden evaluar con cada una de las preguntas de la prueba	50
J3. Respuesta esperada en cada una de las preguntas	50
J4. Criterios de calificación	53
K. REFERENCIAS	56

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita para 2º de Educación Secundaria Obligatoria.

La selección de este curso ha venido propiciada por ser la primera vez en la que el alumnado trata con este objeto matemático. A la hora de introducirlo, la finalidad buscada será hacer ver a los alumnos que su uso posibilita desafiar una extensa gama de circunstancias, captando así su atención y, por tanto, motivándolos para su aprendizaje. Además, para fomentar la actividad del alumno y su presencia del sentido crítico, se pretende seguir una metodología basada a través de la resolución de problemas a lo largo de toda la propuesta.

En el primer capítulo de la presente memoria, se mencionan varias definiciones de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita y se sitúa el objeto en el curso y asignatura escogidos. A continuación, se enumeran los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se pretenden enseñar, de los cuales se proponen problemas y ejercicios en apartados posteriores. Además, se presenta un estudio de cómo se introduce y se tratan las ecuaciones de segundo orden con una incógnita en una selección de libros de texto y, tras esto, la memoria se centra en los conocimientos previos del alumno sobre el objeto. Asimismo, uno de los apartados se focaliza en su razón de ser y, por último, se presentan una secuenciación didáctica, basada tanto en los conocimientos previos del alumno, como en la razón de ser y problemas planteados durante toda la propuesta, y una sugerencia de prueba escrita para la evaluación.

A. OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

A1. Definición del objeto matemático a enseñar

El objeto matemático a enseñar en esta propuesta didáctica son las ecuaciones de segundo grado con una incógnita en 2º de Educación Secundaria Obligatoria. Una definición del objeto a enseñar es la siguiente:

Una ecuación es de segundo grado si, tras reducirla, cumple estas condiciones:

- Alguno de sus términos es un monomio de segundo grado.
- No contiene términos de grado superior a dos.

(Colera, Gaztelu y Colera, 2021, p.147)

Sin embargo, el estilo de definición más usual tratado en el ámbito escolar es el siguiente:

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una igualdad entre dos expresiones que se puede expresar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a , b y c números reales y $a \neq 0$. (Almodóvar et al., 2016, p.112)

A2. Curso y asignatura en la que se sitúa el objeto matemático

Según el currículo de Educación Secundaria de Aragón, correspondiente a la ORDEN ECD/489/2016, del 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, las ecuaciones de segundo grado con una incógnita se encuentran en el *bloque 2: Números y Álgebra* de la asignatura de Matemáticas en 2º de E.S.O.

Seguidamente, de acuerdo con lo instaurado en tal orden, se especifican los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que figuran en la presente propuesta:

Contenidos:

- Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

Criterios de evaluación:

- **Crit.MA.1.2.** Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
- **Crit.MA.1.6.** Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.
- **Crit.MA.2.7.** Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.

Estándares de aprendizaje:

- **Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
- **Est.MA.1.6.2.** Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
- **Est.MA.1.6.4.** Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
- **Est.MA.2.7.1.** Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.
- **Est.MA.2.7.2.** Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

A3. Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que se pretende enseñar

A continuación, se nombran de forma esquemática los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se van a trabajar en esta propuesta didáctica. Será en apartados posteriores donde se traten con más detalle: estudiaremos su aparición en tres libros de texto y realizaremos una propuesta de ejercicios y problemas asociados a los distintos campos y técnicas.

Campos de problemas:

CP1: Relacionados con el concepto de ecuaciones de segundo grado con una incógnita y con el cambio de sus sistemas de representación.

- **CP1.1:** Reconocer las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- **CP1.2:** Cambiar el sistema de representación de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita (del lenguaje habitual al algebraico y viceversa).

CP2: Relacionados con el concepto y número de soluciones de la ecuación de segundo grado con una incógnita.

- **CP2.1:** Comprobar si un valor dado es solución de una ecuación de segundo grado dada.
- **CP2.2:** Identificar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- **CP2.3:** Hallar una ecuación de segundo grado con una incógnita conociendo las soluciones.

CP3: Relacionados con la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

- **CP3.1:** Resolver ecuaciones de segundo grado incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$.
- **CP3.2:** Resolver ecuaciones de segundo grado incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$.
- **CP3.3:** Resolver ecuaciones de segundo grado completas.

Técnicas:

T1: Reconocer las ecuaciones de segundo grado con una incógnita aplicando la definición.

T2: Sustituir un valor en una ecuación.

T3: Usar el discriminante para identificar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado.

T4: Usar la representación gráfica de la ecuación de segundo grado para identificar el número de soluciones.

T5: Hallar una ecuación de segundo grado con una incógnita conociendo las soluciones.

T6: Simplificar una ecuación.

T7: Despejar la incógnita de una ecuación.

T8: Extraer factor común.

T9: Usar la fórmula general.

T10: Técnica de completar cuadrados.

Tecnologías:

TG1: Definición de ecuación de segundo grado con una incógnita.

TG2: Concepto de solución de una ecuación con una incógnita.

TG3: Concepto de discriminante de una ecuación de segundo grado.

TG4: Concepto de ecuaciones equivalentes.

TG5: Definición de ecuación de segundo grado completa e incompleta.

TG6: Fórmula general.

TG7: Identidades notables.

B. ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

En este capítulo haré un análisis de cómo se introduce y se trabaja nuestro objeto matemático, las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, en el aula. Para ello, nos situaremos en el marco legislativo actual, ECD/489/2016, del 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de Educación Secundaria Obligatoria. En él se encuentran los siguientes contenidos relacionados con nuestro objeto: *ecuaciones de segundo grado con una incógnita (método algebraico)*, *resolución*, *interpretación de las soluciones*, *ecuaciones sin solución y resolución de problemas*. Como se puede observar, el nivel de concreción de los contenidos no es muy preciso, al igual que el de los criterios de evaluación recogidos en el mismo.

Por otro lado, es resaltable la importancia que tienen, en general, los libros de texto en el aula. Esta relevancia ha sido destacada por diversos autores como, por ejemplo, Martínez Santos (1987), Choppin (1992) y Escolano (2009). Este último afirma que el libro de texto no es un mero recurso material que usan tanto docentes como alumnos, sino que es “la representación de todo un modo de concebir y practicar la enseñanza” (p.170). Por otro lado, Rodríguez y Bonafé (2016) sopesan que el libro de texto establece primordialmente el desarrollo del currículo en el aula.

Es por ello que, para hacer un análisis de cómo se introduce y se trabaja nuestro objeto en el aula, realizaremos un estudio de diferentes libros de texto, los cuales serán los siguientes:

- Almodóvar, J.A., Cuadrado, A., Díaz, L., Dorce, C., Gámez, J.C., Marín, S., Pérez, C., Redón, M., Sánchez, D. (2016). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Santillana.
- Carrasco, M., Martín y R., Ocaña, J. (2008). *Matemáticas ESO curso 2*. Zaragoza, España: Luis Vives.
- Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2021). *Matemáticas 2 ESO*. Madrid, España: Anaya.

A lo largo de la propuesta se aludirá a dichas obras como Santillana, Edelvives y Anaya.

Respectivamente el libro de editorial Edelvives fue redactado y utilizado cuando estaba vigente la normativa LOE, a diferencia de los dos restantes que pertenecen a la normativa LOMCE. Cabe mencionar que, según la normativa LOE, las ecuaciones de segundo grado con una incógnita no aparecen en el currículo hasta tercero de la E.S.O. y, sin embargo, nuestro libro de Edelvives sí que las trata.

En primer lugar, destacamos que las unidades de los tres libros siguen una estructura similar:

1. *Página introductoria*. Esta varía dependiendo de la editorial. Nos podemos encontrar: el número de la unidad, algunos contenidos de repaso, un esquema con los apartados que componen la unidad, un cuadro con la historia, utilidades y curiosidades de algún invento y distintos problemas de la vida cotidiana que se resuelven mediante ecuaciones.
2. *Desarrollo*. Compuesto por apartados y subapartados en los que se explica los contenidos de la unidad mediante teoría y ejemplos. Al final de cada apartado hay una serie de ejercicios para que el alumno ponga en práctica lo enseñado.
3. *Ejercicios y problemas propuestos*. Se trata de una lista de ejercicios y problemas para que los alumnos puedan practicar lo aprendido. Estos están clasificados, al igual que los ejercicios y problemas resueltos, según los apartados de la teoría y, además, en algunos libros vienen junto con unos puntos (de 1 a 3) que señalan el nivel de dificultad.
4. *Autoevaluación*. Compuesta por una serie de ejercicios y problemas, entre 5 y 10, para que los alumnos puedan poner a prueba sus conocimientos.

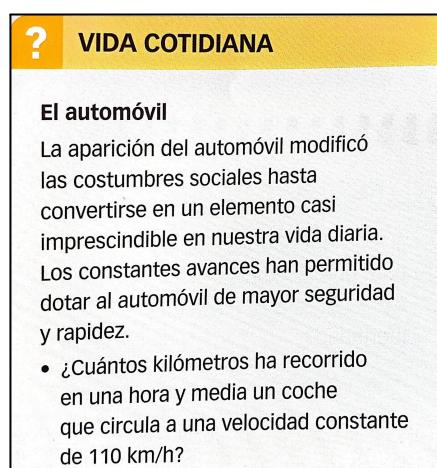
Seguidamente, en los apartados B1 y B2, haremos un estudio más detallado sobre la introducción escolar de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita y sobre qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente.

B1. Introducción escolar del objeto matemático

La introducción escolar de los distintos objetos matemáticos se presenta, en los libros de texto, en la página introductoria o portada de la unidad. Seguidamente, veremos cómo introducen nuestros 3 libros de texto elegidos las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Los tres libros seleccionados tienen en común que nuestro objeto se encuentra en la unidad de ecuaciones y, por tanto, en la portada de la unidad también se hace referencia a las ecuaciones de primer grado. En la unidad de ecuaciones, en primer lugar, se tratan las ecuaciones de primer grado, seguidamente, sin hacer referencia a ninguna razón de ser, se definen las ecuaciones de segundo grado con una incógnita y se muestra cómo resolverlas y, tras esto, se plantean diversos problemas que se resuelven mediante ecuaciones. Además, en los tres casos esta unidad se encuentra tras la de expresiones algebraicas.

Santillana comienza la unidad en torno a la historia, utilidades y curiosidades de los automóviles y plantea un problema relacionado con estos, véase la Figura 1, que se resuelve mediante una ecuación. Asimismo, en la portada nos encontramos dos recuadros más: uno en el que se indica qué se va enseñar-aprender, y otro, titulado “Claves para empezar”, donde se recuerda cómo se calcula el valor numérico de un polinomio y cómo se suman y restan monomios semejantes acompañado de varios ejemplos y ejercicios.



? VIDA COTIDIANA

El automóvil

La aparición del automóvil modificó las costumbres sociales hasta convertirse en un elemento casi imprescindible en nuestra vida diaria. Los constantes avances han permitido dotar al automóvil de mayor seguridad y rapidez.

- ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en una hora y media un coche que circula a una velocidad constante de 110 km/h?

Figura 1. Fragmento de Santillana (Almodóvar et al., 2016, p. 105)

En **Edelvives** encontramos dos recuadros: uno en el que se nombran los apartados que componen la unidad y otro en el que se presentan algunos contenidos de repaso como son la propiedad distributiva de la multiplicación, la regla de los signos, tipos de igualdades y el concepto de raíz cuadrada. Además, plantea distintos problemas de la vida diaria que se resuelven mediante ecuaciones, tal y como se puede observar en la siguiente Figura:




Figura 2. Fragmento de Edelvives (Carrasco, Martín y Ocaña, 2008, p.109)

Por su parte, **Anaya** hace referencia a dos autores que tuvieron importancia en el progreso del Álgebra: Diofanto y Al-Jwarizmi. Asimismo, presenta un recuadro con tres ejercicios en el que se pide resolver las ecuaciones por tanteo y otro recuadro, véase la Figura 3, en el que se relacionan distintos enunciados en lenguaje habitual con sus expresiones algebraicas.

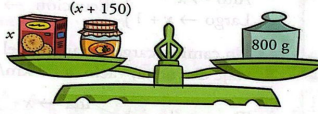
Enunciados y expresiones algebraicas

Observa cada enunciado y su traducción a lenguaje gráfico y simbólico.

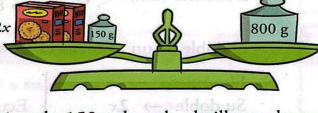
- Un bote de mermelada pesa 150 g más que un paquete de galletas.




- El paquete y el bote pesan 800 g.

 $\rightarrow x + (x + 150) = 800$


- Sustituyendo el bote por otro paquete y 150 g resulta que dos paquetes y 150 g son 800 g.

 $\rightarrow 2x + 150 = 800$

- Quitando 150 g de cada platillo resulta que dos paquetes pesan 650 g.

 $\rightarrow 2x = 650$

- Por tanto, el paquete de galletas pesa 325 g.

 $\rightarrow x = 325$

- Y el bote de mermelada pesa 450 g.

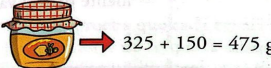
 $\rightarrow 325 + 150 = 475 \text{ g}$

Figura 3. Fragmento de Anaya (Colera, Gaztelu y Colera, 2021, p.133)

B2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente

A continuación, haremos un estudio sobre la aparición, en los libros de texto consultados, de los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías citados en el apartado A3. Para ello, recopilaremos en tablas la aparición de cada uno de ellos en los libros seleccionados (señalaremos con un **Sí** si aparecen y con un **No** en caso contrario).

Campos de problemas:

Tal y como se ha mencionado, seguidamente exponemos la Tabla 1, una tabla en la que se relacionan los campos de problemas considerados con su aparición en los libros de texto seleccionados:

LIBRO / CAMPO	SANTILLANA	EDELVIVES	ANAYA
CP1.1	No	No	Sí
CP1.2	Sí	Sí	Sí
CP2.1	No	No	Sí
CP2.2	Sí	No	No
CP2.3	No	No	No
CP3.1	Sí	Sí	Sí
CP3.2	Sí	Sí	Sí
CP3.3	Sí	Sí	Sí

Tabla 1. Relaciona los campos de problemas considerados con su aparición en los libros de texto seleccionados.

Como se observa, Anaya es el único de los tres libros seleccionados que abarca los campos de problemas CP1.1 y CP2.1, que son los de reconocer las ecuaciones de segundo grado con una incógnita y los de comprobar si un valor dado es solución de una ecuación de segundo grado dada. La aparición de los campos de problemas restantes es la misma en los 3 libros, salvo el campo CP2.2, el de identificar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado, que sólo lo abarca Santillana.

Es resaltable que el campo CP3, el relacionado con la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, es tratado por los 3 libros, mientras que el campo CP2, el relacionado con el concepto y número de soluciones de la ecuación de segundo grado, en general, no se trabaja.

Técnicas:

A continuación, exponemos la Tabla 2, una tabla en la que se relacionan las técnicas consideradas con su aparición en los libros de texto seleccionados:

LIBRO / TÉCNICA	SANTILLANA	EDELVIVES	ANAYA
T1	Sí	Sí	Sí
T2	No*	No*	Sí
T3	Sí	Sí	No
T4	No	Sí	No
T5	No	No	No
T6	No*	No*	No*
T7	No*	No*	No*
T8	No*	No*	No*
T9	Sí	Sí	Sí
T10	No	No	No

Tabla 2. Relaciona las técnicas consideradas con su aparición en los libros de texto seleccionados.

Los **No*** mostrados en la Tabla 2 hacen referencia a que esas técnicas no aparecen en los apartados dedicados a la ecuaciones de segundo grado con una incógnita pero sí aparecen previamente en nuestros libros de texto cuando se tratan las ecuaciones de primer grado o en la unidad de expresiones algebraicas.

Observamos que sólo podemos encontrar en los apartados referidos a las ecuaciones de segundo grado con una incógnita de nuestros tres libros de texto, dos de las diez técnicas mencionadas: la técnica para reconocer las ecuaciones de segundo grado con una incógnita (T1) y la técnica para usar la fórmula general (T9).

Además, Edelvives es el único que presenta la técnica T4, la de usar la representación gráfica de la ecuación de segundo grado para identificar el número de soluciones.

Tecnologías:

Por último en este capítulo, exponemos la Tabla 3, una tabla en la que se relacionan las tecnologías consideradas con su aparición en los libros de texto seleccionados:

LIBRO / TECNOLOGÍA	SANTILLANA	EDELVIVES	ANAYA
TG1	Sí	Sí	Sí
TG2	No*	No*	No*
TG3	Sí	Sí	No
TG4	No*	No*	No*
TG5	Sí	Sí	Sí
TG6	Sí	Sí	Sí
TG7	No*	No*	No*

Tabla 3. Relaciona las tecnologías consideradas con su aparición en los libros de texto seleccionados.

Los **No*** mostrados en la Tabla 3 hacen referencia a que esas tecnologías no aparecen en los apartados dedicados a la ecuaciones de segundo grado con una incógnita pero sí aparecen previamente en nuestros libros de texto cuando se tratan las ecuaciones de primer grado o en la unidad de expresiones algebraicas. En concreto, esas tecnologías son: el concepto de solución de una ecuación con una incógnita (TG2), el concepto de ecuaciones equivalentes (TG4) y las identidades notables (TG7).

Como se observa, la aparición de las tecnologías coincide en los tres libros de texto, salvo la TG3, referida al concepto de discriminante de una ecuación de segundo grado, que no aparece en el libro de editorial Anaya.

Además, es resaltable que en ninguno de los tres libros se justifica la fórmula general, siendo Anaya el único de los tres que hace referencia a esta carencia haciendo el siguiente

comentario: “La justificación de esta fórmula queda para cursos superiores. Por ahora, conviene que la memorices y que aprendas su manejo como se muestra en los siguientes ejemplos” (Colera, Gaztelu y Colera, 2021, p.149).

Por lo que hemos podido observar, tras realizar los análisis de los libros de texto, se puede afirmar que, en general, todas las editoriales comparten una estructura similar. Los libros, en vez de centrarse en que el alumnado consiga un aprendizaje significativo a través de los problemas, se centran en la obtención de ciertas técnicas para su futura automatización, en concreto, en las técnicas para resolver las ecuaciones de segundo grado con una incógnita. No se trata ninguna razón de ser de las ecuaciones de segundo grado, sino que, en general, se limitan a explicar los pasos para su resolución, haciendo que el alumno carezca de sentido crítico y se base en memorizar las técnicas como si fueran recetas.

Los resultados del análisis sobre los libros de texto coinciden en buena medida con los resultados de Guerrero, Carrillo y Contreras (2014), en el que tras hacer un análisis sobre cómo se plasma la resolución de problemas en un libro de texto, centrándose en el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales de 3º de la E.S.O, afirman que existen características que son “poco coherentes con lo especificado en el currículo oficial” (p.403), pues estos promueven una enseñanza basada en la resolución de problemas y, los libros de texto, no coinciden con tal idea, pues gran parte de la unidad está dedicada a “problemas mecánicos que abogan por una matemática repetitiva basada en el cálculo y la memorización” (p.403).

B3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Como afirma Castro (2012), el aprendizaje del álgebra produce grandes dificultades en la mayor parte de los alumnos. Según Arce, Conejo y Muñoz (2019), su introducción conlleva a modificar en la forma de hacer y de pensar de los estudiantes que hasta ahora están ubicados en un modo aritmético.

Sin duda, uno de los mayores problemas que se dan es que, como afirma Barreto (2003):

el álgebra antes de ser vista como una potente herramienta a través de la cual es posible representar y generalizar fenómenos del mundo, se ha constituido en “dolor de

cabezas” para gran cantidad de estudiantes, y a ser vista, cuando mucho, como una aritmética generalizada. (Barreto, 2003, p.14)

Pochulu, Abrate, Gabetta y Sierra (2012), en su estudio sobre los conocimientos que poseen los alumnos sobre ecuaciones algebraicas al entrar a la universidad, destacan que los alumnos no han comprendido bien diversos conceptos como, por ejemplo, los conceptos de ecuación, solución y ecuación equivalente y que, además, no recuerdan las propiedades relacionadas con la resolución de ecuaciones como, por ejemplo, las propiedades de la igualdad y las propiedades: si $a \cdot b = 0$ entonces $a=0$ o $b=0$ (o ambas) y $a \cdot 0 = 0$, con a y b números reales.

En cuanto a errores, Tettay, Pulgar y Rojas (2019) en su estudio sobre los errores que cometen los estudiantes de secundaria a la hora de resolver los problemas con ecuaciones de primer grado, concluyen con que los más frecuentes son:

- 1) Errores de álgebra. Estos son los debidos a las características propias del lenguaje algebraico, siendo el más común el paso del lenguaje habitual al lenguaje algebraico. Además, debido a la falta de comprensión de los conceptos, los alumnos, a la hora de resolver problemas, tienen problemas al aplicar propiedades y reglas.
- 2) Errores que tienen origen en la aritmética. Estos demuestran que existen errores desde cursos previos, donde los alumnos “vienen recibiendo una formación que pasa por alto los errores o el conocimiento no adquirido” (p.204); lo que da lugar a que cuando el alumno afronta nuevos conocimientos lleve consigo esos errores que dan lugar a otros nuevos.
- 3) Errores de procedimiento. Los estudiantes conocen las propiedades pero se equivocan al aplicar las reglas de procedimiento.

En lo referido a las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, pude ver en el practicum las dificultades y los errores que presentaron los alumnos de dos grupos de segundo de ESO, siendo algunos de los errores coincidentes con los mencionados anteriormente de los destacados de los estudios de Pochulu et al. (2012) y de Tettay et al. (2019). Las dificultades y los errores que presentaron fueron los siguientes:

- La gran mayoría se confundía a la hora de identificar los coeficientes de las ecuaciones de segundo grado. Muchos no cogían el signo menos si el coeficiente era negativo: por ejemplo, en la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ tomaban $b=4$ en vez de $b=-4$. Además, si la ecuación estaba desordenada como, por ejemplo, $3x + 2x^2 - 5 = 0$, ponían $a=3$ y $b=2$ en vez de $a=2$ y $b=3$.
- A la hora de resolver las ecuaciones incompletas de la forma $x^2 + c = 0$, se les olvidaba poner el \pm al despejar la x .
- No se acordaban de que el producto de dos factores iguales a cero implica que al menos uno de ellos es cero.
- Se les olvidaba la expresión de la fórmula general.

Además, también presentaban errores en los conocimientos previos como son:

- Se equivocaban operando, sobre todo, aplicaban mal la regla de los signos. Otro fallo común de cálculo se daba al multiplicar algún número por 0 pues hacían, por ejemplo, $4 \cdot 0 = 4$.
- En cuanto a las raíces cabe destacar dos situaciones:
 1. Hacían las raíces negativas. Por ejemplo, decían que $\sqrt{-4} = -\sqrt{4} = -2$.
 2. Si la raíz no daba exacta decían que no existía.

Por tanto, a la hora de realizar esta propuesta didáctica tendré en cuenta las dificultades y errores que vi en el practicum con la intención de solventar dichos problemas.

C. CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

En este capítulo, se verán, en primer lugar, cuáles son los conocimientos anteriores que considero que necesita el alumnado para abordar las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, tras esto, se presentarán los contenidos previos relacionados con nuestro objeto que aparecen en el currículo y, por último, se mostrará una propuesta de prueba inicial.

C1. Conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático

Para que el alumnado pueda afrontar el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita necesita unos conocimientos previos relacionados principalmente con el bloque de Números y Álgebra, como son: el saber calcular raíces cuadradas, saber trabajar con las identidades notables, saber extraer factor común, saber identificar el grado de una ecuación, conocer el concepto de solución de una ecuación con una incógnita, conocer el concepto de ecuaciones equivalentes, saber resolver ecuaciones que están factorizadas, saber transponer los términos de una ecuación, saber quitar los denominadores de las ecuaciones y saber cambiar de sistemas de representación de las ecuaciones de primer grado (del lenguaje habitual al algebraico y viceversa).

Además, para resolver algunos problemas que se les propondrán, necesitarán conocer algunos contenidos del bloque de Geometría, como son el área y perímetro de cuadriláteros y triángulos y el teorema de Pitágoras.

C2. Influencia de la enseñanza anterior

Veamos, a continuación, qué contenidos previos se consideran necesarios, según la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, para que el alumnado pueda afrontar el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

En 1º de E.S.O. debieron adquirir los siguientes conocimientos:

BLOQUE 2: Números y Álgebra:

- Iniciación al lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.

- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de la solución. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

BLOQUE 3: Geometría:

- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Aplicaciones directas.

Asimismo, en 2º de E.S.O., se han debido tratar, además de algunos ya vistos en 1º de E.S.O., los siguientes contenidos del *bloque 2: Números y álgebra*:

- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico).
- Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

Por tanto, se puede afirmar que, por lo presentado en el currículo, los alumnos antes de familiarizarse con las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, contenido que aparece por primera vez en su vida académica, habrán adquirido los conocimientos que considero necesarios relacionados con los números, polinomios y ecuaciones de primer grado y, por tanto, deben tener la suficiente destreza para poder entender el nuevo objeto matemático.

C3. Actividades para asegurar que los alumnos poseen los conocimientos previos

Tal y como se ha comentado en el apartado anterior, según el currículo, los alumnos han adquirido los conocimientos previos necesarios, sin embargo, debemos ser conscientes de que el currículo no manifiesta la pura realidad, pues puede haber alumnos que no hayan tratado dichos contenidos o que no hayan llegado a adquirirlos por ser un obstáculo para ellos. Es por ello por lo que antes de introducir las ecuaciones de segundo grado con una incógnita haremos una prueba de evaluación, para ser así conscientes del nivel que tienen los alumnos y de dónde se concentran más sus posibles errores. En el caso de que los resultados obtenidos no sean buenos, modificaremos la temporalización de la unidad y dedicaremos varias sesiones (las que consideremos necesarias según las calificaciones) como repaso previo centrándonos en los contenidos que sopesemos necesarios.

A continuación, se muestra una propuesta de la prueba inicial, la cual durará 50 minutos:

EVALUACIÓN INICIAL

Nombre y Apellidos: _____

1. Calcula, en el caso de que exista, la raíz cuadrada de los siguientes números:

- a) 25 b) 49 c) -6 d) $\frac{81}{36}$

2. a) Desarrolla:

I) $(2 + 3x)^2$

II) $(3 - 5x)^2$

III) $(\frac{1}{2}x^2 - 7)^2$

IV) $(x - 2)(x + 2)$

b) Expresa, si es posible, como el cuadrado de una suma o de una diferencia o como suma por diferencia:

I) $4x^4 - 12x^2 + 9$

II) $x^2 + 4x + 4$

III) $16x^2 + 40x + 25$

IV) $\frac{49}{25} - 9x^2$

3. Sacar factor común.

a) $5x^2 - 3x + x^3 - x^4$

b) $2xy^2 + 7x^2y + x^3 - xy^4$

c) $20x^4 + 50x^3 + 15x^2 - 35x$

4. ¿Verdadero o falso?

a) La ecuación $x^2 - 5x - x^2 = 3x + 2$ es de segundo grado.

b) La ecuación $3x + xy = 7$ es de segundo grado.

c) $x = -4$ es solución de la ecuación $2x + 3 = -5$.

d) $x = 0$ es solución de la ecuación $5x - 1 = 3$.

e) Todas las ecuaciones de primer grado son equivalentes.

f) La ecuación $x + 3 = 4$ es equivalente a la ecuación $x + 5 = -2$.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

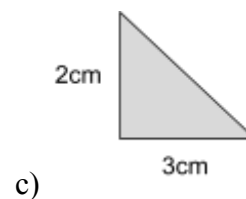
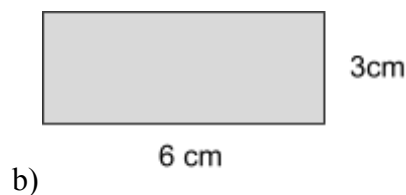
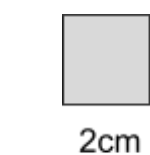
a) $\frac{4x}{3} + 6 = x$

b) $\frac{x}{4} + x = \frac{x-3}{2} + 6$

6. a) Escribe un enunciado coherente para la ecuación $x + 4 = 7$.

b) María tiene 20 años menos que su madre, Laura, y 21 años más que su hija Rocío. Entre las tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada una?

7. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:



D. RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

D1. Razón de ser a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático

En el ámbito escolar justificaremos la introducción de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita mediante la solución e interpretación de problemas de la vida diaria, en concreto, de problemas en los que hay que averiguar dimensiones, números o edades. La finalidad buscada a la hora de introducir el objeto es hacer ver a los alumnos que su uso posibilita desafiar una extensa gama de circunstancias, captando así su atención y, por tanto, motivándolos para su aprendizaje.

D2. Coincidencia con las razones de ser históricas

En este apartado, veremos que las razones de ser históricas de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita coinciden con la idea de justificar la introducción de este objeto en el ámbito escolar mediante la resolución de problemas de la vida diaria. Para ello, haremos un recorrido a lo largo de varias culturas que participaron en el progreso del Álgebra.

Hacia el año 2000 a.C. los babilonios colaboraron en la aparición del Álgebra hasta el punto que, tal y como afirma Guerra (2012), “sus aportaciones son consideradas de los avances más notables en la historia de las matemáticas” (p.4). Llegaron a resolver ecuaciones de segundo grado del tipo:

$$x^2 + bx = c$$

$$x^2 = bx + c$$

$$x^2 + c = bx$$

con b y c positivos.

Un ejemplo de problema que da origen a una ecuación de segundo grado, el cual podemos encontrar en una de las tablillas babilónicas, es el siguiente: “He sumado el cuadrado y mi lado obteniendo $3/4$ ” (Sessa, 2005, p.21-25, como se citó en Dalcín y Olave, 2007).

En la actualidad, según nuestro lenguaje algebraico, se podría plantear en la forma: $x^2 + x = \frac{3}{4}$, siendo $\frac{-1+\sqrt{4}}{2}$ su solución positiva. Este problema, al igual que el resto, se encuentra en la tablilla junto con los pasos a realizar para su resolución que son los siguientes:

Pondrás 1, la unidad. Fraccionarás la mitad de 1 (:1/2). Multiplicarás 1/2 por 1/2 (:1/4). Agregarás 1/4 a 5/4 (:1). 1 es (su) raíz cuadrada. Restarás el 1/2 que has multiplicado de 1 (:1/2). 1/2 es el lado del cuadrado. (Sessa, 2005, p.21-25, como se citó en Dalcín y Olave, 2007)

Por otra parte, en Egipto se desarrollaron una serie de escritos que contienen problemas matemáticos resueltos. La gran mayoría de los problemas son aritméticos y daban respuesta a situaciones de la vida cotidiana, sin embargo, hay algunos de tipo algebraico, pues no hace referencia a ningún elemento determinado (Salazar y Fuentes, 2015).

Uno de los escritos es el papiro de Berlín, en el que se encuentra el siguiente problema que da lugar a una ecuación de segundo grado: “Una superficie, de 100 unidades cuadradas, puede ser representada como suma de dos cuadrados, cuyos lados están en la relación 1:3/4. Determinar los lados de dichos cuadrados.” (Martel, 1999, p.36), que en lenguaje algebraico actual podría plantearse como:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

Por otro lado, durante los siglos III y IV a.C., en China se avanzó bastante en el área del Álgebra. Los avances primordiales figuran en el tratado *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático*, donde, en el capítulo 9, tal y como presenta Martel (1999), podemos encontrar un problema que trata sobre el cálculo de las dimensiones de una puerta conocida la diagonal y la diferencia entre el largo y el ancho, el cual se podría plantear actualmente de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 = d^2$$

$$y - x = k$$

Pasaron unos 1500 años hasta que un griego, Diofanto de Alejandría, dio con la fórmula que resuelve casi todas las ecuaciones de segundo grado.

También es destacable Abraham bar Hiyya Na-Nasi con su obra *Hibbur ha-Meshihah ve-ha-Tishboret* (Libro sobre la medida y el cálculo) en la que estudia, tal y como afirma

Martel (2002), además de un conjunto de fórmulas útiles para el cálculo de áreas de terrenos y solares (y de otras tantas para volúmenes de cuerpos geométricos), los distintos casos de resolución de la ecuación de segundo grado, tanto numérica como gráficamente. Un ejemplo que podemos encontrar en esta obra es el siguiente: “La diferencia entre el área de un cuadrado y la suma de sus cuatro lados es 21 codos, ¿cuál es su área y la longitud del lado?”, que, en notación actual, podría plantearse como: $x^2 - 4x = 21$.

D3. Problemas que constituyen la razón de ser del objeto matemático

A continuación, se presentan una serie de problemas que constituyen la razón de ser de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita clasificados según su contexto.

Problemas en los que hay que averiguar dimensiones:

- ★ La superficie de un tatami para practicar kárate es de $28 m^2$. Si el largo es el triple del ancho más 4 metros, ¿qué dimensiones tiene el tatami?
- ★ ¿Cuánto miden los lados de un triángulo rectángulo si se sabe que tienen por medida tres números enteros consecutivos?
- ★ Se quiere vallar una zona rectangular que tiene $264 m^2$ de superficie. Sabiendo que la diferencia entre sus dimensiones es de 10 m, ¿cuántos metros de valla hace falta?

Problemas en los que hay que averiguar números:

- ★ Calcular el número entero o números enteros tal que el producto de su anterior por su siguiente supera a su doble en 7 unidades.
- ★ La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 5. ¿De qué números se trata?
- ★ ¿Qué número positivo verifica que la diferencia entre el cuádruple de su cuadrado y el triple de dicho número es 370?

Problemas en los que hay que averiguar edades:

- ★ Dentro de 60 años la edad de Bárbara será la quinta parte del cuadrado de su edad actual. ¿Cuántos años tiene actualmente Bárbara?
- ★ ¿Cuántos años tiene Sergio si se sabe que si al cuadrado de su edad se le suma la mitad resulta siete veces esta?

★ Si multiplico mi edad por la de mi prima, a la que le saco 10 años, obtengo el doble de la edad de mi padre, que me tuvo a los 31. ¿Cuántos años tengo?

E. CAMPOS DE PROBLEMAS

E1. Distintos tipos de problemas que se van a presentar en el aula

En este apartado se plantean una serie de problemas asociados a los campos de problemas citados en el apartado A3.

CP1: Relacionados con el concepto de ecuaciones de segundo grado con una incógnita y con el cambio de sus sistemas de representación.

- **CP1.1:** *Reconocer las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.*
 - **Problema 1.1:** Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado e identifica sus coeficientes:
 - a) $x^2 = 6$
 - b) $3x^2 + 2x = x^2 - 5$
 - c) $4x(x + 3) = 6$
 - d) $5x^2 - 2 - 5x^2 = 4x$
 - e) $6x + 4x^2 - 5 = 2x^3 + 1$
 - f) $4x^3 + 7x^2 - 5x + 2 = 4x^3 - 3$

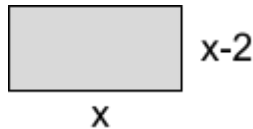
- **CP1.2:** *Cambiar el sistema de representación de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita (del lenguaje habitual al algebraico y viceversa).*
 - **Problema 1.2.1:** Escribe un enunciado para la ecuación $x^2 + x = 43$.
 - **Problema 1.2.2:** Escribe una ecuación que exprese las siguientes condiciones:
 - a) Un número multiplicado por su siguiente da 56.
 - b) Si se multiplica un número disminuido en dos unidades por el mismo número aumentado en otras dos, se obtiene 60.
 - c) Si multiplico la edad de mi hermano por la mía, al que le saco 3 años, obtengo diez veces la edad de mi padre, que me tuvo a los 30.
 - d) Hace 6 años el cuadrado de la edad de Francisco era 225.
 - e) El área de un rectángulo cuyo largo es 7 cm mayor que su ancho es 260 cm^2 .

CP2: Relacionados con el concepto y número de soluciones de la ecuación de segundo grado con una incógnita.

- **CP2.1:** *Comprobar si un valor dado es solución de una ecuación de segundo grado dada.*

➤ **Problema 2.1.1:** Escribe, en primer lugar, una ecuación que exprese la siguiente condición: se sabe que la diferencia entre el cuadrado de un número y el triple de dicho número es 10. A continuación, responde las siguientes preguntas: ¿podría ser 4 tal número? ¿y 5? Justifica tus respuestas.

➤ **Problema 2.1.2:** Escribe, en primer lugar, una ecuación que exprese la siguiente condición: el área del rectángulo dado es 15 cm^2 . ¿Es cierto que el largo del rectángulo mide 3 cm? Justifica tu respuesta.



- **CP2.2:** *Identificar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.*

➤ **Problema 2.2:** Determina cuántas soluciones tienen las ecuaciones que expresan las siguientes condiciones:

- a) Un número multiplicado por su siguiente da 30.
- b) El resultado de sumar el doble de un número y el cuadrado de dicho número es -1
- c) El cuadrado de la diferencia entre un número y 8 unidades es 25.

- **CP2.3:** *Hallar una ecuación de segundo grado con una incógnita conociendo las soluciones.*

➤ **Problema 2.3:** Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado con una incógnita cuyas soluciones sean:

- | | |
|------------------------|--|
| a) $x_1 = 3, x_2 = 5$ | c) $x_1 = \frac{5}{6}, x_2 = 4$ |
| b) $x_1 = 2, x_2 = -1$ | d) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{7}$ |

CP3: Relacionados con la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

- **CP3.1:** Resolver ecuaciones de segundo grado incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$.

➤ **Problema 3.1.1:** Resuelve las siguientes ecuaciones:

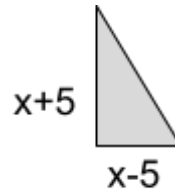
a) $3x^2 = 0$

c) $-2x^2 = 5$

b) $x^2 - 9 = 7$

d) $3x^2 - \frac{1}{4} = 0$

➤ **Problema 3.1.2:** Si se sabe que el área del triángulo dado es 12 cm^2 , ¿qué dimensiones tienen su base y su altura?



- **CP3.2:** Resolver ecuaciones de segundo grado incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$.

➤ **Problema 3.2.1:** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 + 5x = 0$

c) $-4x^2 = x$

b) $-2x^2 - 3x = 0$

d) $x^2 - 2x = 0$

➤ **Problema 3.2.2:** ¿Qué número verifica que la mitad de su cuadrado es igual a su cuádruple?

- **CP3.3:** Resolver ecuaciones de segundo grado completas.

➤ **Problema 3.3.1:** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$

f) $x(2x + 1) = 5$

b) $-8x^2 - 12x + 4 = 0$

g) $(x - 2)(x - 4) = 3$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

h) $(x + 3)(x - 3) = 4(x - 2) + 1$

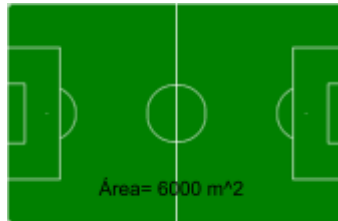
d) $-5x^2 + 4x = -1$

i) $\frac{2x}{3} = 4 + \frac{x^2+3}{6}$

$$e) (3x - 1)^2 = 0$$

$$j) \frac{x^2+3x-1}{2} = \frac{x^2-2x+4}{3}$$

- **Problema 3.3.2:** El área de un campo de fútbol es de 6000 m^2 . Si sabemos que la diferencia entre el largo y el ancho es de 70 m, ¿qué dimensiones tiene?



E2. Modificaciones de la técnica inicial que va a exigir la resolución de dichos problemas

Las variaciones en la técnica inicial se dan al poder obtener dos soluciones de las ecuaciones, pues los alumnos solamente habían trabajado previamente con ecuaciones de primer grado que, a lo sumo, sólo tienen una solución.

Otra modificación es la introducción de una fórmula, la fórmula general, para resolver ecuaciones, pues en las ecuaciones de primer grado no tuvieron que tratar con ninguna fórmula para su resolución.

F. TÉCNICAS

F1. Distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula

A continuación, se plantea una colección de ejercicios asociados a las técnicas nombradas en el apartado A3.

- **T1:** *Reconocer las ecuaciones de segundo grado con una incógnita aplicando la definición.*

Unas de las dificultades que plantea el alumnado ante nuestro objeto matemático es el saber identificar correctamente los coeficientes cuando la ecuación no está ordenada: por ejemplo, en la ecuación $2x + 3x^2 - 1 = 0$ tienden a escribir $a=2$ y $b=3$, y, además, olvidan coger el signo menos cuando los coeficientes son negativos. Para prevenir estos errores a la hora de trabajar esta técnica se plantea el siguiente ejercicio:

➤ Se usará el **problema 1.1** para trabajar esta técnica.

- **T2:** *Sustituir un valor en una ecuación.*
 - **Ejercicio 2:** Considera la ecuación $3x^2 - x - 2 = 0$. ¿Es $x = 2$ solución de la ecuación? ¿y $x = 1$? Justifica tu respuesta.

- **T3:** *Usar el discriminante para identificar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado.*

➤ **Ejercicio 3:** Halla el discriminante de estas ecuaciones y determina cuántas soluciones tienen:

a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

b) $-4x^2 + 2x - 6 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $-3x^2 + 5x - 1 = 0$

- **T4:** *Usar la representación gráfica de la ecuación de segundo grado para identificar el número de soluciones.*

En esta propuesta no se les enseñará a los alumnos cómo representar las ecuaciones de segundo grado (manualmente) pues es un contenido correspondiente al tercer curso de la E.S.O, sin embargo, sí que se les explicará cómo es su representación gráfica y cómo interpretar sus soluciones a través de esta. Se les enseñará a representar las ecuaciones de segundo grado con una incógnita con GeoGebra: para ello tan solo tendrán que escribir en “entrada” (situado en la parte inferior de la pantalla, véase la Figura 4) la ecuación que deseen representar y darle a “enter”.

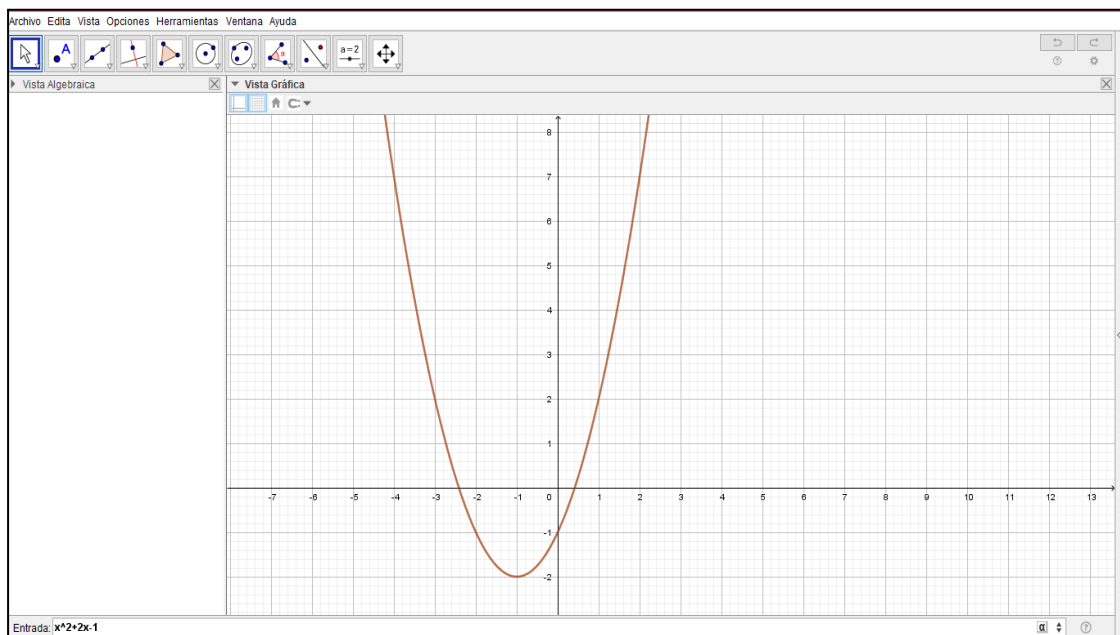
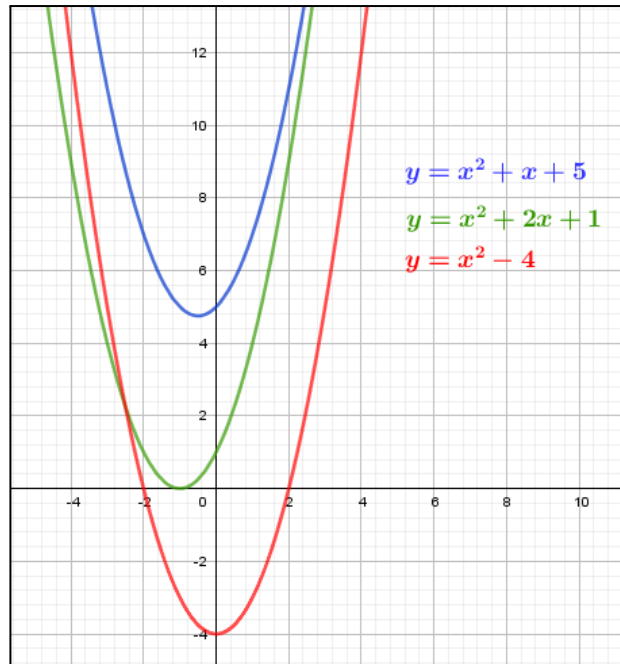


Figura 4. Captura de pantalla del programa GeoGebra.

Por tanto, para trabajar esta técnica se plantean los dos siguientes ejercicios:

- **Ejercicio 4.1:** Observa las distintas representaciones gráficas e indica el número de soluciones de cada ecuación:



➤ **Ejercicio 4.2:** Representa con GeoGebra las siguientes ecuaciones e indica su número de soluciones:

a) $x^2 + x - 1 = 0$

d) $3x^2 + 1 = 0$

b) $2x^2 + x + 3 = 0$

e) $5x^2 + 3x = 0$

c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

f) $6x^2 = 0$

● **T5:** Hallar una ecuación de segundo grado con una incógnita conociendo las soluciones.

➤ Se usará el **problema 2.3** para trabajar esta técnica.

● **T6:** Simplificar una ecuación.

➤ **Ejercicio 6.1:** Empareja cada ecuación de segundo grado con su correspondiente simplificada:

a) $2x^2 + 4x - 8 = 0$

I) $5x^2 + 10x - 5 = 0$

b) $9x^2 - 3x + 6 = 0$

II) $x^2 + 2x - 4 = 0$

c) $\frac{x^2}{5} + 2x - 1 = 0$

III) $3x^2 - x + 2 = 0$

➤ **Ejercicio 6.2:** Simplifica las siguientes ecuaciones:

a) $8x^2 - 16x = -64$

b) $\frac{x^2}{2} + 3 - 5x = 2x$

c) $25x^2 - 30x + 15 = -5 + 20$

d) $14 + 28x - 7 = 42x^2$

● **T7:** Despejar la incógnita de una ecuación.

➤ **Ejercicio 7:** Despeja la incógnita en cada ecuación:

a) $x - 3 = 9$

d) $\frac{x^2}{3} = 3$

b) $-4x = 8$

e) $5x^2 = 15$

c) $2x + 5 = 2$

f) $3 - 2x^2 = -5$

● **T8:** Extraer factor común.

➤ **Ejercicio 8:** Extrae factor común, cuando sea posible, en los siguientes casos:

a) $8x^2 + 3x = 0$

e) $ab + a^2b + ac^2b = c$

b) $-2y + 3x = 5$

f) $\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

c) $5x^2 + 15x = 0$

g) $\frac{3x^2}{5} + \frac{x}{15} = 8$

d) $3x^3 - 4x^2 + 1 = 0$

h) $-xy - x^2y^2 - 3x^2y - 4xy^2 = 9$

● **T9:** Usar la fórmula general.

Tras haber explicado y puesto en práctica en el aula las técnicas necesarias para resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas, se les explicará a los alumnos cómo usar la fórmula general. Se les hará ver que sirve para resolver cualquier ecuación de segundo grado con una incógnita, tanto completas como incompletas, aunque para resolver las ecuaciones incompletas será más eficiente aplicar las técnicas previamente enseñadas.

➤ **Ejercicio 9:** Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con la fórmula general:

a) $x^2 - 3x + 5 = 0$

d) $6x - 2x^2 - 4 = 0$

b) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$

e) $5x^2 - 15x = 20$

c) $5x - 2x^2 + 1 = 0$

f) $-x^2 - 4x = 5$

- **T10:** *Técnica de completar cuadrados.*

Tal y como se pudo observar en el análisis de los libros de textos, esta técnica no se explica ni se usa en ninguno de los 3 libros seleccionados. Sin embargo, se trabajará en esta propuesta didáctica para que los alumnos tengan más herramientas para poder resolver las ecuaciones de segundo grado.

➤ **Ejercicio 10:** Resuelve las ecuaciones del ejercicio 9 completando cuadrados.

F2. Técnicas o modificaciones de la técnica que se ejercitan con ellos

Seguidamente, se van a explicar de manera resumida las técnicas que se ejercitan con los problemas y ejercicios propuestos en los apartados E1 y F1, respectivamente, los cuales están asociados a los campos de problemas y a las técnicas nombrados en esta propuesta didáctica.

- **T1:** *Reconocer las ecuaciones de segundo grado con una incógnita aplicando la definición:*

Una ecuación es de segundo grado con una incógnita si se puede expresar en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a , b y c números reales y $a \neq 0$.

- **T2:** *Sustituir un valor en una ecuación:*

Para comprobar si un valor dado es solución de cierta ecuación, basta con sustituir dicho valor en la incógnita de la ecuación y ver si se verifica la ecuación.

- **T3:** Usar el discriminante para identificar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado:

Sabiendo que el discriminante de una ecuación de segundo grado con una incógnita es el número $\Delta = b^2 - 4ac$, entonces:

- a) Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones o raíces reales distintas.
- b) Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real y se dice que es doble.
- c) Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

- **T4:** Usar la representación gráfica de la ecuación de segundo grado para identificar su número de soluciones:

La interpretación gráfica de la solución de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es el punto de corte de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con el eje X.

- **T5:** Hallar una ecuación conociendo las soluciones:

Para hallar una ecuación de segundo grado conociendo las raíces o soluciones x_1 y x_2 , basta multiplicar los binomios: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. (Arias y Maza, 2021, p.119)

- **T6:** Simplificar una ecuación:

Para simplificar una ecuación hay que multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.

- **T7:** *Despejar la incógnita de una ecuación:*

Para despejar la incógnita de una ecuación hay que pasar el número que multiplica a la incógnita al otro miembro dividiendo.

- **T8:** *Extraer factor común:*

Si en todos los términos de un polinomio se repite un monomio, puede extraerse como factor común dicho monomio, aplicando la propiedad distributiva.

- **T9:** *Usar la fórmula general:*

$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- **T10:** *Técnica de completar cuadrados:*

Para resolver una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ completando cuadrados, basta con seguir los siguientes pasos:

- 1) Transformamos la ecuación de tal forma que en el miembro de la derecha solo esté el término c .
- 2) Si a no es igual a 1, dividimos ambos miembros de la ecuación entre a .
- 3) Sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente del término x , esto es $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, en los dos miembros de la ecuación.
- 4) Factorizamos el miembro de la izquierda como el cuadrado de un binomio.
- 5) Realizamos la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.
- 6) Despejamos x para hallar la solución o soluciones.

F3. Adecuación de las técnicas a los campos de problemas

Tal y como se ha podido observar, los campos de problemas planteados en la presente propuesta están fuertemente vinculados con las técnicas mencionadas en el apartado anterior, pues todos ellos se pueden resolver aplicando cierta o ciertas de estas técnicas.

G. TECNOLOGÍAS

G1. Razonamientos que justifican las técnicas

A continuación, se exponen las tecnologías que sustentan las técnicas nombradas anteriormente.

- **TG1:** *Definición de ecuación de segundo grado:*

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una igualdad entre dos expresiones que se puede expresar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a , b y c números reales y $a \neq 0$. (Almodóvar et al., 2016, p.112)

- **TG2:** *Concepto de solución de una ecuación con una incógnita:*

Las soluciones de una ecuación con una incógnita son los valores de la incógnita que verifican la ecuación.

- **TG3:** *Concepto de discriminante de una ecuación de segundo grado:*

Se llama discriminante de una ecuación de segundo grado al número $\Delta = b^2 - 4ac$, siendo a el coeficiente del término de segundo grado, b el coeficiente del término de primer grado y c el término independiente.

- **TG4:** *Concepto de ecuaciones equivalentes:*

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

- **TG5:** *Definición de ecuación de segundo grado completa e incompleta:*

Una ecuación de segundo grado es completa si tiene los tres términos: el de segundo grado, el de primer grado y el término independiente, y es incompleta si le falta el término de primer grado, el término independiente o ambos.

- **TG6:** *Fórmula general:*

$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- **TG7:** *Identidades notables:*

- El cuadrado de una suma: El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble del primero por el segundo:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

- El cuadrado de una diferencia: El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, menos el doble del primero por el segundo:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

- Suma por diferencia: Una suma por diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

G2. Responsable de justificar las técnicas y proceso de institucionalización

En general los alumnos suelen aplicar las técnicas sin pararse a pensar sobre qué es lo que realmente hacen o sin reflexionar sobre el motivo por el que tienen que usar cierta técnica y no otra. Es por ello por lo que es tan importante la justificación de las técnicas, pues así los alumnos entenderán el proceso a realizar y no lo harán de memoria.

Sería perfecto que la justificación de las técnicas surgiera con el transcurso del uso de estas, sin embargo, hay ciertas tecnologías que el profesor tendrá que introducir como son, por ejemplo, la definición de ecuaciones equivalentes o la fórmula general. Luego, el responsable de justificar las técnicas será a veces el docente y en otras ocasiones el alumnado.

Lo deseable es que la aparición de la técnica T1, la de reconocer las ecuaciones de segundo grado, sea de manera natural y por hallazgo al proponer los problemas considerados que constituyen la razón de ser. El resto de técnicas se les irá presentando conforme sean necesarias, siendo institucionalizadas por el docente, usando las tecnologías para su justificación. Como se comentó en apartados previos, la gran mayoría de las técnicas con las que trabajarán ya las habrán visto anteriormente, pues son contenidos de unidades previas e incluso algunas las habrán trabajado en primero de la E.S.O., como, por ejemplo la técnica T7, la de despejar la incógnita de una ecuación.

Cabe destacar que no se les enseñará a los alumnos la justificación de la fórmula general, pues su comprensión puede ser complicada para nuestros alumnos de segundo de E.S.O ya que requiere un nivel mayor de abstracción.

H. METODOLOGÍA A SEGUIR EN LA IMPLEMENTACIÓN DE LA RAZÓN DE SER, LOS CAMPOS DE PROBLEMAS, LAS TÉCNICAS Y LAS TECNOLOGÍAS EN EL AULA

A lo largo de toda nuestra propuesta, se pretende seguir una metodología basada en el aprendizaje a través de la resolución de problemas, mediante el que se institucionalizará el objeto matemático y se aprenderán las técnicas y tecnologías ligadas al mismo.

El propio informe PISA (OCDE, 2006) destaca la relevancia de la resolución de problemas al definir el concepto de competencia matemática como la capacidad del alumnado para estudiar, reflexionar y transmitir de manera hábil sus ideas al proponer, expresar, resolver e interpretar las soluciones a problemas matemáticos en diversos contextos.

Según Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste (2021), la enseñanza a través de la resolución de problemas se centra en que el alumnado adquiera el conocimiento matemático enfrentándose a situaciones problemáticas, propuestas por el docente, sin haber obtenido previamente instrucciones sobre el contenido que se pretende enseñar, con la finalidad de hacer aparecer dicho contenido. Estos problemas deben elegirse de tal forma que fomenten la reflexión e investigación de estrategias para su resolución. Además, Benítez y Benítez (2014) afirman que lo más importante de este tipo de enseñanza es que los problemas sean orientados y contextualizados.

La idea primordial de esta propuesta es fomentar la presencia del sentido crítico del alumnado, buscando que logren reflexionar por sí solos, tanto sobre los conocimientos previos como sobre los nuevos, para que creen así su propio saber matemático y, por tanto, puedan realizar conclusiones personales. Para ello, es necesario evitar las clases magistrales, es decir, aquellas clases en las que el profesor es el protagonista y el alumno un mero espectador.

En el aula se intercalarán con los problemas los ejercicios planteados en el apartado F1 y las técnicas asociadas a ellos. En general, en primer lugar, se introducirá un concepto a través de algún problema de los presentados en la razón de ser, con la finalidad de que los alumnos comiencen a crear sus propias estrategias de resolución.

A continuación, se expondrá una técnica asociada con el problema y ejercicios para ponerla en práctica. Dichos ejercicios los resolverán los alumnos en grupos de tres o cuatro,

organizados por el docente de tal forma que sean heterogéneos, con el objetivo de que el alumnado razone por sí mismo y se ayuden entre ellos, creando así su propio conocimiento. De esta manera, los alumnos también serán conscientes de que no solo hay una única forma de resolver los problemas. Mientras tanto, el docente irá pasando por las mesas para atender cómo se enfrentan a ellos, darles las indicaciones necesarias para que puedan abordarlos y ayudarles con las dudas que vayan surgiendo. Además, el docente deberá intentar prever las estrategias, tanto correctas como incorrectas, que pueda utilizar el alumnado para afrontar las distintas tareas.

Tras este trabajo grupal, en la pizarra se institucionalizarán los contenidos tratados en los problemas, bien por el profesor o bien por cierto o ciertos alumnos. Los alumnos que salgan a la pizarra serán seleccionados según nos interese, por ejemplo, si alguno de ellos ha tenido una idea diferente al resto es interesante que presente su resolución para que así sus compañeros vean otra forma de abordar el problema, o si alguno ha cometido los errores más comunes es buena idea que también salga para que así todos sean conscientes de que no son los únicos que cometen esos fallos y, además, así verán cómo corregirlos.

No solo hay que tener en cuenta qué alumnos seleccionamos sino que también hay que tener en cuenta en qué orden es conveniente que presenten su tarea. Por ejemplo, se podría empezar con el alumno que haya usado la estrategia más elemental, siguiéndole, en orden ascendente, compañeros cuyas estrategias presenten un mayor nivel de abstracción. Otra opción podría ser que comenzara algún alumno que haya usado la estrategia que haya empleado la mayoría y, tras consolidar los conocimientos, le seguirán los alumnos que lo hayan resuelto de manera diferente, con la finalidad de que los alumnos vean que hay varias maneras de resolución, dando esto pie a un debate.

Finalmente, se propondrán problemas de consolidación que supongan un mayor nivel de abstracción para afianzar la comprensión del objeto tratado.

I. SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

A continuación, se plantea una secuencia didáctica compuesta por 14 sesiones que duran 50 minutos.

En esta secuencia se consideran los conocimientos previos del alumnado, y se va a basar en la razón de ser y problemas que han sido planteados hasta ahora, con una metodología basada en el aprendizaje a través de problemas para que el alumno descubra su propio conocimiento.

La primera sesión será dedicada para la realización de la evaluación inicial.

La segunda sesión será dedicada a parte del CP1: en primer lugar, se presentarán tres problemas de los planteados en el apartado D3 que constituyen la razón de ser (uno de cada contexto) y, tras esto, se introducirá el concepto de ecuación de segundo grado con una incógnita. Por último, se reconocerán ecuaciones de segundo grado y se identificarán sus coeficientes mediante el problema 1.1.

En la tercera sesión se continuará con el CP1, pues se realizarán cambios de sistemas de representación (del lenguaje habitual al algebraico y viceversa). Para ello, se trabajarán los problemas 1.2.1 y 1.2.2.

En la cuarta sesión se comenzará el CP2, pues en ella se presentarán los problemas 2.1.1 y 2.1.2 y el ejercicio 2, en los que se tendrá que comprobar si un valor dado es solución de una ecuación de segundo grado con una incógnita. Además, se introducirá el concepto de discriminante.

En la quinta sesión se identificará el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado, en primer lugar, con el discriminante y, en segundo lugar, mediante sus representaciones gráficas, trabajando el problema 2.2 y los ejercicios 3 y 4.1.

En la sexta sesión se continuará con el CP2: se usará el GeoGebra para representar las gráficas de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita para identificar así su número de soluciones (ejercicio 4.2) y, tras esto, se hallarán ecuaciones de segundo grado con una incógnita conociendo sus soluciones (problema 2.3).

En las dos sesiones siguientes se trabajará parte del CP3. En primer lugar, se tratarán los conceptos de ecuación de segundo grado completa e incompleta y, tras esto, se resolverán ecuaciones de segundo grado incompletas. En estas sesiones se tratarán, por tanto, los problemas 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1 y 3.2.2 y los ejercicios relacionados a las técnicas empleadas, es decir, los ejercicios 6.1, 6.2, 7 y 8.

En las sesiones nueve y diez se introducirá la fórmula general y se usará para resolver ecuaciones de segundo grado completas. Además, se resolverán ecuaciones de segundo grado con una incógnita mediante la técnica de completar cuadrados. Luego, en estas sesiones se trabajarán los problemas 3.3.1 y 3.3.2 y los ejercicios 9 y 10.

Las dos sesiones siguientes se dedicarán a la resolución de los problemas propuestos en el apartado D3, los cuales constituyen la razón de ser de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

La sesión número trece se dedicará a repasar los contenidos dados y a resolver las dudas que puedan surgir y, por último, se dedicará una sesión para la realización de la prueba de evaluación.

Seguidamente, para una mayor claridad, se muestra en la Tabla 4 un esquema de lo planteado:

Campo de problemas	Sesión	Contenidos
	1	★ Evaluación inicial.
CP1	2	<ul style="list-style-type: none"> ★ 3 problemas que constituyen la razón de ser. ★ Concepto de ecuación de segundo grado con una incógnita. ★ Reconocer ecuaciones de segundo grado y sus coeficientes (problema 1.1).

	3	<ul style="list-style-type: none"> ★ Cambios de sistemas de representación: del lenguaje habitual al algebraico y viceversa (problema 1.2.1 y problema 1.2.2).
CP2	4	<ul style="list-style-type: none"> ★ Comprobación de si un valor dado es solución de una ecuación de segundo grado con una incógnita (problema 2.1.1, problema 2.1.2 y ejercicio 2). ★ Concepto de discriminante.
	5	<ul style="list-style-type: none"> ★ Uso del discriminante para identificar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado (problema 2.2 y ejercicio 3). ★ Identificación del número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado dadas sus representaciones gráficas (ejercicio 4.1).
	6	<ul style="list-style-type: none"> ★ Uso del Geogebra para representar las gráficas de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita para identificar así su número de soluciones (ejercicio 4.2). ★ Hallazgo de ecuaciones de segundo grado con una incógnita conociendo sus soluciones (problema 2.3).
CP3	7 y 8	<ul style="list-style-type: none"> ★ Conceptos de ecuación de segundo grado completa e incompleta. ★ Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$ (problema 3.1.1, problema 3.1.2, ejercicio 6.1, ejercicio 6.2, ejercicio 7) ★ Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$

		(problema 3.2.1, problema 3.2.2, ejercicio 8).
	9 y 10	<ul style="list-style-type: none"> ★ Concepto de fórmula general. ★ Resolución de ecuaciones de segundo grado completas (problema 3.3.1, problema 3.3.2, ejercicio 9, ejercicio 10).
	11 y 12	★ Resolución de los problemas que constituyen la razón de ser.
	13	★ Repaso y resolución de dudas.
	14	★ Prueba de evaluación.

Tabla 4. Secuenciación didáctica a seguir en la propuesta .

J. EVALUACIÓN

J1. Prueba escrita que evalúe el aprendizaje de los alumnos

Tal y como se ha mencionado en el apartado anterior, tras realizar en el aula nuestra propuesta didáctica sobre las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, evaluaremos a los alumnos mediante una prueba escrita para poder determinar su adquisición de conocimientos y competencias.

Dicha prueba, que se realizará durante los 50 minutos que dura la sesión, es la siguiente:

PRUEBA ESCRITA - ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

2º DE E.S.O.

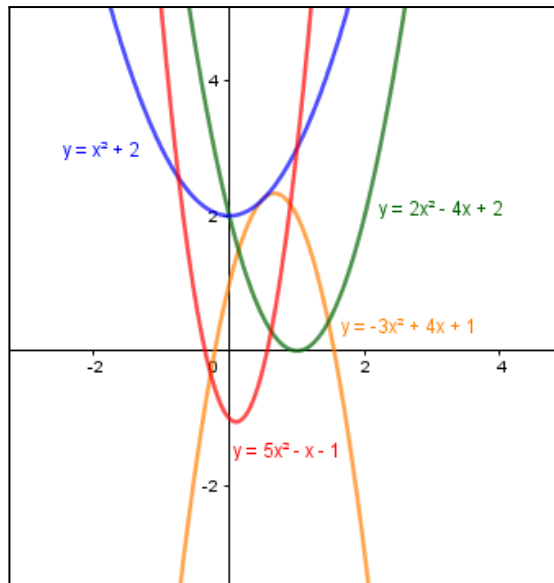
Nombre y Apellidos: _____

1. (1 punto; 0'25 cada apartado) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

- a) $x = 5$ es solución de la ecuación $2x^2 + 3x - 1 = 0$.
- b) $x = -3$ es solución de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$.
- c) La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene 2 soluciones.
- d) La ecuación $6x^2 - 5x + 1 = 0$ no tiene solución.

2. (1 punto; 0'25 puntos cada apartado) Observa las distintas representaciones gráficas e indica el número de soluciones de cada ecuación:

- a) $x^2 + 2 = 0$
- b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$
- c) $-3x^2 + 4x + 1 = 0$
- d) $5x^2 - x - 1 = 0$



3. (1'5 puntos; 0'5 cada apartado) Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado con una incógnita cuyas soluciones sean:

a) $x_1 = 3, x_2 = 2$

b) $x_1 = -1, x_2 = 4$

c) $x_1 = -5, x_2 = -3$

4. (3 puntos; 0'5 cada apartado) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - 24 = 1$ (sin usar la fórmula general)

b) $-2x^2 = -14x$ (sin usar la fórmula general)

c) $-x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $-2x + 4x^2 + 8 = 0$

e) $(x - 4)(x + 4) = (x - 1)^2 + 1$

f) $\frac{x^2}{4} - \frac{3x^2}{2} = 5x + 6$

5. (1'75 puntos) ¿Cuánto miden los lados de un triángulo rectángulo si se sabe que tienen por medida (en cm) tres números pares consecutivos?

6. (1'75 puntos) Dentro de 36 años la edad de Miguel será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuántos años tiene actualmente Miguel?

J2. Conocimientos que se pretenden evaluar con cada una de las preguntas de la prueba

En la pregunta 1, en los dos primeros apartados, se pretende evaluar si el alumno ha entendido el concepto de solución de ecuación de segundo grado. En ellos se tiene que aplicar la técnica T2, la de sustituir un valor en una ecuación, para comprobar si este es solución o no de la ecuación. En los dos siguientes apartados se pretende evaluar si el alumno sabe identificar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado usando el discriminante, es decir, si sabe aplicar la técnica T3. Esta pregunta está relacionada con el CP2.

La pregunta 2 también está relacionada con el CP2 pues en ella se pretende evaluar la técnica T4, la de usar la representación gráfica de la ecuación de segundo grado para identificar el número de soluciones.

En la pregunta 3 se pretende evaluar si el alumno es capaz de hallar una ecuación de segundo grado con una incógnita conociendo las soluciones, es decir, si sabe aplicar la técnica T5 y, por tanto, esta pregunta está relacionada con el CP2.

La pregunta 4 está relacionada con el campo CP3. En ella se pretenden evaluar las técnicas relacionadas con la resolución de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita (tanto incompletas como completas).

En las preguntas 5 y 6 se pretende evaluar si el alumno es capaz de pasar del lenguaje algebraico al habitual y si es capaz de resolver la ecuación resultante. Por tanto, estas preguntas están relacionadas con el CP1 y con el CP3.

J3. Respuesta esperada en cada una de las preguntas

A continuación, se presenta una corrección de la prueba:

Respuesta de la pregunta 1:

a) Falso, pues $2 \cdot (5)^2 + 3 \cdot 5 - 1 = 50 + 15 - 1 = 64 \neq 0$.

b) Verdadero, pues $(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$.

c) Falso, tiene una que es doble pues $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = 0$.

d) Falso, pues $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (6) \cdot (1) = 25 - 24 = 1 > 0$.

Respuesta de la pregunta 2:

a) $x^2 + 2 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $2x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow$ Tiene una solución.

c) $-3x^3 + 4x + 1 = 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

d) $5x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

Respuesta de la pregunta 3:

a) $(x - 3)(x - 2) = 0 \leftrightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 = 0 \leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.

b) $(x - (-1))(x - 4) = 0 \leftrightarrow (x + 1)(x - 4) = 0 \leftrightarrow x^2 - 4x + x - 4 = 0 \leftrightarrow$
 $x^2 - 3x - 4 = 0$.

c) $(x - (-5))(x - (-3)) = 0 \leftrightarrow (x + 5)(x + 3) = 0 \leftrightarrow$
 $x^2 + 3x + 5x + 15 = 0 \leftrightarrow x^2 + 8x + 15 = 0$.

Respuesta de la pregunta 4:

a) $5x^2 - 25 = 0 \leftrightarrow x^2 = \frac{25}{5} \leftrightarrow x^2 = 5 \leftrightarrow x = \pm \sqrt{5}$.

b) $-2x^2 = -14x \leftrightarrow -2x^2 + 14x = 0 \leftrightarrow x(-2x + 14) = 0 \leftrightarrow x = 0$

$ó -2x + 14 = 0 \leftrightarrow x = \frac{-14}{-2} = 7$.

c) $-x^2 + 5 - 6 = 0 \leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 1}{-2} \leftrightarrow$

$x_1 = \frac{-5+1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$ y $x_2 = \frac{-5-1}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$.

d) $-2x + 4x^2 + 8 = 0 \leftrightarrow -x + 2x^2 + 4 = 0 \leftrightarrow 2x^2 - x + 4 = 0 \leftrightarrow$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{4} \rightarrow$ No tiene solución.

$$e) (x - 4)(x + 4) = (x - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 16 = x^2 + 1 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x^2 + 2x = 1 + 1 + 16 \Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18}{2} = 9.$$

$$f) \frac{-2x^2}{4} - \frac{3x^2}{2} = 5x + 6 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{2 \cdot 3 \cdot x^2}{4} = \frac{4(5x+6)}{4} \Leftrightarrow -2x^2 - 6x^2 = 20x + 24 \Leftrightarrow -8x^2 - 20x - 24 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-5+3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ y } x_2 = \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

Respuesta de la pregunta 5:

3 números pares consecutivos: $x, x+2, x+4$

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$(x + 4)^2 = x^2 + (x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 16 + 8x = x^2 + x^2 + 4 + 4x \Leftrightarrow$$

$$-x^2 + 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot 12}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 8}{-2} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{-4+8}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \text{ (no nos sirve pues las dimensiones son números reales positivos)}$$

$$x_2 = \frac{-4-8}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$

Luego, los lados del triángulo miden 6cm, 8cm y 10cm.

Respuesta de la pregunta 6:

$x \rightarrow$ edad actual de Miguel

$x + 36 \rightarrow$ edad de Miguel dentro de 36 años

$x - 4 \rightarrow$ edad que tenía Miguel hace 4 años

$$x + 36 = \frac{(x-4)^2}{2} \Leftrightarrow x + 36 = \frac{x^2+16-8x}{2} \Leftrightarrow 2x + 72 = x^2 + 16 - 8x \Leftrightarrow$$

$$-x^2 + 10x + 56 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-1) \cdot 56}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm 18}{-2} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{-10+18}{-2} = \frac{8}{-2} = -4 \text{ (no nos sirve por ser negativa)}$$

$$x_2 = \frac{-10-18}{-2} = \frac{-28}{-2} = 14$$

Luego, actualmente Miguel tiene 14 años.

J4. Criterios de calificación

Para la corrección de la prueba escrita propuesta en el apartado II se seguirá una guía detallada basada en el modelo de tercios propuesto por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Esta consistirá en establecer en cada una de las preguntas de la prueba las tareas tratadas, las cuales irán acompañadas de los puntos máximos con los que se podrá penalizar al alumnado.

Distinguiremos tres tipos de tareas:

- **Tareas principales:** aquellas que establecen el motivo primordial de la calificación.
- **Tareas auxiliares específicas:** aquellas que juegan un papel instrumental para obtener la solución de un problema en el que figuran tareas principales sobre contenidos específicos.
- **Tareas auxiliares generales:** aquellas tareas que ha ejecutado el alumno durante su instrucción matemática previa.

En la Figura 5, presentada a continuación, se muestra el modelo de penalización de errores que se seguirá para corregir la prueba:

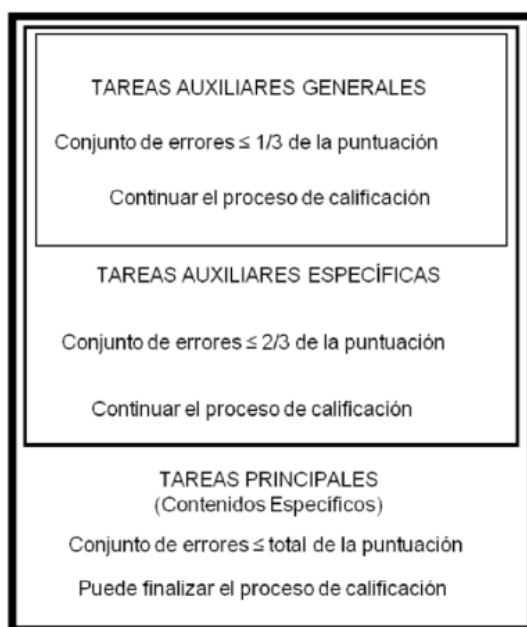


Figura 5. Modelo de penalización de errores según el modelo de tercios (Gairín, Muñoz y Oller, 2012, p.271).

Criterios de calificación de la pregunta 1: La pregunta vale 1 punto (0'25 puntos cada apartado).

- **Tarea principal:**
 - Sustituir un valor en una ecuación para comprobar si este es solución o no de la ecuación (0'25 puntos).
 - Identificar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado usando el discriminante (0'25 puntos).
- **Tarea auxiliar general:**
 - Realizar correctamente los cálculos aritméticos (0'08 puntos).

Criterios de calificación de la pregunta 2: La pregunta vale 1 punto (0'25 puntos cada apartado).

- **Tarea principal:**
 - Usar la representación gráfica de la ecuación de segundo grado para identificar el número de soluciones (0'25 puntos).

Criterios de calificación de la pregunta 3: La pregunta vale 1'5 puntos (0'5 puntos cada apartado).

- **Tarea principal:**
 - Hallar una ecuación de segundo grado con una incógnita conociendo las soluciones (0'5 puntos).
- **Tarea auxiliar general:**
 - Realizar correctamente los cálculos aritméticos y algebraicos (0'16 puntos).

Criterios de calificación de la pregunta 4: La pregunta vale 3 puntos (0'5 puntos cada apartado).

- **Tarea principal:**
 - Realizar correctamente las técnicas relacionadas con la resolución de las ecuaciones de segundo grado incompletas (0'5 puntos).

- Usar adecuadamente la fórmula general (0'5 puntos).
- **Tarea auxiliar específica:**
 - Desarrollar correctamente las identidades notables (0'33 puntos).
- **Tarea auxiliar general:**
 - Realizar correctamente los cálculos aritméticos y algebraicos (0'16 puntos).

Criterios de calificación de la pregunta 5: La pregunta vale 1'75 puntos.

- **Tarea principal:**
 - Plantear correctamente la ecuación (1 punto).
 - Resolver correctamente la ecuación (0'8 puntos).
- **Tarea auxiliar específica:**
 - Aplicar adecuadamente el teorema de Pitágoras (1'15 puntos).
- **Tarea auxiliar general:**
 - Realizar correctamente los cálculos aritméticos y algebraicos (0'2 puntos).

Criterios de calificación de la pregunta 6: La pregunta vale 1'75 puntos.

- **Tarea principal:**
 - Plantear correctamente la ecuación (1 punto).
 - Resolver correctamente la ecuación (0'8 puntos).
- **Tarea auxiliar general:**
 - Realizar correctamente los cálculos aritméticos y algebraicos (0'2 puntos).

K. REFERENCIAS

- Almodóvar, J. A., Cuadrado, A., Díaz, L., Dorce, C., Gámez, J. C., Marín, S., Pérez, C., Redón, M., Sánchez, D. (2016). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Santillana.
- Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J.M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Barreto, D. (2003). *Resolución de ecuaciones de segundo grado utilizando modelos geométricos de áreas* (trabajo de licenciatura). Universidad de Sucre.
- Beltrán-Pellicer, P., y Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, 98, 11-21.
- Benítez, S. B. y Benítez, L. M. (2014). La enseñanza a través de la resolución de problemas. Una experiencia de clase. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1215-1224). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Carrasco, M., Martín y R., Ocaña, J. (2008). *Matemáticas ESO curso 2*. Zaragoza, España: Luis Vives.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez, *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM
- Choppin, A. (1992). *Les manuels scolaires: histoire et actualité*. París: Hachette.
- Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2021). *Matemáticas 2 ESO*. Madrid, España: Anaya.
- Dalcín, M., & Olave, M. (2007). Ecuaciones de segundo grado: su historia.
- Escolano, A. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias Pedagógicas*, 14,169–180. Recuperado de <https://revistas.uam.es/tendenciaspedagogicas/article/view/1911>

- Gairín, J. M., Muñoz, J. M., y Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén: SEIEM, 261-274.
- Guerra, A. A. (2012). *Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales* (trabajo de maestría). Universidad Nacional de Colombia.
- Guerrero, A. C., Carrillo, J., Contreras, L. C. (2014). Problemas de sistemas de ecuaciones lineales en libros de texto de 3º ESO. *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 395-404). Salamanca: SEIEM.
- Martel, J.(2002). *La ecuación cuadrática: perspectiva histórica*, p. 171-191
- Martel, J.(1999). *La ecuación de segundo grado a lo largo de la historia*, p.33-46
- Martínez, S. (1987). *El currículo explícito y el currículo oculto en los libros de texto*. Madrid: Librería Pedagógica.
- OCDE (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy. A framework for PISA 2006*. Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona, España: Grao.
- ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.
- Pochulu, M. D., Abrate, R., Gabetta, I. y Sierra, S. (2012). *¿ Qué comprenden de ecuaciones algebraicas los alumnos al finalizar la escuela secundaria?*, p.291-299.
- Rodríguez, J. R., y Bonafé, J. M. (2016). Libros de texto y control del currículum en el contexto de la sociedad digital. *Cadernos Cedes*, 36, 319-336.

Salazar, C. y Fuentes, N. (2015). Propuesta de enseñanza del álgebra escolar: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX* (pp. 489-494). Villarrica, Chile: SOCHIEM.

Tettay, S. I., Pulgar, M. y Rojas, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. *Praxis*, 15(2), p. 193-205.