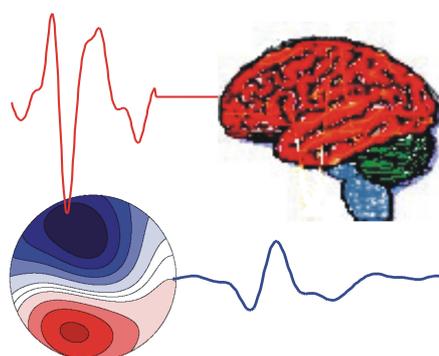


KOGNITIVE NEUROPHYSIOLOGIE DES MENSCHEN

HUMAN COGNITIVE NEUROPHYSIOLOGY



Impressum

Herausgeber: Wolfgang Skrandies

© 2008 W. Skrandies, Aulweg 129, D-35392 Giessen
wolfgang.skrandies@physiologie.med.uni-giessen.de

Editorial Board:

M. Doppelmayr, Salzburg

A. Fallgatter, Würzburg

T. Koenig, Bern

H. Witte, Jena

ISSN 1867-576X

Kognitive Neurophysiologie des Menschen wurde im Jahr 2008 gegründet. Erstes Ziel ist, für das regelmässig stattfindende *Deutsche EEG/EP Mapping Meeting* ein Publikationsorgan zu schaffen. Leider ist es nicht mehr möglich, diese Abstracts in der Zeitschrift **Brain Topography** zu veröffentlichen; nach 16 Jahren hat der Verlag beschlossen, diese nicht mehr zu akzeptieren. Die Veröffentlichungen seit 1992 finden Sie als PDF-Dateien auf der folgenden Seite: www.med.uni-giessen.de/physio.

In der neuen **Kognitiven Neurophysiologie des Menschen** erscheinen jetzt die Abstracts der Tagungen in zitierbarer Form mit ISSN-Nummer. Daneben sollen auch wissenschaftliche Artikel zu Themen der kognitiven Neurophysiologie des Menschen gedruckt werden. Diese beinhalten sowohl Beiträge über moderne Methoden als auch Ergebnisse der Grundlagenforschung sowie klinisch bedeutsame Resultate. Jedes Manuskript wird von 3 unabhängigen Gutachtern beurteilt und so rasch wie möglich publiziert werden.

Human Cognitive Neurophysiology was founded in 2008. This electronic journal will publish contributions on methodological advances as well as results from basic and applied research.

Instructions for Authors

Only original and unpublished work will be considered for publication unless it is explicitly stated that the topic is a review. All manuscripts will be peer-reviewed. Both German and English versions are acceptable. After publication, the copyright will be with the editor of the journal. Usage of published material for review papers will be granted. Manuscripts should be sent to wolfgang.skrandies@physiologie.med.uni-giessen.de.

Organization of manuscripts: The title page with a concise title should give the authors' names, address(es), and contact information (e-mail address) of the corresponding author. The manuscript should include an abstract in English, also for German contributions (maximum 300 words). Organize your work in the sections Introduction, Methods, Results, Discussion, and Literature.

Illustrations: All figures should be submitted as jpeg or Coreldraw files. Color illustrations should be of high quality. Please supply figure legends that explain the content of the figures in detail. Since this is an electronic journal color figures will be published free-of-charge.

The *Literature* should only include papers that have been published or accepted for publication. The reference list should be in alphabetical order by author. In the text, references should be cited by author(s) and year (e.g. Johnson, Hsiao & Twombly, 1995; Pascual-Marqui, Michel & Lehmann, 1994; Zani & Proverbio, 2002).

Examples of reference format

Johnson, K., Hsiao, S. & Twombly, L. (1995). Neural mechanisms of tactile form recognition. In M. Gazzaniga (Hg.), *The Cognitive Neurosciences* (S. 253-267). Cambridge, Mass.: MIT Press.

Pascual-Marqui, R., Michel, C. & Lehmann, D. (1994). Low resolution electromagnetic tomography: a new method for localizing electrical activity in the brain. *International Journal of Psychophysiology*, 18, 49-65.

Zani, A. & Proverbio, A. (Hg.). (2002). *The Cognitive Electrophysiology of Mind and Brain*. Academic Press, San Diego: Elsevier USA: Academic Press San Diego.

Inhalt — Contents

Vorwort zur ersten Ausgabe	5
W. Skrandies — Die Bedeutung der Wavelet-Analyse bei physiologischen Untersuchungen	6
G. Kutyniok — Zeit-/Frequenzanalyse	12
T. Sauer — Wavelets und Filterbänke	22
A. Klein — Wavelet- und Fourierkohärenz in Theorie und Praxis	33

Vorwort zur ersten Ausgabe

Die *Kognitive Neurophysiologie des Menschen*, das neue von Wolfgang Skrandies herausgegebene Journal, kommt aus der richtigen Hand zur rechten Zeit. Wolfgang Skrandies hat als einer der Pioniere der Raum-Zeit-Analyse der elektrischen Hirn-Felder weltweit Anerkennung für seine Arbeiten gewonnen. Diese Entwicklung ist eine grosse Genugtuung. Sie war vor 30 Jahren nicht abzusehen als wir zusammen an numerischen Ansätzen zur räumlichen Analyse von Hirnfeld-Daten arbeiteten und – in der Zeit der Diskussionen über Kurvenformen – Potentialkarten zeigten, die lange ohne Resonanz blieben. Wolfgang Skrandies organisiert seit jetzt 17 Jahren in Giessen die 'EEG-EP-Mapping-Meetings' zum Zentralthema 'Neuro-Psychophysiologie des Menschen'. Diese Tagungen sind an der Front der Methodenentwicklung und strahlen in die Anwendungen in unserem Fachgebiet.

Derzeit rücken elektrische und magnetische Hirnfeld-Messungen und ihre räumlichen und zeitlichen Analysen in der Neurophysiologie wieder in den Vordergrund. Das neue Publikationsvehikel, welches diese Aspekte anvisiert, kommt also zur rechten Zeit. Die in der ersten Nummer der *Kognitiven Neurophysiologie des Menschen* erscheinenden Artikel zeigen schön die Eindringtiefe und Ausgewogenheit der heutigen Raum-Zeit-Analysen. Wolfgang Skrandies hat qualifizierte Mitherausgeber für die neue Zeitschrift gewonnen, um die kompetente peer-review Beurteilung der Manuskripte und damit die Qualität des Journals zu sichern. Qualität wird die Basis dieses Journals vom neuen Typ sein: von Wissenschaftlern für Wissenschaftler, ohne kommerzielle Interessen, und elektronisch zugänglich.

Ich wünsche, auch im Namen unseres Arbeitsgebiets, guten Erfolg für die *Kognitive Neurophysiologie des Menschen*.

Dietrich Lehmann
The KEY Institute for Brain-Mind Research
Psychiatrische Universitätsklinik Zürich

Abstract

W. Skrandies (Giessen) — The application of wavelets in neurophysiological studies

Wavelets have become popular mathematical tool for signal and image processing and can also be applied to the analysis of neurophysiological data. Due to the high time-frequency localization of wavelets, the well-known problems arising from applying the short-time Fourier transform to time-localized signals can be avoided. This contribution will give a brief overview of the basic technical ideas of wavelet analysis and will show an example illustrating the analysis of spontaneous EEG data.

Die Bedeutung der Wavelet-Analyse bei physiologischen Untersuchungen

W. Skrandies, Physiologisches Institut,
Jusuts-Liebig Universität, 35392 Giessen
Wolfgang.Skrandies@physiologie.med.uni-giessen.de

Nachdem sich das EEG auch als Zeitserie mit verschiedenem Frequenzgehalt darstellen lässt, wurden in der EEG-Forschung bereits sehr früh nach der Ableitung des ersten EEG des Menschen quantitative Frequenzanalysen durchgeführt (Dietsch, 1932). Die Basis für das Interesse an der Frequenzzusammensetzung der hirnelektrischen Aktivität waren Bergers Befunde, dass sich die Frequenzen des Ruhe-EEG bei verschiedenen Bewusstseinszuständen systematisch verändern.

Der Frequenzgehalt solcher Biosignale wird meist mit konventionellen mathematischen Verfahren wie der Fourieranalyse oder FFT quantifiziert und dann zwischen Bedingungen oder Patienten verglichen.

Ein Beispiel, das nichts mit EEG zu tun hat

In der Musik bestehen Melodien – ähnlich wie EEG-Signale – aus einer Abfolge von Signalen von unterschiedlichen Frequenzen und unterschiedlicher Dauer sowie unterschiedlicher Lautstärke. Überlicherweise wird dies in Form von Musiknoten dargestellt, die die entsprechende Information codieren (wie in dem linken Teil der Abbildung 1 dargestellt). Eine eher technische Darstellung ist in dem rechten Teil der Abbildung 1 illustriert. In diesem Diagramm ist die Tonhöhe als Funktion der Zeit aufgetragen (mit der Frequenz auf der Ordinate), und die Amplitude (Lautstärke) der Töne ist farblich codiert.

Dieses Diagramm erinnert an die Zeit-Frequenz-Darstellung der Ergebnisse von EEG-Analysen, die die vorkommenden Frequenzen als Funktion der Analysezeit illustrieren. Die Umsetzung der Melodie in ein zweidimensionales Diagramm ist unmittelbar einleuchtend. Die Ergebnisse einer Wavelet-Analyse sind ähnlich zu interpretieren.

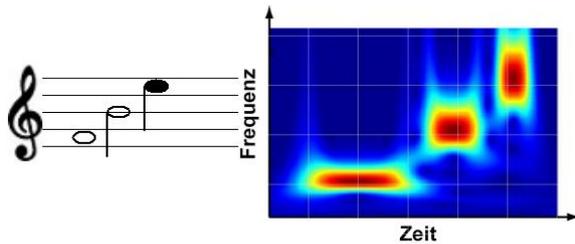


Abbildung 1: *Melodien werden als Folge von Musiknoten geschrieben (links). Das zugehörige Zeit-Frequenz-Diagramm ist rechts schematisch dargestellt. Die Lautstärke ist dabei durch verschiedene Farben codiert (aus Tamm, 2005).*

EEG-Signale sind nichtstationär

Bei den genannten konventionellen Frequenzanalysen geht man davon aus, dass die bewerteten Signale stationär sind. Diese Voraussetzung ist allerdings bei biologischen Systemen nur sehr eingeschränkt erfüllt, weil sich die hirnelektrischen Signale dauernd in ihrer Stärke, Topographie und Frequenzzusammensetzung ändern. Außerdem sind dauernde zeitliche Veränderungen des Auftretens verschiedener Frequenzen der hirnelektrischen Aktivität von grundsätzlichem Interesse: Das spontane EEG wird üblicherweise nach den verschiedenen Frequenzen klassifiziert (die konventionellen Frequenzbänder werden mit bestimmten Zuständen und Funktionen verknüpft oder Schlaf-EEGs definieren Schlafstadien aufgrund des Vorhandenseins bestimmter Frequenzen). Diese Information geht jedoch bei der konventionellen Fourieranalyse verloren. Hier erhält man als Ergebnis der Analyse ein Amplituden- oder Leistungsspektrum, das angibt, wie stark jede einzelne Frequenz in dem **gesamten** gemessenen Signal vertreten ist. Dies ist ein

Mittelwert über das ganze Analyseintervall, man erhält also keine Information über die genauen Zeitpunkte oder -bereiche, zu denen eine bestimmte Frequenz mehr oder weniger stark vorhanden war.

Eine alternative Methode ist die sog. Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT), bei der ein Analysefenster konstanter Länge schrittweise über die Daten verschoben wird und zu jedem Zeitpunkt das Spektrum berechnet wird. Damit erhält man Informationen über den Frequenzanteil zu jedem Zeitpunkt. Diese Methode hat unter anderem rechentechnische Nachteile.

Die Wavelet-Transformation basiert auf den Ideen von A. Haar und wurde Anfang der 1980er Jahre von J. Morlet als praktisches Verfahren entwickelt, bei dem eine Spektralanalyse unter Verwendung verschiedener frequenzangepasster **Basisfunktionen** (sog. "Wavelets") wiederholt über den Analysezeitraum berechnet wird. Solche Wavelet-Analysen finden inzwischen in vielen verschiedenen Bereichen Anwendung, und sie erlauben die Darstellung des Frequenzgehaltes eines Signals als Funktion der Zeit (Stark, 2005). Somit kann dieses Verfahren Information über die zeitlich verteilten Frequenzen hirnelektrischer Signale liefern.

Verfahren der Wavelet-Analyse werden genutzt, um zeitveränderliche, nichtstationäre Signale in einzelne Komponenten zu zerlegen. Durch die gleichzeitige Berücksichtigung von Zeit und Frequenz sind die Ergebnisse der Wavelet-Analyse geeignet, nichtstationäre EEG- und EP-Signale quantitativ zu beschreiben. Wellenformen des EEG und der EPs ändern sich in ihrer Frequenzzusammensetzung über die Zeit und auch an verschiedenen

Ableitorten auf der Kopfhaut. Diese Signale sind also in Zeit und Raum nichtstationär: sie sind transient (d.h. in der Zeit lokalisiert; unterschiedliche Frequenzen treten zu unterschiedlichen Zeitpunkten auf), im Raum lokalisiert (d.h. topographisch beschreibbar) und auf bestimmte Frequenzen beschränkt (d.h. nicht alle Frequenzen besitzen dieselbe Bedeutung). Ähnlich wie andere Ansätze zur Analyse hirnelektrischer Aktivität benutzt man die Wavelet-Analyse um Zeitfunktionen in einzelne zugrunde liegende Komponenten aufzuspalten und diese dann zu untersuchen. Auf diese Art lassen sich beispielsweise epileptische „Spikes“, funktionell definierte EP-Komponenten oder neurophysiologische interessante Rhythmen identifizieren und bewerten. Eine Einführung über die Anwendung von Wavelets zur Analyse hirnelektrischer Aktivität geben Samar, Bopardikar, Rao und Swartz (1999).

Was ist ein Wavelet?

Direkt übersetzt bedeutet Wavelet auf Deutsch „Wellchen“, also kleine Welle, d.h. es ist eine einfache, über die Zeit oszillierende Amplitudenmodulation. Dabei handelt es sich jedoch nicht um die in der Fourier-Analyse verwendeten Sinus- oder Cosinusfunktionen, die nur eine bestimmte Frequenz besitzen (die aber über den gesamten analysierten Zeitbereich konstant ist), sondern Wavelets sind sowohl in Frequenz und Zeit begrenzt. Diese Basis-Signale haben nur in einem gewissen Zeitbereich große fluktuierende Amplituden, die jedoch außerhalb dieses Bereichs gegen Null gehen. Auch im Frequenzbereich sind Wavelets begrenzt: im Allgemeinen bestehen sie aus relativ wenigen Frequenzen, es handelt

sich also um relativ einfache Wellenformen (obwohl man für die Analyse auch sehr komplexe Wellen benutzen kann; dies hängt von der jeweiligen Anwendung und Fragestellung ab). Aus praktischen Gründen wird diese „Begrenztheit“ von Zeit und Frequenz gefordert, so dass das Wavelet in Zeit und Frequenz abklingt.

Die Form eines Wavelets ist nicht vorgegeben: Im Grunde kann sich der Untersucher jede beliebige Form konstruieren und für die Analyse verwenden. Allerdings gibt es in der Literatur vorgegebene Wavelets, die z.T. biologischen Signalen ähneln und verwendet werden können (z.B., Daubechies-D4-Wavelet, Coifman-30-Wavelet, Morlet-Wavelet, siehe Abbildung 2). Je nach Fragestellung lässt sich eine geeignete Form auswählen, feste Regeln für die Wahl gibt es nicht.

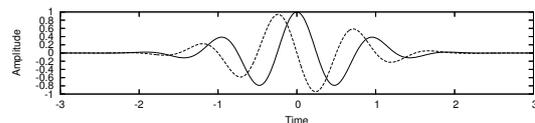


Abbildung 2: *Morlet-Wavelet.*

Die Form des Wavelets kann im Zeitverlauf durch Kompression oder Dehnung verändert werden, so dass sich der Frequenzgehalt ändert. Diese Skalierung führt dazu, dass mit einem gegebenen Wavelet ein größerer **Frequenzbereich** analysiert werden kann. Der zweite Analyseparameter ist der **Zeitbereich**: das Wavelet kann bei konstanter Form über die Zeit verschoben werden. Dehnung bedeutet, dass das Wavelet breiter wird, also weniger gut im Zeitbereich lokalisiert ist, wobei das enthaltene Frequenzband mehr fokussiert wird, während die bei einer Kompression des Wavelets die Zeitauflösung zunimmt, allerdings auf

Kosten der Frequenzauflösung. Dies ist eine grundlegende Eigenschaft aller Wavelets.

Wie lassen sich neurobiologische Signale mit Wavelets analysieren?

Wie oben erwähnt, lassen sich die zu analysierenden neurobiologischen Signale durch die Wavelet-Analyse in einen Satz von **zeitskalierten** und **zeitverschobenen** Versionen derselben Grundfunktion, dem Wavelet, aufteilen. Und genauso wie es möglich ist, aus den Komponenten und der Amplituden- und Phaseninformation einer FFT das Originalsignal zu rekonstruieren, ist dies bei der Wavelet-Analyse möglich. Das bedeutet, dass ein neurophysiologisches Signal aus der linearen Kombination einzelner Komponenten besteht. Einen ähnlichen Ansatz finden wir bei statistisch definierten Komponenten, die durch Faktorenanalyse oder PCA bestimmt werden. Die Grundidee des Zerlegens eines komplexen Signals in einzelne, einfachere Komponenten ist all diesen Verfahren gleich.

Die Wavelet-Analyse kann man sich als schrittweisen Vergleich des gemessenen Signals mit den einzelnen Wavelets vorstellen. Das Wavelet einer bestimmten Größe (d.h. einer bestimmten zeitlichen Länge und damit Frequenz) wird schrittweise gegenüber dem Originalsignal verschoben, und es wird die Kreuzkorrelation zwischen diesen beiden Signalen berechnet. Damit erhält man zu einem gegebenen Zeitpunkt numerische Information über die Ähnlichkeit von Wavelet und Signal, die als Wavelet-Koeffizient bezeichnet wird. Das geschilderte Verfahren wird anschließend mit allen anderen Wavelets wiederholt, die nun jeweils zwar dasselbe Aussehen, aber

eine unterschiedliche Länge und somit einen unterschiedlichen Frequenzgehalt besitzen.

Als Ergebnis erhält man sehr viele Korrelationskoeffizienten, die die Ähnlichkeit des jeweiligen Wavelets an den verschiedenen Zeitpunkten beschreiben. Die übliche Darstellung erfolgt dann in einem Zeit-Frequenz-Diagramm, das das Ergebnis vieler Rechenschritte graphisch zusammenfasst.

Abbildung 3 zeigt das Ergebnis der Analyse eines spontanen EEG (Ableitung von O_1 gegen eine frontale Referenz, Ruhebedingung mit geschlossenen Augen) einer gesunden Versuchsperson. In der EEG-Kurve sieht man α -Aktivität, die zu verschiedenen Zeiten unterschiedlich stark ausgeprägt ist. Dies wird durch die Wavelet-Analyse quantifiziert und ist im unteren Teil von Abbildung 3 als Zeit-Frequenz-Diagramm dargestellt. Hier kann man mit einem Blick sehen, wann welche Frequenzen vorherrschen. Auf der Abszisse läuft die Zeit zwischen 0 und 10 s, auf der Ordinate sind die Frequenzen zwischen 0 und 30 aufgetragen; die Stärke der Aktivität ist durch die Farben codiert. Rote und gelbe Bereiche zeigen starke Aktivität an, während die blau und grün markierten Frequenzen einen nur geringen Anteil an dem gemessenen EEG-Signal besitzen.

Zwischen 8 und 14 Hz tritt zu verschiedenen Zeitpunkten mehr oder weniger starke Aktivität auf. Das registrierte EEG ist also von α -Aktivität dominiert, diese ist jedoch nicht über den gesamten Zeitraum gleich stark, sondern ändert sich dauernd. Diese Darstellung stellt eine realistische Beschreibung und Quantifizierung des EEG-Signals dar, die durch bloße visuelle Inspektion der EEG-Kurve nicht gesehen werden kann. Solche quantitativen Da-

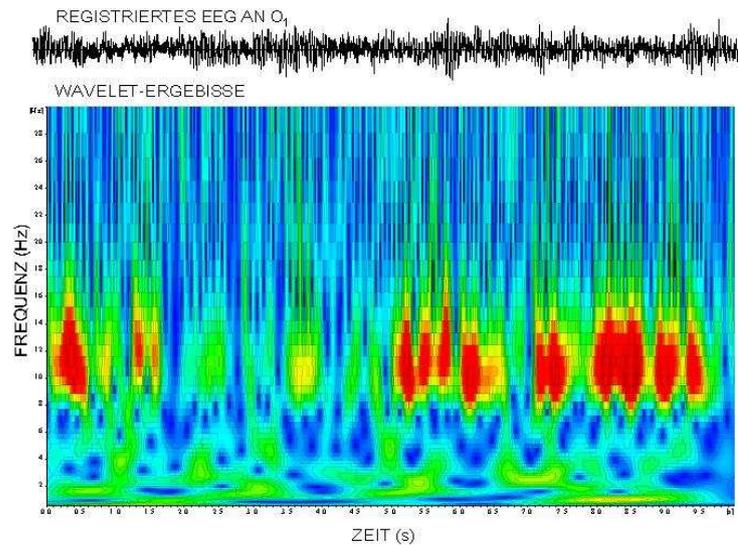


Abbildung 3: Spontanes EEG einer gesunden Versuchsperson (O_1 gegen F_z). In der Wellenform lässt sich α -Aktivität erkennen. Das Zeit-Frequenz-Diagramm stellt die Ergebnisse der Wavelet-Analyse dar. Die α -Aktivität zwischen etwa 8 und 13 Hz ist in ihrer Stärke zu unterschiedlichen Zeiten unterschiedlich ausgeprägt.

ten bilden die Grundlage für weiterführende statistische Analysen und Vergleiche zwischen Probanden, Patienten oder verschiedenen experimentellen Bedingungen.

Mögliche Anwendungen

Die Wavelet-Analyse ist zunächst einmal ein mathematisches Werkzeug, so dass ihre Anwendung und v.a. die Interpretation der Ergebnisse nicht vorgegeben ist, sondern durch den Anwender erfolgen muss. Ähnlich wie bei den Aufkommen von Faktorenanalysen und PCA in den 1970er Jahren, erscheint die Anwendung von Wavelet-Analysen in manchen Publikationen als modischer Trend. „Man“ macht eben diese Analyse, weil es alle machen oder weil man zufällig die entsprechende Software besitzt, mit der man sich durch viele verschie-

dene Verfahren durchklicken kann (ähnlich wie die Statistikprogramme, die dem Benutzer alle Optionen des Probierens bieten, um anschließend nur die signifikanten p-Werte als Früchte seiner Arbeit einzusammeln). Als „*wallowing in principal components*“ wurde das von Walter Freeman in einer Diskussion über PCA bezeichnet. Eigentlich sollte es klar sein, dass rein technische Diskussionen relativ wenige Erkenntnisse bringen; nur in Zusammenhang mit einer konkreten experimentellen neurophysiologischen Fragestellung kann die Anwendung mathematischer Analysen sinnvoll sein.

Nachdem die Wavelet-Analyse zunächst einzelne zugrunde liegende Komponenten identifiziert und ihr Auftreten über die Zeit beschreibt, sind mögliche sinnvolle Fragen vorgegeben. Ähnlich wie mit quantitativen Frequenzanalysen können unerwünschte Si-

gnalkomponenten ausgefiltert werden, indem man diese bei der Rekonstruktion des Signals verwirft. Bestimmte bekannte Signalformen wie „Spikes“ (siehe z.B. Indiradevi, Elias, Sathidevi, Dinesh Nayak & Radhakrishnan, 2008) oder andere transiente Ereignisse können im spontanen EEG durch die Wavelet-Analyse entdeckt werden (Chen, Lin & Ju, 2007). Bei evozierter Hirnaktivität steht das Erkennen und Quantifizieren einzelner Komponenten im Vordergrund. Damit lassen sich ähnlich wie mit der PCA zeitlich überlappende Komponenten identifizieren und bestimmen. Wie bei allen Analyseverfahren ist dies jedoch nur einer der ersten Schritte der Bewertung der gemessenen Daten. Eine durch Hypothesen geleitete und vor allem nicht-selektive statistische Analyse, die der jeweiligen experimentellen Fragestellung angepasst ist, wird durch das Erkennen einzelner Komponenten in der Zeit und im Frequenzbereich nicht ersetzt. Die Wavelet-Analyse stellt dabei eher eine Art Vorverarbeitung der gemessenen Daten dar, die anschließend mit anderen Methoden analysiert werden können.

Literatur

- Chen, C., Lin, C. & Ju, M. (2007). Detecting movement-related EEG change by wavelet decomposition-based neural networks trained with single thumb movement. *Clinical Neurophysiology*, 118, 802–814.
- Dietsch, G. (1932). Fourieranalyse von Elektrencephalogrammen des Menschen. *Pflügers Archiv für die Gesamte Physiologie*, 230, 106–112.
- Indiradevi, K., Elias, E., Sathidevi, P., Dinesh Nayak, S. & Radhakrishnan, K. (2008). A multi-level wavelet approach for automatic detection of epileptic spikes in the electroencephalogram. *Computers in Biology and Medicine*, 38, 805–816.
- Samar, V., Bopardikar, A., Rao, R. & Swartz, K. (1999). Wavelet analysis of neuroelectric waveforms: a conceptual tutorial. *Brain and Language*, 66, 7–60.
- Stark, H.-G. (2005). *Wavelets and Signal Processing. An Application-Based Introduction*. Berlin: Springer.
- Tamm, S. (2005). *Hochaufgelöste Zeit-Frequenz-Analysen ereigniskorrelierter EEG-Oszillationen mittels S-Transformation*. Freie Universität Berlin; <http://www.diss.fu-berlin.de/2005/252>: Dissertation.

Abstract

G. Kutyniok (Osnabrück) — Time / frequency analysis The *continuous wavelet transform* transforms a function of one variable, e.g., a time series, into a function of two variables, time and scale, that gives information about time-localized frequency components. Provided that the *wavelet* satisfies a so-called *admissibility condition* which requires only slightly more than a “wavy” behavior, this transform also has an inverse so that the relationship between function and transform is one-to-one. Sampling the transform at appropriate sets of parameter values will result in analysis functions that form a *frame*, a set of functions that are not independent but still allow for unique reconstructions from the associated coefficients in the representation of a function. This redundancy makes a frame more robust with respect to loss of certain coefficients.

Zeit-/Frequenzanalyse

G. Kutyniok, Institut für Mathematik,
Universität Osnabrück, 49069 Osnabrück
kutyniok@math.uni-osnabrueck.de

Die kontinuierliche Wavelettransformation

Eine Vielzahl von Transformationen, wie z.B. die gefensterter Fouriertransformation, liefern sehr gute Ergebnisse bei der Detektion von auftretenden Frequenzen einer bestimmten zeitlichen Länge. Allerdings werden Artefakte unterschiedlicher zeitlicher Länge sehr schlecht erkannt, da die meisten Transformationen keine “Zoom“-Möglichkeit besitzen. Mit der kontinuierlichen Wavelettransformation wird eine Transformation zur Verfügung gestellt, die in der Tat Signalstrukturen sehr unterschiedlicher zeitlicher Länge präzise erkennen und analysieren kann.

Für einen gut verständlichen exakten ma-

thematischen Zugang zur kontinuierlichen Wavelettransformation verweisen wir deshalb auf das Buch von Blatter (Blatter, 2003). Wer lieber einen Klassiker lesen möchte, dem sei das Buch von Daubechies (Daubechies, 1992) empfohlen. Eine Betonung der Anwendungsaspekte ist in dem Buch von Mallat (Mallat, 1999) zu finden. Zum weiteren “Schmökern” über die Theorie von Wavelets ist das Buch von Hubbard (Hubbard, 1998) sehr geeignet, da es ohne mathematischen “Ballast” auskommt. Zuletzt sei jeder Gruppe von Lesern – ob mehr oder weniger mathematisch interessiert – noch die Webseiten zum Wavelet Digest “www.wavelet.org” ans Herz gelegt. Dort finden sich eine Fülle von Links zu Tutorials, weiterer Literatur, etc.

Was sind Wavelets?

Die Hauptidee der kontinuierlichen Wavelettransformation besteht darin, das Signal mit Funktionen zu korrelieren, die u.a. verschiedene zeitliche Längen haben. Die kontinuierliche

Wavelettransformation verwendet hierzu eine “Basis-Funktion” ψ , die aus bestimmten mathematischen Gründen die Eigenschaft

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty \quad (0.1)$$

erfüllen muss (siehe auch Abschnitt). Den Wert C_ψ bezeichnet man als *Zulässigkeitskonstante*. Als zusätzliche Eigenschaft fordert man, dass diese Funktion endliche Energie haben muss, d.h. es muss $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ gelten. Solch eine Funktion ψ wird als *Wavelet* (= “Wellchen”) oder auch als *Mother-Wavelet* bezeichnet. Die Eigenschaft, die hierdurch impliziert wird, läßt sich sehr gut an den Beispielen in Abbildung 1 erkennen.



Abbildung 1: Links ist das Haar-Wavelet zu sehen, das sicher das “einfachste” unter den Wavelets ist. Das mittlere Bild zeigt das berühmte Daubechies4-Wavelet, und das rechte das nicht minder berühmte Daubechies10-Wavelet.

Eine sehr wichtige Unterscheidung von Wavelets, die insbesondere bei der kontinuierlichen Wavelettransformation eine entscheidende Rolle spielt (siehe Abschnitt), ist diejenige in reelle und komplexe Wavelets. *Reelle Wavelets* sind Wavelets, die in den reellen Zahlen “leben”, also lediglich Funktionswerte in \mathbb{R} haben, wohingegen *komplexe Wavelets* in den komplexen Zahlen “leben”, also insbesondere auch Funktionswerte in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ besitzen. (Erinnerung: Die komplexen Zahlen stellen eine gewisse Erweiterung der reellen Zahlen dar.) Bei den in Abbildung 1 aufgeführten Wavelets han-

delt es sich ausschließlich um reelle Wavelets. Ein wichtiges Beispiel für ein komplexes Wavelet ist das *Morlet-Wavelet*, definiert durch

$$\psi(x) = c\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}x^2}(e^{ix} - e^{-\frac{1}{2}}),$$

wobei c eine Konstante ist. Eine graphische Darstellung des Realteils dieses Wavelets ist in Abbildung 2 zu finden.

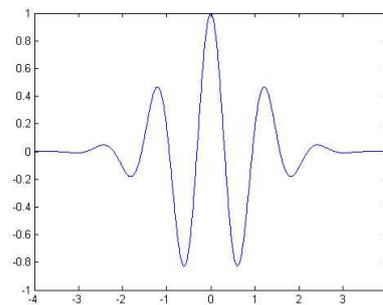


Abbildung 2: Der Realteil des Morlet-Wavelets, das bei der Analyse von z.B. EEG-Signalen vorzugsweise Verwendung findet (siehe hierzu auch Klein, 2008).

Definition und Berechnung der kontinuierlichen Wavelettransformation

Zur Analyse eines Signals werden nun verschobene und gestauchte bzw. gedehnte – sogenannte *dilatierte* – Kopien des Wavelets verwendet. Das Wavelet wird dabei an jeden Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ des Signals verschoben und um jeden Faktor $a > 0$ dilatiert. Wir verwenden somit die folgende Kollektion von “Varianten” unseres Wavelets:

$$\psi\left(\frac{x-t}{a}\right), \quad \text{wobei } a > 0 \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Einige Beispiele finden sich in der Abbildung 3.

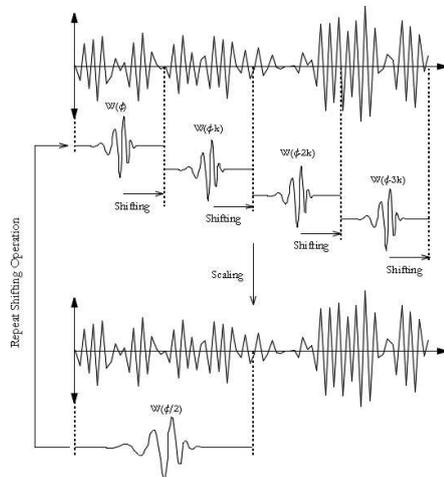


Abbildung 3: Einige verschobene und dilatierte Kopien eines Wavelets W .

Die *kontinuierliche Wavelet-Transformation* wird nun als Korrelation eines Signals f (z.B. eines Kanals eines EEGs) und diesen "Kopien" eines geeigneten Wavelets gebildet:

$$\mathcal{W}_\psi f(a, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)} dx.$$

Für gegebenes a und t bezeichnet man $\mathcal{W}_\psi f(a, t)$ auch als *Waveletkoeffizient*. Der Vorfaktor $a^{-\frac{1}{2}}$ tritt aus Normierungsgründen¹ auf. Ferner werden auch aus mathematischen Gründen nicht die Funktionswerte von ψ , sondern die zugehörigen konjugiert-komplexen Werte verwendet. Bei reellen Wavelets

¹Man sollte an dieser Stelle erwähnen, dass die Wavelettransformation zu einem gegebenen Wavelet im Gegensatz zur Fouriertransformation entweder amplitudenproportional ist oder weißes Rauschen mit einem flachen Spektrum versieht aber nicht beides gleichzeitig. Deshalb kann es auch aus diesem Grund vorteilhaft sein, die Normalisierung der Wavelettransformation zu verändern.

ändert das aber nichts, denn für diese gilt $\psi(x) = \overline{\psi(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bei komplexen Wavelets wird nur die Phase verändert.

Wenden wir uns zunächst kurz der numerischen Berechnung der kontinuierlichen Wavelettransformation zu, bevor wir auf die Anwendungsmöglichkeiten eingehen. Zuerst wird dazu die kontinuierliche Wavelettransformation in einer etwas anderen Form dargestellt, und zwar als Faltung:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi f(a, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)} dx \\ &= f * \overline{\psi}_a(t), \end{aligned}$$

wobei

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(-\frac{t}{a}\right).$$

(Erinnerung: Bei Bildung der Faltung wird eine Funktion gegen die andere zeitlich verschoben.) Die Nützlichkeit dieser Darstellung wird deutlich, wenn wir sie uns im Fourierbereich ansehen, denn hier geht die Faltung in ein Produkt über. Wenden wir also die Fouriertransformation an, so erhalten wir:

$$\widehat{\mathcal{W}_\psi f(a, \cdot)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \widehat{\overline{\psi}_a}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \sqrt{a} \hat{\psi}(a\xi). \tag{0.2}$$

Mit der schnellen Fouriertransformation – der FFT – läßt sich diese Formel sehr schnell berechnen – allerdings nur, wenn wir uns bei der Wahl von a und t auf endlich viele Werte einschränken (siehe Abschnitt). Wir sollten an dieser Stelle noch anmerken, dass man aufgrund der Formel (0.2) die kontinuierliche Wavelettransformation als eine Filterung mit einem Bandpass-Filter auffassen kann, wobei $\sqrt{a} \hat{\psi}(a\xi)$ die Transfer-Funktion wäre. Für weitere Details verweisen wir auf das Kapitel 3.

Wozu braucht man die kontinuierliche Wavelettransformation?

Betrachten wir zunächst den Fall der reellen Wavelets. Hier ist das Ziel, scharfe Signalübergänge zu detektieren. Abbildung 4 gibt ein Beispiel der Wavelettransformierten eines Signals unter Verwendung eines reellen Wavelets an.

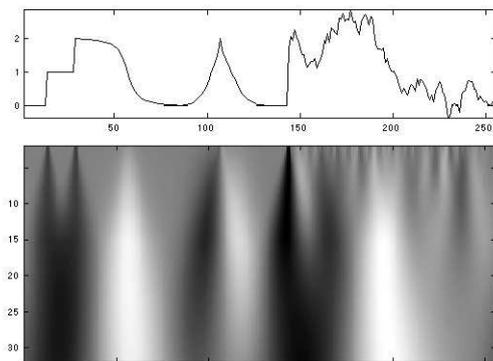


Abbildung 4: Signal (oben) und dessen Wavelettransformierte $\mathcal{W}_\psi f$ (unten), wobei schwarze, graue bzw. weisse Punkte positive Waveletkoeffizienten $\mathcal{W}_\psi f(a, t)$, Null bzw. negative Waveletkoeffizienten darstellen.

Die wesentliche Information tritt hier bei einer kleinen Skala auf. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da eine kleine Skala a eine starke Stauchung des Wavelets bedeutet, folglich eine schnelle Schwingung in einem kleinen Zeitintervall. Man sieht an Abbildung 4 deutlich, dass betragsmäßig große Werte der Waveletkoeffizienten bei kleiner Skala a auf eine starke Veränderung des Signals hinweisen. Um solche Veränderungen zu detektieren, würde man somit ein sehr kleines a – nennen wir es a_0 – wählen und dann untersuchen, welche Waveletkoeffizienten $\mathcal{W}_\psi f(a_0, t)$ betragsmäßig oberhalb einer gewählten Schranke liegen. An

den zugehörigen Stellen t liegen dann “Peaks” oder sonstige starke Veränderungen im Signal vor.

Komplexe Wavelets werden verwendet, um auch Frequenzübergänge erfassen zu können. Die komplexe Schwingung in einem komplexen Wavelet stellt sicher, dass Wavelet und Schwingung im Signal unabhängig von der Phasendifferenz korrelieren, wenn die Frequenzen übereinstimmen. Bei reellen Wavelets erreicht man das nicht, da zwei Schwingungen nicht miteinander korrelieren, wenn sie um $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ in der Phasenlage abweichen. Das führt zu Schwingungen in der Wavelettransformierten. Stattdessen erzeugt die kontinuierliche Wavelettransformation mit einem komplexen Wavelet durchgehend Waveletkoeffizienten großen Betrages, wenn die Frequenzen von Wavelet und Schwingung im Signal übereinstimmen. Aus diesem Grund werden in der Regel bei der Analyse von EEG-Signalen komplexe Wavelets, insbesondere das Morlet-Wavelet (siehe Abbildung 2) verwendet. Für konkrete Anwendungsmöglichkeiten verweisen wir auf die ausführliche Darstellung in Kapitel 4.

Können wir auch zurücktransformieren?

Nachdem wir uns die kontinuierliche Wavelettransformation schon genauer angesehen haben, stellt sich die Frage, ob sich hieraus auch das Signal wieder zurückberechnen lässt. In einer Vielzahl von Anwendungen wird nämlich zunächst ein Signal wavelettransformiert und dann einige Manipulationen an der Wavelettransformierten vorgenommen, z.B. werden einige Frequenzbänder gedämpft. Anschließend möchte man natürlich das zugehörige –

jetzt leicht veränderte – Signal berechnen.

Vorausgesetzt unser Wavelet erfüllt die Bedingung (0.1) – dies ist ja nach Definition immer der Fall –, so ist dies zum Glück immer möglich. Haben wir ein Wavelet ψ gewählt und kennen von einem Signal f nur alle Werte seiner kontinuierlichen Wavelettransformierten $\mathcal{W}_\psi f(a, t)$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$, so läßt sich f mit Hilfe von (0.3) berechnen, wobei C_ψ die Zulässigkeitskonstante des Wavelets ψ aus (0.1) ist. Dies bezeichnet man als die *inverse kontinuierliche Wavelettransformation*.

Die numerische Berechnung der inversen kontinuierlichen Wavelettransformation ist nicht so elegant möglich wie diejenige der kontinuierlichen Wavelettransformation. Man kann zwar ähnliche Ideen anwenden, hat aber noch einige zusätzliche technische Schwierigkeiten zusammenhängend mit dem Doppelintegral zu lösen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen.

Der Weg von der kontinuierlichen Wavelettransformation zu Wavelet-Frames

In realistischen Anwendungen kann man die Wavelettransformation $\mathcal{W}_\psi f(a, t)$ nur für *endlich viele* Werte von a und t bestimmen, sagen wir $(a, t) \in A$, wobei A eine Abtastmenge in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ – also der “rechten Hälfte” der Ebene – ist. Anders gesagt: berechenbar ist lediglich eine Abtastung der Wavelettransformation, d.h. eine endliche Menge von Waveletkoeffizienten

$$\{\mathcal{W}_\psi f(a, t) : (a, t) \in A\}. \quad (0.4)$$

Damit ergibt sich ganz natürlich die Frage nach minimalen Wertemengen A , so dass man ein Signal f noch aus diesen Abtastwerten rekon-

struieren kann – man möchte ja schließlich, dass die Transformation nur f beschreibt und nicht eine ganze Familie von Signalen. Ferner stellt sich die Frage, was man durch “Überrepresentation” gewinnen kann – schließlich ist redundante Information normalerweise robuster gegen Störungen. Dies führt zum Konzept der “*Wavelet-Frames*”.

Zunächst werden wir eine kurze, allgemeinverständliche Einführung in die Theorie der Frames geben, und uns dann auf Wavelet-Frames konzentrieren. Da die Theorie der Frames noch sehr neu ist, findet sich noch nicht eine solche Fülle von Literatur wie für Wavelets. Das erste umfassende Buch über Frames ist von Christensen (Christensen, 2003) und enthält eine exakte mathematische Darstellung dieser Theorie. Abschnitte aus den schon erwähnten Büchern von Blatter (Blatter, 2003), Daubechies (Daubechies, 1992) und Mallat (Mallat, 1999) bieten auch sehr gute anschauliche, trotzdem mathematische Einführungen in diese Theorie. Für allgemeine Resultate über Wavelet-Frames möchten wir auf das Buch von Daubechies (Daubechies, 1992) verweisen. Der aktuelle Stand der Forschung ist in der kürzlich fertiggestellten Monographie von Kutyniok (Kutyniok, 2006) dargestellt.

Was sind Frames?

Vergessen wir die Wavelet-Situation für eine kurze Weile, und betrachten wir zunächst anstelle der Menge in (0.4) eine beliebige endliche Menge $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ von Vektoren, der Einfachheit halber im \mathbb{R}^d – wer möchte, kann sich hier den Fall $d = 2$, also die Ebene, vorstellen. Ein Vektor $f \in \mathbb{R}^d$ wird nun mit Hilfe der Menge G “aufgespalten” oder man sagt auch

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathcal{W}_\psi f(a, t) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)} dt \frac{da}{a^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.3)$$

analysiert, indem man die Skalarprodukte

$$\langle f, g_i \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (0.5)$$

berechnet und somit eine endliche Menge von reellen Werten erhält. (Zur Erinnerung: Das Skalarprodukt zweier Vektoren gibt – grob gesprochen – den Winkel zwischen den Vektoren gewichtet mit ihrer Länge an.)

Betrachten wir zur Veranschaulichung eine Anwendung aus dem täglichen Leben für Frames, und zwar das Telefonieren mit dem Mobiltelefon. Hier wäre f das Sprachsignal, das man in das Mobiltelefon “eingibt”. Um dieses Signal zu übertragen, wird es im Wesentlichen mit Hilfe einer geeigneten endlichen Menge G in die Menge (0.5) zerlegt. Es stellen sich somit kanonischerweise die folgenden Fragestellungen:

1. Wie können wir das Signal f wieder zurückgewinnen, damit unser Gesprächspartner nicht Unverständliches, d.h. (0.5), sondern das Sprachsignal selbst empfängt?
2. Ist diese Art der Übertragung robust gegenüber Störungen, d.h.
 - a) verändern leichte Störungen der Werte in (0.5) auch das rekonstruierte Sprachsignal nur leicht, und
 - b) läßt sich das Sprachsignal auch dann noch rekonstruieren, wenn man einige Werte aus (0.5) bei der Übertragung verloren hat?

Frage 1 und Frage 2a werden wir noch in diesem Abschnitt beantworten, wohingegen

Frage 2b in Abschnitt diskutiert wird. In Abschnitt wenden wir dann unsere Überlegungen auf die Abtastmenge (0.4) der kontinuierlichen Wavelettransformation an.

Nun aber zu der mathematischen Definition eines Frames. Die Definition ist im Wesentlichen so gemacht, dass Frage 2a sofort positiv beantwortet werden kann, d.h. leichte Änderungen des Signals f implizieren leichte Änderungen der Menge (0.5) und umgekehrt. Mathematisch gesprochen hört sich das so an: Eine endliche Menge $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ im \mathbb{R}^d ist ein *Frame* für \mathbb{R}^d , wenn Konstanten $0 < A \leq B < \infty$ existieren, so dass

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^n |\langle f, g_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \text{für alle } f \in \mathbb{R}^d.$$

Man bezeichnet oft A als *untere Frameschranke* und B als *obere Frameschranke*.

Wie sieht nun die Rekonstruktion des Signals f aus den Werten (0.5) aus? Hierfür konstruiert man eine zweite endliche Menge – nennen wir sie $\tilde{G} = \{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n\}$ – so dass wir unser Signal f auf die folgende einfache Art und Weise zurückberechnen können:

$$f = \sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle \tilde{g}_i. \quad (0.6)$$

Das Schöne ist, dass man die Menge \tilde{G} – man bezeichnet sie auch als *dualen Frame* – direkt aus der anfangs gewählten Menge G mit Hilfe eines speziellen Operators berechnen kann. Wir sollten an dieser Stelle noch anmerken, dass wir somit die Frage 1 positiv beantwortet haben.

Besonders einfach ist die Berechnung des dualen Frames, wenn unser Frame die stärkere Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^n |\langle f, g_i \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad \text{für alle } f \in \mathbb{R}^d$$

erfüllt, d.h. die untere und obere Frameschranke stimmen überein und sind gleich 1. In diesem Fall spricht man von einem *Parseval-Frame*. Ein einfaches Beispiel eines Parseval-Frames in der Ebene \mathbb{R}^2 zeigt die Abbildung 5. Aus offensichtlichen Gründen wird er in der Literatur als *“Mercedes-Benz-Frame”* bezeichnet.

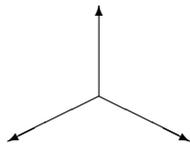


Abbildung 5: Der *“Mercedes-Benz-Frame”*, bestehend aus den Vektoren $(0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ und $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, als Beispiel eines Parseval-Frames.

Nun ist die Berechnung des dualen Frames \tilde{G} denkbar einfach, denn er stimmt mit dem ursprünglichen Frame G überein. Wir können somit in diesem Fall unser Signal f folgendermaßen rekonstruieren:

$$f = \sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle g_i. \quad (0.7)$$

Die Übertragung eines Sprachsignals beim Telefonat mit einem Mobiltelefon bei Verwendung eines Parseval-Frames ist in der Abbildung 6 dargestellt.

Robustheit versus Minimalität

Wir beschränken uns im Folgenden auf Parseval-Frames, da diese – wie oben ge-

sehen – sehr schöne Eigenschaften besitzen und auch für die meisten Anwendungen konstruierbar sind.

Als erstes beschäftigen wir uns mit der Frage 2b und betrachten zunächst den Mercedes-Benz-Frame aus der Abbildung 5. Benennen wir die drei Vektoren g_1, g_2 und g_3 . Bei vorliegendem Signal/Vektor f fällt sofort auf, dass wir, selbst wenn wir *einen* der Koeffizienten $\langle f, g_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$ verlieren würden, dieses Signal aus den verbleibenden zwei zurückberechnen können. Der Grund hierfür ist, dass \mathbb{R}^2 zweidimensional ist, wir also nur zwei (linear unabhängige) Vektoren zur Darstellung eines Elementes aus \mathbb{R}^2 benötigen. Etwas allgemeiner können wir folglich sagen, dass wir bei der Zerlegung eines Signals im \mathbb{R}^d bezüglich eines Parseval-Frames mit mehr als d Elementen trotz des Verlustes eines Koeffizienten das Signal immer noch rekonstruieren können.

Etwas genauer wird die Redundanz eines Parseval-Frames folgendermaßen beschrieben. Betrachten wir wieder einen Parseval-Frame $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ im \mathbb{R}^d , diesmal bestehend aus Vektoren der gleichen Länge c . Dann sagt man c^2 ist die *Redundanz* des Parseval-Frames. Im Beispiel des Mercedes-Benz-Frames läßt sich leicht errechnen, dass $c^2 = \frac{3}{2}$, also echt größer als 1 ist. Wir haben also *“genug”* Information vorliegen, dass wir ruhig etwas davon verlieren dürfen. Ist die Redundanz gleich 1, so darf kein Verlust eintreten. In diesem Fall haben wir eine *Orthonormalbasis* vorliegen, d.h.

- $\|g_i\|_2 = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$, d.h. die Länge aller Vektoren ist 1,
- $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, d.h. die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

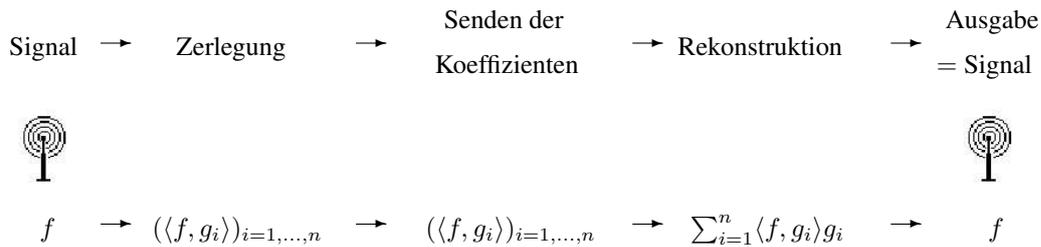


Abbildung 6: Schematische Darstellung der Übertragung eines Signals mit Hilfe eines Parseval-Frames

ander, und

- für jedes $f \in \mathbb{R}^d$ existiert genau eine Koeffizientenfolge $(a_i)_{i=1, \dots, n}$ mit $f = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ und zwar $(\langle f, g_i \rangle)_{i=1, \dots, n}$, d.h. die Darstellung jedes Signals f mit Hilfe von G ist durch $(\langle f, g_i \rangle)_{i=1, \dots, n}$ gegeben, aber im Gegensatz zu vorher ist dies die einzig mögliche Koeffizientenfolge.

Die kanonische Orthonormalbasis im \mathbb{R}^2 ist in der Abbildung 7 zu sehen.

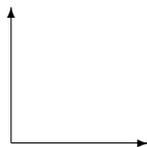


Abbildung 7: Die kanonische Orthonormalbasis im \mathbb{R}^2 gegeben durch die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$.

Man muss jetzt natürlich für jede Anwendung einzeln abwägen, ob man mehr Robustheit benötigt und dafür mehr Framevektoren benutzt – was wiederum die Rechenzeit erhöht –, oder ob man so wenig Vektoren wie möglich benutzen möchte – in diesem Fall bietet sich eine Orthonormalbasis an –, dafür aber keinen Koeffizienten verlieren darf.

Zurück zu Wavelet-Frames

Erinnern wir uns nun daran, dass wir endliche Mengen $D \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$ bestimmen wollten, so dass man ein Signal f aus den zugehörigen abgetasteten Werten der kontinuierlichen Wavelettransformation

$$\mathcal{W}_\psi f(a, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)} dx \tag{0.8}$$

mit Parametern $(a, t) \in A$ zurückberechnen kann. Der Einfachheit halber definieren wir

$$\psi_{a,t}(x) := \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-t}{a}\right).$$

Ferner bemerken wir, dass in $L^2(\mathbb{R})$ – dem Raum der Funktionen endlicher Energie, in dem sich unser Wavelet und damit auch alle “Kopien” $\psi_{a,t}$ befinden – das Skalarprodukt definiert ist durch

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Damit lässt sich (0.8) folgendermaßen umschreiben:

$$\mathcal{W}_\psi f(a, t) = \langle f, \psi_{a,t} \rangle, \quad (a, t) \in A.$$

Dies sieht schon sehr ähnlich den in Abschnitt betrachteten Framekoeffizienten (0.5) (vgl. auch (0.7)). Die Menge $\{\psi_{a,t} : (a, t) \in A\}$

müßte somit ein Frame sein, damit wir die in Abschnitt und entwickelte Theorie anwenden können. Ein Schönheitfehler tritt nun auf: Oben haben wir der Einfachheit halber Frames in \mathbb{R}^d betrachtet. Hier benötigen wir die Theorie allerdings für $L^2(\mathbb{R})$. Das ist aber kein Problem. Die ganze Theorie gilt sogar viel allgemeiner für sogenannte Hiberträume.

Verlangen wir also, dass

$$\{\psi_{a,t} : (a, t) \in A\} \tag{0.9}$$

einen Frame bildet, so können wir (0.6) anwenden und erhalten die Rekonstruktionsformel

$$f(x) = \sum_{(a,t) \in A} \mathcal{W}_\psi f(a, t) \widetilde{\psi}_{a,t}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\widetilde{\psi}_{a,t}, (a, t) \in A$ den zugehörigen dualen Frame darstellt. Bildet die Menge (0.9) sogar einen Parseval-Frame, so folgt nach (0.7) sogar die weitaus schönere Formel

$$f(x) = \sum_{(a,t) \in A} \mathcal{W}_\psi f(a, t) \psi_{a,t}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Aufgabe besteht somit darin, Mengen A so zu wählen, dass die Menge (0.9) einen Frame, Parseval-Frame oder eine Orthonormalbasis bildet, je nachdem ob man an Robustheit oder Minimalität (siehe Abschnitt) interessiert ist.

Die kanonischste Wahl einer Menge A ist die Verwendung der *dyadischen Abtastung*. Hierbei wählt man

$$A = \{(2^j, 2^j k) : j, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Eine graphische Veranschaulichung ist in Abbildung 8 zu finden.

Sehen wir uns diese Art der Abtastung zunächst etwas genauer an. Je kleiner a wird,

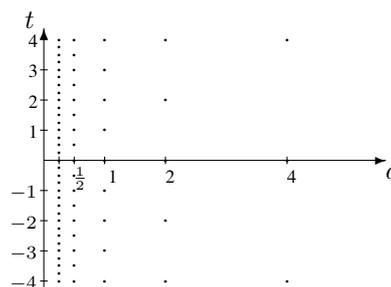


Abbildung 8: Die dyadische Abtastung $A = \{(2^j, 2^j k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$.

desto mehr Abtastpunkte werden auf die Verschiebung t verwendet. Dies ist sofort einleuchtend, wenn man überlegt, dass ein kleines a auch eine starke Stauchung des Wavelets bewirkt. Um jetzt noch das gesamte Signal mit Verschiebungen "abdecken" zu können, brauchen wir halt viel mehr Verschiebungen.

Das zugehörige, sogenannte *klassische Waveletsystem* hat für ein Wavelet ψ jetzt die folgende Gestalt:

$$\left\{ \frac{1}{2^{j/2}} \psi \left(\frac{x - 2^j k}{2^j} \right) = \frac{1}{2^{j/2}} \psi \left(\frac{x}{2^j} - k \right) : j, k \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{0.10}$$

Am Anfang der Entwicklung der Wavelettheorie wurde eine Vielzahl von Kriterien bewiesen, wann solch ein System eine Orthonormalbasis ist. Die gängigsten Wavelets, wie z.B. die Wavelets aus Abbildung 4 erfüllen alle diese Kriterien.

In den letzten Jahren wurde – da man den Vorteil der Robustheit einer Framedarstellung für eine Vielzahl von Anwendungen entdeckt hatte – damit begonnen, Systeme der Gestalt (0.10) auf Frameeigenschaften hin zu untersuchen. Auch hier liegen schon einige Resulta-

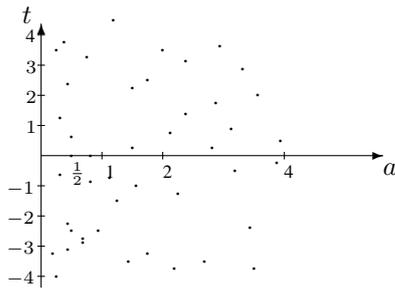


Abbildung 9: Eine beliebige Abtastmenge $A \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$.

te vor, die insbesondere Parseval-Frames der Form (0.10) vollständig beschreiben.

Manchmal findet man bei Resultaten auch die etwas allgemeinere Abtastmenge

$$A = \{(a^j, a^j bk) : j, k \in \mathbb{Z}\}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R},$$

Verwendung und somit das Waveletsystem, das von den Funktionen

$$\frac{1}{a^{\frac{j}{2}}} \psi \left(\frac{x - a^j bk}{a^j} \right) = \frac{1}{a^{\frac{j}{2}}} \psi \left(\frac{x}{a^j} - bk \right)$$

für $j, k \in \mathbb{Z}$ erzeugt wird. In konkreten Anwendung wird aber noch fast immer das klassische Waveletsystem verwendet. Es wird sich auch in Abschnitt 3 zeigen, dass diese Wahl der Abtastung einen zentralen Vorteil hat, denn sie stellt durch ihre enge Verbindung zu Filterbänken einen einfach zu implementierenden, schnellen Zerlegungs- und Rekonstruktionsalgorithmus bereit.

Zuletzt wollen wir noch bemerken, dass man natürlich statt der dyadischen Abtastung auch eine beliebige Abtastmenge $A \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$ verwenden kann. Ein Beispiel ist in Abbildung 9 dargestellt.

Allerdings werden dann Fragestellungen nach den Frameeigenschaften des zugehöri-

gen – man sagt *irregulären* – Waveletsystems

$$\left\{ \frac{1}{a^{\frac{j}{2}}} \psi \left(\frac{x - t}{a} \right) : (a, t) \in A \right\}.$$

sofort sehr kompliziert. Es gibt schon einige Resultate, die Frameeigenschaften solcher Systeme beschreiben, aber von einer vollständigen Charakterisierung, wie sie für klassische Waveletsysteme vorliegt, ist die derzeitige Forschung noch weit entfernt.

Literatur

- Blatter, C. (2003). *Wavelets. Eine Einführung*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.
- Christensen, O. (2003). *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Boston: Birkhäuser.
- Daubechies, I. (1992). Ten lectures on wavelets. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 61.
- Hubbard, B. (1998). *The World According to Wavelets: The Story of a Mathematical Technique in the Making*. Natick, MA: A. K. Peter, Ltd.
- Klein, A. (2008). Wavelet- und Fourierkohärenz in Theorie und Praxis. *Kognitive Neuropsychologie des Menschen*, 1, 33–39.
- Kutyniok, G. (2006). *Affine Density in Wavelet Analysis*. Justus-Liebig-Universität Gießen: Habilitationsschrift.
- Mallat, S. (1999). *A Wavelet Tour of Signal Processing* (2nd Aufl.). New York: Academic Press.

Abstract

T. Sauer (Giessen) — Wavelets and filter banks Digital signal processing is based on so-called *LTI filters* which can be handled very well theoretically but also allow for a practical hardware implementation. A wavelet decomposition can be realized by means of *filter banks*, provided that the concept of a *Multiresolution Analysis* (MRA) is used where a given function is decomposed into components of different detail levels. Applied to discrete data, this decomposition can be performed by filtering operations, leading to a fast decomposition method into octave bands, the so-called *pyramid scheme*.

Wavelets und Filterbänke

T. Sauer, Fachbereich Mathematik,
Justus-Liebig Universität, 35392 Giessen
tomas.sauer@math.uni-giessen.de

Die Waveletanalyse kontinuierlicher Funktionen, also die Zeit–Frequenz–Analyse aus dem vorherigen Kapitel, ist sicherlich ein wichtiges Hilfsmittel zur Identifizierung zeitlokaler Phänomene, aber eben nur eine Anwendung der Wavelets. Wir werden uns jetzt einen Zugang zu Wavelets ansehen, der aus der digitalen Signalverarbeitung stammt und Wavelets über *Filterbänke* definiert. Dazu müssen wir natürlich zuerst einmal herausfinden, was Signale, Filter und Filterbänke eigentlich sind.

Signale und Filter

Ein *Signal* kann prinzipiell eine beliebige Funktion σ sein, die einen Parameterbereich auf eine Menge von potentiellen Messergebnissen abbildet. Ein Bild beispielsweise hat zwei (ganzzahlige) Parameter, die x - und die y -Koordinate des Pixels, sowie den Wert des Pi-

xels, der eine Graustufe oder aber ein RGB–Triplet sein kann. Diese Werte werden normalerweise dann auch noch *quantifiziert*, das heißt, in einem Bild finden sich keine kontinuierlichen Werte für die Graustufen, sondern nur Werte aus dem Bereich $0, \dots, 255$, also eine 8–Bit Quantifizierung. Quantifizierung ist in der Realität ein wichtiges und schwieriges Problem, das bei allen Messungen auftaucht, aber wir wollen es hier ignorieren.

Unser Modell eines Signals soll hier relativ einfach sein, nämlich

$$\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma = (\sigma(j) : j \in \mathbb{Z}), \quad (0.1)$$

also *reelle* Werte an *ganzzahligen* Abtastpunkten. Durch die reellen Werte umgehen wir die Quantisierungsproblematik und “ganzzahlig” ist für (zeit)diskrete Messung keine Einschränkung: Jeder Index j entspricht einem Messzeitpunkt, und ob diese Messungen nun mit einer Abtastfrequenz von 1000Hz oder 1Hz durchgeführt wurden, ist für die Filterung ohnehin irrelevant.

Ein einfaches Beispiel für solch ein diskretes Signal findet sich in Abbildung 1: Ein akustisches Signal wurde mit einer Frequenz

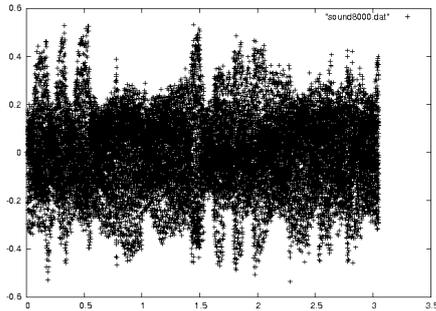


Abbildung 1: Ein Soundsignal mit 8000Hz abgetastet

von 8000Hz abgetastet und die Amplituden gespeichert. Und auch wenn die verwendete Hardware sicherlich nur eine endliche Auflösung hatte, so sind die erzeugten Daten dennoch “numerische” Gleitkommawerte. Warum auch nicht?

Ein *Filter* F ist nun eine Abbildung, die ein Signal σ in ein Signal $\sigma' = F\sigma$ überführt. Diese Definition ist eigentlich ziemlich nichtssagend, und sie erlaubt einfach zu viele Typen von Filtern, um mathematisch überhaupt noch etwas aussagen zu können. Daher beschränkt man sich in der digitalen Signalverarbeitung, siehe z.B. (Grüningen, 1993; Hamming, 1998; Kammerer & Kroschel, 1998; Schüßler, 1992), zumeist auf sogenannte *LTI-Filter*, also Filter, die

Linear: Der Filter agiert als “linearer Operator”, das heißt, es gilt

$$F(a\sigma + b\sigma') = aF\sigma + bF\sigma'.$$

Mit anderen Worten: Addiert man zwei Signale, so ist das Ergebnis der Filterung die Summe der beiden Filterungen und multipliziert man ein Signal mit einer Konstanten, ändert man also die “Skalierung”

der Amplitude, so passiert genau dasselbe mit dem gefilterten Signal.

Time Invariant: Was passiert hängt nicht davon ab, wann es passiert, das heißt, wird der Filter auf eine *zeitversetzte* Variante des Signals angewandt, dann ist das Ergebnis eine zeitversetzte Kopie der Filterung. Mathematisch beschreibt man das gerne über den *Translationsoperator* T ,

$$(T\sigma)(j) = \sigma(j + 1), \quad j \in \mathbb{Z},$$

und $T^k\sigma = \sigma(\cdot + k)$ und erhält Zeitinvarianz als

$$F(T^k\sigma) = T^k(F\sigma), \quad \Leftrightarrow \quad TF = FT. \tag{0.2}$$

sind. Solch ein Filter — und von jetzt an soll “Filter” immer für einen LTI-Filter stehen — lässt sich besonders einfach darstellen, nämlich über seine *Impulsantwort* $f = F\delta$, die man dadurch erhält, daß man einen “Puls” in das System schickt, also ein Signal, das zum Zeitpunkt 0 den Wert 1, sonst aber immer den Wert 0, siehe Abbildung 2. Das dürfte auch den Na-

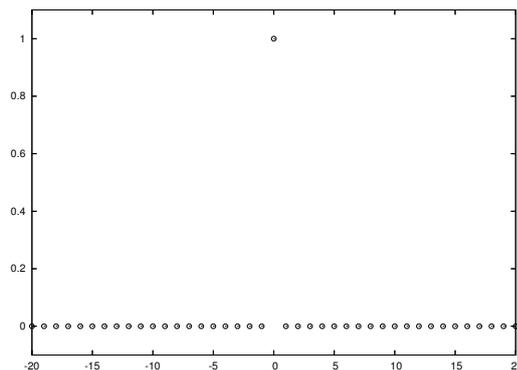


Abbildung 2: Das δ -Signal.

men “Impulsantwort” erklären. Mit deren Hilfe

kann man die "Tätigkeit" des Filters F als *Faltung* mit der Impulsantwort schreiben:

$$(F\sigma)(j) = (f * \sigma)(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \sigma(j - k). \quad (0.3)$$

Wie so ein Filter funktioniert sieht man ganz

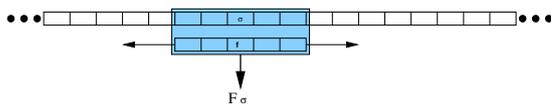


Abbildung 3: Schematische Darstellung des Filterungsprozesses: Der Filter wird wie ein "Fenster" über das Signal σ geschoben und das Produkt der einzelnen Koeffizienten aufsummiert; das ergibt dann den Wert des gefilterten Signals zum jeweiligen Zeitpunkt.

gut in Abbildung 3, der Filter agiert wie eine Art Fenster, die über das Signal geschoben wird und so "stückchenweise" die Filterung berechnet. Am wichtigsten ist aber sicherlich die folgende Eigenschaft:

Ein Filter mit *endlicher* Impulsantwort kann technisch realisiert werden.

Außerdem ermöglicht die in (0.3) verwendete Faltung noch eine schnellere Berechnung von Filterungen, wenn man die *Fouriertransformierte* des Signals betrachtet, die sich in *Matlab* bzw. *Octave* mit dem Befehl `fft` berechnen lässt, und die aus der Beziehung

$$(f * \sigma)^{\wedge} = \hat{f} \cdot \hat{\sigma}$$

folgt. Wenn man zuerst Filter und Signal transformiert, dann ein komponentenweises Produkt berechnet und dieses wieder zurücktransformiert, dann kann man die Filterung *wesentlich* schneller berechnen, als direkt über

die Formel (0.3). Das ist so toll, daß es in *Matlab/Octave* sogar eine eigene Funktion `fftfilt` gibt, die Filterungen auf genau diese Art und Weise berechnet.

Oftmals wird das Filterdesign sogar im Fourier-transformierten Bereich durchgeführt, man muss nur an einen *Bandpass-Filter* denken, der beispielsweise die unteren 50% der Frequenzen durchlässt und die oberen 50% sperrt, was in der Fouriertransformation einer Funktion entspricht, die auf der unteren Hälfte der Werte den Wert 1 und auf der oberen Hälfte der Werte den Wert 0 hat. Diese Funktion braucht man dann "nur" mit `ifft`, der Funktion für die *inverse Fouriertransformation*, zurückzutransformieren, und schon ergibt sich der zugehörige Filter. Wenn's nur so einfach wäre, denn:

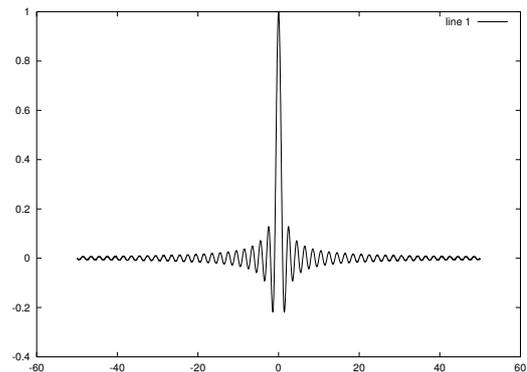


Abbildung 4: Die *sinc-Funktion*.

1. Die inverse Fouriertransformation solch einer Funktion ist eine *sinc-Funktion*, siehe Abbildung 4 und die "lebt" auf der ganzen reellen Achse, das heißt, die zugehörige Impulsantwort ist nicht mehr endlich, die Summe in (0.3) wird unendlich und muss abgeschnitten werden um numerisch noch realisiert werden zu können.

nen. Das führt aber wieder zu Fehlern bei der Berechnung, was dadurch verschlimmert wird, daß die Funktion verhältnismäßig langsam abklingt und daß daher zu frühes Abschneiden zu Fehlern führt. Wie war das doch gleich wieder mit der Realisierbarkeit?

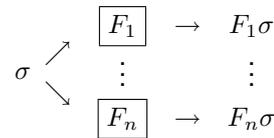
2. Welche absoluten Frequenzen so ein Filter nun wirklich sperrt und welche er durchlässt, das hängt jetzt sehr wohl von der Abtastfrequenz ab. Klar: Wenn wir mit 8000Hz abtasten, dann sind die unteren 50% der Bereich von 0–4000Hz, bei der CD-üblichen Abtastrate von 44100Hz hingegen haben wir es mit 0–22050Hz zu tun. Einen "richtigen" Bandpassfilter muss man also immer an die Abtastrate anpassen ...

Filterbänke

Die einfachste Realisierung einer Filterbank im Alltag ist der Equalizer von Stereoanlagen oder MP3-Playern, in dem ein akustisches Signal in verschiedene Frequenzkomponenten zerlegt wird, die dann gewichtet und wieder neu zusammengesetzt werden. Anders gesagt: Man verwendet nicht nur *einen* Filter, um ein Signal zu transformieren, sondern wendet gleich *mehrere* Filter auf ein Eingangssignal an und setzt umgekehrt das Ergebnis aus Filterungen mehrerer Eingangssignale zusammen. So gesehen besteht eine Filterbank also aus zwei Teilen:

Die Analyse-Filterbank zerlegt unter Verwendung der Filter F_1, \dots, F_n das Ein-

gangssignal σ in

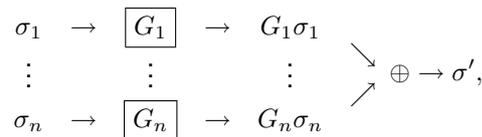


das heißt,

$$\sigma \mapsto F\sigma = \begin{bmatrix} F_1\sigma \\ \vdots \\ F_n\sigma \end{bmatrix},$$

und bildet so das Eingangssignal auf einen *Vektor* von gefilterten Signalen ab.

Die Synthese-Filterbank bestimmt durch Filterung und Summation

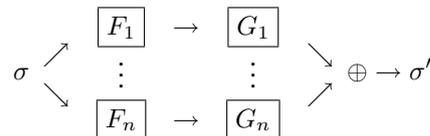


also

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} \mapsto \sigma' = G_1\sigma_1 + \dots + G_n\sigma_n$$

wieder ein einzelnes Ergebnissignal aus einem Vektor von Eingangsdaten.

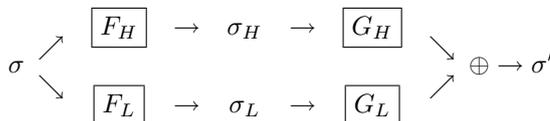
Eine wichtige Minimaleigenschaft einer "vernünftigen" Filterbank ist die *perfekte Rekonstruktion*, was nichts anderes bedeutet als daß die Synthese wirklich das Gegenstück zur Analyse darstellen soll, daß also



immer $\sigma' = \sigma$ ergibt – die Filterbank liefert also auch wieder das zurück, was reingesteckt

wird. Die eigentliche Signalverarbeitung geschieht natürlich zwischen Synthese und Analyse und stellt irgendetwas mit $F\sigma$ an. Der bereits erwähnte Equalizer skaliert beispielsweise die Amplituden der einzelnen Komponenten um, bevor dann das Signal wieder neu kombiniert wird.

Eine "Kleinigkeit" soll allerdings nicht unerwähnt bleiben: Wenn wir eine Filterbank verwenden, also ein Signal in n Signale transformieren, dann haben wir es ja auch mit der n -fachen Informationsmenge zu tun, zumindest erst einmal formal. Beim Equalizer ist das auch so: Die Amplituden der einzelnen Bandbereiche werden ja immer noch mit der gleichen Frequenz abgetastet, daß jedes dieser Bänder nur einen Teil der Information enthält sieht man nur an deren Fouriertransformierten. Wenn man also unnötige Redundanz vermeiden will, dann muss man die Signale in $F\sigma$ irgendwie "ausdünnen" und genau das passiert auch bei den Wavelet-Filterbänken – ja, wir kommen zum Thema! Jetzt haben wir es mit einer *Zweikanal-Filterbank* der Form



zu tun, perfekte Rekonstruktion versteht sich von selbst. Da aber das gefilterte Gesamtsignal $[\sigma_H, \sigma_L]$ wieder doppelt so viel Information enthält wie σ selbst, gehen wir, um wieder in dieselbe Größenordnung zu kommen, ganz brutal vor und löschen in σ_H und σ_L jeden zweiten Eintrag. Das hat zwei Vorteile: Die Größe stimmt wieder und diese einfache Operation des *Subsampling* oder *Downsampling* lässt sich sehr einfach sowohl programmieren als auch in Hardware implementieren. Umgekehrt müssen wir bei der Rekonstruktion die

Signale erst wieder auf die richtige Länge "aufblasen", was sich am einfachsten dadurch erreichen lässt, daß man zwischen je zwei Werten eine Null einfügt. Unter Verwendung der entsprechenden Filter \downarrow_2 und \uparrow_2 ergibt sich unsere Filterbank dann wie in (0.4). Und damit sind wir im Geschäft und können endlich auch die Indizes erklären: σ_H ist als der *hochfrequente* Anteil des Signals σ zu verstehen, F_H ist also ein *Hochpassfilter*, σ_L hingegen stellt den *niederen* Anteil von σ dar, weswegen F_L ein entsprechender *Tiefpassfilter* sein muss. Natürlich stellt die perfekte Rekonstruktion durch die Filterbank eine Forderung an die vier Filter F_H, F_L, G_H und G_L dar, aber man kann mathematisch charakterisieren, wann solche Filter existieren und vor allem, wie sie miteinander verknüpft sein müssen, siehe (Vetterli & Kovečević, 1995). Tabellen mit den Koeffizienten von Waveletfiltern finden sich darüber hinaus auch in (Daubechies, 1992; Mallat, 1999), und die gute Nachricht ist, daß es derartige Filter mit vielen guten Eigenschaften gibt und man sich sogar seinen Wunschfilter selbst "basteln" kann.

Multiresolution Analysis und Filterbänke

Was aber hat das nun alles mit Wavelets zu tun, wo doch Wavelets eigentlich "kleine Wellen" und damit Funktionen sind. Nun, die Grundidee hinter dieser Geschichte ist die sogenannte *Multiresolution Analysis*, die von einer passenden Funktion φ , der sogenannten *Skalierungsfunktion*, erzeugt wird, und zwar, indem wir zuerst einmal alle ganzzahligen Translate $\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}$, der Skalierungsfunktion betrachten. Zu einem Signal σ und zu φ gibt

$$\sigma \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \begin{matrix} \boxed{F_H} \rightarrow \boxed{\downarrow_2} \rightarrow \sigma_H \rightarrow \boxed{\uparrow_2} \rightarrow \boxed{G_H} \\ \boxed{F_L} \rightarrow \boxed{\downarrow_2} \rightarrow \sigma_L \rightarrow \boxed{\uparrow_2} \rightarrow \boxed{G_L} \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \oplus \rightarrow \sigma'. \quad (0.4)$$

es nun eine "natürliche" Funktion, nämlich die Faltung

$$\varphi * \sigma = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(x - j) \sigma(j), \quad (0.5)$$

man betrachtet das Signal also als Koeffizientenfolge für die Translate der Funktion.

Das geht immer noch für jedes beliebige φ , weswegen wir noch eine weitere Eigenschaft von φ fordern, nämlich *Verfeinerbarkeit*. Um zu verstehen, was das ist, sehen wir uns zuerst einmal die Funktion $\varphi(2x)$ an, die eine gestauchte, halb so breite Version von φ ist. Wenn wir nun davon die Translate $\varphi(2x - j)$, $j \in \mathbb{Z}$, bilden, dann sind das gestauchte Kopien von φ , die um halbzahlige Werte verschoben wurden – daß dem so ist, dafür sorgt das "2x". Die Forderung an φ ist nun, daß es sich als Überlagerung dieser gestauchten und verschobenen Kopien darstellen lässt, was sich in mathematischer Schreibweise als

$$\varphi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2x - j) a(j) = \varphi * a(2x), \quad (0.6)$$

für ein passendes "Signal" a darstellen lässt – und dieses magische Signal a werden wir in unserer Filterbank wiederfinden. Es gibt eine Vielzahl von verfeinerbaren Funktionen, deren einfachstes und prominentestes Beispiel die Haarfunktion ist, die auf dem Intervall $(0, 1]$ den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat und die offensichtlich die Summe der beiden Funktionen ist, die auf $(0, \frac{1}{2}]$ und $(\frac{1}{2}, 1]$ leben; die halboffenen Intervalle braucht man, weil die Funktion nicht stetig ist, also an 0 und 1 springt. Ein etwas

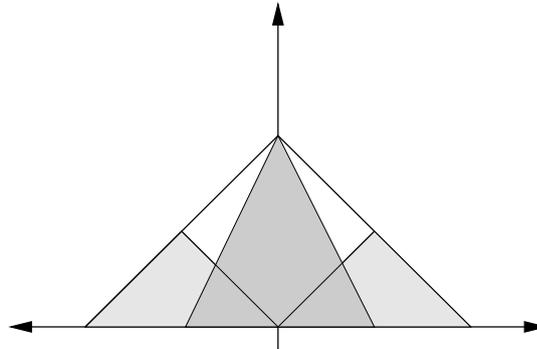


Abbildung 5: Die "Dachfunktion" ist ein Beispiel für eine verfeinerbare Funktion, die Koeffizienten dazu sind $a(-1) = a(1) = \frac{1}{2}$ und $a(0) = 1$.

komplizierteres, dafür aber auch stetiges Beispiel ist in Abbildung 5 zu finden.

Die MRA besteht dann aus den Räumen

$$\begin{aligned} V_0 &= \sigma * [\varphi(x - j) : j \in \mathbb{Z}] \\ V_1 &= \sigma * [\varphi(2x - j) : j \in \mathbb{Z}] \\ V_2 &= \sigma * [\varphi(4x - j) : j \in \mathbb{Z}] \\ &\vdots \\ V_n &= \sigma * [\varphi(2^n x - j) : j \in \mathbb{Z}], \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

die wegen (0.6) alle ineinander verschachtelt sind:

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \subset \dots \quad (0.7)$$

Mit anderen Worten: V_1 ist V_0 und ein bisschen mehr! Und dieses bisschen mehr kann man wieder so wählen, daß es von den Translaten einer einzelnen Funktion erzeugt wird, daß also

$$V_1 = \sigma_0 * [\varphi(x - j) : j \in \mathbb{Z}] \oplus \sigma_1 * [\psi(x - j) : j \in \mathbb{Z}]$$

ist, und genau diese Funktion ψ ist das Wavelet! Das einfachste Beispiel einer Skalierungs-

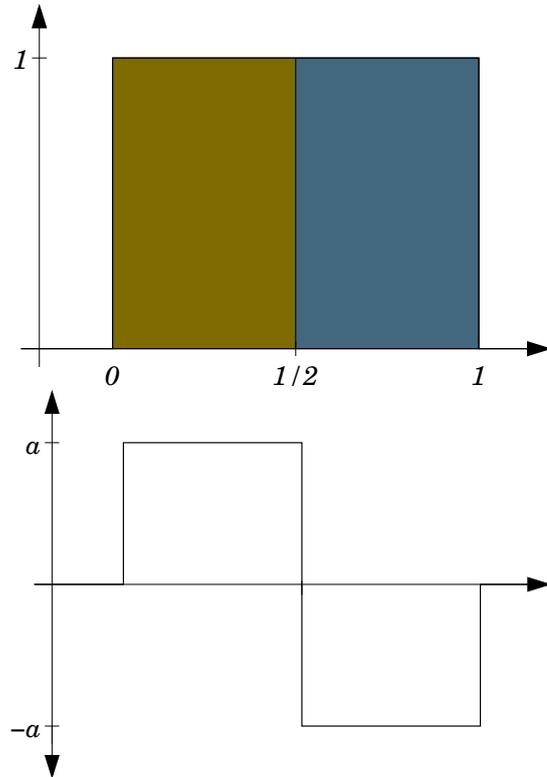


Abbildung 6: Die Skalierungsfunktion zur Haar-MRA, die auf der Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$ basiert, und das zugehörige Wavelet, das Haar-Wavelet.

funktion und des zugehörigen Wavelets ist in Abbildung 6 dargestellt.

Aber es wird noch besser: Wir können die Koeffizienten einer solchen Zerlegung durch eine Filterbank der Form (0.4) bestimmen und erhalten so, daß

$$\begin{aligned} \varphi * \sigma(2x) &= \varphi * \sigma_0(x) + \psi * \sigma_1(x) \\ &= \varphi * F_L \sigma(x) + \psi * F_H \sigma(x) \end{aligned} \quad (0.8)$$

ist. Und was einmal klappt, das klappt immer wieder! Ersetzen wir in (0.8) den Term

$2x$ durch $2^n x$, dann erhalten wir die Zerlegung wie in (0.9), was eine Zerlegung des "hochaufgelösten" Signals σ in verschiedene Detailstufen ist. Und alle diese Detailstufen lassen sich komplett als Kaskaden unserer Filterbank berechnen, indem wir das Ergebnis der Tiefpassfilterung immer wieder in die Filterbank einspeisen. Wenn wir nun ein wenig "Buchhaltung" betreiben, dann stellen wir fest, daß wir im ersten Schritt etwa 50% der Information in den Hochpassanteil verlagern, die anderen 50% des Tiefpassanteils wieder in einen Hoch- und einen Tiefpassanteil zerlegen und mit dem Tiefpassanteil so fortfahren. Betrachten wir die

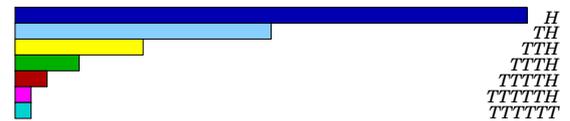


Abbildung 7: Schematische Darstellung der Anteile, die verschobene und auf dem Kopf stehende Pyramide.

schematische Darstellung dieses Vorgehens in Abbildung 7 und zentrieren wir die Balken, dann sieht das Ganze aus wie eine auf dem Kopf stehende Pyramide, was den Namen "Pyramidenschema" erklärt.

Jetzt wird es aber Zeit für ein Beispiel, und da drängt sich natürlich das Haar-Wavelet auf, für das ein Zerlegungsschritt in Abbildung 8 dargestellt ist. Das "feine" Signal links wird durch einen Mittelungsprozess vergrößert (das ist ja dann die Darstellung bezüglich der Skalierungsfunktion in niedrigerer Auflösung) und der dabei gemachte Fehler wird dann durch das Wavelet kompensiert. Andere MRAs bilden dann Mittelungen über eine größere Anzahl von Werten und nutzen entsprechende Wavelets mit größerem Träger, um mögliche

$$\begin{aligned}
 \varphi * \sigma(2^n x) &= \varphi * F_L \sigma(2^{n-1} x) + \psi * F_H \sigma(2^{n-1} x) \\
 &= \varphi * F_L F_L \sigma(2^{n-2} x) + \psi * F_H F_L \sigma(2^{n-2} x) + \psi * F_H \sigma(2^{n-1} x) \\
 &= \varphi * \underbrace{F_L \cdots F_L}_n \sigma(x) + \psi * F_H \underbrace{F_L \cdots F_L}_{n-1} \sigma(x) + \cdots \\
 &\quad \cdots + \psi * F_H F_L \sigma(2^{n-2} x) + \psi * F_H \sigma(2^{n-1} x),
 \end{aligned}
 \tag{0.9}$$

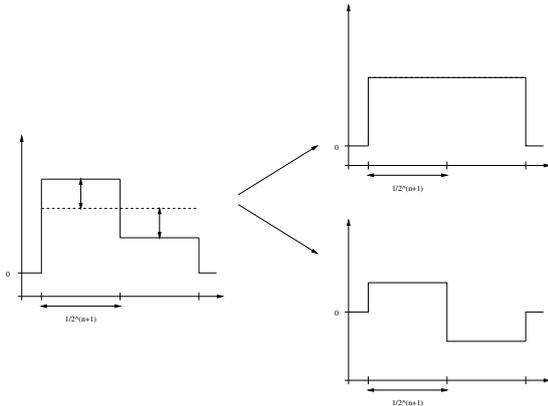


Abbildung 8: Ein Zerlegungsschritt in der Haar-MRA.

Fehler auszugleichen.

Was ist nun der Vorteil dieser MRA? Wenn wir genau hinsehen, dann verwenden *alle* Rechnungen lediglich die *Koeffizienten* der Funktion $f = \varphi * \sigma(2^n x)$, also das Signal σ selbst, wobei der Parameter n wieder nichts anderes als die Abtastrate ist. Das Signal wird gefiltert und die Filterung ergibt die Koeffizienten bezüglich des Wavelets und der größeren Skalierungsfunktion. Keine der beiden Funktionen taucht aber in den Rechnungen auf – die verwenden nur die Filter. Natürlich hängen die Funktionen und die Filter eng zusammen – kennt man das eine, so bestimmt das auch das andere – aber für unsere Anwendung benötigen wir wirklich nur die Filter.

Fassen wir das Schema nochmal zusam-

men: Durch die wiederholte Anwendung der Filterbank zerlegen wir das Signal wie in Abbildung 9 gezeigt in seine Komponenten, von denen wir $\sigma_H, \sigma_{HL}, \dots, \sigma_{HL\dots L}$ und $\sigma_{L\dots L}$ "aufheben" und für die Analyse oder Modifikation des Signals benutzen. Die *Rekonstruktion* von σ aus diesen Bestandteilen erfolgt dann durch wiederholte Anwendung der Synthesefilterbank aus Abbildung 10, und die perfekte Rekonstruktion durch die Filterbank garantiert auch eine perfekte Rekonstruktion durch die Kaskade.

Anwendungen

Den praktischen Nutzen der diskreten Waveletzerlegung erkennt man schon aus der intuitiven Vorstellung der Zerlegung als "grobe Information plus Detailkorrektur":

1. Enthält ein Signal wenige Details, dann wird es bereits durch eine wesentlich geringere Auflösung gut dargestellt und alle Detailkorrekturen fallen mehr oder weniger klein aus, so daß sich das Signal bis auf kleine Störungen auch durch die *wesentlichen* Koeffizienten in der Zerlegung darstellen lässt. Dies hilft bei der **Datenkompression**.
2. An Stellen, an denen gehäuft Korrekturen auftreten, muss etwas passieren. Tatsächlich kann man Wavelets so basteln,

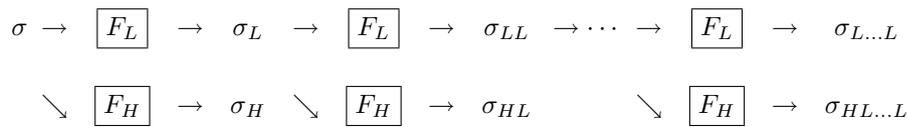


Abbildung 9: Zerlegung eines Signals in seine Wavelet-Komponenten.

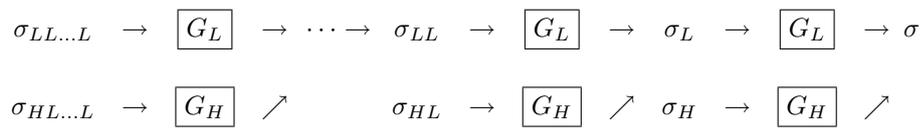


Abbildung 10: Die Rekonstruktion des Signals aus Skalierungs- und Waveletkoeffizienten.

daß die gewichteten Koeffizienten hoher Auflösung klein sein *müssen*, wenn die Funktion dort glatt (im Sinne von Differenzierbarkeit) ist, also keine Sprünge oder Knicke hat. Liegen aber hohe Koeffizienten vor, dann ist die Funktion dort eben nicht glatt, hat also eine Sprungstelle oder einen Knick dort, was man nun wieder für die **Konturerkennung** nutzen kann.

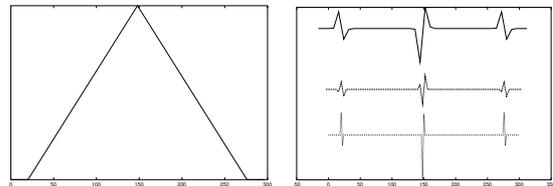


Abbildung 11: Eine einfache Testfunktion mit drei Knicken und die passend skalierten Waveletkoeffizienten, die eindeutig auf die Knicke deuten.

- Ist ein Signal mit relativ hochfrequentem Rauschen von relativ kleiner Amplitude belastet, dann äußert sich das in kleinen Detailkorrekturen, also in vergleichsweise kleinen Waveletkoeffizienten. Man kann daher beim **Entrauschen** so vorgehen, daß man Waveletkoeffizienten, deren Absolutbetrag unter einem bestimmten Wert (*Threshold*) liegt, einfach auf Null setzt und so diese kleinen und ohnehin unwichtigen Detailstörungen entfernt.

Ein Beispiel sollten wir uns schon ansehen, und zwar eines zur Eckenerkennung durch Wavelets, siehe Abbildung 11. Zur Analyse wurde ein sogenanntes Daubechies-Wavelet (D_5) verwendet, das selbst differenzierbar ist

und daher imstande ist, nicht nur Sprünge, sondern Knicke durch große Waveletkoeffizienten zu identifizieren.

Nachdem man sie in den meisten Paketen zur Signalverarbeitung findet, noch ein kurzes Wort zu den Daubechies-Wavelets: Es handelt sich hierbei um eine Familie von Wavelets (mit einem Parameter, daher D_x), die mit wachsendem Parameter immer glatter werden, aber immer noch Filter mit endlicher Impulsantwort besitzen, und zwar besonders einfache Filter, sogenannte *Spiegelfilter*. Nun ist Glattheit ja gut, da dann die Wavelets sensitiv gegenüber verschiedenen Typen von Singularitäten werden, aber natürlich hat das auch einen Preis: Die Filter werden immer länger

und “verschmieren” damit auch immer größere Bereiche des Signals. Womit wir beim Thema sind:

Die Auswahl eines geeigneten Wavelets für eine bestimmte Anwendung ist immer ein Balanceakt zwischen Lokalität und Glattheit.

Inzwischen besitzen auch die sogenannten “Wavelet–Packages” eine gewisse Popularität, gerade auch in Anwendungen. Hierbei wird nicht nur das Ergebnis der Tiefpassfilterung zerlegt, sondern auch die Waveletkoeffizienten in die Kaskade geschickt. Aus der Pyramide wird also ein Stapel von Blöcken gleicher Länge. Diese Zerlegungsform ist zwar nicht durch die MRA begründet, wird aber gerne für *Klassifizierungsprobleme* verwendet: Die Position (also der Index) und der Wert der signifikantesten Koeffizienten liefern eine Art “Fingerabdruck” des betrachteten Signals, und diese Vektoren kann man dann von einem Standardklassifizierungssystem wie neuronale Netzwerke, Regression oder lerntheoretische Methoden verarbeiten lassen.

PferdefüÙe

So, das war’s dann mit der Werbeveranstaltung für Wavelets, jetzt kommen wir zu einem etwas unerfreulicheren Thema, nämlich der Frage, was beim Umgang mit Wavelets und Filterbänken so alles schiefgehen kann.

Das wesentliche Problem ist schnell erzählt: Realistische Signale wie Messungen oder Bilder sind immer endlich, fangen irgendwann an und hören irgendwann auf. Andererseits hat aber der Filter eine endliche Länge und braucht daher am Anfang und Ende des Si-

gnals Informationen, die nicht vorliegen siehe

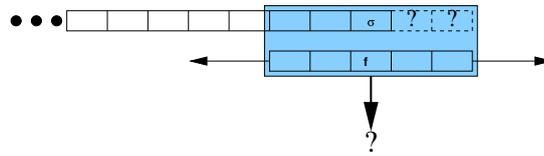


Abbildung 12: Situation am Ende eines Signals: Die Werte, die der Filter benötigt, liegen nicht vor.

Abbildung 12. Man muss das Signal also irgendwie ergänzen und das kann man eigentlich nur falsch machen. Populäre Ansätze sind

1. Fortsetzung mit Nullen. Ist der letzte Wert des Signals noch ziemlich groß, dann führt das zu einem Sprung und damit zu großen Waveletkoeffizienten am Rand.
2. Konstante Fortsetzung, der letzte Wert wird einfach wiederholt und Sprünge vermieden. Aber natürlich kann es dann Kanten geben . . .
3. periodische Fortsetzung. Diese wird von den meisten Softwarepaketen automatisch gemacht und funktioniert eigentlich nur dann, wenn sich das Ende des Signals ungefähr so verhält wie der Anfang. Ansonsten haben wir es wieder mit einem Sprung zu tun.

Wie man sieht – Raten muss immer irgendwie scheitern, denn jeder dieser Ansätze hat durchaus seine Berechtigung, aber ganz genauso kann man sich für jeden Ansatz sehr leicht Daten überlegen, die ihn scheitern lassen.

Sehen wir uns zwei Beispiele an, um das zu verdeutlichen, ein realistisches und ein synthetisches. Wie Abbildung 13 zeigt, ist die Lokalisierung von Singularitäten bei “echten” Signalen nie so gut wie bei konstruierten Beispielen

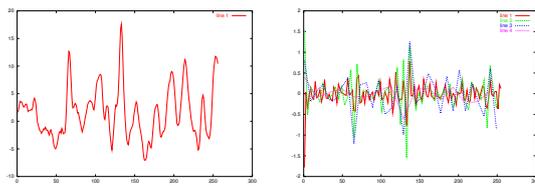


Abbildung 13: Ein EEG-Signal und die zugehörige Waveletzerlegung.

wie in Abbildung 11, und es wäre ja auch naiv, das zu erwarten. Während nämlich der scharfe Zacken etwa in der Mitte des Signals sehr gut erkannt wird, stellen die Waveletkoeffizienten die andern Singularitäten nicht immer wirklich überzeugend dar. Auch das ist eine Konsequenz, des “verschmiereden” Effekts der Filterung, die immer ihre Schwierigkeiten haben wird, wenn Singularitäten dicht beisammen liegen. Außerdem kommt man sehr schnell in Auflösungsprobleme, da ja in jedem Schritt die Länge des zu zerlegenden Signal (der Tiefpassanteil) *halbiert* wird und damit das Signal sehr schnell kürzer als die Filterlänge wird. Ach ja, die großen Koeffizienten am linken Rand sind Artefakte, die aus dem “Raten” der fehlenden Koeffizienten entstehen.

Ein klein wenig besser sieht man das am Beispiel in Abbildung 14, wo man noch sehr gut unterscheiden kann, welche Singularitäten echt und welche Artefakte sind. Was man auch sehr gut erkennt, ist die Tatsache, daß die Knicke aufgrund der Filterlänge nicht scharf lokalisiert werden, sondern irgendwo in diesen markierten Bereichen liegen müssen.

Literatur

Daubechies, I. (1992). Ten lectures on wavelets. *CBMS-NSF Regional Conference*

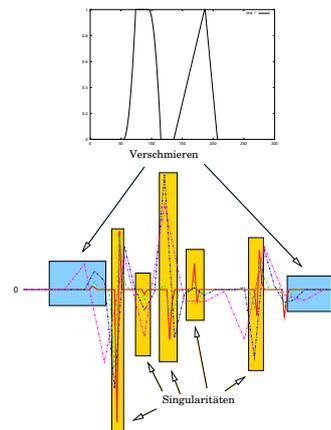


Abbildung 14: Ein Signal mit verschiedenen Knicken und die Waveletkoeffizienten.

Series in Applied Mathematics, 61.

Grüningen, D. C. von. (1993). *Digitale Signalverarbeitung*. Berlin: VDE Verlag, AT Verlag.

Hamming, R. (1998). *Digital Filters*. New York: Dover Publications.

Kammeyer, K. D. & Kroschel, K. (1998). *Digitale Signalverarbeitung*. B. G. Teubner, Stuttgart: Teubner Studienbücher Elektrotechnik.

Mallat, S. (1999). *A Wavelet Tour of Signal Processing* (2nd Aufl.). New York: Academic Press.

Schübler, H. W. (1992). *Digitale Signalverarbeitung* (3rd Aufl.). Berlin: Springer.

Vetterli, M. & Kovečević, J. (1995). *Wavelets and Subband Coding*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Abstract

A. Klein (Giessen) — Wavelet and Fourier coherence: theory and practical application

A common question that arises in signal analysis is whether two signals are related in any way. Aside from correlation analysis in the time-domain, coherence is another indicator of interdependence that is defined in the frequency-domain. Overcoming the limits of classical coherence analysis which reveals only very little information about the temporal aspects of coherent events, coherence analysis with wavelets allows a detailed analysis of their temporal structure, especially if the events have known triggers. This article compares classical coherence analysis to wavelet-based analysis of coherence and phase-locking-value, as well as taking a brief look at bicoherence.

Wavelet- und Fourierkohärenz in Theorie und Praxis

A. Klein, Fachbereich Mathematik,
Justus-Liebig Universität, 35392 Giessen
Alexander.Klein@math.uni-giessen.de

Signale und Filter

Eine Fragestellung, die – nicht nur – in der Analyse von EEG-Daten auftritt ist die, was zwei zur gleichen Zeit an verschiedenen Orten gemessene Signale miteinander zu tun haben. Es wird schnell klar, dass dieser Zusammenhang vielgestaltig sein kann, so können die Signale zum Beispiel

- durch zeitliche Verschiebung auseinander hervorgehen,
- durch Filterung auseinander hervorgehen,

- in ihrer Phase an denselben Generator gekoppelt sein,
- auf komplizierte Art und Weise zusammenhängen, zum Beispiel durch Gleichrichtung oder Multiplikation,
- durch eine Kombination von alledem.

Bedingt durch diese Vielzahl möglicher Zusammenhänge wurde eine Anzahl verschiedener Verfahren entwickelt, die ein Paar von Signalen auf einen oder mehrere der oben genannten Aspekte hin untersuchen; so lässt sich zum Beispiel die zeitliche Verschiebung besonders gut durch Berechnung von Korrelation und Kovarianz aufdecken. Für ein Signal wie das EEG jedoch, bei dem ein Großteil der interessanten Merkmale im Frequenzbereich verborgen sind, greift eine solche Analyse regelmäßig zu kurz, und daher werden andere Verfahren benötigt, die wir im Folgenden näher betrachten wollen.

Ein sehr gut verstandenes Konzept für den Zusammenhang zwischen zwei Signalen ist das des sogenannten linearen Faltungsfilters,

das oben schon beschrieben wurde. Wir erinnern uns: In diesem Fall gibt einen schönen Zusammenhang zwischen den Spektren \hat{u}, \hat{v} und \hat{F} , der Signale u, v und des Filters F , nämlich:

$$\hat{v}(f) = \hat{u}(f) \cdot \hat{F}(f).$$

Was bedeutet das für das Spektrum des gefilterten Signals bei irgendeiner Frequenz f ? Um diese Frage zu beantworten zerlegen wir zunächst die Fouriertransformierten in *Phase* und *Amplitude*, indem wir schreiben

$$\begin{aligned} \hat{u}(f) &= U_f \cdot e^{-i\phi_f} \\ \hat{v}(f) &= V_f \cdot e^{-i\varphi_f} \\ \hat{F}(f) &= F_f \cdot e^{-i\psi_f} \end{aligned}$$

mit

$$U_f, V_f, F_f \geq 0 \quad \phi, \varphi, \psi \in [0, 2\pi).$$

Die Gleichung des Faltungsfilters liefert uns dann

$$\begin{aligned} V_f \cdot e^{-i\varphi_f} &= U_f e^{-i\phi_f} \cdot F_f e^{-i\psi_f} \\ &= U_f F_f \cdot e^{-i(\phi_f + \psi_f)}, \end{aligned}$$

also insbesondere

$$V_f = U_f \cdot F_f \quad \text{und} \quad \varphi_f \equiv_{2\pi} \phi_f + \psi_f.$$

Ein lineares Filter bewirkt also für alle Frequenzen lediglich eine über die Zeit konstante Veränderung der Amplitude und eine ebenso über die Zeit konstante Verschiebung der Phase.

Kohärenz

Den gerade beschriebenen Zusammenhang von zwei Signalen über ein lineares Filter möchte man natürlich herausfinden können, und ein entsprechendes Werkzeug hierzu

bietet die Kohärenzanalyse. Die Kohärenzanalyse auf Basis der Fouriertransformation ist ein bewährtes Werkzeug in der digitalen Signalverarbeitung, stößt allerdings im Bereich schlechter Signal/Rausch-Verhältnisse oder nur kurzzeitig auftretender Kopplung an Grenzen, wie wir gleich sehen werden. Einen Ausweg bieten auch hier die Wavelets.

Fourierkohärenz

Betrachten wir zunächst den klassischen Ansatz: Ein gemessenes Signal ist üblicherweise von allerlei Störungen, wie zum Beispiel Rauschen, überlagert, die es

1. unmöglich machen, das tatsächliche Spektrum des Nutzsignals genau zu bestimmen und es
2. nötig machen, das Spektrum mit einer geeigneten Methode zu schätzen.

Eine der einfachsten Methoden zur Schätzung eines Spektrums besteht darin, das gemessene Signal in mehrere gleich lange Teile zu zerlegen, zu jedem Teil die Fouriertransformierte zu berechnen und die Transformierten zu mitteln. Bei EEG-Signalen bietet es sich oft an, die Zerlegung an bestimmten ausgezeichneten Zeitpunkten durchzuführen, zum Beispiel dem Beginn der Stimuluspräsentationen in einem Experiment. Darüberhinaus bietet eine solche Zerlegung den Ansatz dafür, zwei Signale auf eine durch ein lineares Filter verursachte konstante Phasenverschiebung hin zu untersuchen. Eine Möglichkeit hierfür bietet die Kovarianzanalyse. Seien u^k und v^k die Zerlegungen zweier Signale in N Segmente und \hat{u}^k und \hat{v}^k die Fouriertransformierten der Segmente. Wir können damit zu einer fest gewählten Frequenz f die Kovarianz $C_{\hat{u}\hat{v}}(f)$ der

$$\tilde{C}_{\hat{u}\hat{v}}(f) = \frac{1}{N-1} \sum_k \overline{\hat{u}^k(f)} \cdot \hat{v}^k(f) = \frac{1}{N-1} \sum_k \underbrace{U_f^k V_f^k}_{\text{Amplitudenprodukt}} \cdot e^{-i \underbrace{(\varphi_f^k - \phi_f^k)}_{\text{Phasendifferenz}}} \quad (0.1)$$

Spektra schätzen, was – unter stillschweigender Voraussetzung der Mittelwertfreiheit der beteiligten Prozesse – mit unserer oben eingeführten Schreibweise zur Formel (0.1) führt. Allerdings ist $C_{\hat{u}\hat{v}}$ komplex, so dass es sich anbietet, nur den Betrag zu betrachten und aus Gründen der Vergleichbarkeit auch gleich auf das Intervall $[0, 1]$ zu normieren, wobei sich alle Faktoren $\frac{1}{N-1}$ herauskürzen:

$$\tilde{\gamma}_{uv}^2(f) = \frac{|\sum_k \overline{\hat{u}^k(f)} \cdot \hat{v}^k(f)|^2}{\sum_k |\hat{u}^k(f)|^2 \cdot \sum_k |\hat{v}^k(f)|^2}$$

...und dies ist auch schon die Formel zur Schätzung der Kohärenz!

Dadurch, dass in die Kohärenzberechnung nur die *Differenz* der Phasen eingeht, wird es, im Gegensatz zur Mittelung, insbesondere möglich, Zusammenhänge zwischen Signalen aufzudecken, die in ihrer Phase nicht an die Segmentierung gekoppelt sind.

Dies machen wir uns kurz an einem Beispiel klar: Zwei voneinander unabhängigen Rauschsignalen werden zu definierten Zeitpunkten kleine spindelförmige Ereignisse additiv überlagert, welche mit Abstand klein genug sind, um bei einer rein visuellen Inspektion überhaupt nicht aufzufallen, aber in ihrer Phase an die Zeitpunkte gekoppelt. Sodann werden die beiden Zeitreihen anhand der Zeitpunkte segmentiert. Da die Spindeln in beiden Zeitreihen gleichzeitig auftauchen darf man annehmen, dass die Zeitreihen erhöhte Kohärenz zeigen. Aber kann man sich auch schnell Zugriff auf die Spindeln verschaffen?

Abbildung 1 zeigt das Ergebnis: Eine Mittelung über alle Segmente fördert die Spindeln zutage, damit tauchen sie automatisch auch im Betrag des Spektralmittels und dem Mittel der Betragsspektren der Segmente auf.

Nun wird das Experiment wiederholt mit dem einzigen Unterschied, dass die Phasenkopplung der Spindeln an die Zeitpunkte entfällt. Abbildung 2 zeigt das Ergebnis: Die Spindeln verschwinden aus der Mittelung der Segmente und damit automatisch auch aus dem Betrag des Spektralmittels. Sie sind im Mittel der Betragsspektren noch zu erahnen – weil man weiß, dass sie da sind – aber in der Kohärenz noch deutlich zu sehen.

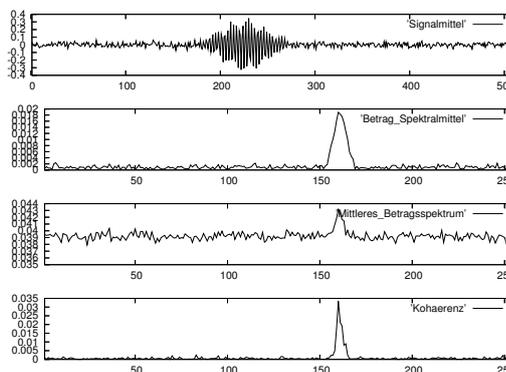


Abbildung 1: Ereignisse, die in ihrer Phase an Triggerzeitpunkte gekoppelt sind.

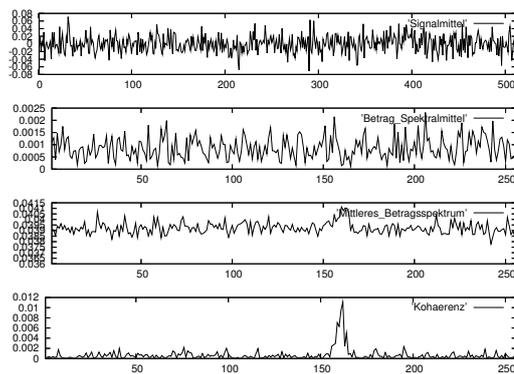


Abbildung 2: Ereignisse, die in ihrer Phase nicht an Triggerzeitpunkte gekoppelt sind.

Statistik

Ein Problem bei der Kohärenzanalyse stellt die statistische Absicherung der Ergebnisse dar. Es gibt zwar einige Erkenntnisse über die statistischen Eigenschaften von Kohärenzschätzungen, siehe zum Beispiel (Bendat & Piersol, 1990), denen jedoch in vielerlei Hinsicht starke Annahmen über die statistischen Eigenschaften der analysierten Signale zugrunde liegen, so dass bei der Verwendung der in der Literatur gewonnenen Konfidenzintervalle eine gewisse Vorsicht geboten ist. Im Zweifelsfall ist man bei Verwendung von parameterfreien Tests auf jeden Fall auf der sicheren Seite.

Die Grenzen der einfachen Kohärenzanalyse – Waveletkohärenz

Wir betrachten ein weiteres Beispiel, bei dem, ähnlich wie oben, zwei Rauschsignalen eine Serie von Spindeln und kurzen Rauschpulsen additiv überlagert wird (Abbildung 3). Alle Ereignisse sind in ihrer Phase nicht an den Zeitpunkt des Auftretens gekoppelt und durch Mittelung nicht zu entdecken. Auch das Ergebnis

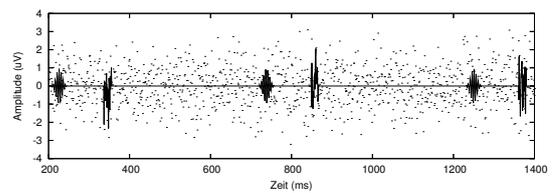


Abbildung 3: Spindeln, Rauschpulse und das überlagerte Rauschsignal (Punkte)

einer Kohärenzanalyse fällt enttäuschend aus: Wenn man weiß, wonach man suchen muss, kann man die kleine Spitze bei 100Hz in Abbildung 4 zwar sehen, aber das Ergebnis ist alles andere als ein eindeutiger Befund. Ein weiteres Problem ist, dass selbst wenn man ein eindeutiges Ergebnis hätte, die Fourieranalyse keinen Anhaltspunkt dafür gibt, zu welchen Zeitpunkten interessante Ereignisse stattfanden. Den Ausweg aus dieser Situation eröffnet

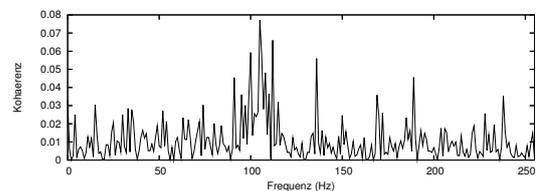


Abbildung 4: Trotz Spindeln und Rauschpulsen kaum Kohärenz

die waveletbasierte Kohärenzanalyse, die exakt dem Prinzip der Fourieranalyse folgt, aber bedingt durch die Wavelettransformation einen Zeitparameter hat.

Seien u^k und v^k die Zerlegungen zweier Signale und $L_\psi \cdot (f, t)$ die Wavelettransformation zum Wavelet ψ . Dann ist die Schätzung der

Waveletkohärenz gegeben durch:

$$\tilde{\Gamma}_{uv}^2(f, t) = \frac{\left| \sum_k \overline{L_\psi u^k(f, t)} \cdot L_\psi v^k(f, t) \right|^2}{\sum_k |L_\psi u^k(f, t)|^2 \cdot \sum_k |L_\psi v^k(f, t)|^2}$$

Zweckmäßigerweise wird man hier irgendein komplexes Wavelet wählen, da nur in diesem Fall Phaseninformation geliefert wird und die Phasendifferenz der entscheidende Teil der Kohärenzformel ist.

Die Ergebnisse mit der Waveletkohärenz sind sehr deutlich (Abbildung 5): Die Spindeln zeigen sich als einzelner großer Gipfel, während die Rauschpulse als Band erhöhter Kohärenz über fast alle Frequenzen erscheinen und lediglich bei niedrigen Frequenzen aufgrund der dort prinzipbedingt schlechten zeitlichen Auflösung nicht erfasst werden.

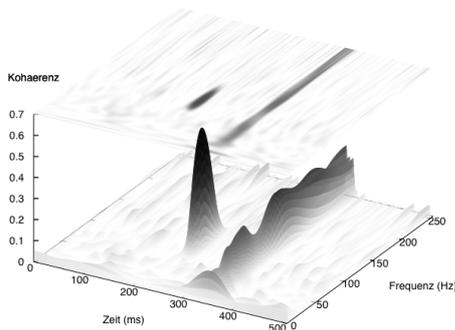


Abbildung 5: Waveletkohärenz: Spindeln und Rauschpulse werden erkannt.

Fußangeln

Die Fourieranalyse hat das Problem, dass sie transiente Ereignisse nur schlecht erfasst und man nichts über den Zeitpunkt ihres

Auftretens erfährt. Die Waveletanalyse eröffnet einen Ausweg, der sich jedoch in der Kohärenzanalyse als Falle erweisen kann: Treten nämlich in zwei Signalen Ereignisse auf, die zwar kohärent sind, aber zeitlich weiter auseinander liegen, als die Abklingzeit des Wavelets dauert, so werden sie natürlich nicht mehr erkannt. Es ist in einem solchen Fall also wichtig, ein *geeignetes* Wavelet zu benutzen, oder die Signale durch zeitliche Verschiebung geeignet anzupassen. Wenn andererseits nur *ein* Signal eine große zeitliche Variabilität für kohärente Ereignisse zeigt, so ist es auch nicht verboten für dieses betroffene Signal ein *anderes* Wavelet mit breiterem Träger, also längerer Abklingzeit zu benutzen. Es gibt in solchen Fällen keine von vornherein beste Methode; im Zweifelsfall hilft nur Ausprobieren.

Phase Locking Value

Der Zusammenhang zweier Signale über ein lineares Filter kommt bei passiven Übertra-

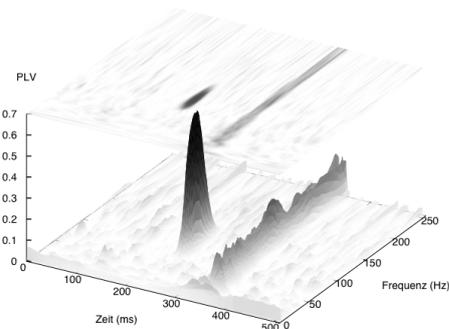


Abbildung 6: Phase-Locking-Value: Spindeln werden besser; Rauschpulse schlechter erkannt.

gungswegen, wie zum Beispiel der Leitung von Schall oder passiven Filtern in der Elektro-

technik zwar häufig vor, wird aber der Vorstellung von unabhängigen funktionalen Einheiten, die lediglich ihre Phasen synchronisieren nicht völlig gerecht. Lachaux et. al. (Lachaux, Rodriguez, Martinerie & Varela, 1999) haben daher den sogenannten *Phase Locking Value* (PLV) vorgeschlagen, den man erhält, wenn man in der Kohärenzformel die Beträge alle auf 1 setzt. Der Beitrag der Amplitudeninformation wird damit unterdrückt.² Vergleicht man die Ergebnisse der PLV-Analyse (Abbildung 6) mit denen der Wavelet-Analyse (Abbildung 5), so zeigt sich, dass der PLV die Spindeln besser, aber die Rauschpulse schlechter erkennt.

Im Einzelfall wird man also abwägen müssen, welche Methode geeigneter ist.

Bikohärenz

Als Ausblick auf weitere mögliche Zusammenhänge sei hier noch die Bikohärenz genannt. Bikohärenz erfasst Zusammenhänge, die zum Beispiel durch die Multiplikation von Signalen entstehen. Für das Produkt zweier Cosinusschwingungen gilt zum Beispiel folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \cos(f_1 t) \cdot \cos(f_2 t) \\ = \frac{1}{2} (\cos((f_1 + f_2) t) + \cos((f_1 - f_2) t)), \end{aligned}$$

²Man könnte auch auf die Idee kommen, statt des Amplitudenanteils den Phasenanteil zu unterdrücken. Das hätte den Vorteil, dass man die Kohärenzformel sogar mit *verschiedenen* Frequenzen für die einzelnen Signale anwenden könnte, allerdings wird diese Möglichkeit durch einen erheblichen Qualitätsverlust der Ergebnisse teuer erkaufte. Auf diese Möglichkeit soll hier nicht näher eingegangen werden; einen ungefähren Eindruck der Verschlechterung kann ein Vergleich der Teilabbildungen für den Betrag des Spektralmittels und des mittleren Betragsspektrums in Abbildung 1 geben.

was einer Überlagerung von zwei anderen Schwingungen mit der Summe, beziehungsweise der Differenz der Ausgangsfrequenzen entspricht. Da aus der Addition der Frequenzen auch die Addition der Phasen folgt, kann man natürlich wieder eine entsprechende Formel aufstellen, in die nun statt zweier, *drei Signale* und statt einer *zwei Frequenzen* eingehen. In der bekannten Notation lautet die Formel des Schätzers:

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}_{uvw}^2(f_1, f_2) \\ = \frac{\left| \sum_k \hat{u}^k(f_1) \cdot \hat{v}^k(f_2) \cdot \overline{\hat{w}^k(f_1 + f_2)} \right|^2}{\sum_k |\hat{u}^k(f_1) \cdot \hat{v}^k(f_2)|^2 \cdot \sum_k |\hat{w}^k(f_1 + f_2)|^2}. \end{aligned}$$

Abbildung 7 zeigt ein Beispiel, in dem die Bikohärenz zwischen zwei Signalen und ihrem Produkt berechnet wurde. Dabei enthielt ein Signal zwei Cosinusschwingungen, das andere eine. Im Gegensatz zur Kohärenz kann Biko-

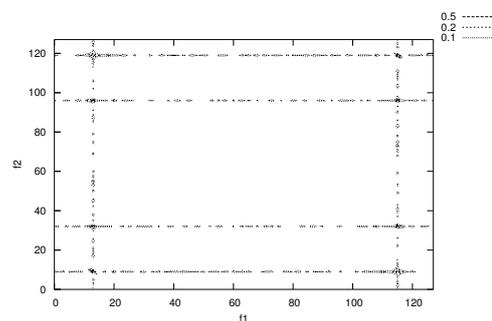


Abbildung 7: *Bikohärenz zwischen zwei Signalen und ihrem Produkt*

härenz auch als *Autobikohärenz* in einem einzigen Signal gegeben sein, wo sie zum Beispiel auf Oberwellen anspricht. Auch weitere, noch kompliziertere Zusammenhänge sind vorstellbar, sollen aber hier nicht dargestellt werden.

Die Zukunft?

Das Hauptproblem, das sich bei allen Analysen von Paarbeziehungen zwischen Signalen auftut ist, dass es selbst für ein einfaches EEG schon viele Paare zu beachten gibt, und dass die Anzahl dieser Paare quadratisch mit der Anzahl der Kanäle steigt. Zieht man nun noch in Betracht, dass eine Waveletanalyse schon von zwei Parametern abhängt, dann wird klar, dass schon der reine Rechenaufwand und die Menge der produzierten Daten einer detaillierten Analyse schnell Grenzen setzen. Es wird also eine Methode benötigt, die in akzeptabler Zeit wenige aussagekräftige Kennzahlen produziert. Eine Möglichkeit könnten Matrixwavelets sein, bei denen die Menge der produzierten Daten nur *linear* von der Zahl der Kanäle abhängt, die aber trotzdem Zusammenhänge zwischen den Kanälen erfassen können.

Literatur

- Bendat, J. & Piersol, A. (1990). *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Lachaux, J.-P., Rodriguez, E., Martinerie, J. & Varela, F. (1999). Measuring phase synchrony in brain signals. *Human Brain Mapping*, 8, 194–208.