Nichtlineare Schrödinger-Gleichungen mit stark wachsendem Potentialschacht und verschiedene Bedingungen an eine Grundlösung

Doktorarbeit von Mona Parnet
Betreuer: Prof. Bartsch

Nichtlineare Schrödinger-Gleichungen mit stark wachsendem Potentialschacht und verschiedene Bedingungen an eine Grundlösung

Doktorarbeit im Fach
Mathematik

Betreuer:
Prof. Dr. Thomas Bartsch

Mona Parnet

August 2010

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Wir interessieren uns für Lösungen nichtlinearer Schrödinger-Gleichungen

$$-\triangle u + V(x)u = f(x,u), \quad \text{auf } \mathbb{R}^N,$$

welche die Randbedingung $u(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ erfüllen. Wir betrachten Potentiale, deren Anstiegsrate durch einen Parameter λ kontrolliert wird und die von der Form $V_\lambda(x) = a_0(x) + \lambda a(x)$ sind. Wächst der Parameter λ gegen unendlich, so entwickelt sich das Potential zu einem Potentialschacht mit Boden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Lösungen von

$$\begin{aligned} -\triangle u + V_\lambda(x)u &= f(x,u), \quad \text{auf } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0 \text{ für } |x| &\to \infty \end{aligned} \tag{P_λ}$$

verschwinden außerhalb des Schachtbodens für wachsendes λ. Die Lösungen gehen dann gegen eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\triangle u + a_0(x)u &= f(x,u), \quad \text{in } \Omega, \\ u(x) &= 0 \text{ für } x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{P_0}$$

In über 75 Arbeiten befaßt man sich mit diesem Prozess. In fast allen Arbeiten findet man schwache Lösungen von (P_λ), klassifiziert diese und betrachtet ihr Verhalten für λ gegen unendlich. In der Regel findet man einen Grenzwert in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, welcher das Problem (P_0) schwach löst. Eine wichtige Arbeit ist [4] von Thomas Bartsch, Alexander Pankov und Zhi-Qiang Wang.

In [4] werden an das Potential folgende Voraussetzungen gestellt

$(V_1)_b$ $a_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit essinf $a_0 > 0$;

$(V_2)_b$ $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $a(x) \geq 0$ und es gibt eine kompakte Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{R}^N$ mit nichtleerem Inneren $\Omega :=$int Z, so dass $a(x) = 0$ ist für $x \in Z$ und $a(x) > 0$ f.ü. in $\mathbb{R}^N \backslash Z$ und $\partial\Omega$ lokal Lipschitz.

$(V_3)_b$ Es gibt eine Folge (R_j) in $(0,\infty)$ mit $R_j \to \infty$ und

$$\lim_{\lambda\to\infty} \liminf_{j\to\infty} \inf_{u \in H_0^1(W_{R_j}(0)^c)} \frac{\int_{W_{R_j}(0)^c} (|\nabla u|^2 + V_1(x)u^2)\, dx}{\|u\|_{L^2(W_{R_j}(0)^c)}} = \infty$$

Es werden viele weitere Bedingungen wie $(V_3)_b$ aufgelistet und kommentiert. Unter geeigneten Voraussetzungen an den Nichtlinearitätsanteil f gibt es zu $m \in \mathbb{N}$ ein $\Lambda_m > 0$, derart dass für alle $\lambda \geq \Lambda_m$ verschiedene Paare $\pm v_1^\lambda$, ..., $\pm v_m^\lambda$ von schwachen Lösungen von (P$_\lambda$) existieren. Es gibt positive Konstanten a_j, b_j, c_j mit $b_j < a_{j+1}$ für alle $j = 1, ..., m-1$,

$$\|v_j^\lambda\|_\lambda = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_j^\lambda|^2 + V_\lambda(x)(v_j^\lambda)^2)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_j,$$

und $a_j \leq \|v_j^\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq b_j$ für alle $\lambda \geq \Lambda_m$ und $j = 1, ..., m$. Ist $\lambda_n \to \infty$ und u_n, $n \in \mathbb{N}$, eine schwache Lösung von (P_{λ_n}), so dass es positive Konstanten c_1, c_2 gibt mit

$$\|u_n\|_{\lambda_n} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V_{\lambda_n}(x)u_n^2)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1,$$

und $c_2 \leq \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und eine schwache Lösung $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ von (P$_0$) mit $u_{n_k} \to \bar{u}$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Wir werden einige Ergebnisse aus [4] verwenden.

In dieser Arbeit gehen wir davon aus, dass (P$_0$) eine Lösung besitzt, und suchen Lösungen von (P$_\lambda$) für λ groß, die für wachsendes λ gegen die Lösung von (P$_0$) gehen. In diesem Zusammenhang bezeichnen wir Lösungen von (P$_0$) als Grundlösungen. Dieses Problem wird auch in [9] von Yohei Sato und Kazunaga Tanaka behandelt. Dort wird das Problem aber nur in der Dimension $N = 1$ betrachtet.

In [9] ist das Potential gegeben durch $V_\lambda(x) = 1 + \lambda a(x)$, wobei a stetig mit $0 < \liminf_{|x|\to\infty} a(x)$ und $\sup_{x\in\mathbb{R}} a(x) < \infty$, $a^{-1}(\{0\}) = \Omega$. Ω ist eine Vereinigung von Intervallen $\Omega_1 = (a_1, b_1)$ und $\Omega_2 = (a_2, b_2)$ mit $b_1 < a_2$. Der Nichtlinearitätsanteil ist direkt gegeben durch $f(x,t) = |t|^{p-2}t$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $p \in (2, \infty)$. Yohei Sato und Kazunaga Tanaka wählen eine beliebige Lösung u von (P$_0$) und konstruieren ein $\Lambda \geq 1$ und Lösungen u_λ von (P$_\lambda$) für $\lambda \geq \Lambda$ mit $u_\lambda \to u$ in $W^{1,2}(\mathbb{R})$ für $\lambda \to \infty$. Bei der Konstruktion werden Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen verwendet, die sich auf den Fall $N \geq 2$ nicht übertragen lassen.

Die Arbeit [9] von Yohei Sato und Kazunaga Tanaka ist die einzige weitere mir bekannte Arbeit, in der man Grundlösungen wählt und Lösungen von (P$_\lambda$) erhält, die für λ gegen unendlich in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ gegen die Grundlösung konvergieren.

Nun kommen wir zu dieser Arbeit. Hier ist $N \in \mathbb{N}$ und $N \geq 2$. Wir betrachten Potentiale $V_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ der Form $V_\lambda(x) = a_0(x) + \lambda a(x)$ für $\lambda \geq 1$. Wir benutzen verschiedene Voraussetzungen an das Potential, die wir wie folgt bezeichnen

(V_1) $a_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(V_2) $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $a(x) \geq 0$ und es gibt eine kompakte Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{R}^N$ mit nichtleerem Inneren $\Omega :=\text{int } Z$, so dass $a(x) = 0$ ist für $x \in Z$ und $a(x) > 0$ f.ü. in $\mathbb{R}^N \backslash Z$ und $\partial\Omega$ lokal Lipschitz;

(V_{3a}) es gibt $M > 0$ und $r > 0$ mit

$$\mu(\{x \in W_r(y) \mid a(x) < M\}) \to 0, \quad |y| \to \infty,$$

dabei ist $W_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x_i - y_i| \leq r \; \forall \, i \in \{1, ..., N\}\}$;

(V_3) für jedes $M > 0$ und $r > 0$ gilt

$$\mu(\{x \in W_r(y) | a(x) < M\}) \to 0, \quad |y| \to \infty.$$

Die Voraussetzungen an den Nichtlinearitätsanteil $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir wie folgt

(f_1) f ist eine Carathéodory-Funktion, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^N$ ist $f(x, \cdot)$ stetig und für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $f(\cdot, t)$ meßbar, und es gibt Konstanten $c > 0$, $2 < p < 2^*$, wobei $2^* = \frac{2N}{N-2}$ für $N \geq 3$ und $2^* = \infty$ für $N = 2$, mit

$$|f(x,t)| \leq c(|t| + |t|^{p-1}) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \text{ f.ü. } x \in \mathbb{R}^N,$$

d.h. es gibt eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^N$ mit

$$|f(x,t)| \leq c(|t| + |t|^{p-1}) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \, x \in \mathbb{R}^N \backslash N;$$

(f_2) f ist eine Carathéodory-Funktion, $f(x, \cdot)$ ist stetig differenzierbar für fast alle $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x, 0) = 0$ f.ü. in $\mathbb{R}^N$ und es gibt Konstanten $c > 0$, wobei $2^* = \frac{2N}{N-2}$ für $N \geq 3$ und $2^* = \infty$ für $N = 2$, $2 < p < 2^*$ mit

$$|f_t(x,t)| \leq c(1 + |t|^{p-2}) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \text{ f.ü. } x \in \mathbb{R}^N;$$

(f_3) es ist

$$\lim_{t \to 0} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^N} |f_t(x,t)| = 0;$$

(f_4) es ist $f(x,t) = -f(x,-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und f.ü. in $\mathbb{R}^N$ und es gibt $r_0, c_0, q > 2$ mit $f(x, r_0) \geq c_0$ und

$$0 < (q-1)f(x,t)t \leq t^2 f_t(x,t).$$

für alle $t \neq 0$ und für fast alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Wir wählen den Raum

$$E := \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \mid \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2\,dx < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_\lambda = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_\lambda^\alpha(x)u^2)\,dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei $\alpha := 1 - \min\{\operatorname{essinf} a_0, 0\}$ und $V_\lambda^\alpha(x) := V_\lambda(x) + \alpha$. Es ist $H_0^1(\Omega) \subseteq E$. Unter den Voraussetzungen (V_1), (V_2) und (f_1) haben die beiden Probleme (P_0) und (P_λ), $\lambda \geq 1$, Variationsstruktur. Schwache Lösungen von (P_λ) sind gerade kritische Punkte des Energiefunktionals $J_\lambda : (E, \|\cdot\|_\lambda) \to \mathbb{R}$

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (F(x,u) + \frac{\alpha}{2}u^2)\,dx,$$

dabei ist $F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\,ds$ für $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, und schwache Lösungen von (P_0) sind gerade kritische Punkte des Energiefunktionals $J_0 := J_\lambda|_{H_0^1(\Omega)}$, $\lambda \geq 1$ beliebig.

Wir setzen in dieser Arbeit eine Grundlösung $\bar{u}$ voraus und betrachten die folgenden Fälle

(Min) $\bar{u}$ ist ein striktes lokales Minimum von J_0;

(Deg) $\bar{u}$ ist ein nichtausgearteter kritischer Punkt von J_0;

(Krit) $\bar{u}$ ist ein isolierter kritischer Punkt von J_0 mit nichttrivialen kritischen Gruppen $C_*(J_0, \bar{u})$.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Arbeit [9] von Yohei Sato und Kazunaga Tanaka und dieser Arbeit ist die Dimension N. Hier ist $N \geq 2$ und in [9] ist $N = 1$. Außerdem wird hier ein allgemeineres Potential und ein allgemeinerer Nichtlinearitätsanteil verwendet. Einen weiteren Unterschied ist die Fallunterscheidung, die wir hier für die Grundlösung machen. Die Grundlösungen in [9] sind automatisch nichtausgeartet. Wie bereits erwähnt, hat die Beweisidee in [9] keine Gemeinsamkeiten mit den hier verwendeten Beweisideen. Auch ist die Vorausetzung (V_1) schwächer als $(V_1)_b$, die in [4] verwendet wird.

Hier betrachten wir schwache Grundlösungen $\bar{u}$ mit den verschiedenen Eigenschaften (Min), (Deg) und (Krit) und zeigen, dass es Lösungen $u_\lambda \in E$ von (P_λ) für $\lambda \geq 1$ groß gibt mit

$$\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_\lambda - \nabla \bar{u}|^2 + V_\lambda^\alpha(x)(u_\lambda - \bar{u})^2)\,dx \to 0 \text{ für } \lambda \to \infty. \tag{$*$}$$

Haben wir ein striktes lokales Minimum $\bar{u}$ von J_0, d.h. Fall (Min) gilt, so gibt es unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_3) und (f_1) für $\lambda \geq 1$ groß eine Lösung u_λ von (P$_\lambda$), die gleichzeitig auch ein lokales Minimum des Energiefunktionals J_λ ist, und es gilt $(*)$. Wir haben zum Beispiel ein lokales Minimum von J_0, wenn es ein $r > 0$ gibt mit

$$0 \leq F(x,t) \leq \alpha' t^2 \text{ für alle } |t| \geq r,$$

wobei λ_1 das Inverse des ersten Eigenwerts der Abbildung $-\triangle$ in $H_0^1(\Omega)$ ist und $\alpha' < \lambda_1 +$essinf a_0.

In Fall (Deg) setzen wir einen nichtausgearteten kritischen Punkt $\bar{u}$ von J_0 voraus. Gelten die Voraussetzungen (V_1) bis (V_3), (f_2) und (f_3), so hat (P$_\lambda$) für $\delta > 0$ klein und $\lambda \geq 1$ groß eine Lösung u_λ und es gilt $(*)$ und

$$\deg(i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}, U_\delta(\bar{u}), 0) = \deg(\nabla J_0, U_\delta(\bar{u}), 0) \neq 0,$$

wobei i die Einbettung von H nach H_λ und $\nabla_\lambda J_\lambda : H \to H$ definiert ist durch $DJ_\lambda(u)(v) = \langle i\nabla_\lambda J_\lambda(u), iv\rangle_\lambda$ für alle $u, v \in H$. Es gibt zum Beispiel einen nichtausgearteten kritischen Punkt $\bar{u}$, wenn ess inf $a_0 > -\lambda_1$ und (f_4) zusätzlich gelten. Dann ist für $\mu > 0$ klein $\bar{u}$ ein nichtausgearteter kritischer Punkt des Energiefunktionals

$$H_0 \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} (F(x,u) + \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{\mu}{2}(u - \bar{u})^2)\,dx$$

und somit eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} &-\triangle u + a_0(x)u = f(x,u) + \mu(u - \bar{u}), \quad \text{in } \Omega,\\ &u(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Sei $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\eta|_\Omega = 1$. Wie vorher gibt es für $\lambda \geq 1$ groß Lösungen u_λ der veränderten Gleichung

$$\begin{aligned} &-\triangle u + V_\lambda(x)u = f(x,u) + \mu\eta(x)(u - \bar{u}), \quad \text{auf } \mathbb{R}^N,\\ &u(x) \to 0 \text{ für } |x| \to \infty \end{aligned}$$

mit $(*)$.

In Fall (Krit) setzen wir einen isolierten kritischen Punkt $\bar{u}$ von J_0 mit nichttrivialen kritischen Gruppen $C_*(J_0, \bar{u})$ voraus. Die vorherigen Fälle (Min) und

(Deg) sind Spezialfälle von (Krit). Ist $\bar{u}$ ein striktes lokales Minimum, so ist $C_0(J_0, \bar{u}) \cong \mathbb{Z}$ und $C_n(J_0, \bar{u}) \cong \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $\bar{u}$ ein nichtausgearteter kritischer Punkt von J_0, so hat J_0 in $\bar{u}$ einen Morse-Index $\mu \in \mathbb{N}_0$ und es ist $C_\mu(J_0, \bar{u}) \cong \mathbb{Z}$ und $C_n(J_0, \bar{u}) \cong \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq \mu$. Es gibt Lösungen $u_\lambda \in E$ von (P$_\lambda$) für $\lambda \geq 1$ groß mit $(*)$, falls die Voraussetzungen (V_1), (V_2), (V_{3a}) und (f_2) bis (f_4) gelten.

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ reguläre Werte von J_0 mit $a < b$ und nichttrivialen Homologiegruppen $H_*(J_0^b, J_0^a)$ und gelten die Voraussetzungen (V_1), (V_2), (V_{3a}) und (f_2) bis (f_4), so hat das Problem (P$_\lambda$) für alle $\lambda \geq 1$ groß Lösungen $u_\lambda \in E$ mit Energien in $[a, b]$, d.h. $J_\lambda(u_\lambda) \in [a, b]$.

Die bisherigen Ergebnisse sind Folgerungen allgemeinerer Sätze. Dabei betrachten wir folgende Situation

Sei E eine Menge. Sei $H = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbertraum, H_0 ein nichttrivialer abgeschlossener Unterraum von H mit $H_0 \neq H$ und für $\lambda \geq 1$ sei $H_\lambda = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda)$ ein reeller Hilbertraum mit

(A_1) es ist $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\|u\|_\lambda \leq \|u\|_{\tilde{\lambda}}$ für $\lambda \leq \tilde{\lambda}$, $u \in H$, $\| \cdot \|_\lambda$, $\| \cdot \|$ sind äquivalent;

(A_2) für $u \in H_0$, $v \in H$, $\lambda \geq 1$ gilt $\langle u, v \rangle_\lambda = \langle u, v \rangle$;

(A_3) ist $\lambda_n \to \infty$ und $(u_n) \in H$, so dass $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt ist, dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in H_0$ mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in H.

Sei $k : H \to \mathbb{R}$ mit

(k_1) k ist stetig differenzierbar und vollstetig, d.h.

$$(u_n) \subseteq H,\ u \in H,\ u_n \rightharpoonup u \text{ in } H \quad \Rightarrow \quad k(u_n) \to k(u),$$

(siehe Definition A.1).

Für $\lambda \geq 1$ seien

$$J_\lambda : H \to \mathbb{R}, \quad J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - k(u)$$
$$J_0 : H_0 \to \mathbb{R}, \quad J_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - k|_{H_0}(u).$$

Wir interessieren uns für kritische Punkte von J_λ für $\lambda \geq 1$ groß. Genauer, wir setzen einen kritschen Punkt $\bar{u}$ von J_0 mit Eigenschaften wie in (Min), (Deg) und (Krit) voraus. Dann gibt es für $\lambda \geq 1$ groß kritische Punkte u_λ von J_λ mit $\|u_\lambda - u\|_\lambda \to 0$ für $\lambda \to \infty$.

Ist $\bar{u}$ ein striktes lokales Minimum von J_0, so erhalten wir für $\lambda \geq 1$ groß ein lokales Minimum u_λ von J_λ und es gilt $\|u_\lambda - u\|_\lambda \to 0$ für $\lambda \to \infty$.

Für einen nichtausgearteten kritischen Punkt $\bar{u}$ und $\lambda \geq 1$ groß existiert ein kritischer Punkt u_λ von J_λ und es gilt $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \to 0$ für $\lambda \to \infty$, falls zusätzlich

(k_2) Dk ist stetig differenzierbar und vollstetig;

gilt. Es ist hier sogar für $\delta > 0$ klein und $\lambda \geq 1$ groß

$$\deg(i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}, U_\delta(\bar{u}), 0) = \deg(\nabla J_0, U_\delta(\bar{u}), 0),$$

wobei $i : H \hookrightarrow H_\lambda$ und $\nabla_\lambda J_\lambda : H \to H$ definiert ist durch $DJ_\lambda(u)(v) = \langle i\nabla_\lambda J_\lambda(u), iv\rangle_\lambda$ für alle $u, v \in H$.

Unter den Voraussetzungen (A_1) bis (A_2), (k_1), (k_2) und

(j_1) J_0 erfüllt die (PS)-Bedingung.

(j_2) J_λ, $\lambda \geq 1$, erfüllt die (PS)-Bedingung.

(j_3) Ist $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$, $c \in \mathbb{R}$ mit $J_{\lambda_n}(u_n) \to c$ und $\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0$, dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in H_0$ mit $\|u_{n_k} - u\|_{\lambda_{n_k}} \to 0$.

gibt es für einen isolierten kritischen Punkt $\bar{u}$ von J_0 mit nichttrivialen kritischen Gruppen $C_*(J_0, \bar{u})$ und für $\lambda \geq 1$ groß einen kritischen Punkt u_λ von J_λ und es ist $\|u_\lambda - u\|_\lambda \to 0$ für $\lambda \to \infty$. Ist $\bar{u}$ ein striktes lokales Minimum oder ein nichtausgearteter kritischer Punkt, so ist $\bar{u}$ ein isolierter kritischer Punkt von J_0 mit nichttrivialen kritischen Gruppen $C_*(J_0, \bar{u})$. Weitere Möglichkeiten an nichttriviale kritische Gruppen zu kommen, liefern die Sätze A.11 und A.12 aus dem Anhang.

Zuletzt setzen wir $a, b \in R$ mit $a < b$ reguläre Werte von J_0 mit nichttrivialen Homologiegruppen $H_*(J_0^b, J_0^a)$ voraus. Satz A.10 liefert eine Möglichkeit für nichttriviale Homologiegruppen $H_*(J_0^b, J_0^a)$. Unter den Voraussetzungen (A_1) bis (A_3), (k_1), (k_2) und (j_1) bis (j_3) existiert für $\lambda \geq 1$ groß ein kritischer Punkt u_λ von J_λ mit Niveau in $[a, b]$, d.h. $J_\lambda(u_\lambda) \in [a, b]$.

1.1 Die Arbeit im Detail

In Kapitel 2 Abschnitt 2.1 listen wir alle Notation auf, die wir später zur besseren Lesbarkeit verwenden.

In Abschnitt 2.2 stellen wir den Abbildungsgrad von Leray-Schauder vor und fassen die Eigenschaften des Grades zusammen, die wir in Abschnitt 2.3 und Kapitel 4 Abschnitt 4.7 benutzen.

In Abschnitt 2.3 gehen wir auf Eigenschaften eines nichtausgearteten Punktes ein. Das wichtigste Ergebnis ist

$$\deg(\nabla J, U_\delta(u_0), 0) \neq 0$$

für ein $\delta > 0$ und u_0 ist der einzige kritische Punkt von J in $U_\delta(u_0)$.

In Abschnitt 2.4 listen wir viele Eigenschaften der singulären Homologietheorie auf, die wir in den Abschnitten 2.5 und 2.6, in Kapitel 5 Abschnitt 5.1 und in Kapitel 6 Abschnitt 6.1 verwenden.

In Abschnitt 2.5 definieren wir für ein Funktional J und einen isolierten kritischen Punkt u_0 Gromoll-Meyer-Paare. Wir konstruieren uns ein Gromoll-Meyer-Paar (W, W_-) mit $H_*(W, W_-) \cong C_*(J, u_0)$ und vielen weiteren Eigenschaften, die wir in Kapitel 5 Abschnitt 5.1 verwenden. Das Gromoll-Meyer-Paar und dessen Eigenschaften halten wir in den Sätzen 2.22 und 2.23 fest.

In Abschnitt 2.6 zeigen wir für ein Funktional J und einen regulären Wert b von J_0, so dass die (PS)$_b$-Bedingung erfüllt ist, $a \in \mathbb{R}$ beliebig, $\epsilon > 0$ klein $H_*(J_0^b, J_0^a) \cong H_*(J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$ bezüglich der Einbettung $(J_0^b, J_0^a) \hookrightarrow (J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$. Diese Beziehung werden wir in Kapitel 6 Abschnitt 6.1 benötigen.

In Kapitel 3 listen wir die Bedingungen (A_1) bis (A_3) und (k_1) auf und setzen ein striktes lokales Minimum $\bar{u}$ von J_0 voraus. In Abschnitt 3.1 zeigen wir für $\delta > 0$ klein und $\lambda \geq 1$ groß die Existenz eines lokalen Minimums u_λ von J_λ mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$. Das halten wir in Satz 3.2 fest.

In Kapitel 4 listen wir die Bedingungen (A_1) bis (A_3), (k_1) und (k_2) auf und setzen einen nichtausgearteten kritischen Punkt $\bar{u}$ von J_0 voraus. In Abschnitt 4.1 zeigen wir für $\delta > 0$ klein und $\lambda \geq 1$ groß

$$\deg(i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}, U_\delta(\bar{u}), 0) = \deg(\nabla J_0, U_\delta(\bar{u}), 0) \neq 0,$$

wobei $i : H \hookrightarrow H_\lambda$ und $\nabla_\lambda J_\lambda : H \to H$ definiert ist durch $DJ_\lambda(u)(v) = \langle \nabla_\lambda J_\lambda(u), v \rangle_\lambda$ für alle $u, v \in H$. Damit erhalten wir für $\delta > 0$ klein und $\lambda \geq 1$ groß kritische Punkte u_λ von J_λ mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$. Dieses Ergebnis halten wir in Satz 4.7 fest.

In Kapitel 5 listen wir die Bedingungen (A_1) bis (A_3), (k_1), (k_2) und (j_1) bis (j_3) auf und setzen einen isolierten kritischen Punkt $\bar{u}$ von J_0 mit nichttrivialen kritischen Gruppen $C_*(J_0, \bar{u})$ voraus. In Abschnitt 5.1 erhalten wir für $\delta > 0$ klein und $\lambda \geq 1$ groß kritische Punkte u_λ von J_λ mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$. Dieses Ergebnis halten wir in Satz 5.10 fest.

In Kapitel 6 listen wir die Bedingungen (A_1) bis (A_3), (k_1), (k_2) und (j_1) bis (j_3) auf und setzen reguläre Werte $a, b \in \mathbb{R}$ von J_0 mit $a < b$ und nichttrivialen Homologiegruppen $H_*(J_0^b, J_0^a)$ voraus. In Abschnitt 6.1 erhalten wir für $\lambda \geq 1$ groß kritische Punkte u_λ von J_λ mit Niveau in $[a, b]$, d.h. $J_\lambda(u_\lambda) \in [a, b]$. Dieses Ergebnis halten wir in Satz 6.4 fest.

In Kapitel 7 gehen wir auf die Probleme (P$_\lambda$), $\lambda \geq 1$, und (P$_0$) ein. Wir zeigen, dass die Probleme Variationsstruktur haben, falls (V_1), (V_2) und (f_1) gelten. In Abschnitt 7.1 listen wir Eigenschaften von f_t, f und F auf, die wir in den Abschnitten 7.3 und 7.4 gebrauchen.

In Abschnitt 7.2 zeigen wir, dass unter den Voraussetzungen (V_1), (V_2) und (V_{3a}) die Bedingungen (A_1) bis (A_3) erfüllt sind.

In Abschnitt 7.3 zeigen wir, dass unter den Voraussetzungen (V_1), (V_2), (V_{3a}), (f_2) und (f_3) das Funktional k zweimal stetig differenzierbar ist. Setzen wir (f_1) statt (f_2) und (f_3) voraus, so ist k stetig differenzierbar. Gilt noch (V_3), dann ist k vollstetig und gelten noch (f_2) und (f_3), dann ist auch Dk vollstetig. Die Definition von vollstetig haben wir in A.1 festgehalten. Es gelten (k_1) und (k_2), falls (V_1) bis (V_3), (f_2) und (f_3) gelten.

In Abschnitt 7.4 beweisen wir (PS)-Eigenschaften der Funktionale J_λ, $\lambda \geq 1$, und J_0. Im Unterabschnitt 7.4.1 listen wir eine Eigenschaft des Potentials V auf, die wir erhalten, wenn wir (V_1), (V_2) und (V_{3a}) voraussetzen, und verwenden diese im Unterabschnitt 7.4.2. Im Unterabschnitt 7.4.2 zeigen wir unter den Voraussetzungen (V_1), (V_2), (V_{3a}) und (f_2) bis (f_4) die Bedingungen (j_1) und (j_3). Setzen wir zusätzlich (V_3) voraus, so erhalten wir auch (j_2).

In Abschnitt 7.5 wenden wir die Sätze 3.2, 4.7, 5.10 und 6.4 auf die Probleme (P_λ), $\lambda \geq 1$, und (P_0) in den Fällen (Min), (Deg), (Krit) an.

In Kapitel 8 setzen wir (V_1), (V_2), (V_{3a}) und (f_2) bis (f_4) voraus. In Abschnitt 8.1 halten wir weitere (PS)-Eigenschaften von J_λ aus (P_λ), $\lambda \geq 1$, fest.

In Abschnitt 8.2 zeigen wir für $\delta > 0$ klein und $\lambda \geq 1$ groß die Existenz von kritischen Punkten u_λ von J_λ mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$, wenn $\bar{u}$ ein isolierter kritischer Punkt von J_0 mit nichttrivialen kritischen Gruppen $C_*(J_0, \bar{u})$ ist.

In Abschnitt 8.3 setzen wir reguläre Werte $a, b \in \mathbb{R}$ von J_0 mit $a < b$ und nichttrivialen Homologiegruppen $H_*(J_0^b, J_0^a)$ voraus und zeigen für $\lambda \geq 1$ groß die Existenz von kritischen Punkten u_λ von J_λ mit Niveau in $[a, b]$.

In Anhang A fassen wir Definitionen, Sätze und Bemerkungen zusammen, die in der Arbeit erwähnt und verwendet werden, aber nicht zu den wesentlichen Ergebnissen gehören. In Abschnitt A.1 gehen wir auf vollstetige Operatoren ein und halten einige Eigenschaften fest, die wir vorher in der Arbeit benutzen werden.

In Abschnitt A.2 fassen wir Sätze aus der Morse-Theorie zusammen, die wir in der Einleitung und in Kapitel 7 Abschnitt 7.5 erwähnen.

Ich danke meinem Doktorvater Thomas Bartsch für die gute Betreuung der Arbeit und seine Geduld. Ich bedanke mich außerdem bei Martin Väth, Bernhard Lani-Wayda, Hans-Otto Walther für ideenreiche Diskussionen und sehr viel Rücksichtnahme. Außerdem danke ich Nadine Limberger, Alexander Simonow, Wolfgang Kraus, Inna Smagulowa, dem restlichen Pflegepersonal, Josefa Wieck, Maria Nelles Pfaff, Monika Prommersperger, Christian Kuhl, die eine sehr große Unterstützung nicht nur bei der Enstehung der Arbeit waren. Ganz besonders danke ich meinen Eltern und meinem Bruder.

KAPITEL 2

Grundlagen

2.1 Notationen und Bemerkungen

In dieser Arbeit ist $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Mit $|\cdot|$ bezeichnen wir die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^N$, bzw. $\mathbb{R}$.

Steht bei einer Konvergenz nicht die Laufvariable dabei, dann konvergiert der Ausdruck für $n \in \mathbb{N}$ und $n \to \infty$. Wir verwenden folgende Verkürzungen

$$\begin{aligned} s \text{ nahe } t, s, t \in \mathbb{R} \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists \delta > 0 \text{ mit } s \in (t-\delta, t+\delta) \\ \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ groß} \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ und für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \\ \text{für } \lambda \geq 1 \text{ groß} \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists \Lambda \geq 1 \text{ und für alle } \lambda \geq \Lambda \\ \frac{d}{dt} J(\sigma(u,s)), s \in \mathbb{R} \quad &:\Leftrightarrow \quad \left(\frac{d}{dt}(J \circ \sigma(u,\cdot))\right)(s) \end{aligned}$$

Weiter schreiben wir für einen metrischen Raum (X,d), $x \in X$ und $r > 0$

$$U_r(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}, \quad B_r(x) := \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\},$$

Für $x \in \mathbb{R}^N$ und $r > 0$ sei

$$W_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \mid |x_i - y_i| \leq r \ \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N\}.$$

Wir schreiben für $B \subseteq A \subseteq X$, X ein topologischer Raum, $int_A B$ und meinen das Innere von B bzgl. der Teilraumtopologie von A.

Wir bezeichnen für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ den Dualraum mit X'.

Sprechen wir in dieser Arbeit von Differenzierbarkeit, so ist die Fréchet-Differenzierbarkeit gemeint.

Ist (X,d) ein metrischer Raum, so schreiben wir X statt (X,d). Sind X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ und $f : (X,A) \to (Y,B)$, dann schreiben wir $(f|_X)$ für $X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ und $(f|_A)$ für $A \to B$, $x \mapsto f(x)$.

Weiter setzen wir für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$, $c \in \mathbb{R}$ und ein Funktional $f : X \to \mathbb{R}$

$$f^c := \{x \in X \mid f(x) \leq c\};$$

ist f differenzierbar, dann heißt $(x_n) \subseteq X$ (PS)$_c$-Folge, wenn $(f(x_n))$ gegen c und $Df(x_n)$ gegen 0 in X' konvergieren; f erfüllt die (PS)$_c$-Bedingung, wenn alle $(PS)_c$-Folgen eine konvergente Teilfolge besitzen; f erfüllt die (PS)-Bedingung, wenn f die $(PS)_c$-Bedingung für alle $c \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Weiter betrachten wir die Räume $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, $W^{1,2}(\Omega)$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ meßbar ist, und $C_c^\infty(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$ wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen ist, aus [2]. Nach [2, Theorem 2.10] ist $L^p(\Omega)$ ein Banachraum und nach [2, Theorem 3.2] sind $W^{1,2}(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ Hilberträume. Nach [2, Theorem 3.18] ist $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Es sei

$$2^* := \begin{cases} \infty, & N = 2, \\ \frac{2N}{N-2}, & N \geq 3. \end{cases}$$

Bemerkung 2.1 (Einbettungen)**.** Nach [2, Theorem 5.4] existieren für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ mit der Kegeleigenschaft, $2 \leq p \leq 2^*$ folgende stetige Einbettungen

$$\begin{aligned} &W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \\ &W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\Omega), \\ &H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega); \end{aligned}$$

nach [2, Theorem 6.2] sind $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ kompakt für $2 \leq p < 2^*$.

Bemerkung 2.2 (Übertragung von schwacher Konvergenz)**.** Seien X, Y Banachräume und $L : X \to Y$ stetig linear. Sei (x_n) eine Folge in X, die schwach gegen $x \in X$ konvergiert, d.h. für alle $x' \in X'$ gilt $x'(x_n) \to x'(x)$. Dann gilt für alle $y' \in Y'$ $y' \circ L \in X'$ und somit

$$y'(L(x_n)) = (y' \circ L)(x_n) \to (y' \circ L)(x) = y'(L(x)).$$

Damit gilt $L(x_n) \rightharpoonup L(x)$.

2.2 Der Leray-Schauder-Grad

In diesem Abschnitt wird auf den Leray-Schauder-Grad eingegangen. Die Aussagen beziehen sich auf das Buch von Klaus Deimling [6]. Die verschiedenen Eigenschaften des Leray-Schauder-Grad werden im Kapitel 4 verwendet, um kritische Punkte von Funktionalen zu liefern.

Satz 2.3. *(Der Leray-Schauder-Grad) Sei X ein reeller normierter Raum und*

$$M := \{(F,U,y) | \quad U \subseteq X \text{ offen und beschränkt}, F = Id_X - F_0 \text{ mit } F_0 : \overline{U} \to X \text{ kompakt}, y \notin F(\partial U)\}.$$

Dann hat der Leray-Schauder-Grad $\deg : M \to \mathbb{Z}$ *folgende Eigenschaften:*

(d1) $\deg(Id, U, y) = 1$ *für alle* $y \in U$, $\deg(Id, U, y) = 0$ *für alle* $y \notin \overline{U}$.

(d2) *Ist* $\deg(F, U, y) \neq 0$, *so gibt es ein* $x \in U$ *mit* $F(x) = y$.

(d3) *Ist* h_0 *eine kompakte Homotopie auf* $\overline{U}$, $h = Id_X - h_0$ *und* $y \notin h([0,1] \times \partial U)$, *dann ist* $\deg(h(t,\cdot), U, y)$ *unabhängig von* $t \in [0,1]$.

(d4) *Ist* $U' \subseteq X$ *offen*, $\overline{U'} \subseteq \overline{U}$ *und* $y \notin F(\overline{U'})$, *dann ist* $\deg(F, U, y) = \deg(F, U \backslash \overline{U'}, y)$.

(d5) *Für alle* $G = Id_X - G_0$ *mit* $G_0 : \overline{U} \to X$ *kompakt und* $\sup_{x \in \overline{U}} \|F_0(x) - G_0(x)\|_X < dist(y, F(\partial U))$ *ist* $\deg(G, U, y) = \deg(F, U, y)$.

Beweis. Siehe dazu im Buch von Deimling [6, §16 Satz 1]. □

Bemerkung . Der Leray-Schauder-Grad besitzt noch mehr wesentliche Eigenschaften, die aber hier nicht mitaufgelistet werden, da sie in dieser Arbeit nicht benötigt werden.

Nun listen wir die benötigten Sätze bzgl. des Leray-Schauder-Grad auf.

Satz 2.4. *Sei X ein reeller normierter Raum, V ein abgeschlossener Unterraum von X, $U \subseteq X$ offen und beschränkt, $U \cap V$ nicht leer, $F_0 : \overline{U} \to V$ kompakt, $F = Id_X - F_0$, $y \in V$ und $y \notin F(\partial U)$. Dann ist*

$$\deg(F, U, y) = \deg(F|_{\overline{U} \cap V}, U \cap V, y).$$

Beweis. Siehe dazu im Buch von Deimling [6, §16 Satz 2]. □

Satz 2.5. *Sei X ein reeller Banachraum, $U \subseteq X$ offen und beschränkt, $F_0 : U \to X$ kompakt, $x_0 \in U$ ein Fixpunkt von F_0, F_0 differenzierbar in x_0 und 1 kein Eigenwert von $DF_0(x_0)$. Dann ist x_0 ein isolierter Fixpunkt von F_0 und es gibt $\epsilon_0 > 0$, so dass x_0 der einzige Fixpunkt von F_0 in $B_\epsilon(x_0)$ ist für alle $0 < \epsilon < \epsilon_0$, und es gilt*

$$\deg(Id_X - F_0, U_\epsilon(x_0), 0) = \deg(Id_X - DF_0(x_0), U_\epsilon(0), 0) \neq 0.$$

Beweis. Siehe dazu im Buch von Deimling [6, §20 Satz 5, §23 Satz 1]. □

2.3 Nichttrivialer Leray-Schauder-Grad

Sei $\tilde{H}$ ein Hilbertraum. Sei $K : \tilde{H} \to \tilde{H}$ vollstetig und stetig differenzierbar. Sei $J : \tilde{H} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\nabla J = Id_{\tilde{H}} - K$ und erfülle die (PS)-Bedingung. Sei u_0 ein nichtausgearteter kritischer Punkt von J.

Es ist $D^2 J(u_0)$ nicht ausgeartet. Da K vollstetig ist, ist nach Lemma A.6 auch $DK(u_0)$ vollstetig und damit kompakt. Es ist 1 kein Eigenwert von $DK(u_0)$. u_0 ist ein Fixpunkt von K. Nach Satz 2.5 gibt es $\varrho_0 > 0$, so dass für alle $0 < \varrho < \varrho_0$ u_0 der einzige Fixpunkt von K in $B_\varrho(u_0)$ ist und es gilt

$$\deg(Id_{\tilde{H}} - K, U_\varrho(u_0), 0) \neq 0.$$

D.h. u_0 ist der einzige kritische Punkt von J_0 in $B_\varrho(u_0)$, und es gilt

$$\deg(\nabla J, U_\varrho(u_0), 0) = \deg(Id_{\tilde{H}} - K, U_\varrho(u_0), 0) \neq 0.$$

2.4 Singuläre Homologietheorie

In diesem Abschnitt wird auf die singuläre Homologietheorie eingegangen. Die Aussagen beziehen sich auf das Buch von Albrecht Dold [8]. Die verschiedenen Eigenschaften der singulären Homologie werden in den Kapiteln 5 und 6 kritische Punkte von Funktionalen liefern.

Bemerkung 2.6. Seien X, Y und Z topologische Räume und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ und $C \subseteq Z$. Wie man im Buch von Dold [8, Kapitel 2, Definition 1.1 und Kapitel 3, Abschnitt 2 und 3] sieht, ist $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ für stetige Funktionen $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ und $(Id_X)_* = Id_{H_*(X)}$. Sind $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop, dann ist $f_* = g_*$ nach [8, Kapitel 3, 5.2 Corollar].

Satz 2.7. *Für einen topologischen Raum X ist $H_*(X, X) = 0$.*

Beweis. Im Buch von Dold [8, Kapitel 3, Abschnitt 3] wird gezeigt, dass folgende Sequenz exakt ist

$$\dots\ H_*(X) \xrightarrow{Id_{H_*(X)}} H_*(X) \xrightarrow{j_*} H_*(X, X) \xrightarrow{\partial_*} H_{*-1}(X) \xrightarrow{Id_{H_{*-1}(X)}} H_{*-1}(X)\ \dots \tag{2.1}$$

Damit ist

$$Kern(j_*) = Bild(Id_{H_*(X)}) = H_*(X), \quad Bild(\partial_*) = Kern(Id_{H_{*-1}(X)}) = \{0\}$$

d.h. $j_* = 0$ und $\partial_* = 0$. Es folgt

$$0 = Bild(j_*) = Kern(\partial_*) = H_*(X, X).$$

□

Lemma 2.8 (Fünfer-Lemma). *Ist*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

kommutativ, die Zeilen exakt und φ_1, φ_2, φ_4, φ_5 isomorph, dann ist auch φ_3 isomorph.

Beweis. Siehe dazu im Buch von Dold [8, Kapitel 1, 2.9 Lemma]. □

Satz 2.9. *Seien (X, A), (Y, B) topologische Paare, $f : (X, A) \to (Y, B)$ stetig, so dass $f|_A : A \to B$ und $f|_X : X \to Y$ Isomorphismen $(f|_A)_*$, $(f|_X)_*$ induzieren, dann ist auch f_* isomorph.*

Beweis. Im Buch von Dold [8, Kapitel 3, Abschnitt 3] wird gezeigt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_{*+1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & H_{*+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_X)_*"] & H_{*+1}(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_*(A) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_*"] & H_*(X) \arrow[d, "(f|_X)_*"] \\ H_{*+1}(B) \arrow[r] & H_{*+1}(Y) \arrow[r] & H_{*+1}(Y, B) \arrow[r] & H_*(B) \arrow[r] & H_*(Y) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist und die Zeilen exakt sind. Mit dem Fünfer-Lemma 2.8 folgt die Behauptung. □

Satz 2.10. *Ist $(X, A) \simeq (Y, B)$, d.h. es gibt $f : (X, A) \to (Y, B)$ und $g : (Y, B) \to (X, A)$ stetig, so dass $f \circ g$ homotop zu $Id_{(Y,B)}$ und $g \circ f$ homotop zu $Id_{(X,A)}$ ist, dann ist $H_*(X, A) \cong H_*(Y, B)$ bzgl. f_* und $(f_*)^{-1} = g_*$.*

Beweis. Siehe dazu im Buch von Dold [8, Kapitel 3, 5.3 Korollar]. □

Folgerung 2.11. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein starker Deformationsretrakt, dann induziert die Einbettung $i : A \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus $H_*(A) \cong H_*(X)$ bzgl. i_*.*

Beweis. Siehe dazu im Buch von Dold [8, Kapitel 3, 5.11 Beispiel]. □

Satz 2.12. *Sei (X, A) ein topologisches Paar. Ist $B \subseteq A$ mit $\bar{B} \subseteq \operatorname{int} A$, so ist $H_*(X \backslash B, A \backslash B) \cong H_*(X, A)$ bzgl. i_* für die Einbettung $i : (X \backslash B, A \backslash B) \hookrightarrow (X, A)$.*

Beweis. Siehe dazu im Buch von Dold [8, Kapitel 3, 7.4 Korollar]. □

Satz 2.13. *Ist (X, A) ein topologisches Paar mit $H_*(X, A) \neq 0$, dann gibt es ein $K \subseteq X$ kompakt und ein $\xi \in H_*(K, A \cap K)$ mit*

$$\begin{aligned} H_*(K, A \cap K) &\rightarrow H_*(X, A), \\ \xi &\mapsto i_*(\xi) \neq 0, \end{aligned}$$

wobei $i : (K, A \cap K) \hookrightarrow (X, A)$.

Beweis. Die Bezeichnungen in diesem Beweis sind aus dem Buch von Dold [8, Kapitel 3, Abschnitt 2,3]. Sei $q \in \mathbb{N}_0$ mit $H_q(X, A) \neq 0$. Nach [8, Kapitel 3, Abschnitt 3] ist $H_q(X, A) = Z_qS(X, A)/B_qS(X, A)$. Wegen $H_q(X, A) \neq 0$ gibt es damit $z \in Z_qS(X, A)$ mit $z \notin B_qS(X, A)$. Sei $c \in S_q(X)$ mit $z = c + S_q(A)$. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_k : \triangle_q \rightarrow X$ stetig, $c_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1, ..., n\}$ mit

$$c = \sum_{k=1}^{n} c_k \sigma_k.$$

Sei

$$K := \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k(\triangle_q).$$

Es ist K kompakt. Seien $\sigma'_k : \triangle_q \rightarrow K$, $\sigma'_k(x) = \sigma_k(x)$, $k \in \{1, ..., n\}$,

$$c' := \sum_{k=1}^{n} c_k \sigma'_k, \quad z' := c' + S_q(A \cap K).$$

Da $z \in Z_qS(X, A)$ gilt

$$\partial_q c + S_{q-1}(A) = \overline{\partial_q}(c + S_q(A)) = \overline{\partial_q} z = S_{q-1}(A),$$

d.h. $\partial_q c \in S_{q-1}(A)$. Damit ist aber auch $\partial_q c' \in S_{q-1}(A \cap K)$, d.h.

$$\overline{\partial_q} z' = \overline{\partial_q}(c' + S_q(A \cap K)) = \partial_q c' + S_{q-1}(A \cap K) = S_{q-1}(A \cap K).$$

Also ist $z' \in Z_qS(K, A \cap K)$.

Sei $i : (K, A \cap K) \rightarrow (X, A)$. Wegen $S_q i(c') = c$ ist

$$\overline{S_q i}(z') = \overline{S_q i}(c' + S_q(A \cap K)) = S_q i(c') + S_q(A) = c + S_q(A) = z$$

und somit

$$i_*(z' + B_qS(K, A \cap K)) = \overline{S_q i}(z') + B_qS(X, A) = z + B_qS(X, A) \neq 0.$$

Setze $\xi := z' + B_qS(K, A \cap K) \in H_q(K, A \cap K)$. □

2.5 Gromoll-Meyer-Paar

In diesem Kapitel definieren wir Gromoll-Meyer-Paare und listen einige Eigenschaften auf. Dabei wird die Eigenschaft eines Gromoll-Meyer-Paares benutzt, um starke Deformationsretrakte zu erhalten. Zum Schluss werden wir ein Gromoll-Meyer-Paar zu einem Funktional und einem isolierten kritischen Punkt des Funktionals konstruieren.

Sei $\tilde{H}$ ein Hilbertraum, $J : \tilde{H} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und erfülle die (PS)-Bedingung. Sei u_0 ein isolierter kritischer Punkt.

Bemerkung . Da J zweimal stetig differenzierbar ist, ist ∇J lokal Lipschitzstetig. Damit ist ∇J ein Pseudogradientenvektorfeld zu J.

Eine Abbildung $V : \tilde{H} \to \tilde{H}$ ist ein Pseudogradientenvektorfeld zu J, wenn für alle $u \in \tilde{H}$ gilt

$$\|V(u)\|_{\tilde{H}} \leq 2\|\nabla J(u)\|_{\tilde{H}}$$
$$\langle \nabla J(u), V(u)\rangle_{\tilde{H}} \geq \|\nabla J(u)\|^2_{\tilde{H}},$$

siehe [10][Definition 2.1].

Nach [7, 10.4.5. und 10.4.6] gibt es zu einem Pseudogradientenvektorfeld V zu J einen Fluß σ, mit

$$\sigma : \{(u,t) \in \tilde{H} \times \mathbb{R} \mid u \in \tilde{H}, t \in (T^-(u), T^+(u))\} \to \tilde{H},$$
$$\tfrac{d}{dt}\sigma(u,t) = -V(\sigma(u,t)), \quad \sigma(u,0) = u.$$

Nach [7, 10.5.1.] ist σ stetig.

Definition 2.14. Ein topologisches Paar (W, W_-) heisst Gromoll-Meyer-Paar von J um u_0 bzgl. eines Pseudogradientenvektorfeldes V, σ der Fluss von $-V$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) W ist eine abgeschlossene Umgebung von u_0 und für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, $u \in \tilde{H}$ mit $\sigma(u, t_i) \in W$, $i = 1, 2$, ist auch $\sigma(u,t) \in W$ für alle $t \in [t_1, t_2]$;

(ii) $W_- = \{u \in W | \sigma(u,t) \notin W \ \forall t \in (0, T^+(u))\}$ ist abgeschlossen in W;

(iii) W_- ist eine Untermannigfaltigkeit und der Fluß σ ist transversal zu W_-.

(Definition von Untermannigfaltigkeit und transversal, siehe [1, §17, Seiten 44,45]).

Lemma 2.15. *Sei σ der Fluss von $-\nabla J$. Ist $u \in \tilde{H}$, so dass $J(\sigma(u,\cdot))$ nach unten beschränkt ist durch ein $d \in \mathbb{R}$, dann ist $T^+(u) = \infty$.*

Beweis. Für $u \in \tilde{H}$ und $t \in (T^-(u), T^+(u))$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) &= \langle \nabla J(\sigma(u,t)), \frac{d}{dt}\sigma(u,t)\rangle_{\tilde{H}} \\
&= -\langle \nabla J(\sigma(u,t)), \nabla J(\sigma(u,t))\rangle_{\tilde{H}} \\
&= -\|\nabla J(\sigma(u,t))\|^2_{\tilde{H}} \leq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $(T^-(u), T^+(u)) \to \tilde{H}, t \mapsto J(\sigma(u,t))$ monoton fallend für alle $u \in \tilde{H}$.

Angnommen, $T^+(u) < \infty$.

Sei (t_n) eine Folge in $[0, T^+(u))$ mit $t_n \to T^+(u)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|\sigma(u,t_n) - \sigma(u,t_m)\|_{\tilde{H}} &\leq |\int_{t_m}^{t_n} \|\frac{d}{dt}\sigma(u,s)\|_{\tilde{H}}\, ds| \\
&= |\int_{t_m}^{t_n} \|\nabla J(\sigma(u,s))\|_{\tilde{H}}\, ds| \\
&\leq |\int_{t_m}^{t_n} 1\, ds|^{\frac{1}{2}} \cdot |\int_{t_m}^{t_n} \|\nabla J(\sigma(u,s))\|^2_{\tilde{H}}\, ds|^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{|t_n - t_m|} \cdot 2\sqrt{|J(\sigma(u,t_n)) - J(\sigma(u,t_m))|} \\
&\leq \sqrt{|t_n - t_m|} \cdot 2\sqrt{J(u) - d}.
\end{aligned}$$

Da (t_n) eine Cauchy-Folge ist, ist auch $(\sigma(u,t_n))$ eine Cauchy-Folge in $\tilde{H}$. Sei v der Grenzwert von $(\sigma(u,t_n))$ in $\tilde{H}$. Da (t_n) eine beliebige Folge in $[0, T^+(u))$ mit $t_n \to T^+(u)$ war, ist der Grenzwert v von $(\sigma(u,t_n))$ unabhängig von der Wahl der Folge (t_n). Damit ist

$$\sigma(u,t) \to v, \quad \text{für } T^+(u) > t \to T^+(u)$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
&\varphi : (T^-(u), T^+(v) + T^+(u)) \to H, \\
&\varphi(t) = \begin{cases} \sigma(u,t), & \text{falls, } t \in (T^-(u), T^+(u)), \\ \sigma(v, t - T^+(u)), & \text{falls, } t \in [T^+(u), T^+(v) + T^+(u)) \end{cases}
\end{aligned}$$

stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = -\nabla J(\varphi(t)), \quad \varphi(0) = u.$$

Das liefert den Widerspruch $T^+(u) = T^+(u) + T^+(v) > T^+(u)$. $\square$

Lemma 2.16. *Sei σ der Fluss, $d \in \mathbb{R}$ und $U \subseteq \tilde{H}$ mit*

(i) $\forall u \in U$ *gibt es* $t \geq 0$ *mit* $J(\sigma(u,t)) \leq d$;

(ii) ist $u \in U$ *und* $t \geq 0$ *mit* $J(\sigma(u,t)) = d$, *dann ist*

$$\begin{aligned} J(\sigma(u,s)) > d, \quad \forall s \in [0,t), \\ J(\sigma(u,s)) < d, \quad \forall s \in (t, T^+(u)); \end{aligned}$$

Dann gibt es eine stetige Abbildung $T : U \to [0,\infty)$ *mit*

$$\begin{aligned} J(\sigma(u,t)) > d, &\qquad \forall t \in [0, T(u)), \\ J(\sigma(u,T(u))) = d, & \\ J(\sigma(u,t)) < d, &\qquad \forall t \in (T(u), T^+(u)), \end{aligned}$$

für alle $u \in U \backslash J^d$ *und* $T|_{U \cap J^d} = 0$.

Beweis. Ist $u \in U$ mit $J(u) > d$, dann gibt es wegen der Stetigkeit von J und σ und wegen (i) ein $t \in (0, T^+(u))$ mit $J(\sigma(u,t)) = d$. Für $u \in U$ mit $J(u) = d$ ist auch $J(\sigma(u,0)) = d$. Sei $T : U \to [0,\infty)$, definiert durch

$$\begin{cases} T(u) = 0, & \text{falls } u \in U, J(u) < d, \\ J(\sigma(u,T(u))) = d, & \text{falls } u \in U, J(u) \geq d. \end{cases}$$

Nach (ii) ist T auch für $u \in U$ mit $J(u) \geq d$ wohldefiniert, d.h. für $u \in U$ ist $t \geq 0$ mit $J(\sigma(u,t)) = d$ eindeutig. Es gilt

$$\begin{aligned} J(\sigma(u,t)) > d, &\qquad \forall t \in [0, T(u)), \\ J(\sigma(u,T(u))) \leq d. & \end{aligned}$$

Für $u \in U$ mit $J(u) \geq d$ ist $J(\sigma(u,t)) < d$ für alle $t \in (T(u), T^+(u))$ nach (ii). Sei $u \in U$ mit $J(u) < d$. Angenommen, es gibt $t' > 0$ mit $J(\sigma(u,t')) = d$, dann gibt es

$$t := \sup\{s' \in (0, T^+(u)) \mid \forall s \in [0,s'] \text{ ist } J(\sigma(u,s)) < d\} < T^+(u).$$

Wegen $J(\sigma(u,0)) < d$ und der Stetigkeit von J und σ ist $t > 0$. Nach Definition von t ist $J(\sigma(u,s)) < d$ für alle $s \in [0,t)$. Es folgt $J(\sigma(u,t)) \leq d$. Weiter gibt es nach Definition von t eine Folge (s_n) mit $s_n \in (t, T^+(u))$, $s_n \to t$ und $J(\sigma(u,s_n)) \geq d$. Wegen der Stetigkeit von J und σ ist $J(\sigma(u,t)) \geq d$. Es folgt $J(\sigma(u,t)) = d$. Dann ist aber nach (ii) für $s \in [0,t)$

$$d > J(\sigma(u,s)) > d.$$

Das ist ein Widerspruch. Es folgt $J(\sigma(u,t)) < d$ für alle $t \in (0, T^+(u)) = (T(u), T^+(u))$. Insgesamt ist

$$J(\sigma(u,t)) < d, \quad \forall t \in (T(u), T^+(u)).$$

Es ist $T|_{U \cap J^d} = 0$.

Sei $u \in U$ mit $J(u) < d$. Sei $(u_n) \subseteq U$ mit $u_n \to u$. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ groß $J(u_n) < d$ wegen der Stetigkeit von J. Also ist $T(u_n) = 0 = T(u)$.

Sei $u \in U$ mit $J(u) \geq d$. Sei $(u_n) \subseteq U$ mit $u_n \to u$. Angenommen, es ist $(T(u_n))$ unbeschränkt oder $\limsup T(u_n) > T(u) \geq 0$. Dann ist gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $t > 0$ mit $T(u) < t < T^+(u)$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ groß $T(u_{n_k}) \geq t$. Also ist

$$d > J(\sigma(u,t)) = \lim_{k \to \infty} J(\sigma(u_{n_k}, t)) \geq d.$$

Das ist ein Widerspruch. Es folgt $\limsup T(u_n) \leq T(u)$ und damit auch $0 \leq \liminf T(u_n) \leq T(u)$. O.E. sei $T(u_n) \to \liminf T(u_n)$. Dann ist

$$J(\sigma(u, \lim T(u_n))) = \lim J(\sigma(u_n, T(u_n))) = d$$

Somit ist $\lim T(u_n) = T(u)$.

Insgesamt folgt

$$T(u) = \liminf T(u_n) \leq \limsup T(u_n) \leq T(u).$$

Damit ist T stetig. □

Lemma 2.17. *Sei (W, W_-) ein Gromoll-Meyer-Paar von J um u_0 bzgl. ∇J, $e \in \mathbb{R}$ mit $W_- = W \cap J^{-1}(\{e\})$. Ist $u \in W$ und $t \in [0, T^+(u))$ mit $J(\sigma(u,t)) \geq e$, dann ist $\sigma(u,t) \in W$.*

Beweis. Sei σ der Fluss zu $-\nabla J$.

Angenommen, es gibt $u \in W$ und $t' \in [0, T^+(u))$ mit $J(\sigma(u,t')) \geq e$ und $\sigma(u,t') \notin W$.

Es gilt für $t \in (T^-(u), T^+(u))$

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) = -\|\nabla J(\sigma(u,t))\|^2_{\tilde{H}}.$$

Damit ist $J(\sigma(u,\cdot))$ monoton fallend. Also ist $J(\sigma(u,t)) \geq e$ für alle $t \in [0, t']$.

Es gibt nun

$$t := \sup\{s' \in [0, T^+(u)) \mid \forall s \in [0, s'] \textit{ ist } \sigma(u,s) \in W\} \leq t'.$$

Da W abgeschlossen und σ stetig ist, ist $\sigma(u,t) \in W$ und damit $t < t'$. Nach Definition von t gibt es $(s_n) \subseteq (t, T^+(u))$ mit $s_n \to t$ und $\sigma(u, s_n) \notin W$. Es ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma(\sigma(u,t), s_n - t) = \sigma(u, s_n) \notin W$$

und $s_n - t \to 0$. Mit Definition 2.14 (i) ist damit

$$\sigma(\sigma(u,t), s) \notin W, \quad \forall s \in (0, T^+(\sigma(u,t))).$$

Nach Definition 2.14 (ii) ist also $\sigma(u,t) \in W_-$. Dann ist $J(\sigma(u,t)) = e$. Weiter folgt aus $\sigma(u,t) \in W_-$, dass $\nabla J(\sigma(u,t)) \neq 0$, da sonst $\sigma(\sigma(u,t), s) = \sigma(u,t)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und somit

$$\sigma(u,t') = \sigma(\sigma(u,t), t'-t) = \sigma(u,t) \in W.$$

Das ist ein Widerspruch zu $\sigma(u,t') \notin W$. Also ist $\nabla J(\sigma(u,t)) \neq 0$ und somit

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) = -\|\nabla J(\sigma(u,t))\|^2_{\tilde{H}} < 0.$$

Es folgt

$$e = J(\sigma(u,t)) > J(\sigma(u,t')) \geq e.$$

Das ist ein Widerspruch. □

Satz 2.18. *Sei (W, W_-) ein Gromoll-Meyer-Paar von J um u_0 bzgl. ∇J, $u_0 \in W$ einziger kritischer Punkt von J in W, $c := J(u_0)$, $e, d \in \mathbb{R}$ mit $d > c > e$ und $W_- = W \cap J^{-1}(\{e\})$. Dann ist $W \cap J^d$ ein starker Deformationsretrakt von W.*

Beweis. Sei σ der Fluss zu $-\nabla J$.

Nun ist $W \cap J^{-1}([d,\infty))$ abgeschlossen, J erfüllt die (PS)-Bedingung und hat keinen kritischen Punkt in $W \cap J^{-1}([d,\infty))$, da $u_0 \notin W \cap J^{-1}([d,\infty))$. Damit existiert

$$\beta := \inf_{u \in W \cap J^{-1}([d,\infty))} \|\nabla J(u)\|_{\tilde{H}} > 0.$$

<u>**Schritt 1:**</u> Für alle $u \in W$ gibt es $t \geq 0$ mit $J(\sigma(u,t)) \leq d$.

Für $u \in W \cap J^d$ ist $J(\sigma(u,0)) = J(u) \leq d$.

Sei $u \in W$ mit $J(u) > d$. Nun ist für $t \in (T^-(u), T^+(u))$

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) = -\|\nabla J(\sigma(u,t))\|^2_{\tilde{H}}.$$

Damit ist $J(\sigma(u,\cdot))$ monoton fallend.

Angenommen, es gibt kein $t \in [0, T^+(u))$ mit $J(\sigma(u,t)) \leq d$. Dann ist $J(\sigma(u,t)) > d$ für alle $t \in (T^-(u), T^+(u))$. Nach Lemma 2.15 ist $T^+(u) = \infty$.

Nach Lemma 2.17 ist außerdem $\sigma(u,t) \in W$ für alle $t \in [0, T^+(u))$. Es folgt für $t \geq 0$

$$d \leq J(\sigma(u,t)) = J(u) + \int_0^t \frac{d}{dt} J(\sigma(u,s))\, ds \leq J(u) - \beta^2 t \overset{t\to\infty}{\to} -\infty.$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt $J(\sigma(u,t)) \leq d$ für ein $t \geq 0$.

Schritt 2: Ist $u \in W$ und $t \geq 0$ mit $J(\sigma(u,t)) = d$, dann ist

$$\begin{aligned} J(\sigma(u,s)) &> d, \quad \forall s \in [0,t), \\ J(\sigma(u,s)) &< d, \quad \forall s \in (t, T^+(u)); \end{aligned}$$

Sei $u \in W$ und $t \geq 0$ mit $J(\sigma(u,t)) = d$. Es ist $J(\sigma(u,\cdot))$ monoton fallend, d.h. $J(\sigma(u,s)) \geq d$ für alle $s \in [0,t]$. Nach Lemma 2.17 ist $\sigma(u,s) \in W$ für alle $s \in [0,t]$. Für $s \in [0,t]$ ist somit

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(u,s)) = -\|\nabla J(\sigma(u,s))\|_{\tilde{H}}^2 \leq -\beta^2 < 0.$$

D.h. $J(\sigma(u,\cdot))|_{[0,t]}$ ist streng monoton fallend. Somit ist für $s \in [0,t)$

$$J(\sigma(u,s)) > J(\sigma(u,t)) = d.$$

Außerdem ist für $s > t$ nahe t $J(\sigma(u,s)) < J(\sigma(u,t))$. Es folgt für $s \in (t, T^+(u))$

$$J(\sigma(u,s)) < J(\sigma(u,t)) = d.$$

Schritt 3: $W \cap J^d$ ist ein starker Deformationsretrakt von W.

Nach den Schritten 1 und 2 ist Lemma 2.16 anwendbar, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $T : W \to [0,\infty)$ mit

$$\begin{aligned} J(\sigma(u,t)) &> d, \qquad \forall t \in [0, T(u)), \\ J(\sigma(u, T(u))) &= d, \\ J(\sigma(u,t)) &< d, \qquad \forall t \in (T(u), T^+(u)). \end{aligned}$$

für alle $u \in W \backslash J^d$ und $T|_{W\cap J^d} = 0$. Nach Lemma 2.17 ist für $u \in W$ und $t \in [0, T(u)]$ $\sigma(u,t) \in W$.

Sei $\eta : W \times [0,1] \to W$ definiert durch $\eta(u,t) := \sigma(u, tT(u))$. Da σ und T stetig sind, ist auch η stetig mit

$$\begin{aligned} \eta(\cdot,0) = Id_W, \quad \eta(u,1) &\in W \cap J^d, \quad \forall u \in W, \\ \eta(u,t) = u \quad \forall u &\in W \cap J^d, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Also ist $W \cap J^d$ ein starker Deformationsretrakt von W. $\square$

Satz 2.19. *Sei (W, W_-) ein Gromoll-Meyer-Paar von J um u_0 bzgl. ∇J, $u_0 \in W$ einziger kritischer Punkt von J in W, $c := J(u_0)$, $d \in \mathbb{R}$ mit $d < c$ und $W_- = W \cap J^{-1}(\{d\})$. Dann ist W_- ein starker Deformationsretrakt von $W \cap J^c \backslash \{u_0\}$.*

Beweis. Sei σ der Fluss zu $-\nabla J$. Sei $\tilde{W} := W \cap J^c \backslash \{u_0\}$.

Für $u \in \tilde{H}$, $t \in (T^-(u), T^+(u))$ ist

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) = -\|\nabla J(\sigma(u,t))\|^2_{\tilde{H}}.$$

Damit ist $J(\sigma(u,\cdot))$ monoton fallend.

<u>**Schritt 1:**</u> Für alle $u \in \tilde{W}$ gibt es $t \geq 0$ mit $J(\sigma(u,t)) = d$.

Für $u \in W_-$ ist $J(\sigma(u,0)) = J(u) = d$.

Sei $u \in \tilde{W}$ mit $c > J(u) \geq d$. Da $W \cap J^{J(u)}$ abgeschlossen, J die (PS)-Bedingung erfüllt und $u_0 \notin W \cap J^{J(u)}$, ist

$$\beta := \inf_{v \in W \cap J^{J(u)}} \|\nabla J(v)\|_{\tilde{H}} > 0.$$

Da $J(\sigma(u,\cdot))$ monoton fallend ist, ist $\sigma(u,t) \in J^{J(u)}$ für alle $t \in [0, T^+(u))$.

Angenommen, es gibt kein $t \geq 0$ mit $J(\sigma(u,t)) = d$, dann ist $J(\sigma(u,t)) > d$ für alle $t \in (T^-(u), T^+(u))$. Nach Lemma 2.15 ist $T^+(u) = \infty$. Nach Lemma 2.17 ist außerdem $\sigma(u,t) \in W$ für alle $t \in [0, T^+(u))$. Es folgt für $t \geq 0$

$$d < J(\sigma(u,t)) = J(u) + \int_0^t \frac{d}{dt} J(\sigma(u,s))\, ds < J(u) - \beta^2 t \overset{t\to\infty}{\to} -\infty.$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt die Existenz von $t \geq 0$ mit $J(\sigma(u,t)) = d$.

Sei $u \in \tilde{W}$ mit $J(u) = c$. Da u_0 einziger kritischer Punkt von J in W ist, gilt

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(u,0)) = -\|\nabla J(\sigma(u,0))\|^2_{\tilde{H}} = -\|\nabla J(u)\|^2_{\tilde{H}} < 0.$$

Damit gibt es ein $t \in (0, T^+(u))$ mit

$$d \leq J(\sigma(u,t)) < J(\sigma(u,0)) = J(u) = c.$$

Es ist nach Lemma 2.17 $\sigma(u,t) \in W$ und damit $\sigma(u,t) \in \tilde{W}$. Wir haben eben gezeigt, dass es nun ein $s \geq 0$ gibt mit $J(\sigma(\sigma(u,t),s)) = d$, d.h.

$$J(\sigma(u,t+s)) = J(\sigma(\sigma(u,t),s)) = d.$$

Schritt 2: Ist $u \in W$ und $t \geq 0$ mit $J(\sigma(u,t)) = d$, dann ist

$$J(\sigma(u,s)) > d, \quad \forall s \in [0,t),$$
$$J(\sigma(u,s)) < d, \quad \forall s \in (t, T^+(u)).$$

Sei $u \in W$ und $t \geq 0$ mit $J(\sigma(u,t)) = d$. Nach Lemma 2.17 ist $\sigma(u,t) \in W$. Es ist $\sigma(u,t) \neq u_0$, da $J(\sigma(u,t)) = d < c = J(u_0)$. Da u_0 einziger kritischer Punkt von J in W ist, gilt

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) = -\|\nabla J(\sigma(u,t))\|^2_{\tilde{H}} < 0.$$

Damit ist $J(\sigma(u,s)) > J(\sigma(u,t)) = d$ für $s < t$ nahe t und $J(\sigma(u,s)) < J(\sigma(u,t)) = d$ für $s > t$ nahe t. Da $J(\sigma(u,\cdot))$ monoton fallend ist, folgt

$$J(\sigma(u,s)) > d, \quad \forall s \in [0,t),$$
$$J(\sigma(u,s)) < d, \quad \forall s \in (t, T^+(u)).$$

Schritt 3: W_- ist ein starker Deformationsretrakt von $\tilde{W}$.

Nach den Schritten 1 und 2 ist Lemma 2.16 anwendbar, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $T : \tilde{W} \to [0,\infty)$ mit

$$\begin{aligned} J(\sigma(u,t)) &> d, \qquad \forall t \in [0, T(u)), \\ J(\sigma(u, T(u))) &= d, \\ J(\sigma(u,t)) &< d, \qquad \forall t \in (T(u), T^+(u)). \end{aligned}$$

für alle $u \in \tilde{W} \backslash J^d$ und $T|_{W_- \cap J^d} = 0$. Wegen $W_- \cap J^d = W_-$ ist für $u \in W_-$

$$J(\sigma(u, T(u))) = J(\sigma(u,0)) = J(u) = d.$$

Weiter ist $J(\sigma(u,T(u))) = d$ für alle $u \in \tilde{W} \backslash W_-$. Es folgt $J(\sigma(u,t)) \geq d$ für alle $u \in \tilde{W}$ und $t \in [0, T(u)]$. Nach Lemma 2.17 ist $\sigma(u,t) \in W$ für $u \in \tilde{W}$ und $t \in [0, T(u)]$. Angenommen, es gibt ein $u \in \tilde{W}$ und ein $t \geq 0$ mit $\sigma(u,t) = u_0$, dann ist $\sigma(\sigma(u,t),s) = u_0$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Also ist

$$\tilde{W} \ni u = \sigma(u,0) = \sigma(\sigma(u,t), -t) = u_0 \notin \tilde{W}.$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt $\sigma(u,t) \in W \backslash \{u_0\}$. Weiter ist für $u \in \tilde{W}$ $J(\sigma(u,\cdot))$ monoton fallend, d.h. $J(\sigma(u,t)) \leq J(u) \leq c$ für alle $t \in [0, T(u)]$. Insgesamt ist $\sigma(u,t) \in \tilde{W}$ für alle $u \in \tilde{W}$ und $t \in [0, T(u)]$.

Sei $\eta : \tilde{W} \times [0,1] \to \tilde{W}$ definiert durch $\eta(u,t) := \sigma(u, tT(u))$. Da σ und T stetig sind, ist auch η stetig mit

$$\eta(\cdot, 0) = Id_{\tilde{W}}, \quad \eta(u,1) \in W_-, \quad \forall u \in \tilde{W}$$
$$\eta(u,t) = u \quad \forall u \in W_-, t \in [0,1].$$

Also ist W_- ein starker Deformationsretrakt von $\tilde{W}$. □

Satz 2.20. *Sei* (W, W_-) *ein Gromoll-Meyer-Paar von* J *um* u_0 *bzgl.* ∇J, $u_0 \in W$ *einziger kritischer Punkt von* J *in* W, $d \in \mathbb{R}$ *mit* $d < J(u_0)$, $W_- = W \cap J^{-1}(\{d\})$. *Dann ist* $W \cap J^{J(u_0)}$ *ein starker Deformationsretrakt von* W.

Beweis. Sei $c := J(u_0)$ und σ der Fluß von $-\nabla J$. Seien $W_1 := W \cap J^c$ und $W_2 := W \cap J^{-1}([c, \infty))$. W_1 und W_2 sind abgeschlossen in $\tilde{H}$ mit $W = W_1 \cup W_2$. Die Menge W_+ enthalte alle Elemente u aus W_2 mit $J(\sigma(u,t)) > c$ für alle $t \in [0, T^+(u))$. Für $u \in W^+$ ist nach Lemma 2.15 $T^+(u) = \infty$.

Schritt 1: Ist $u \in W_2 \backslash \{u_0\}$, dann ist $J(\sigma(u, \cdot))$ streng monoton fallend.

Sei $u \in W_2 \backslash \{u_0\}$. Es gilt für $t \in (T^-(u), T^+(u))$

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) = -\|\nabla J(\sigma(u,t))\|^2_{\tilde{H}}.$$

Angenommen, es gibt ein $t \in (T^-(u), T^+(u))$ mit $\nabla J(\sigma(u,t)) = 0$. Dann ist $\sigma(u,t)$ ein kritischer Punkt von J und es gilt $\sigma(\sigma(u,t), s) = \sigma(u,t)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, d.h.

$$u = \sigma(u, 0) = \sigma(\sigma(u,t), -t) = \sigma(u,t).$$

Damit ist u ein kritischer Punkt von J. Wegen $u \in W$ ist also $u = u_0$. Das ist ein Widerspruch zu $u \neq u_0$. Somit ist $\frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) < 0$ für $t \in (T^-(u), T^+(u))$.

Schritt 2: Es gibt eine stetige Abbildung $T : W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\}) \to [0, \infty)$ mit

$$\begin{aligned} J(\sigma(u,t)) &> c, \qquad \forall t \in [0, T(u)), \\ J(\sigma(u, T(u))) &= c, \\ J(\sigma(u,t)) &< c, \qquad \forall t \in (T(u), T^+(u)), \end{aligned}$$

für alle $u \in W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$ und $T|_{W \cap J^d} = 0$.

Nach Definition von W_+ gibt es für alle $u \in W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$ ein $t \in [0, T^+(u))$ mit $J(\sigma(u,t)) = c$. Weiter ist nach Schritt 1

$$\begin{aligned} J(\sigma(u,s)) &> c \quad \forall\, s \in [0, t), \\ J(\sigma(u,s)) &< c \quad \forall\, s \in (t, T^+(u)). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.16 gibt es eine stetige Abbildung $T : W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\}) \to [0, \infty)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Schritt 3: Konstruktion von η.

Sei T aus Schritt 2. Für $u \in W_2 \cap W_1$ mit $u \neq u_0$ ist $J(u) = c$ und somit $T(u) = 0$. Für $u \in W$ und $t \in [0, T^+(u))$ mit $J(\sigma(u,t)) \geq d$ ist nach Lemma 2.17 $\sigma(u,t) \in W$. Damit ist $\eta : W \times [0,1] \to W$ mit

- $\cdot$ $\eta|_{W_1} := Id_{W_1}$;
- $\cdot$ für $u \in W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$ sei $\eta(u,t) := \sigma(u, \min\{\frac{t}{1-t}, T(u)\})$, falls $t < 1$, und $\eta(u,1) := \sigma(u, T(u))$;
- $\cdot$ für $u \in W_+$ sei $\eta(u,t) := \sigma(u, \frac{t}{1-t})$, falls $t < 1$, und $\eta(u,1) := u_0$;
- $\cdot$ $\eta(u_0, t) := u_0$ für alle $t \in [0,1]$.

wohldefiniert.

<u>**Schritt 4:**</u> η ist stetig für alle $(u,t) \in W \times [0,1]$ mit $u \in W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$.

Wir zeigen zuerst, dass $W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$ offen in W_2 ist. Sei $u \in W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$. Angenommen, es gibt $(u_n) \subseteq W_+ \cup \{u_0\}$ mit $u_n \to u$ in H. Wegen $u \neq u_0$ ist für $n \in \mathbb{N}$ groß $u_n \neq u_0$. Damit ist $u_n \in W_+$ für $n \in \mathbb{N}$ groß. Nun gibt es ein $t \in [0, T^+(u))$ mit $J(\sigma(u,t)) = c$. Nach Schritt 1 gibt es also ein $s \in (t, T^+(u))$ mit $J(\sigma(u,s)) < c$. Damit ist

$$c \leq \lim J(\sigma(u_n, s)) = J(\sigma(u,s)) < c.$$

Das ist ein Widerspruch. Es gibt also ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(u) \cap W_2 \subseteq W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$.

Sei nun $(u,t) \in H \times [0,1]$ mit $u \in W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$ und $((u_n, t_n)) \subseteq W_2 \times [0,1]$ mit $(u_n, t_n) \to (u,t)$ in $H \times [0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ groß ist auch $u_n \in W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$, da $W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$ offen ist. Somit ist $J(\sigma(u, T(u_n))) = c$, $n \in \mathbb{N}$, und $J(\sigma(u, T(u))) = c$. Ist $\frac{t}{1-t} > T(u)$, dann ist für $n \in \mathbb{N}$ groß $\frac{t_n}{1-t_n} > T(u_n)$ und somit in $\tilde{H}$

$$\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, T(u_n)) \to \sigma(u, T(u)) = \eta(u,t).$$

Ist $\frac{t}{1-t} < T(u)$, dann ist für $n \in \mathbb{N}$ groß $\frac{t_n}{1-t_n} < T(u_n)$ und somit in $\tilde{H}$

$$\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, \frac{t_n}{1-t_n}) \to \sigma(u, \frac{t}{1-t}) = \eta(u,t).$$

Sei nun $\frac{t}{1-t} = T(u)$. Gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit $\frac{t_{n_k}}{1-t_{n_k}} < T(u_{n_k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\eta(u_{n_k}, t_{n_k}) = \sigma(u_{n_k}, \frac{t_{n_k}}{1-t_{n_k}}) \to \sigma(u, \frac{t}{1-t}) = \eta(u,t).$$

Sei nun $\frac{t_n}{1-t_n} \geq T(u_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist in $\tilde{H}$

$$\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, T(u_n)) \to \sigma(u, T(u)) = \eta(u,t).$$

<u>**Schritt 5:**</u> η ist stetig für alle $(u,t) \in W \times [0,1)$ mit $u \in W_+$.

Sei $(u,t) \in H \times [0,1)$ mit $u \in W_+$ und $((u_n,t_n)) \subseteq W_2 \times [0,1]$ mit $(u_n,t_n) \to (u,t)$ in $H \times [0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ groß ist $u_n \neq u_0$, da $u \neq u_0$.

Gibt es eine Teilfolge $(u_{n_k}) \subseteq W^+$, dann ist in $\tilde{H}$

$$\eta(u_{n_k}, t_{n_k}) = \sigma(u_{n_k}, \frac{t_{n_k}}{1-t_{n_k}}) \to \sigma(u, \frac{t}{1-t}) = \eta(u,t).$$

Sei nun $(u_n) \subseteq W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$. Angenommen, es gibt eine Teilfolge (u_{n_k}) mit $\frac{t_{n_k}}{1-t_{n_k}} > T(u_{n_k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist für $k \in \mathbb{N}$ groß

$$T(u_{n_k}) < \frac{t_{n_k}}{1-t_{n_k}} < \frac{t}{1-t} + 1$$

O.E. sei $T(u_{n_k}) \to \limsup T(u_{n_k})$. Es folgt

$$c = J(\sigma(u_{n_k}, T(u_{n_k}))) \to J(\sigma(u, \lim T(u_{n_k}))) > c.$$

Das ist ein Widerspruch. Es folgt $\frac{t_n}{1-t_n} \leq T(u_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit in $\tilde{H}$

$$\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, \frac{t_n}{1-t_n}) \to \sigma(u, \frac{t}{1-t}) = \eta(u,t).$$

Schritt 6: Seien $u \in W_+ \cup \{u_0\}$, $(u_n) \subseteq W_2$ und $(t_n) \subseteq [0,\infty)$ mit

$$\begin{gathered} u_n \to u, \qquad t_n \to \infty, \\ t_n \in [0, T^+(u_n)), \quad J(\sigma(u_n,t_n)) \geq c \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{gathered}$$

dann ist $\sigma(u_n,t_n) \to u_0$ in $\tilde{H}$.

Seien $u \in W_+ \cup \{u_0\}$, $(u_n) \subseteq W_2$ mit $u_n \to u$ und $(t_n) \subseteq [0,\infty)$ mit $t_n \in [0, T^+(u_n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t_n \to \infty$ und $J(\sigma(u_n,t_n)) \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es gibt ein $\delta > 0$ und eine Teilfolge o.E. $((u_n,t_n))$ mit $\|\sigma(u_n,t_n) - u_0\| \geq 2\delta$.

Angenommen, es gibt ein $0 < \varrho < \delta$ und eine Teilfolge $((u_{n_k}, t_{n_k}))$ mit $\|\sigma(u_{n_k}, s) - u_0\| \geq \varrho$ für alle $s \in [0, t_{n_k}]$ und $k \in \mathbb{N}$. Da $W \backslash U_\varrho(u_0)$ abgschlossen ist, keine kritischen Punkte von J enthält und J die (PS)-Bedingung erfüllt, gibt es

$$\beta := \inf_{u \in W \backslash U_\varrho(u_0)} \|\nabla J(u)\|_{\tilde{H}} > 0.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ groß ist $J(u_{n_k}) \leq J(u) + 1$ und somit

$$\begin{aligned} c \leq J(\sigma(u_{n_k}, t_{n_k})) &= J(u_{n_k}) + \int_0^{t_{n_k}} \frac{d}{dt} J(\sigma(u_{n_k}, s))\, ds \\ &= J(u_{n_k}) - \int_0^{t_{n_k}} \|\nabla J(\sigma(u_{n_k}, s))\|_{\tilde{H}}^2\, ds \\ &\leq J(u) + 1 - \beta t_{n_k} \to -\infty. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Damit gibt es ein $r_n \in [0, t_n)$ mit $\|\sigma(u_n, r_n) - u_0\|_{\tilde{H}} < \delta$ und $\sigma(u_n, r_n) \to u_0$ in $\tilde{H}$. Sei

$$s_n := \inf\{s' \in [r_n, t_n] \mid \forall s \in [s', t_n] \text{ } ist \text{ } \|\sigma(u_n, s) - u_0\|_{\tilde{H}} \geq \delta\}.$$

Es gilt $\|\sigma(u_n, s) - u_0\|_{\tilde{H}} \geq \delta$ für alle $s \in (s_n, t_n]$. Wegen der Stetigkeit von $\|\cdot\|_{\tilde{H}}$ und σ ist auch $\|\sigma(u_n, s_n) - u_0\| \geq \delta$. Nach Definition von s_n gibt es eine Folge $(s'_k) \subseteq [r_n, s_n)$ mit $s'_k \to s_n$ für $k \to \infty$ und $\|\sigma(u_n, s'_k) - u_0\|_{\tilde{H}} < \delta$. Damit ist auch $\|\sigma(u_n, s_n) - u_0\|_{\tilde{H}} \leq \delta$ wegen der Stetigkeit von $\|\cdot\|_{\tilde{H}}$ und σ. Insgesamt ist $\|\sigma(u_n, s_n) - u_0\| = \delta$.

Damit ist

$$\begin{aligned}
\delta &\leq \|\sigma(u_n, t_n)\|_{\tilde{H}} - \|\sigma(u_n, s_n)\|_{\tilde{H}} \leq \|\sigma(u_n, t_n) - \sigma(u_n, s_n)\|_{\tilde{H}} \\
&= \|\int_{s_n}^{t_n} \frac{d}{dt}\sigma(u_n, s)\, ds\|_{\tilde{H}} \leq \int_{s_n}^{t_n} \|\frac{d}{dt}\sigma(u_n, s)\|_{\tilde{H}}\, ds \\
&= \int_{s_n}^{t_n} \|\nabla J(\sigma(u_n, s))\|_{\tilde{H}}\, ds \\
&\leq \left(\int_{s_n}^{t_n} 1^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{s_n}^{t_n} \|\nabla J(\sigma(u_n, s))\|_{\tilde{H}}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{t_n - s_n} \cdot \sqrt{J(\sigma(u_n, s_n)) - J(\sigma(u_n, t_n))}.
\end{aligned}$$

Nun ist $J(\sigma(u_n, \cdot))$ monoton fallend und $J(\sigma(u_n, t_n)) \geq c$. Damit ist

$$0 \leq J(\sigma(u_n, s_n)) - J(\sigma(u_n, t_n)) \leq J(\sigma(u_n, r_n)) - c \to J(u_0) - c = 0.$$

Wegen

$$\delta \leq \sqrt{t_n - s_n} \cdot \sqrt{J(\sigma(u_n, s_n)) - J(\sigma(u_n, t_n))}$$

und $J(\sigma(u_n, s_n)) - J(\sigma(u_n, t_n)) \to 0$ ist $t_n - s_n \to \infty$. Da $W \backslash U_\delta(u_0)$ abgeschlossen ist, keine kritischen Punkte von J enthält und J die (PS)-Bedingung erfüllt, gibt es

$$\beta := \inf_{u \in W \backslash U_\delta(u_0)} \|\nabla J(u)\|_{\tilde{H}} > 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
0 \leftarrow \quad & J(\sigma(u_n, t_n)) - J(\sigma(u_n, s_n)) = -\int_{s_n}^{t_n} \|\nabla J(\sigma(u_n, s))\|_{\tilde{H}}\, ds \\
\leq \quad & -\beta(t_n - s_n) \to -\infty.
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

Es folgt $\sigma(u_n, t_n) \to u_0$ in $\tilde{H}$.

Schritt 7: $\eta|_{W_2 \times [0,1]}$ ist stetig für alle $(u, 1) \in W \times [0, 1]$ mit $u \in W_+$.

Sei $u \in W_+$ und $((u_n, t_n)) \subseteq W_2 \times [0, 1]$ mit $(u_n, t_n) \to (u, 1)$ in $\tilde{H} \times [0, 1]$.

Gibt es eine Teilfolge $((u_{n_k}, t_{n_k}))$, so dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ kein $s_{n_k} \in [0, \infty)$ mit $\eta(u_{n_k}, t_{n_k}) = \sigma(u_{n_k}, s_{n_k})$, so ist $t_{n_k} = 1$ und $u_{n_k} \in W_+ \cup \{u_0\}$. Dann ist

$$\eta(u_{n_k}, t_{n_k}) = u_0 = \eta(u, 1).$$

Sei nun für $n \in \mathbb{N}$ $s_n \in [0, \infty)$ mit $\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, s_n)$. Angenommen, es gibt eine konvergente Teilfolge (s_{n_k}). Wegen $t_{n_k} \to 1$ ist auch $\frac{t_{n_k}}{1-t_{n_k}} \to \infty$. Somit ist $(u_{n_k}) \subseteq W_2 \backslash (W_+ \cup \{u_0\})$ und $s_{n_k} = T(u_{n_k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$c = J(\sigma(u_{n_k}, s_{n_k})) \to J(\sigma(u, \lim s_{n_k})) > c.$$

Das ist ein Widerspruch.

Damit ist $s_n \to \infty$. Es ist $J(\sigma(u_n, s_n)) \geq c$, da $s_n \in [0, T(u_n)]$, falls $u_n \notin W_+ \cup \{u_0\}$, oder $s_n \in [0, T^+(u_n))$, falls $u_n \in W_+ \cup \{u_0\}$. Mit Schritt 6 ist in $\tilde{H}$

$$\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, s_n) \to u_0 = \eta(u, 1).$$

Schritt 8: η ist stetig für alle $(u_0, t) \in W \times [0, 1]$.

Sei $t \in [0, 1)$ und $((u_n, t_n)) \subseteq W_2 \times [0, 1]$ mit $(u_n, t_n) \to (u_0, t)$ in $H \times [0, 1]$.

Für $n \in \mathbb{N}$ groß ist $t_n < 1$. Damit gibt es $(s_n) \subseteq [0, \infty)$ mit $\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, s_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ groß ist

$$s_n \leq \frac{t_n}{1 - t_n} \leq \frac{t}{1 - t} + 1.$$

Somit ist für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned}
\|\sigma(u_n, s_n) - u_0\|_{\tilde{H}} &\leq \|u_n - u_0\|_{\tilde{H}} + \|\sigma(u_n, s_n) - u_n\|_{\tilde{H}} \\
&\leq \|u_n - u_0\|_{\tilde{H}} + \int_0^{s_n} \|\nabla J(\sigma(u_n, s))\|_{\tilde{H}} \, ds \\
&\leq \|u_n - u_0\|_{\tilde{H}} + \sqrt{\frac{t}{1-t} + 1} \cdot \sqrt{J(u_n) - J(\sigma(u_n, s_n))} \\
&\leq \|u_n - u_0\|_{\tilde{H}} + \sqrt{\frac{t}{1-t} + 1} \cdot \sqrt{J(u_n) - c} \\
&\to \sqrt{\frac{t}{1-t} + 1} \cdot \sqrt{J(u_0) - c} = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt in $\tilde{H}$

$$\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, s_n) \to u_0 = \eta(u_0, t).$$

Sei $((u_n, t_n)) \subseteq W_2 \times [0,1]$ mit $(u_n, t_n) \to (u_0, 1)$ in $H \times [0,1]$.

Gibt es eine Teilfolge $((u_{n_k}, t_{n_k}))$, so dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ kein $s_{n_k} \in [0,\infty)$ mit $\eta(u_{n_k}, t_{n_k}) = \sigma(u_{n_k}, s_{n_k})$, so ist $t_{n_k} = 1$ und $u_{n_k} \in W_+ \cup \{u_0\}$. Dann ist

$$\eta(u_{n_k}, t_{n_k}) = u_0 = \eta(u_0, 1).$$

Sei nun für $n \in \mathbb{N}$ $s_n \in [0,\infty)$ mit $\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, s_n)$. Gibt es eine beschränkte Teilfolge (s_{n_k}), dann ist

$$\begin{aligned}
\|\sigma(u_{n_k}, s_{n_k}) - u_0\|_{\tilde{H}} &\leq \|u_{n_k} - u_0\|_{\tilde{H}} + \|\sigma(u_{n_k}, s_{n_k}) - u_n\|_{\tilde{H}} \\
&\leq \|u_{n_k} - u_0\|_{\tilde{H}} + \int_0^{s_{n_k}} \|\nabla J(\sigma(u_n, s))\|_{\tilde{H}}\, ds \\
&\leq \|u_{n_k} - u_0\|_{\tilde{H}} + \sqrt{s_{n_k}} \cdot \sqrt{J(u_n) - J(\sigma(u_n, s_n))} \\
&\leq \|u_{n_k} - u_0\|_{\tilde{H}} + \sqrt{s_{n_k}} \cdot \sqrt{J(u_n) - c} \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Es folgt in $\tilde{H}$

$$\eta(u_{n_k}, t_{n_k}) = \sigma(u_{n_k}, s_{n_k}) \to u_0 = \eta(u_0, t).$$

Sei nun $s_n \to \infty$. Es ist $J(\sigma(u_n, s_n)) \geq c$, da $s_n \in [0, T(u_n)]$, falls $u_n \notin W_+ \cup \{u_0\}$, oder $s_n \in [0, T^+(u_n))$, falls $u_n \in W_+ \cup \{u_0\}$. Mit Schritt 6 ist in $\tilde{H}$

$$\eta(u_n, t_n) = \sigma(u_n, s_n) \to u_0 = \eta(u, 1).$$

Schritt 9: $W \cap J^c$ ist ein starker Deformationsretrakt von W.

Es ist $\eta|_{W_1} = Id_{W_1}$ stetig. Nach den Schritten 4 bis 7 ist $\eta|_{W_2}$ stetig. Damit ist η stetig. Es gilt

$$\begin{gathered}
\eta(u,0) = u, \quad \forall u \in W, \\
\eta(u,1) \in W \cap J^c, \quad \forall u \in W, \\
\eta(u,t) = u, \quad \forall u \in W \cap J^c, t \in [0,1].
\end{gathered}$$

Damit ist $W \cap J^c$ ein starker Deformationsretrakt von W. □

Satz 2.21. *Sei σ der Fluß von $-\nabla J$. Seien $c := J(u_0)$, $\delta > 0$, so dass u_0 einziger kritischer Punkt in $B_\delta(u_0)$ ist. Seien $\beta, \gamma, \mu, \nu, m > 0$, $I : \tilde{H} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar,*

$$W := J^{-1}([c-\gamma, c+\gamma]) \cap I^{\nu c + \mu}, \quad W_- := J^{-1}(\{c-\gamma\}) \cap W.$$

Zusätzlich setzen wir folgende Beziehungen voraus *(i)* $B_{\frac{\delta}{2}}(u_0) \cap J^{-1}([c-\gamma, c+\gamma]) \subseteq W \subseteq B_\delta(u_0)$;

(ii) $J^{-1}([c-\gamma, c+\gamma]) \cap I^{-1}(\{\nu c + \mu\}) \subseteq B_\delta(u_0) \backslash B_{\frac{\delta}{2}}(u_0)$;

(iii) $\langle \nabla I(u), \nabla J(u) \rangle_{\tilde{H}} \geq \nu\beta^2 - 2\delta m > 0 \quad \forall u \in B_\delta(u_0) \backslash U_{\frac{\delta}{2}}(u_0)$.

Dann ist (W, W_-) ein Gromoll-Meyer-Paar von J um u_0 bzgl. ∇J.

Beweis. **Schritt 1:** Für $u \in \tilde{H}$ mit $\nabla J(u) \neq 0$ ist $J \circ \sigma(u, \cdot)$ streng monoton fallend.

Sei $u \in \tilde{H}$ mit $\nabla J(u) \neq 0$. Dann ist für $t \in (T^-(u), T^+(u))$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) &= \langle \nabla J(\sigma(u,t)), \frac{d}{dt}\sigma(u,t) \rangle_{\tilde{H}} \\ &= -\|\nabla J(\sigma(u,t))\|_{\tilde{H}}^2. \end{aligned}$$

Ist $\nabla J(\sigma(u,t)) = 0$ für ein $t \in (T^-(u), T^+(u))$, so ist

$$\sigma(u, t+s) = \sigma(\sigma(u,t), s) = \sigma(u,t)$$

für alle $s \in (T^-(\sigma(u,t)), T^+(\sigma(u,t))) = (T^-(u) - t, T^+(u) - t)$. Damit ist

$$u = \sigma(u, 0) = \sigma(u, t-t) = \sigma(\sigma(u,t), -t) = \sigma(u,t).$$

D.h. $\nabla J(u) = \nabla J(\sigma(u,t)) = 0$. Das ist ein Widerspruch. Es folgt $\nabla J(\sigma(u,t)) \neq 0$ für alle $t \in (T^-(u), T^+(u))$.

Also ist $\frac{d}{dt} J(\sigma(u,t)) < 0$ für alle $t \in (T^-(u), T^+(u))$ und somit $J(\sigma(u, \cdot))$ streng monoton fallend.

Schritt 2: Ist $u \in W$ und

$$t := \sup\{s' \in [0, T^+(u)) \mid \sigma(u,s) \in W \; \forall s \in [0, s']\} < T^+(u),$$

dann ist $\sigma(u,t) \in W_-$.

Sei $u \in W$ und

$$t := \sup\{s' \in [0, T^+(u)) \mid \sigma(u,s) \in W \; \forall s \in [0, s']\} < T^+(u).$$

Damit ist $u \neq u_0$, da $\sigma(u_0, t) = u_0 \in W$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es ist W abgeschlossen als Vereinigung von Urbildern abgeschlossener Mengen stetiger Funktionen. Da σ stetig ist, ist also $\sigma(u,t) \in W$.

Nun gibt es $(s_n) \subseteq (0, \infty)$ mit

$$t + s_n \in [0, T^+(u)), \quad s_n \to 0, \quad \sigma(u, t+s_n) \notin W, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nach Schritt 1 ist $J(\sigma(u,\cdot))$ streng monoton fallend. Wegen $u \in W$ und $W \subseteq J^{-1}([c-\gamma, c+\gamma])$ ist also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$J(\sigma(u,t+s_n)) < J(u) \leq c+\gamma.$$

Angenommen, $J(\sigma(u,t)) > c-\gamma$. Dann ist $J(\sigma(u,t+s_n)) > c-\gamma$ für $n \in \mathbb{N}$ groß. Damit ist $I(\sigma(u,t+s_n)) > \nu c + \mu$ für $n \in \mathbb{N}$ groß. Wegen der Stetigkeit von σ und I ist auch $I(\sigma(u,t)) \geq \nu c + \mu$. Da $\sigma(u,t) \in W$ ist $I(\sigma(u,t)) \leq \nu c + \mu$. Insgesamt ist $I(\sigma(u,t)) = \nu c + \mu$. Nach (ii) ist

$$\sigma(u,t) \in B_\delta(u_0) \backslash B_{\frac{\delta}{2}}(u_0).$$

Nach (iii) ist

$$\langle \nabla I(\sigma(u,t)), \nabla J(\sigma(u,t)) \rangle_{\tilde{H}} > 0.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(\sigma(u,t)) &= \langle \nabla I(\sigma(u,t)), \frac{d}{dt}\sigma(u,t) \rangle_{\tilde{H}} \\ &= -\langle \nabla I(\sigma(u,t)), \nabla J(\sigma(u,t)) \rangle_{\tilde{H}} < 0. \end{aligned}$$

Es folgt für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\nu c + \mu = I(\sigma(u,t)) > I(\sigma(u,t+s_n)) > \nu c + \mu.$$

Das ist ein Widerspruch. Es folgt $J(\sigma(u,t)) = c-\gamma$, d.h. $\sigma(u,t) \in W_-$.

Schritt 3: (W, W_-) erfüllt (i) aus Definition 2.14.

Es ist W abgeschlossen als Vereinigung von Urbildern abgeschlossener Mengen stetiger Funktionen.

Weiter gibt es ein $0 < \varrho < \frac{\delta}{2}$ mit $J(u) \in [c-\gamma, c+\gamma]$ für alle $u \in B_\varrho(u_0)$. Damit ist

$$B_\varrho(u_0) \subseteq J^{-1}([c-\gamma,c+\gamma]) \cap B_\varrho(u_0) \subseteq J^{-1}([c-\gamma,c+\gamma]) \cap B_{\frac{\delta}{2}}(u_0) \overset{(i)}{\subseteq} W.$$

Also ist W eine Umgebung von u_0.

Sei $u \in \tilde{H}$, $t_1 < t_2$ mit $\sigma(u,t_1), \sigma(u,t_2) \in W$.

Angenommen, es gibt ein $s \in (0, t_2 - t_1)$ mit

$$\sigma(\sigma(u,t_1),s) = \sigma(u,t_1+s) \notin W$$

Wegen $t_2 - t_1 < T^+(\sigma(u,t_1))$ ist also

$$t := \sup\{s' \in [0, T^+(\sigma(u,t_1))) \mid \sigma(\sigma(u,t_1),s) \in W \;\forall s \in [0,s']\} < T^+(\sigma(u,t_1)).$$

Nach Schritt 2 ist

$$\sigma(u, t_1 + t) = \sigma(\sigma(u, t_1), t) \in W_-.$$

D.h. $J(\sigma(u, t_1 + t)) = c - \gamma$. Insbesondere ist $\sigma(u, t_1 + t) \neq u_0$, da $J(u_0) = c > c - \gamma$. Nach Schritt 1 ist

$$J(\sigma(u, t_1 + t + \cdot)) = J(\sigma(\sigma(u, t_1 + t), \cdot))$$

streng monoton fallend. Damit ist

$$c - \gamma = J(\sigma(u, t_1 + t)) > J(\sigma(u, t_1 + t_2 - t_1)) = J(\sigma(u, t_2)) \geq c - \gamma.$$

Das ist ein Widerspruch; es folgt $\sigma(u, t) \in W$ für alle $t \in [t_1, t_2]$.

<u>**Schritt 4:**</u> (W, W_-) erfüllt *(ii)* aus Definition 2.14.

Sei $u \in W_-$. Dann ist $J(u) = c - \gamma < c = J(u_0)$. Somit ist $u \neq u_0$. Also ist $J(\sigma(u, \cdot))$ streng monoton fallend nach Schritt 1. Es folgt

$$J(\sigma(u, t)) < J(\sigma(u, 0)) = J(u) = c - \gamma$$

für alle $t \in (0, T^+(u))$. Also ist

$$\sigma(u, t) \notin W \subseteq J^{-1}([c - \gamma, c + \gamma]) \quad \forall t \in (0, T^+(u)).$$

Sei nun $u \in W$ mit $\sigma(u, t) \notin W$ für alle $t \in (0, T^+(u))$. Nach Schritt 2 ist $u = \sigma(u, 0) \in W_-$.

<u>**Schritt 5:**</u> (W, W_-) erfüllt *(iii)* aus Definition 2.14.

Da J in W_- keinen kritischen Punkt besitzt, ist W_- eine Untermannigfaltigkeit von J und σ transversal zu W_-. □

Im Beweis des folgenden Satzes konstruieren wir ein Gromoll-Meyer-Paar. Die Idee dazu stammt aus einem Buch von Kung-Ching Chang [5][Seite 49].

Satz 2.22. *Sei $\delta > 0$, so dass u_0 einziger kritischer Punkt in $B_\delta(u_0)$ ist und J und ∇J beschränkt in $B_\delta(u_0)$ sind, $c := J(u_0)$. Es gibt Konstanten $\beta, \gamma, \mu, \nu, m > 0$ und $I : \tilde{H} \to \mathbb{R}$ mit*

$$W := J^{-1}([c - \gamma, c + \gamma]) \cap I^{\nu c + \mu}, \quad W_- := J^{-1}(\{c - \gamma\}) \cap W.$$

(i) $B_{\frac{\delta}{2}}(u_0) \cap J^{-1}([c - \gamma, c + \gamma]) \subseteq W \subseteq B_\delta(u_0)$;

(ii) $J^{-1}([c - \gamma, c + \gamma]) \cap I^{-1}(\{\nu c + \mu\}) \subseteq B_\delta(u_0) \backslash B_{\frac{\delta}{2}}(u_0)$;

(iii) $\langle \nabla I(u), \nabla J(u) \rangle_{\tilde{H}} \geq \nu \beta^2 - 2\delta m > 0 \quad \forall u \in B_\delta(u_0) \backslash U_{\frac{\delta}{2}}(u_0)$.

und (W, W_-) ist ein Gromoll-Meyer-Paar (W, W_-) von J um u_0 bzgl. $-\nabla J$.

Beweis. Sei

$$m := \sup_{B_\delta(u_0)} \|\nabla J(u)\|_{\tilde{H}}.$$

Da J die (PS)-Bedingung erfüllt, $B_\delta(u_0) \backslash U_{\frac{\delta}{2}}(u_0)$ abgeschlossen ist und keine kritischen Punkte von J enthält, ist

$$\beta := \inf_{u \in B_\delta(u_0) \backslash U_{\frac{\delta}{2}}(u_0)} \|\nabla J(u)\|_{\tilde{H}} > 0.$$

Weiter seien $\mu, \nu, \gamma > 0$ mit

$$\nu > \frac{2\delta m}{\beta^2}, \qquad 0 < \gamma < \frac{3\delta^2}{8\nu}, \qquad \frac{\delta^2}{4} + \nu\gamma < \mu < \delta^2 - \nu\gamma.$$

Seien $c := J(u_0)$ und

$$I : \tilde{H} \to \mathbb{R},\ I(u) = \nu J(u) + \|u - u_0\|^2_{\tilde{H}},$$

$$W := J^{-1}([c - \gamma, c + \gamma]) \cap I^{\nu c + \mu}, \quad W_- := J^{-1}(\{c - \gamma\}) \cap W.$$

Schritt 1: $B_{\frac{\delta}{2}}(u_0) \cap J^{-1}([c - \gamma, c + \gamma]) \subseteq W \subseteq B_\delta(u_0)$.

Sei $u \in B_{\frac{\delta}{2}}(u_0)$ mit $J(u) \in [c - \gamma, c + \gamma]$. Dann ist

$$I(u) = \nu J(u) + \|u - u_0\|^2_{\tilde{H}} \leq \nu c + \nu\gamma + \frac{\delta^2}{4} \leq \nu c + \mu,$$

d.h. $u \in W$. Sei $u \in W$. Dann ist

$$\|u - u_0\|^2_{\tilde{H}} = I(u) - \nu J(u) \leq \nu c + \mu - \nu c + \nu\gamma < \delta^2.$$

Schritt 2: $J^{-1}([c - \gamma, c + \gamma]) \cap I^{-1}(\{\nu c + \mu\}) \subseteq B_\delta(u_0) \backslash B_{\frac{\delta}{2}}(u_0)$.

Sei $u \in J^{-1}([c - \gamma, c + \gamma]) \cap I^{-1}(\{\nu c + \mu\})$. Dann ist $u \in W \subseteq B_\delta(u_0)$ nach Schritt 1 und

$$\|u - u_0\|^2_{\tilde{H}} = I(u) - \nu J(u) \geq \nu c + \mu - \nu c - \nu\gamma > \frac{\delta^2}{4}.$$

Schritt 3: $\langle \nabla I(u), \nabla J(u) \rangle_{\tilde{H}} \geq \nu\beta^2 - 2\delta m > 0 \quad \forall u \in B_\delta(u_0) \backslash U_{\frac{\delta}{2}}(u_0)$.

Sei $u \in B_\delta(u_0) \backslash U_{\frac{\delta}{2}}(u_0)$. Dann ist $\|\nabla J(u)\|_{\tilde{H}} \geq \beta$ und somit

$$\begin{aligned} & \langle \nabla I(u), \nabla J(u) \rangle_{\tilde{H}} = \langle \nu \nabla J(u) + 2(u - u_0), \nabla J(u) \rangle_{\tilde{H}} \\ = \ & \nu \|\nabla J(u)\|^2_{\tilde{H}} + 2\langle u - u_0, \nabla J(u) \rangle_{\tilde{H}} \geq \nu\beta^2 - 2\|u - u_0\|_{\tilde{H}} \|\nabla J(u)\|_{\tilde{H}} \\ \geq \ & \nu\beta^2 - 2\delta m > 0. \end{aligned}$$

Schritt 4: (W, W_-) ist ein Gromoll-Meyer-Paar von J um u_0 bzgl. $-\nabla J$ und (i) bis (iii) gelten.

Mit den Schritten 1,2 und 3 sind die Voraussetzungen für Satz 2.21 erfüllt. Satz 2.21 liefert die Behauptung. $\square$

Satz 2.23. *Sei (W, W_-) das Gromoll-Meyer-Paar von J um u_0 bzgl. $-\nabla J$ aus Satz 2.22, dann ist*

$$H_*(W, W_-) \cong H(J^{J(u_0)}, J^{J(u_0)} \backslash \{u_0\}) = C_*(J, u_0).$$

Beweis. Sei $c := J(u_0)$.

Sei $i_1 : (J^c \cap W, W_-) \hookrightarrow (W, W_-)$. Es ist

$$(i_1|_{W_-})_* = (Id_{W_-})_* \overset{Bem.\ 2.6}{=} Id_{H_*(W_-)}.$$

Damit ist $(i_1|_{W_-})_*$ ein Isomorphismus. Nach Satz 2.20 ist $J^c \cap W$ ein starker Deformationsretrakt von W. Nach Folgerung 2.11 induziert somit $i_1|_{J^c \cap W}$ einen Isomorphismus $(i_1|_{J^c \cap W})_*$ von $H_*(J^c \cap W)$ nach $H_*(W)$. Nach Satz 2.9 induziert i_1 somit einen Isomorphismus $(i_1)_*$ von $H_*(J^c \cap W, W_-)$ nach $H_*(W, W_-)$.

Sei $i_2 : (J^c \cap W, W_-) \hookrightarrow (J^c \cap W, (J^c \backslash \{u_0\}) \cap W)$. Es ist

$$(i_2|_{J^c \cap W})_* = (Id_{J^c \cap W})_* \overset{Bem.\ 2.6}{=} Id_{H_*(J^c \cap W)}$$

und damit $(i_2|_{J^c \cap W})_*$ isomorph. Nach Satz 2.19 ist W_- ein starker Deformationsretrakt von $(J^c \backslash \{u_0\}) \cap W$. Nach Folgerung 2.11 induziert somit $i_2|_{W_-}$ einen Isomorphismus $(i_2|_{W_-})_*$ von $H_*(W_-)$ nach $H_*((J^c \backslash \{u_0\}) \cap W)$. Nach Satz 2.9 induziert i_2 einen Isomorphismus $(i_2)_*$ von $H_*(J^c \cap W, W_-)$ nach $H_*(J^c \cap W, (J^c \backslash \{u_0\}) \cap W)$.

Es folgt

$$H_*(W, W_-) \cong H_*(J^c \cap W, W_-) \cong H_*(J^c \cap W, (J^c \backslash \{u_0\}) \cap W).$$

Sei $B := J^c \backslash W \subseteq J^c \backslash \{u_0\}$. Nach Definition 2.14 gibt es ein $\varrho > 0$ mit $U_\varrho(u_0) \subseteq W$. Es folgt $\overline{B} \subseteq \overline{J^c \backslash U_\varrho(u_0)}$. Nun ist $J^c \cap U_\varrho(u_0)$ offen in J^c, also ist $J^c \backslash U_\varrho(u_0)$ abgeschlossen in J^c. Damit gilt

$$\begin{aligned} \overline{B} &\subseteq \overline{J^c \backslash U_\varrho(u_0)} = J^c \backslash U_\varrho(u_0) \\ &\subseteq J^c \backslash B_{\frac{\varrho}{2}}(u_0) = int_{J^c}\ (J^c \backslash B_{\frac{\varrho}{2}}(u_0)) \\ &\subseteq int_{J^c}\ (J^c \backslash \{u_0\}). \end{aligned}$$

Mit Satz 2.12 ist

$$H_*(J^c \cap W, (J^c \backslash \{u_0\}) \cap W) \cong H_*(J^c, J^c \backslash \{u_0\}).$$

Insgesamt ist $H_*(W, W_-) \cong H_*(J^c, J^c \backslash \{u_0\})$. $\square$

2.6 Isomorphe Homologiegruppen zweier Niveaumengen

Sei $\tilde{H}$ ein Hilbertraum, $J : \tilde{H} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und erfülle die (PS)-Bedingung.

Satz 2.24. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, b ein regulärer Wert von J. Es gibt $\epsilon > 0$, so dass die Einbettung*

$$i : (J^b, J^a) \hookrightarrow (J^{b+\epsilon}, J^a)$$

einen Isomorphismus i_* von $H_*(J^b, J^a)$ nach $H_*(J^{b+\epsilon}, J^a)$ induziert.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass es $\epsilon > 0$ gibt, so dass J keinen kritischen Wert in $[b, b+\epsilon]$ besitzt. Angenommen, es gibt $(u_n) \subseteq \tilde{H}$ mit $J(u_n) \in [b, b+\frac{1}{n}]$ und $\nabla J(u_n) = 0$. Dann ist (u_n) eine (PS)$_b$-Folge. Da J die (PS)-Bedingung erfüllt, gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in \tilde{H}$ mit $u_n \to u$ in $\tilde{H}$, d.h. $J(u) = b$ und $\nabla J(u) = 0$. Das ist ein Widerspruch zur Regularität von b.

Sei

$$i : (J^b, J^a) \hookrightarrow (J^{b+\epsilon}, J^a).$$

Es ist nach Bemerkung 2.6

$$(i|_{J^a})_* = (Id_{J^a})_* = Id_{H_*(J^a)}.$$

Also ist $(i|_{J^a})_*$ ein Isomorphismus. Nach [5][Theorem 3.2] ist J^b ein starker Deformationsretrakt von $J^{b+\epsilon}$. Somit induziert $i|_{J^b}$ nach Folgerung 2.11 einen Isomorphismus $(i|_{J^b})_*$ von $H_*(J^b)$ nach $H_*(J^{b+\epsilon})$. Nach dem Fünfer-Lemma 2.8 induziert i einen Isomorphismus i_* von $H_*(J^b, J^a)$ nach $H_*(J^{b+\epsilon}, J^a)$. $\square$

KAPITEL 3

Striktes lokales Minimum

Sei $H = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum, H_0 ein nichttrivialer abgeschlossener Unterraum von H mit $H_0 \neq H$ und für $\lambda \geq 1$ sei $H_\lambda = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda)$ ein reeller Hilbertraum mit

(A_1) es ist $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\|u\|_\lambda \leq \|u\|_{\tilde\lambda}$ für $\lambda \leq \tilde\lambda$, $u \in H$, $\|\cdot\|_\lambda, \|\cdot\|$ sind äquivalent;

(A_2) für $u \in H_0, v \in H, \lambda \geq 1$ gilt $\langle u, v\rangle_\lambda = \langle u, v\rangle$;

(A_3) ist $\lambda_n \to \infty$ und $(u_n) \in H$, so dass $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt ist, dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in H_0$ mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in H.

Wegen (A_1) sind H und H_λ, $\lambda \geq 1$, isomorph bzgl. der Einbettungen. Für $\lambda \geq 1$ ist nach Bemerkung 2.2

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } H \quad \Leftrightarrow \quad u_n \rightharpoonup u \text{ in } H_\lambda.$$

Sei $k : H \to \mathbb{R}$ vollstetig (Definition von vollstetigen Abbildungen, siehe Definition A.1) und stetig differenzierbar. Nach Lemma A.4 ist $k|_{H_0}$ auch vollstetig.

Sei $\lambda \geq 1$. Seien

$$J_\lambda : H \to \mathbb{R}, \quad J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - k(u)$$
$$J_0 : H_0 \to \mathbb{R}, \quad J_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - k|_{H_0}(u).$$

Es sind J_0 und J_λ, $\lambda \geq 1$, stetig differenzierbar. Wegen Voraussetzung (A_2) ist $J_\lambda|_{H_0} = J_0$ für alle $\lambda \geq 1$.

Sei $\bar u$ ein striktes lokales Minimum von J_0.

3.1 Existenz von kritischen Punkten von J_λ für $\lambda \geq 1$ groß

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass J_λ, $\lambda \geq 1$ groß, ebenfalls lokale Minima besitzt, die in der Nähe von $\bar{u}$ liegen.

Lemma 3.1. *Es gibt $\varrho_0 > 0$, so dass für $0 < \varrho < \varrho_0$ ein $\Lambda = \Lambda(\varrho) \geq 1$ existiert mit*

$$\inf_{u \in H, \|u-\bar{u}\|_\lambda = \varrho} J_\lambda(u) > J_0(\bar{u})$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$. Insbesondere ist

$$\inf_{u \in \partial B_\varrho(\bar{u})} J_0(u) > J_0(\bar{u}).$$

Beweis. Da $\bar{u}$ ein striktes lokales Minimum ist, gibt es ein $\varrho_0 > 0$, so dass für alle $0 < \varrho < \varrho_0$

$$J_0(u) > J_0(\bar{u}), \quad \forall u \in B_\varrho(\bar{u}) \setminus \{\bar{u}\}. \tag{3.1}$$

Sei $0 < \varrho < \varrho_0$. Angenommen, es gibt $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n - \bar{u}\|_{\lambda_n} = \varrho$ und $J_{\lambda_n}(u_n) \leq J_0(\bar{u}) + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\|u_n\|_{\lambda_n} \leq \|u_n - \bar{u}\|_{\lambda_n} + \|\bar{u}\|_{\lambda_n} \stackrel{(A_2)}{=} \varrho + \|\bar{u}\|.$$

Damit gibt es nach Voraussetzung (A_3) eine Teilfolge o.E. (u_n) und $u \in H_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H. Damit ist $k(u_n) \to k(u)$, da k vollstetig ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}\|^2 &= \|u\|^2 + \|\bar{u}\|^2 - 2\langle u, \bar{u}\rangle \leq \liminf \left(\|u_n\|^2 + \|\bar{u}\|^2 - 2\langle u_n, \bar{u}\rangle\right) \\ &= \liminf \|u_n - \bar{u}\|^2 \stackrel{(A_1)}{\leq} \liminf \|u_n - \bar{u}\|^2_{\lambda_n} = \varrho^2 \end{aligned}$$

und somit nach Lemma **??** $J_0(u) \geq J_0(\bar{u})$. Es ist

$$\begin{aligned} J_0(u) &= \tfrac{1}{2}\|u\|^2 - k(u) \leq \liminf \left(\tfrac{1}{2}\|u_n\|^2 - k(u_n)\right) \\ &\stackrel{(A_1)}{\leq} \liminf \left(\tfrac{1}{2}\|u_n\|^2_{\lambda_n} - k(u_n)\right) = \liminf J_{\lambda_n}(u_n) \\ &\leq \limsup J_{\lambda_n}(u_n) \leq J_0(\bar{u}). \end{aligned}$$

Also gilt $J_0(u) \leq J_0(\bar{u})$, d.h. nach (3.1) $u = \bar{u}$, und $J_{\lambda_n}(u_n) \to J_0(\bar{u})$. Weiter ist

$$\|u_n\|^2_{\lambda_n} = 2J_{\lambda_n}(u_n) + 2k(u_n) \to 2J_0(\bar{u}) + 2k(\bar{u}) = \|\bar{u}\|^2$$

Also ist

$$\begin{aligned} \varrho &= \|u_n - \bar{u}\|^2_{\lambda_n} = \|u_n\|^2_{\lambda_n} + \|\bar{u}\|^2_{\lambda_n} - 2\langle u_n, \bar{u}\rangle_{\lambda_n} \\ &\stackrel{(A_2)}{=} \|u_n\|^2_{\lambda_n} + \|\bar{u}\|^2 - 2\langle u_n, \bar{u}\rangle \to \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}\|^2 - 2\langle \bar{u}, \bar{u}\rangle = 0. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch. □

Satz 3.2. *Es gibt ϱ_0, so dass es zu $0 < \varrho < \varrho_0$ ein $\Lambda = \Lambda(\varrho) \geq 1$ derart gibt, dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ das Funktional J_λ ein lokales Minimum u_λ besitzt mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \varrho$.*

Beweis. Nach Lemma 3.1 gibt es ein $\varrho_0 > 0$ derart, dass für alle $0 < \varrho < \varrho_0$ ein $\Lambda = \Lambda(\varrho) \geq 1$ existiert mit

$$\inf_{u \in H, \|u-\bar{u}\|_\lambda = \varrho} J_\lambda(u) > J_0(\bar{u})$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$. Sei $\lambda \geq \Lambda$. Da $J_\lambda(\{u \in H | \|u_n - \bar{u}\|_\lambda \leq \varrho\})$ beschränkt ist, gibt es

$$\theta = \inf_{u \in H, \|u-\bar{u}\|_\lambda \leq \varrho} J_\lambda(u) \in \mathbb{R}.$$

Sei $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n - \bar{u}\|_\lambda \leq \varrho$ und $J_\lambda(u_n) \to \theta$. Für eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u_\lambda \in H$ ist $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ in H_λ und $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ in H. Dann ist $k(u_n) \to k(u_\lambda)$ da k vollstetig und damit

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_\lambda) &= \tfrac{1}{2}\|u_\lambda\|_\lambda^2 - k(u_\lambda) \leq \liminf \left(\tfrac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - k(u_n)\right) \\ &= \liminf J_\lambda(u_n) = \theta. \end{aligned}$$

Wegen $u_n - \bar{u} \rightharpoonup u_\lambda - \bar{u}$ in H_λ ist

$$\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \liminf \|u_n - \bar{u}\|_\lambda \leq \varrho$$

und somit $J_\lambda(u_\lambda) = \theta$. Also ist u_λ ein lokales Minimum von J_λ. □

Folgerung 3.3. *Es gibt $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$, so dass u_n, $n \in \mathbb{N}$, ein lokales Minimum von J_{λ_n} ist und $\|u_n - \bar{u}\|_{\lambda_n} \to 0$.*

Beweis. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{1}{\varrho_0}$. Dann gibt es zu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ein $\Lambda_n \geq 1$ aus Satz 3.2, so dass J_λ ein lokales Minimum u_λ für alle $\lambda \geq \Lambda_n$ hat mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \frac{1}{n}$. Wähle $\lambda_n \geq \max\{\Lambda_n, \lambda_{n-1} + 1\}$, wobei $\lambda_0 := 1$ ist, und $u_n := u_{\lambda_n}$. □

KAPITEL 4

Nichtausgearteter kritischer Punkt

Sei $H = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum, H_0 ein nichttrivialer abgeschlossener Unterraum von H mit $H_0 \neq H$ und für $\lambda \geq 1$ sei $H_\lambda = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda)$ ein reeller Hilbertraum mit

(A_1) es ist $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\|u\|_\lambda \leq \|u\|_{\tilde{\lambda}}$ für $\lambda \leq \tilde{\lambda}$, $u \in H$, $\|\cdot\|_\lambda$, $\|\cdot\|$ sind äquivalent;

(A_2) für $u \in H_0, v \in H, \lambda \geq 1$ gilt $\langle u, v\rangle_\lambda = \langle u, v\rangle$;

(A_3) ist $\lambda_n \to \infty$ und $(u_n) \in H$, so dass $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt ist, dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in H_0$ mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in H.

Wegen (A_1) und (A_2) sind H und H_λ, $\lambda \geq 1$, isomorph bzgl. der Einbettungen. Für $\lambda \geq 1$ ist nach Bemerkung 2.2

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } H \quad \Leftrightarrow \quad u_n \rightharpoonup u \text{ in } H_\lambda.$$

Sei $\lambda \geq 1$. Sei $P_\lambda : H_\lambda \to H_0$ die orthogonale Projektion aus [3, Satz 2.2, Lemma 7.17]. Für $u \in H$ minimiert $P_\lambda u \in H_0$ den Ausdruck

$$\|u - v\|_\lambda^2 = \|u\|_\lambda^2 + \|v\|_\lambda^2 - 2\langle u, v\rangle_\lambda, \quad v \in H_0$$

also

$$\|v\|_\lambda^2 - 2\langle u, v\rangle_\lambda \overset{(A_2)}{=} \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle, \quad v \in H_0$$

Damit ist $P_\lambda = P_1 =: P$.

Bemerkung 4.1. Ist $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt, dann gibt es nach (A_3) eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H. Nach Bemerkung 2.2 ist auch

$$Pu_n \rightharpoonup Pu = u \quad \text{in } H_0.$$

Nach Bemerkung 2.2 ist dann wieder $Pu_n \rightharpoonup u$ in H. Also ist

$$u_n - Pu_n \rightharpoonup u - u = 0 \quad \text{in } H.$$

$k : H \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften

(k_1) $k : H \to \mathbb{R}$ ist vollstetig (siehe Definition A.1) und stetig differenzierbar;

(k_2) $Dk : H \to H'$ ist vollstetig und stetig differenzierbar.

Nach Lemma A.4 ist $k|_{H_0}$ auch vollstetig.

Sei $\lambda \geq 1$. Seien

$$\begin{aligned} J_\lambda : H \to \mathbb{R}, &\quad J_\lambda(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - k(u), \\ J_0 : H_0 \to \mathbb{R}, &\quad J_0(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2 - k|_{H_0}(u). \end{aligned}$$

Die Funktionale J_λ, $\lambda \geq 1$, und J_0 sind zweimal stetig differenzierbar. Wegen Voraussetzung (A_2) ist $J_\lambda|_{H_0} = J_0$ für alle $\lambda \geq 1$.

Für $\lambda \geq 1$ seien $K_\lambda := \nabla_\lambda k : H \to H$, wobei $\nabla_\lambda k$ aus Bemerkung A.8, und $\nabla_\lambda J_\lambda := Id_H - K_\lambda$. Sei $K_0 := \nabla(k|_{H_0})$.

Bemerkung 4.2. Nach Bemerkung A.8 ist K_λ, $\lambda \geq 1$, vollstetig und stetig differenzierbar mit

$$Dk(u)(v) = \langle K_\lambda(u), v\rangle_\lambda, \quad \forall u, v \in H.$$

Es ist $K_0 = (PK_\lambda)|_{H_0}$ für alle $\lambda \geq 1$, denn für $u, v \in H_0$ gilt

$$\begin{aligned} \langle K_0(u), v\rangle &= D(k|_{H_0})(u)(v) = \lim_{0 \neq t \to 0} \frac{1}{t}(k|_{H_0}(u + tv) - k|_{H_0}(u)) \\ &= \lim_{0 \neq t \to 0} \frac{1}{t}(k(u + tv) - k(u)) = Dk(u)(v) \\ &= \langle K_\lambda(u), v\rangle_\lambda \overset{(A_2)}{=} \langle PK_\lambda(u), v\rangle \end{aligned}$$

und damit $K_0(u) = PK_\lambda(u)$. Es ist K_0 stetig differenzierbar. Da $K_1 : H \to H$ vollstetig, ist auch PK_1 vollstetig nach Lemma A.3. Nach Lemma (A.4) ist auch $K_0 = (PK_1)|_{H_0}$ vollstetig.

Für $u, v \in H$ gilt

$$\begin{aligned} DJ_\lambda(u)(v) &= \langle u, v\rangle_\lambda - Dk(u)(v) = \langle u, v\rangle_\lambda - \langle K_\lambda(u), v\rangle_\lambda \\ &= \langle \nabla_\lambda J_\lambda(u), v\rangle_\lambda. \end{aligned}$$

Damit ist $u \in H$ genau dann ein kritischer Punkt von J_λ, wenn $\nabla_\lambda J_\lambda(u) = 0$.

Bemerkung 4.3. Seien $(u_n), (v_n) \subseteq H$ und $u, v \in H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \rightharpoonup v$ in H. Da Dk vollstetig ist, ist $Dk(u_n) \to Dk(u)$. Es ist

$$\begin{aligned} & |Dk(u_n)(v_n) - Dk(u)(v)| \\ \leq\ & |Dk(u_n)(v_n) - Dk(u)(v_n)| + |Dk(u)(v_n) - Dk(u)(v)| \\ \leq\ & \|Dk(u_n) - Dk(u)\|_{H'} \|v_n\| + |Dk(u)(v_n) - Dk(u)(v)|. \end{aligned}$$

Es ist (v_n) beschränkt in H, d.h.

$$\|Dk(u_n) - Dk(u)\|_{H'} \|v_n\| \overset{(k_2)}{\to} 0.$$

Nach Lemma A.6 und Voraussetzung (k_1) ist $Dk(u)$ vollstetig. Damit gilt

$$|Dk(u)(v_n) - Dk(u)(v)| \to 0.$$

Insgesamt ist $Dk(u_n)(v_n) \to Dk(u)(v)$.

Sei $\bar{u} \in H_0$ ein nichtausgearteter kritischer Punkt, d.h. $D^2 J_0(\bar{u})$ ist nicht ausgeartet.

4.1 Existenz von kritischen Punkten von J_λ für $\lambda \geq 1$ groß

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass J_λ, $\lambda \geq 1$ groß, einen kritischen Punkt u_λ nahe $\bar{u}$ besitzt.

Lemma 4.4. *Für alle $\delta > 0$ und $R > 0$ gibt es ein $\Lambda \geq 1$, so dass für $\lambda \geq \Lambda$ gilt*

$$\|K_\lambda(u) - K_0(Pu)\|_\lambda \leq \delta, \quad \forall u \in H, \|u\|_\lambda \leq R.$$

Beweis. Seien $\delta, R > 0$. Angenommen, es gibt $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n\|_{\lambda_n} \leq R$ und

$$\|K_{\lambda_n}(u_n) - K_0(Pu_n)\|_{\lambda_n} > \delta.$$

Nach (A_3) und Bemerkung (4.1) ist für eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H_0$ $u_n \rightharpoonup u$ und $Pu_n \rightharpoonup u$ in H. Da Dk vollstetig ist nach Voraussetzung (k_2), gilt damit

$$Dk(u_n) \to Dk(u) \text{ und } Dk(Pu_n) \to Dk(u) \text{ in } H'. \tag{4.1}$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} & \|K_{\lambda_n}(u_n)\|^2_{\lambda_n} = \langle K_{\lambda_n}(u_n), K_{\lambda_n}(u_n)\rangle_{\lambda_n} \overset{Bem\ 4.2}{=} Dk(u_n)(K_{\lambda_n}(u_n)) \\ \leq\ & \|Dk(u_n)\|_{H'} \cdot \|K_{\lambda_n}(u_n)\| \overset{(A_1)}{\leq} \|Dk(u_n)\|_{H'} \cdot \|K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Damit ist für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\|K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \leq \|Dk(u_n)\|_{H'} \overset{(4.1)}{\leq} \|Dk(u)\|_{H'} + 1.$$

Also ist $(\|K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n})$ beschränkt. Nach Bemerkung 4.2 ist K_0 vollstetig. Wegen $Pu_n \rightharpoonup u$ in H und nach Bemerkung 2.2 auch $Pu_n \rightharpoonup u$ in H_0 ist damit $(K_0(Pu_n))$ konvergent in H_0, insbesondere beschränkt in H_0. Wegen

$$\begin{aligned}\|K_{\lambda_n}(u_n) - K_0(Pu_n)\|_{\lambda_n} &\leq \|K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} + \|K_0(Pu_n)\|_{\lambda_n} \\ &\overset{(A_2)}{=} \|K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} + \|K_0(Pu_n)\|\end{aligned}$$

ist $(\|v_n\|_{\lambda_n})$, $v_n := K_{\lambda_n}(u_n) - K_0(Pu_n)$, $n \in \mathbb{N}$, beschränkt. Nach (A_3) und Bemerkung 4.1 ist für eine Teilfolge o.E. (v_n) und ein $v \in H_0$ $v_n \rightharpoonup v$ und $Pv_n \rightharpoonup v$ in H. Nach Bemerkung 4.3 ist

$$Dk(u_n)(v_n) \to Dk(u)(v), \quad Dk(Pu_n)(Pv_n) \to Dk(u)(v). \tag{4.2}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}&\delta < \|v_n\|_{\lambda_n}^2 = \|K_{\lambda_n}(u_n) - K_0(Pu_n)\|_{\lambda_n}^2 = \langle K_{\lambda_n}(u_n) - K_0(Pu_n), v_n\rangle_{\lambda_n} \\ &\overset{(A_2)}{=} \langle K_{\lambda_n}(u_n), v_n\rangle_{\lambda_n} - \langle K_0(Pu_n), Pv_n\rangle \overset{Bem\ 4.2}{=} Dk(u_n)(v_n) - Dk(Pu_n)(Pv_n) \\ &\overset{(4.2)}{\to} 0.\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt die Behauptung. □

Lemma 4.5. *Ist $u_0 \in H_0$ ein kritischer Punkt von J_0 und $\varrho > 0$, so dass u_0 der einzige kritische Punkt von J_0 in $B_\varrho(u_0)$ ist, dann gibt es ein $\delta > 0$ und ein $\Lambda \geq 1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ gilt*

$$\|u - K_\lambda(u)\|_\lambda \geq \delta \quad \forall u \in H, \|u - u_0\|_\lambda = \varrho.$$

Beweis. Angenommen, es gibt $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit

$$\|u_n - u_0\|_{\lambda_n} = \varrho, \quad \|u_n - K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Wegen

$$\|u_n\|_{\lambda_n} \leq \|u_0\|_{\lambda_n} + \|u_n - u_0\|_{\lambda_n} \overset{(A_2)}{=} \|u_0\| + \varrho$$

ist nach (A_3) für eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H_0$ $u_n \rightharpoonup u$ in H. Da k vollstetig ist, ist nach Lemma A.6 $Dk(u)$ auch vollstetig. Weiter ist Dk vollstetig. Insgesamt ist

$$Dk(u)(u_n) \to Dk(u)(u), \quad Dk(u_n) \to Dk(u) \text{ in } H'. \tag{4.3}$$

Für $v \in H_0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \quad & \|u_n - K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n}\|v\| \overset{(A_2)}{=} \|u_n - K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n}\|v\|_{\lambda_n} \\ \geq \quad & \langle u_n - K_{\lambda_n}(u_n), v\rangle_{\lambda_n} \overset{(A_2),Bem\ 4.2}{=} \langle u_n, v\rangle - Dk(u_n)(v). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Es folgt für $v \in H_0$

$$Dk(u_n)(v) \overset{(4.3)}{\to} Dk(u)(v) \overset{Bem\ 4.2}{=} \langle K_0(u), v\rangle. \tag{4.5}$$

Mit (4.4) und (4.5) folgt $DJ_0(u)(v) = \langle u, v\rangle - \langle K_0(u), v\rangle = 0$ für alle $v \in H_0$. Damit ist u ein kritischer Punkt von J_0. Weiter gilt

$$0 \leftarrow \quad \langle u_n - K_{\lambda_n}(u_n), u_n\rangle_{\lambda_n} \overset{Bem\ 4.2}{=} \|u_n\|^2_{\lambda_n} - Dk(u_n)(u_n). \tag{4.6}$$

Es ist $\|u\|^2 = Dk(u)(u)$, da $DJ_0(u)(u) = 0$. Damit gilt

$$|Dk(u_n)(u_n) - \|u\|^2| \overset{Bem 4.3}{\to} |Dk(u)(u) - \|u\|^2| = 0. \tag{4.7}$$

Mit (4.6) und (4.7) ist also $\|u_n\|^2_{\lambda_n} \to \|u\|^2$ und somit

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2_{\lambda_n} & \overset{(A_2)}{=} \|u_n\|^2_{\lambda_n} + \|u\|^2 - 2\langle u_n, u\rangle \\ & \to \|u\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, u\rangle = 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$|\|u - u_0\| - \varrho| \overset{(A_2)}{=} |\|u - u_0\|_{\lambda_n} - \|u_n - u_0\|_{\lambda_n}| \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Also ist $u \in B_\varrho(u_0)\backslash\{u_0\}$ ein kritischer Punkt von J_0. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 4.6. *Sei u_0 ein kritischer Punkt von J_0 und $\varrho > 0$, so dass u_0 der einzige kritische Punkt von J_0 in $B_\varrho(u_0)$ ist und gilt*

$$\deg(\nabla J_0, U_\varrho(u_0), 0) \neq 0$$

Dann gibt es ein $\Lambda \geq 1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ J_λ einen kritischen Punkt u_λ mit $\|u_\lambda - u_0\|_\lambda \leq \varrho$ besitzt und es gilt

$$\deg(i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}, U_\varrho(u_0), 0) = \deg(\nabla J_0, U_\varrho(u_0), 0),$$

wobei i aus Bemerkung A.8 ist.

Beweis. Sei i aus Bemerkung A.8. Nach Bemerkung A.8 ist $K_\lambda = i^{-1} \circ \nabla_\lambda(k \circ i^{-1}) \circ i$. Nach Lemma 4.5 gibt es ein $\delta > 0$ und ein $\Lambda_1 \geq 1$ mit

$$\inf_{u \in H, \|i(u-u_0)\|_\lambda = \varrho} \|i(u - K_\lambda(u))\|_\lambda \geq \delta \quad \forall \lambda \geq \Lambda_1.$$

Es folgt für alle $\lambda \geq \Lambda_1$

$$\inf_{u \in \partial U_\varrho(u_0)} \|u - \nabla_\lambda(k \circ i^{-1})(u)\|_\lambda = \inf_{u \in H, \|i(u-u_0)\|_\lambda = \varrho} \|i(u - K_\lambda(u))\|_\lambda \geq \delta. \quad (4.8)$$

Nach Lemma 4.4 gibt es $\Lambda \geq \Lambda_1$ mit

$$\sup_{u \in H, \|iu\|_\lambda \leq \|u_0\| + 2\varrho} \|i(K_\lambda(u) - K_0(Pu))\|_\lambda \leq \tfrac{\delta}{2}, \quad \forall \lambda \geq \Lambda.$$

Es folgt für alle $\lambda \geq \Lambda$

$$\begin{aligned} &\sup_{B_{\|u_0\|+2\varrho}(0)} \|\nabla_\lambda(k \circ i^{-1})(u) - K_0(P(i^{-1}(u)))\|_\lambda \\ =& \sup_{u \in H, \|iu\|_\lambda \leq \|u_0\| + 2\varrho} \|i(K_\lambda(u) - K_0(Pu))\|_\lambda \\ \leq& \tfrac{\delta}{2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sei $\lambda \geq \Lambda$.

Es ist $\nabla_\lambda(k \circ i^{-1})$ vollstetig nach Bemerkung A.8 und damit kompakt. Nach (4.8) ist $0 \notin (Id_{H_\lambda} - \nabla_\lambda(k \circ i^{-1}))(\partial U_\varrho(u_0))$. Damit gibt es

$$\deg(Id_{H_\lambda} - \nabla_\lambda(k \circ i^{-1}), U_\varrho(u_0), 0).$$

Es ist K_0 nach Bemerkung 4.2 vollstetig und nach Lemma A.3 ist $K_0 \circ P \circ i^{-1}$ vollstetig und damit kompakt. Es ist

$$\begin{aligned} &\sup_{u \in B_\varrho(u_0)} \|\nabla_\lambda(k \circ i^{-1})(u) - K_0(P(i^{-1}u))\|_\lambda \\ \leq& \sup_{u \in B_{\|u_0\|+2\varrho}(0)} \|\nabla_\lambda(k \circ i^{-1})(u) - K_0(P(i^{-1}u))\|_\lambda \\ \overset{(4.9)}{\leq}& \frac{\delta}{2} < \delta \overset{(4.8)}{\leq} dist(0, (Id_{H_\lambda} - \nabla_\lambda(k \circ i^{-1}))(\partial U_\varrho(u_0))) \end{aligned}$$

Mit $(d5)$ aus Satz 2.3 ist dann

$$\deg(Id_{H_\lambda} - \nabla_\lambda(k \circ i^{-1}), U_\varrho(u_0), 0) = \deg(Id_{H_\lambda} - K_0 \circ P \circ i^{-1}, U_\varrho(u_0), 0).$$

Mit Satz 2.4 ist

$$\deg(Id_{H_\lambda} - K_0 \circ P \circ i^{-1}, U_\varrho(u_0), 0) = \deg(Id_{H_0} - K_0 \circ P \circ i^{-1}, U_\varrho(u_0), 0). \tag{4.10}$$

Es ist

$$i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1} = Id_{H_\lambda} - i \circ K_\lambda \circ i^{-1} = Id_{H_\lambda} - \nabla_\lambda (k \circ i^{-1}).$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\deg(i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}, U_\varrho(u_0), 0) &= \deg(Id_{H_\lambda} - \nabla_\lambda (k \circ i^{-1}), U_\varrho(u_0), 0) \\
&= \deg(Id_{H_\lambda} - K_0 \circ P \circ i^{-1}, U_\varrho(u_0), 0) \\
&= \deg(Id_{H_0} - K_0 \circ P|_{H_0}, U_\varrho(u_0), 0) \\
&= \deg(Id_{H_0} - K_0, U_\varrho(u_0), 0) \\
&= \deg(\nabla J_0, U_\varrho(u_0), 0) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Nach $(d2)$ aus Satz 2.3 gibt es damit ein $\tilde{u}_\lambda$ in $U_\varrho(u_0)$ mit $i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}(\tilde{u}_\lambda) = 0$. Sei $u_\lambda := i^{-1}\tilde{u}_\lambda$. Dann ist $\nabla_\lambda J_\lambda(u_\lambda) = 0$. Damit ist nach Bemerkung 4.2 u_λ ein kritischer Punkt von J_λ mit $\|i(u_\lambda - u_0)\|_\lambda \leq \varrho$. □

Satz 4.7. *Es gibt ϱ_0, so dass es zu $0 < \varrho < \varrho_0$ ein $\Lambda = \Lambda(\varrho) \geq 1$ gibt, so dass J_λ einen kritischen Punkt u_λ für alle $\lambda \geq \Lambda$ hat mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \varrho$ und es gilt*

$$\deg(i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}, U_\varrho(\bar{u}), 0) = \deg(\nabla J_0, U_\varrho(\bar{u}), 0),$$

wobei i aus Bemerkung A.8 ist.

Beweis. In Kapitel 2 Abschnitt 2.3 haben wir gezeigt, dass es ein $\varrho_0 > 0$ gibt, so dass $\bar{u}$ der einzige kritische Punkt von J_0 in $B_{\varrho_0}(\bar{u})$ ist und es gilt

$$\deg(\nabla J_0, U_{\varrho_0}(\bar{u}), 0) \neq 1.$$

Sei nun $0 < \varrho < \varrho_0$. Dann gibt es nach Satz 4.6 ein $\Lambda \geq 1$, so dass J_λ einen kritischen Punkt u_λ für alle $\lambda \geq \Lambda$ hat mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \varrho$ und es gilt

$$\deg(i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}, U_\varrho(\bar{u}), 0) = \deg(\nabla J_0, U_\varrho(\bar{u}), 0).$$

□

Folgerung 4.8. *Es gibt $\lambda_n \to \infty$ und $u_n \in H$ kritischer Punkt von J_{λ_n} mit $\|u_n - \bar{u}\|_{\lambda_n} \leq \frac{1}{n}$ und*

$$\deg(i \circ \nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n} \circ i^{-1}, U_\varrho(\bar{u}), 0) = \deg(\nabla J_0, U_\varrho(\bar{u}), 0),$$

wobei i aus Bemerkung A.8 ist.

Beweis. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{1}{\varrho_0}$. Dann gibt es zu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ein $\Lambda_n \geq 1$ aus Satz 4.7, so dass J_λ einen kritischen Punkt u_λ für alle $\lambda \geq \Lambda_n$ hat mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \frac{1}{n}$ und es gilt

$$\deg(i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}, U_{\frac{1}{n}}(\bar{u}), 0) = \deg(\nabla J_0, U_{\frac{1}{n}}(\bar{u}), 0).$$

Wähle $\lambda_n \geq \max\{\Lambda_n, \lambda_{n-1} + 1\}$, wobei $\lambda_0 := 1$, und $u_n := u_{\lambda_n}$. $\square$

KAPITEL 5

Isolierter kritischer Punkt mit nichttrivialen kritischen Gruppen

Sei $H = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbertraum, H_0 ein nichttrivialer abgeschlossener Unterraum von H mit $H_0 \neq H$ und für $\lambda \geq 1$ sei $H_\lambda = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda)$ ein reeller Hilbertraum mit

(A_1) es ist $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\|u\|_\lambda \leq \|u\|_{\tilde{\lambda}}$ für $\lambda \leq \tilde{\lambda}$, $u \in H$, $\|\cdot\|_\lambda$, $\|\cdot\|$ sind äquivalent;

(A_2) für $u \in H_0$, $v \in H$, $\lambda \geq 1$ gilt $\langle u, v \rangle_\lambda = \langle u, v \rangle$;

(A_3) ist $\lambda_n \to \infty$ und $(u_n) \in H$, so dass $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt ist, dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in H_0$ mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in H.

Wegen (A_1) und (A_2) sind H und H_λ, $\lambda \geq 1$, isomorph bzgl. der Einbettungen. Für $\lambda \geq 1$ ist nach Bemerkung 2.2

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } H \quad \Leftrightarrow \quad u_n \rightharpoonup u \text{ in } H_\lambda.$$

Sei $P : H \to H_0$ die orthogonale Projektion aus Kapitel 4.

Sei $k : H \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

(k_1) $k : H \to \mathbb{R}$ ist vollstetig (siehe Definition A.1) und stetig differenzierbar;

(k_2) $Dk : H \to H'$ ist vollstetig und stetig differenzierbar.

Nach Lemma A.4 ist $k|_{H_0}$ auch vollstetig.

Sei $\lambda \geq 1$. Seien

$$\begin{aligned} J_\lambda : H \to \mathbb{R}, \qquad & J_\lambda(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - k(u), \\ J_0 : H_0 \to \mathbb{R}, \qquad & J_0(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2 - k|_{H_0}(u). \end{aligned}$$

Die Funktionale J_λ, $\lambda \geq 1$, und J_0 sind zweimal stetig differenzierbar. Wegen Voraussetzung (A_2) ist $J_\lambda|_{H_0} = J_0$ für alle $\lambda \geq 1$. Da die Funktionale k und $k|_{H_0}$ vollstetig sind, bilden J_λ und J_0 beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.

Für $\lambda \geq 1$ seien $K_\lambda := \nabla_\lambda k : H \to H$, wobei $\nabla_\lambda k$ aus Bemerkung A.8, und $\nabla_\lambda J_\lambda := Id_H - K_\lambda$. Sei $K_0 := \nabla(k|_{H_0})$. Da K_λ und K_0 vollstetig sind nach Bemerkungen A.8 und 4.2, bilden $\nabla_\lambda J_\lambda$ und ∇J_0 beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.

Zudem setzen wir folgende Bedingungen voraus

(j_1) J_0 erfüllt die (PS)-Bedingung.

(j_2) J_λ, $\lambda \geq 1$, erfüllt die (PS)-Bedingung.

(j_3) Ist $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$, $c \in \mathbb{R}$ mit $J_{\lambda_n}(u_n) \to c$ und $\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0$, dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in H_0$ mit $\|u_{n_k} - u\|_{\lambda_{n_k}} \to 0$.

Bemerkung 5.1. Seien $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ und $u \in H_0$ mit

$$\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0, \quad \|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Dann ist nach (A_1) $u_n \to u$ in H und wegen der Vollstetigkeit von Dk $Dk(u_n) \to Dk(u)$ in H'. Es folgt für $v \in H_0$

$$\begin{aligned}
0 \;\leftarrow\; & \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \cdot \|v\| \overset{(A_2)}{=} \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \cdot \|v\|_{\lambda_n} \\
& \geq |\langle \nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n), v\rangle_{\lambda_n}| \\
& = |\langle u_n, v\rangle_{\lambda_n} - \langle K_{\lambda_n}(u_n), v\rangle_{\lambda_n}| \overset{(A_2), Bem\ 4.2}{=} |\langle u_n, v\rangle - Dk(u_n)(v)| \\
\to \;& |\langle u, v\rangle - Dk(u)(v)| \overset{Bem\ 4.2}{=} |\langle u, v\rangle - \langle K_0(u), v\rangle| = |\langle \nabla J_0(u), v\rangle|.
\end{aligned}$$

Damit ist $\nabla J_0(u) = 0$ und somit ein kritischer Punkt von J_0.

Bemerkung 5.2. Für $\lambda \geq 1$ sei c_λ die Norm der Einbettung $H \hookrightarrow H_\lambda$. Für $u, v \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
|DJ_\lambda(u)(v)| &= |\langle \nabla_\lambda J_\lambda(u), v\rangle_\lambda| \leq \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \|v\|_\lambda \\
&\leq c_\lambda \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \|v\|
\end{aligned}$$

und damit $\|DJ_\lambda(u)\|_{H'} \leq c_\lambda \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda$.

Sei $\bar{u} \in H_0$ ein isolierter kritischer Punkt von J_0 mit nichttrivialen kritischen Gruppen $C_*(J_0, \bar{u}) = H_*(J_0^{J_0(\bar{u})}, J_0^{J_0(\bar{u})} \setminus \{\bar{u}\})$, dabei ist H_* die singuläre Homologie aus [8, Kapitel 3].

5.1 Existenz von kritischen Punkten von J_λ für $\lambda \geq 1$ groß

Aus den Sätzen 2.22 und 2.23 erhalten wir ein Gromoll-Meyer-Paar (W, W_-) von J_0 um $\bar{u}$ bzgl. ∇J_0, so dass $H_*(W, W_-)$ isomorph zur kritischen Gruppe von $(J_0, \bar{u})$ ist. Wir werden zeigen, dass eine der beiden Aussagen gilt

(a) J_λ hat einen kritischen Punkt u_λ nahe $\bar{u}$ für $\lambda \geq 1$ groß;

(b) $H_*(W, W_-)$ ist isomorph zur trivialen Gruppe $\{0\}$.

Im Fall (b) erhalten wir einen Widerspruch, da wir vorausgesetzt haben, dass u_0 eine nichttriviale kritische Gruppe besitzt.

Um zu zeigen, dass entweder Fall (a) oder Fall (b) gilt, benötigen wir die Flüsse σ_λ zu $\nabla_\lambda J_\lambda$, $\lambda \geq 1$. Nach Bemerkung A.8 ist $\nabla_\lambda k$ und damit $\nabla_\lambda J_\lambda = Id_H - \nabla_\lambda k$ stetig differenzierbar, insbesondere lokal Lipschitz-stetig. Nach [7, 10.4.5. und 10.4.6] gibt es

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda : \{(u,t) \in H \times \mathbb{R} | u \in H, t \in (T_\lambda^-(u), T_\lambda^+(u))\} &\to H \\ \frac{d}{dt}\sigma_\lambda(u,t) = -\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)), \quad \sigma_\lambda(u,0) &= u. \end{aligned}$$

und nach [7, 10.5.1.] ist σ_λ stetig. Wir benutzen die Flüsse σ_λ, $\lambda \geq 1$, um im Fall, dass (a) nicht gilt, zu zeigen, dass $Id_{H_*(W,W_-)}$ die Nullabbildung ist.

Dazu benötigen wir noch einige Lemmata.

Grundsätzlich ist hier zu sagen, dass für $\lambda \geq 1$, $u \in H$, $t \in (T_\lambda^-(u), T_\lambda^+(u))$ folgendes gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) &= DJ_\lambda(\sigma_\lambda(u,t))(\frac{d}{dt}\sigma_\lambda(u,t)) \\ &\overset{Bem.\ 4.2}{=} \langle \nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)), \frac{d}{dt}\sigma_\lambda(u,t)\rangle_\lambda \\ &= -\|\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t))\|_\lambda^2, \end{aligned} \tag{5.1}$$

d.h. für $u \in H$ ist $J_\lambda(\sigma_\lambda(u,\cdot))$, $\lambda \geq 1$, monoton fallend.

Lemma 5.3. *Zu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gibt es $R > 0$, $\varrho > 0$ und $\Lambda \geq 1$ mit*

$$\inf\{\|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \mid u \in H, J_\lambda(u) \in [a,b], \|u\|_\lambda \geq R\} \geq \varrho$$

für $\lambda \geq \Lambda$; insbesondere ist

$$\inf\{\|\nabla J_0(u)\| \mid u \in H_0, J_0(u) \in [a,b], \|u\| \geq R\} \geq \varrho.$$

Beweis. Da J_0 nach Voraussetzung (j_1) die (PS)-Bedingung erfüllt, gibt es ein $R > 0$, so dass $(H_0 \backslash U_R(0)) \cap J_0^{-1}([a,b])$ keine kritischen Punkte enthält. Nun ist zudem $(H_0 \backslash U_R(0)) \cap J_0^{-1}([a,b])$ abgeschlossen. Also gibt es wegen der (PS)-Bedingung von J_0 ein $\varrho > 0$ mit

$$\inf_{u \in (H_0 \backslash U_R(0)) \cap J_0^{-1}([a,b])} \|\nabla J_0(u)\| \geq \varrho. \tag{5.2}$$

Angenommen, es gibt $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit

$$\begin{aligned} a \leq J_{\lambda_n}(u_n) \leq b, &\qquad \|u_n\|_{\lambda_n} \geq R, \\ \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0. & \end{aligned}$$

O.E. sei $(J_{\lambda_n}(u_n))$ konvergent. Nach Voraussetzung (j_3) gibt es ein $u \in H_0$ und eine Teilfolge o.E. (u_n) mit $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0$. Nach Bemerkung 5.1 ist u ein kritischer Punkt von J_0. Weiter ist

$$\|u\| \overset{(A_2)}{=} \|u\|_{\lambda_n} \geq \|u_n\|_{\lambda_n} - \|u_n - u\|_{\lambda_n} \geq R - \|u_n - u\|_{\lambda_n} \to R.$$

und somit $\|u\| \geq R$. Nach Voraussetzung (A_1) ist auch $u_n \to u$ in H. Wegen der Stetigkeit von k ist also $k(u_n) \to k(u)$. Es ist zudem

$$|\|u_n\|_{\lambda_n} - \|u\|| \overset{(A_2)}{=} |\|u_n\|_{\lambda_n} - \|u\|_{\lambda_n}| \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Damit gilt

$$J_{\lambda_n}(u_n) = \tfrac{1}{2}\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - k(u_n) \to \tfrac{1}{2}\|u\|^2 - k(u) = J_0(u).$$

D.h. $J_0(u) \in [a,b]$. Das ist ein Widerspruch zu (5.2). $\square$

Lemma 5.4. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $M \subseteq H_0$ beschränkt mit $M \subseteq J_0^{-1}([a,b])$. Dann gibt es ein $R > 0$ und ein $\Lambda \geq 1$ mit $\|\sigma_\lambda(u,t)\|_\lambda \leq R$ für alle $\lambda \geq \Lambda$, $u \in M$, $t \in [0, T_\lambda^+(u))$ mit $\sigma_\lambda(u,t) \in J_\lambda^{-1}([a,b])$.*

Beweis. Sei $c > 0$ mit $\|u\| \leq c$ für alle $u \in M$. Angenommen, es gibt $\lambda_n \to \infty$, $u_n \in M$, $t_n \in [0, T_{\lambda_n}^+(u_n))$ mit

$$\|\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n)\|_{\lambda_n} \to \infty, \quad \sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n) \in J_{\lambda_n}^{-1}([a,b]).$$

Nach Lemma 5.3 gibt es ϱ, $R > c$, $\Lambda \geq 1$ mit

$$\inf\{\|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \mid u \in H, J_\lambda(u) \in [a,b], \|u\|_\lambda \geq R\} \geq \varrho$$

für $\lambda \geq \Lambda$. O.E. sei

$$\lambda_n \geq \Lambda, \quad \|\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n)\|_{\lambda_n} \geq 2R, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$s_n := \inf\{t' \in [0, t_n] \mid \forall t \in [t', t_n] \; \|\sigma_{\lambda_n}(u_n, t)\|_{\lambda_n} > R\}.$$

Wegen $\|\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n)\|_{\lambda_n} \geq 2R$ ist $s_n < t_n$ und wegen

$$\|\sigma_{\lambda_n}(u_n, 0)\|_{\lambda_n} = \|u_n\|_{\lambda_n} \overset{(A_2)}{=} \|u_n\| \leq c < R$$

ist $s_n > 0$. Wegen der Stetigkeit von σ_{λ_n} und $\|\cdot\|_{\lambda_n}$ ist $\|\sigma_{\lambda_n}(u_n, s_n)\|_{\lambda_n} = R$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n) - \sigma_{\lambda_n}(u_n, s_n)\|_{\lambda_n} &\geq \|\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n)\|_{\lambda_n} - \|\sigma_{\lambda_n}(u_n, s_n)\|_{\lambda_n} \\
&= \|\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n)\|_{\lambda_n} - R \to \infty
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\infty \leftarrow \quad & \|\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n)\|_{\lambda_n} - R \leq \|\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n) - \sigma_{\lambda_n}(u_n, s_n)\|_{\lambda_n} \\
= \quad & \|\int_{s_n}^{t_n} \frac{d}{dt}\sigma_{\lambda_n}(u_n, s)\, ds\|_{\lambda_n} = \|\int_{s_n}^{t_n} -\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s))\, ds\|_{\lambda_n} \\
\leq \quad & \int_{s_n}^{t_n} \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s))\|_{\lambda_n}\, ds \\
\leq \quad & \sqrt{t_n - s_n} \cdot \left(\int_{s_n}^{t_n} \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s))\|_{\lambda_n}^2\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
\overset{(5.1)}{=} \quad & \sqrt{t_n - s_n} \cdot \left(\int_{s_n}^{t_n} -\frac{d}{dt} J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s))\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
= \quad & \sqrt{t_n - s_n} \cdot \sqrt{J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s_n)) - J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n))} \\
\overset{(5.1)}{\leq} \quad & \sqrt{t_n - s_n} \cdot \sqrt{J_{\lambda_n}(u_n) - J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n))} \\
\leq \quad & \sqrt{t_n - s_n} \cdot \sqrt{b - a}.
\end{aligned}$$

Daher ist $t_n - s_n \to \infty$.

Weiter ist $\|\sigma_{\lambda_n}(u_n, s)\|_{\lambda_n} > R$ für alle $s \in (s_n, t_n]$. Wegen (5.1) ist $J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, \cdot))$ monoton fallend, d.h. für $s \in [s_n, t_n]$

$$b \geq J_0(u_n) = J_{\lambda_n}(u_n) \geq J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s)) \geq J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n)) \geq a.$$

Damit ist für $s \in [s_n, t_n]$

$$\frac{d}{dt} J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s)) \overset{(5.1)}{=} -\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s))\|_{\lambda_n}^2 \leq -\varrho^2$$

und somit

$$\begin{aligned} b - a &\geq J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s_n)) - J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, t_n)) = -\int_{s_n}^{t_n} \frac{d}{dt} J_{\lambda_n}(\sigma_{\lambda_n}(u_n, s))\, ds \\ &\geq \varrho^2(t_n - s_n) \to \infty. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch. □

Lemma 5.5. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\delta > 0$. Ist $u_0 \in H_0$ einziger kritischer Punkt von J_0 in $B_\delta(u_0)$, so gibt es ein $\Lambda \geq 1$ und ein $\alpha > 0$ mit*

$$\|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \geq \alpha$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit

$$\|u - u_0\|_\lambda \geq \delta, \quad J_\lambda(u) \in [a, b], \quad Pu \in B_\delta(u_0).$$

Beweis. Angenommen, es gibt $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \in H$ mit

$$\|u_n - u_0\| \geq \delta, \quad J_{\lambda_n}(u_n) \in [a, b], \quad Pu_n \in B_\delta(u_0), \quad \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0.$$

O.E. sei $(J_{\lambda_n}(u_n))$ konvergent. Nach Voraussetzung (j_3) gilt für ein $u \in H_0$ und eine Teilfolge o.E. (u_n) $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0$. Nach Bemerkung 5.1 ist u ein kritischer Punkt von J_0. Es gilt

$$\|Pu_n - u\| \overset{(A_2)}{=} \|Pu_n - u\|_{\lambda_n} = \|P(u_n - u)\|_{\lambda_n} \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Wegen $Pu_n \to u$ in H_0 und $Pu_n \in B_\delta(u_0)$ ist auch $u \in B_\delta(u_0)$. Damit ist $u = u_0$. Dann ist aber

$$\delta \leq \|u_n - u_0\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Das ist ein Widerspruch. □

Lemma 5.6. *Sei $R > 0$, $\epsilon > 0$. Dann gibt es $\Lambda \geq 1$ mit*

$$\epsilon + J_\lambda(u) \geq J_0(Pu)$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$.

Beweis. Angenommen, es gibt $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit

$$\|u_n\|_{\lambda_n} \leq R, \quad \epsilon + J_{\lambda_n}(u_n) < J_0(Pu_n).$$

Nach Voraussetzung (A_3) gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) und $u \in H_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H. Nach Bemerkung 4.1 ist auch $Pu_n \rightharpoonup u$ in H. Wegen Voraussetzung (k_1) folgt $k(u_n) \to k(u)$ und $k(Pu_n) \to k(u)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\epsilon &< J_0(Pu_n) - J_{\lambda_n}(u_n) = \tfrac{1}{2}\|Pu_n\|^2 - k(Pu_n) - (\tfrac{1}{2}\|u_n\|^2_{\lambda_n} - k(u_n)) \\
&\overset{(A_2)}{=} \tfrac{1}{2}\|Pu_n\|^2_{\lambda_n} - k(Pu_n) - (\tfrac{1}{2}\|Pu_n\|^2_{\lambda_n} + \tfrac{1}{2}\|u_n - Pu_n\|^2_{\lambda_n} - k(u_n)) \\
&= -\tfrac{1}{2}\|u_n - Pu_n\|^2_{\lambda_n} - k(Pu_n) + k(u_n) \leq -k(Pu_n) + k(u_n) \to 0.
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch. □

Lemma 5.7. *Sei $\gamma, \delta, R > 0$. Sei u_0 einziger kritischer Punkt von J_0 in $B_\delta(u_0)$, $c := J_0(u_0)$. Dann gibt es ein $\Lambda \geq 1$ mit*

$$\langle \nabla J_0(Pu), P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\rangle > 0$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit

$$\|u\|_\lambda \leq R, \quad Pu \in J_0^{-1}(\{c-\gamma\}) \cap B_\delta(u_0).$$

Beweis. Sei

$$m := \sup_{u \in B_\delta(u_0)} \|\nabla J_0(u)\|.$$

Da J_0 stetig ist, gibt es ein $\varrho > 0$ mit $J_0(u) \geq c - \frac{\gamma}{2}$ für alle $u \in U_\varrho(u_0)$. Dann ist

$$J_0^{-1}(\{c-\gamma\}) \cap B_\delta(u_0) \subseteq B_\delta(u_0) \backslash U_\varrho(u_0).$$

Da J_0 nach Voraussetzung (j_1) die (PS)-Bedingung erfüllt, $B_\delta(u_0)\backslash U_\varrho(u_0)$ abgeschlossen und J_0 keinen kritischen Punkt in $B_\delta(u_0)\backslash U_\varrho(u_0)$ hat, ist

$$\beta := \inf_{u \in B_\delta(u_0)\backslash U_\varrho(u_0)} \|\nabla J_0(u)\| > 0.$$

Nach Lemma 4.4 gibt es $\Lambda \geq 1$ mit

$$\|K_\lambda(u) - K_0(Pu)\|_\lambda \leq \tfrac{\beta^2}{2m},$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$. Sei $\lambda \geq \Lambda$. Dann ist für $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$

$$\begin{aligned}
&\|\nabla J_0(Pu) - P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\| = \|Pu - K_0(Pu) - (Pu - PK_\lambda(u))\| \\
&= \|P(K_0(Pu) - K_\lambda(u))\| \overset{(A_2)}{=} \|P(K_0(Pu) - K_\lambda(u))\|_\lambda \\
&= \|K_0(Pu) - K_\lambda(u))\|_\lambda \leq \frac{\beta^2}{2m}.
\end{aligned}$$

Damit ist für $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$ und $Pu \in J_0^{-1}(\{c-\gamma\}) \cap B_\delta(u_0)$ auch $\|Pu\| \leq R$ nach (A_2) und somit

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla J_0(Pu), P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\rangle \\
= \; & \|\nabla J_0(Pu)\|^2 - \langle \nabla J_0(Pu), \nabla J_0(Pu) - P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\rangle \\
\geq \; & \|\nabla J_0(Pu)\|^2 - \|\nabla J_0(Pu)\|\|\nabla J_0(Pu) - P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\| \\
\geq \; & \beta^2 - m \cdot \frac{\beta^2}{2m} = \frac{\beta^2}{2} > 0.
\end{aligned}$$

□

Nun kommen wir zu den Fällen (a) und (b). Sei $\delta > 0$, so dass $\bar{u}$ einziger kritischer Punkt in $B_\delta(\bar{u})$ ist, und $c := J_0(\bar{u})$. Wir wissen bereits, dass J_0 und ∇J_0 in $B_\delta(\bar{u})$ beschränkt sind. Wir erhalten aus Satz 2.22 Konstanten $\beta, m, \gamma, \mu, \nu > 0$, $I : H_0 \to \mathbb{R}$, $I(u) = \nu J_0(u) + \|u - \bar{u}\|^2$ mit

$$W := J_0^{-1}([c-\gamma, c+\gamma]) \cap I^{\nu c + \mu}, \quad W_- := J_0^{-1}(\{c-\gamma\}) \cap W.$$

(i) $B_{\frac{\delta}{2}}(\bar{u}) \cap J_0^{-1}([c-\gamma, c+\gamma]) \subseteq W \subseteq B_\delta(\bar{u})$;

(ii) $J_0^{-1}([c-\gamma, c+\gamma]) \cap I^{-1}(\{\nu c + \mu\}) \subseteq B_\delta(\bar{u}) \backslash B_{\frac{\delta}{2}}(\bar{u})$;

(iii) $\langle \nabla I(u), \nabla J_0(u)\rangle \geq \nu\beta^2 - 2\delta m > 0 \quad \forall u \in B_\delta(\bar{u}) \backslash U_{\frac{\delta}{2}}(\bar{u})$.

und (W, W_-) ist ein Gromoll-Meyer-Paar (W, W_-) von J_0 um $\bar{u}$ bzgl. $-\nabla J_0$. Satz 2.23 liefert uns

$$H_*(W, W_-) \cong H_*(J_0^{J_0(\bar{u})}, J_0^{J_0(\bar{u})} \backslash \{\bar{u}\}) = C_*(J_0, \bar{u}).$$

Der nächste Satz enthält die wesentliche Idee dieses Kapitels.

Satz 5.8. *Es gibt $\Lambda \geq 1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ eine der folgenden Aussagen gilt.*

(a) J_λ hat einen kritischen Punkt u_λ mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$;

(c) es gibt eine Homotopie $\eta : W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \times [0,1] \to W$ mit

$$\begin{aligned}
\eta(\cdot, 0) : W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \hookrightarrow W, \qquad & \eta(u,1) \in W_-, \quad \forall u \in W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \\
\eta(u,t) = u, \quad \forall u \in W_-, t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Lemma 5.4 gibt es ein $R > 0$ und ein $\Lambda_1 \geq 1$ mit

$$\|\sigma_\lambda(u,t)\|_\lambda \leq R \tag{5.3}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda_1$ und $u \in J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \cap W$, $t \in [0, T_\lambda^+(u))$ mit

$$c - 2\gamma \leq J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) \leq c + 2\gamma.$$

Nach Lemma 5.5 gibt es ein $\Lambda_2 \geq \Lambda_1$ und ein $\alpha_1 > 0$ mit

$$\|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \geq \alpha_1 \tag{5.4}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda_2$ und $u \in H$ mit

$$\|u - \bar{u}\|_\lambda \geq \delta, \quad J_\lambda(u) \in [c - \frac{5}{4}\gamma, c + \frac{\gamma}{2}], \quad Pu \in B_\delta(\bar{u}).$$

Nach Lemma 5.6 gibt es ein $\Lambda_3 \geq \Lambda_2$ mit

$$\frac{\gamma}{4} + J_\lambda(u) \geq J_0(Pu) \tag{5.5}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda_3$ und $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$. Nach Lemma 5.7 gibt es $\Lambda_4 \geq \Lambda_3$ mit

$$\langle \nabla J_0(Pu), P\nabla_\lambda J_\lambda(u) \rangle > 0 \tag{5.6}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda_4$ und $u \in H$ mit

$$\|u\|_\lambda \leq R, \quad Pu \in J_0^{-1}(\{c - \gamma\}) \cap B_\delta(\bar{u}).$$

<u>**Schritt 1:**</u> Es gibt ein $\Lambda \geq \Lambda_4$ mit

$$\langle \nabla I(Pu), P\nabla_\lambda J_\lambda(u) \rangle > 0$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit

$$\|u\|_\lambda \leq R, \quad Pu \in B_\delta(\bar{u}) \backslash U_{\frac{\delta}{2}}(\bar{u}).$$

Sei $\alpha' := \nu\beta^2 - 2\delta m > 0$. Sei

$$C := \sup_{u \in B_R(0)} \|\nabla I(u)\| = \sup_{u \in B_R(0)} \|2(u - \bar{u}) + \nu \nabla J_0(u)\|.$$

Nach Lemma 4.4 gibt es ein $\Lambda \geq \Lambda_4$ mit

$$\|K_\lambda(u) - K_0(Pu)\|_\lambda \leq \frac{\alpha'}{2C},$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$, $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$. Sei $\lambda \geq \Lambda$. Es gilt für $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$

$$\begin{aligned} & \|P\nabla_\lambda J_\lambda(u) - \nabla J_0(Pu)\| = \|P(u - K_\lambda(u)) - (Pu - K_0(Pu))\| \\ = \; & \|P(K_\lambda(u) - K_0(Pu))\| \overset{(A_2)}{=} \|P(K_\lambda(u) - K_0(Pu))\|_\lambda \\ \leq \; & \|K_\lambda(u) - K_0(Pu)\|_\lambda < \frac{\alpha'}{2C} \end{aligned}$$

Für $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$ und $Pu \in B_\delta(\bar{u}) \backslash U_{\frac{\delta}{2}}(\bar{u})$ ist auch $\|Pu\| \leq R$ nach Voraussetzung (A_2) und somit

$$\begin{aligned} \langle \nabla I(Pu), P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\rangle &= \langle \nabla I(Pu), \nabla J_0(Pu)\rangle \\ &\quad - \langle \nabla I(Pu), \nabla J_0(Pu) - P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\rangle \\ &\geq \langle \nabla I(Pu), \nabla J_0(Pu)\rangle \\ &\quad - \|\nabla I(Pu)\| \cdot \|P\nabla_\lambda J_\lambda(u) - \nabla J_0(Pu)\| \\ &\overset{(iii)}{\geq} \alpha' - C \cdot \tfrac{\alpha'}{2C} = \tfrac{\alpha'}{2}. \end{aligned}$$

Schritt 2: Ist $\lambda \geq \Lambda$, und hat J_λ keinen kritischen Punkt u_λ mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$, dann gibt es ein $\alpha > 0$ mit

$$\|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \geq \alpha$$

für alle $u \in H$ mit

$$Pu \in B_\delta(\bar{u}), \quad c - \frac{5}{4}\gamma \leq J_\lambda(u) \leq c + \frac{\gamma}{2}.$$

Sei $\lambda \geq \Lambda$. J_λ habe keinen kritischen Punkt in H mit $\|u - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$. Da nach Voraussetzung (j_2) J_λ die (PS)-Bedingung erfüllt und die Menge $\{u \in H \mid \|u - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta\}$ abgeschlossen ist, ist nach Bemerkung 5.2

$$\alpha_2 := \inf_{u \in H, \|u - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda > 0. \tag{5.7}$$

Sei $\alpha := \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Mit (5.4) und (5.7) ist

$$\|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \geq \alpha$$

für alle $u \in H$ mit

$$Pu \in B_\delta(\bar{u}), \quad c - \frac{5}{4}\gamma \leq J_\lambda(u) \leq c + \frac{\gamma}{2}.$$

Schritt 3: Für $u \in W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$,

$$t := \sup\{s' \in [0, T_\lambda^+(u)) \mid \forall s \in [0, s'] \; ist \; P\sigma_\lambda(u, s) \in W\}$$

und $s \in [0,t)$ ist $\|\sigma_\lambda(u,s)\|_\lambda \leq R$.

Sei $u \in W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$ und

$$t := \sup\{s' \in [0, T_\lambda^+(u)) \mid \forall s \in [0,s'] \textit{ ist } P\sigma_\lambda(u,s) \in W\}.$$

Dann ist für $s \in [0,t)$

$$c - \gamma \leq J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) \leq c + \gamma.$$

Angenommen, es gibt ein $t'' < t$ mit $\|\sigma_\lambda(u,t'')\|_\lambda > R$. Dann ist

$$t' := \sup\{s' \in [0, T_\lambda^+(u)) \mid \forall s \in [0,s'] \textit{ ist } \|\sigma_\lambda(u,s)\|_\lambda \leq R\} < T_\lambda^+(u).$$

Wegen der Stetigkeit von σ_λ und $\|\cdot\|_\lambda$ ist $\|\sigma_\lambda(u,t')\|_\lambda = R$. Damit gilt

$$c - \frac{5}{4}\gamma \leq J_0(P\sigma_\lambda(u,t')) - \frac{\gamma}{4} \overset{(5.5)}{\leq} J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t')).$$

Dann ist wegen der Stetigkeit von J_λ und σ_λ auch

$$c - 2\gamma \leq J_\lambda(\sigma_\lambda(u,s))$$

für $t' < s < t$ nahe t'. Da $J_\lambda(\sigma_\lambda(u,\cdot))$ monoton fallend ist, ist

$$J_\lambda(\sigma_\lambda(u,s)) \leq J_\lambda(u) = J_0(u) \leq c + \gamma$$

für $t' < s < t$ nahe t'. Nach (5.3) ist dann $\|\sigma_\lambda(u,s)\|_\lambda \leq R$ für $t' < s < t$ nahe t'. Das ist ein Widerspruch zur Definition von t'. Es folgt, $\|\sigma_\lambda(u,s)\|_\lambda \leq R$ für alle $s \in [0,t)$.

<u>**Schritt 4:**</u> Für $u \in J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \cap W$ mit

$$P\sigma_\lambda(u,t) \in W, \quad \forall t \in [0, T_\lambda^+(u))$$

ist $T_\lambda^+(u) = \infty$.

Sei $u \in J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \cap W$ mit $P\sigma_\lambda(u,t) \in W$ für alle $t \in [0, T_\lambda^+(u))$. Dann ist für $t \in [0, T_\lambda^+(u))$

$$c - \gamma \leq J_0(P\sigma_\lambda(u,t)).$$

Nach Schritt 3 ist $\|\sigma_\lambda(u,t))\|_\lambda \leq R$ für alle $t \in [0, T_\lambda^+(u))$. Damit ist für $t \in [0, T_\lambda^+(u))$

$$c - \frac{5}{4}\gamma \leq J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) - \frac{\gamma}{4} \overset{(5.5)}{\leq} J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)).$$

Somit ist $J_\lambda(\sigma_\lambda(u,\cdot))$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 2.15 ist $T_\lambda^+(u) = \infty$.

Schritt 5: Ist $u \in J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \cap W$ und gibt es ein $t' \geq 0$ mit $P\sigma_\lambda(u,t') \notin W$, so gibt es ein $t \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} P\sigma_\lambda(u,s) &\in W, \quad \forall s \in [0,t], \\ P\sigma_\lambda(u,t) &\in W_-. \end{aligned}$$

Sei $u \in J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \cap W$ mit $P\sigma_\lambda(u,t') \notin W$ für ein $t' \geq 0$. Damit gilt

$$t := \sup\{s' \in [0, T_\lambda^+(u)) \mid \forall s \in [0,s'] \; ist \; P\sigma_\lambda(u,s) \in W\} < T_\lambda^+(u).$$

Da P und σ_λ stetig sind und W abgeschlossen ist, ist $P\sigma_\lambda(u,s) \in W$ für alle $s \in [0,t]$. Nach Schritt 3 ist $\|\sigma_\lambda(u,s))\|_\lambda \leq R$ für alle $s \in [0,t]$. Weiter gibt es eine Folge $(s_n) \subseteq (t, T_\lambda^+(u))$ mit $s_n \to t$ und $P\sigma_\lambda(u,s_n) \notin W$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) &\overset{(5.5)}{\leq} J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) + \frac{\gamma}{4} \leq J_\lambda(u) + \frac{\gamma}{4} \\ &= J_0(u) + \frac{\gamma}{4} \leq c + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{4} < c + \gamma. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von J_0, P und σ_λ ist $J_0(P\sigma_\lambda(u,s_n)) < c + \gamma$ für $n \in \mathbb{N}$ groß.

Ist $I(P\sigma_\lambda(u,t)) < \nu c + \mu$, dann ist wegen der Stetigkeit von I, P und σ_λ auch $I(P\sigma_\lambda(u,s_n)) < \nu c + \mu$ für $n \in \mathbb{N}$ groß.

Ist $I(P\sigma_\lambda(u,t)) = \nu c + \mu$, so ist nach (ii)

$$P\sigma_\lambda(u,t) \in B_\delta(\bar{u}) \backslash B_{\frac{\delta}{2}}(\bar{u}).$$

Nach Schritt 1 ist

$$\langle \nabla I(P\sigma_\lambda(u,t)), P\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) \rangle > 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(P\sigma_\lambda(u,t)) &= \langle \nabla I(P\sigma_\lambda(u,t)), P\frac{d}{dt}\sigma_\lambda(u,t) \rangle \\ &= -\langle \nabla I(P\sigma_\lambda(u,t)), P\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) \rangle < 0. \end{aligned}$$

Es folgt für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$I(P\sigma_\lambda(u,s_n)) < I(P\sigma_\lambda(u,t)) = \nu c + \mu.$$

Es folgt, $J_0(P\sigma(u,s_n)) \leq c - \gamma$ für $n \in \mathbb{N}$ groß. Da J_0, P und σ_λ stetig ist $J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) \leq c - \gamma$. Insgesamt ist $J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = c - \gamma$ und damit $P\sigma_\lambda(u,t) \in W_-$.

Schritt 6: Unter den Voraussetzungen von Schritt 2 gibt es für $u \in W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$ ein $t \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} P\sigma_\lambda(u,s) &\in W, \quad \forall s \in [0,t], \\ P\sigma_\lambda(u,t) &\in W_-. \end{aligned}$$

Sei $u \in W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$.

Angenommen, es ist $P\sigma_\lambda(u,t) \in W$ für alle $t \in [0, T_\lambda^+(u))$. Nach Schritt 4 ist $T_\lambda^+(u) = \infty$. Nach Schritt 3 ist $\|\sigma_\lambda(u,t)\|_\lambda \leq R$ für alle $t \geq 0$. Somit ist für $t \geq 0$

$$c - \frac{5}{4}\gamma \leq J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) - \frac{\gamma}{4} \overset{(5.5)}{\leq} J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t))$$

Damit ist für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} P\sigma_\lambda(u,t) &\overset{(i)}{\in} B_\delta(\bar{u}), \\ c - \tfrac{5}{4}\gamma \leq J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) &\leq J_\lambda(u) = J_0(u) \leq c + \tfrac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Also ist für $t \geq 0$ nach Schritt 2

$$\|\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t))\|_\lambda \geq \alpha.$$

Es folgt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} c - \frac{5}{4}\gamma &\leq J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) = J_\lambda(u) + \int_0^t \frac{d}{ds} J_\lambda(\sigma_\lambda(u,s))\, ds \\ &= J_0(u) - \int_0^t \|\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,s))\|_\lambda^2\, ds \\ &\leq c + \gamma - \alpha^2 t \overset{t\to\infty}{\to} -\infty. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt $P\sigma_\lambda(u,t) \notin W$ für ein $t \geq 0$. Mit Schritt 5 gibt es ein $t \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} P\sigma_\lambda(u,s) &\in W, \quad \forall s \in [0,t], \\ P\sigma_\lambda(u,t) &\in W_-. \end{aligned}$$

Schritt 7: Unter den Voraussetzungen von Schritt 2 gibt es eine stetige Abbildung $T : W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \to [0,\infty)$ mit

$$\begin{aligned} P\sigma_\lambda(u,s) &\in W, \qquad \forall s \in [0,T(u)], \\ P\sigma_\lambda(u,T(u)) &\in W_-, \end{aligned}$$

und $T|_{W_-} = 0$.

Nach Schritt 6 gibt es zu $u \in W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$ ein $t \geq 0$ mit

$$\begin{array}{rcl} P\sigma_\lambda(u,s) \in W \quad \forall s \in [0,t] & \Rightarrow & J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) \geq c - \gamma \quad \forall s \in [0,t] \\ P\sigma_\lambda(u,t) \in W_- & \Rightarrow & J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = c - \gamma. \end{array}$$

Nach Schritt 3 ist $\|\sigma_\lambda(u,s)\|_\lambda \leq R$ für alle $s \in [0,t]$. Also ist

$$\|\sigma_\lambda(u,t)\|_\lambda \leq R, \quad P\sigma_\lambda(u,t) \in W_- = W \cap J_0^{-1}(\{c-\gamma\}) \overset{(i)}{\subseteq} B_\delta(\bar{u}) \cap J_0^{-1}(\{c-\gamma\}).$$

Nach (5.6) ist

$$\langle \nabla J_0(P\sigma_\lambda(u,t)), P\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t))\rangle > 0.$$

Es folgt

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt} J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) & = & \langle \nabla J_0(P\sigma_\lambda(u,t)), P\frac{d}{dt}\sigma_\lambda(u,t)\rangle \\ & = & -\langle \nabla J_0(P\sigma_\lambda(u,t)), P\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t))\rangle < 0. \end{array}$$

Es folgt für $s > t$ nahe t

$$J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) < J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = c - \gamma,$$

d.h. $P\sigma_\lambda(u,s) \notin W$. Somit ist $t \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$\begin{array}{c} P\sigma_\lambda(u,s) \in W \quad \forall s \in [0,t] \\ P\sigma_\lambda(u,t) \in W_- \end{array}$$

eindeutig. Damit ist aber auch $P\sigma(u,s) \in W \backslash W_-$ für alle $s \in [0,t)$, d.h. $J_0(P\sigma(u,s)) > c - \gamma$.

Sei $T : W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \to [0,\infty)$ definiert durch

$$\begin{array}{l} P\sigma_\lambda(u,s) \in W\backslash W_-, \quad \forall s \in [0,T(u)), \\ P\sigma_\lambda(u,T(u)) \in W_-. \end{array}$$

Sei $u \in W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$. Sei $(u_n) \subseteq W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$ mit $u_n \to u$. Es ist

$$\frac{d}{dt} J_0(P\sigma_\lambda(u,T(u))) < 0.$$

Angenommen, es ist $(T(u_n))$ unbeschränkt oder $\limsup T(u_n) > T(u) \geq 0$. Für ein $T(u) < t < T_\lambda^+(u)$ ist dann $T(u_n) \geq t$ für $n \in \mathbb{N}$ groß. Es folgt für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{array}{rcl} c - \gamma & = & J_0(P\sigma_\lambda(u,T(u))) > J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) \\ & = & \lim J_0(P\sigma_\lambda(u_n,t)) \geq c - \gamma. \end{array}$$

Das ist ein Widerspruch.

O.E. sei $T(u_n) \to \liminf T(u_n)$. Angenommen, es ist $\lim T(u_n) < T(u)$. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$c - \gamma < J_0(P\sigma_\lambda(u, \lim T(u_n))) = \lim J_0(P\sigma_\lambda(u_n, T(u_n))) = c - \gamma.$$

Das ist ein Widerspruch.

Insgesamt ist $T(u_n) \to T(u)$, d.h. T stetig.

Schritt 8: Es gilt (a) oder (c).

Sei $\lambda \geq \Lambda$. Gilt (a) nicht, so gibt es nach Schritt 7 eine stetige Abbildung $T : W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \to [0, \infty)$ mit

$$\begin{aligned} P\sigma(u,s) &\in W, \qquad \forall s \in [0, T(u)], \\ P\sigma(u, T(u)) &\in W_-, \end{aligned}$$

und $T|_{W_-} = 0$.

Sei $\eta : W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}} \times [0,1] \to W$, definiert durch $\eta(u,t) := P\sigma_\lambda(u, tT(u))$. Da P, σ_λ und T stetig sind, ist auch η stetig. Weiter gilt für $u \in W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$

$$\eta(u,0) = P\sigma_\lambda(u,0) = Pu = u, \quad \eta(u,1) = P\sigma(u, T(u)) \in W_-.$$

Für $u \in W_-$ ist $T(u) = 0$ und somit für $t \in [0,1]$

$$\eta(u,t) = P\sigma_\lambda(u,0) = Pu = u.$$

□

Satz 5.9. *Es gibt $\Lambda \geq 1$, so dass (a) oder (b) gilt für alle $\lambda \geq \Lambda$.*

Beweis. Nach Satz 2.18 ist $W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$ ein starker Deformationsretrakt von W. Sei

$$i : (W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}, W_-) \hookrightarrow (W, W_-).$$

Nach Folgerung 2.11 induziert die Einbettung $i|_{W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}}$ einen Isomorphismus

$$H_*(W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}) \cong H_*(W), \ \mathit{bzgl.}\ (i|_{W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}})_*.$$

Weiter ist

$$(i|_{W_-})_* = (Id_{W_-})_* = Id_{H_*(W_-)}.$$

Nach Satz 2.8 ist

$$H_*(W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}, W_-) \cong H_*(W, W_-), \ bzgl. \ i_*.$$

Nach Satz 5.8 gibt es ein $\Lambda \geq 1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ die Aussagen (a) oder (c) gilt.

Sei $\lambda \geq \Lambda$. Gilt (a) nicht, dann gilt (c). D.h. es gibt eine Homotopie

$$\eta : (W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}, W_-) \times [0,1] \to (W, W_-)$$

mit

$$\eta(u,0) = u, \qquad \eta(u,1) \in W_-, \quad \forall u \in W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}$$
$$\eta(u,t) = u, \quad \forall u \in W_-, t \in [0,1].$$

Sei

$$j : (W_-, W_-) \hookrightarrow (W, W_-).$$

Sei $s : (W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}, W_-) \to (W_-, W_-)$, $s := \eta(\cdot, 1)$. Dann ist

$$\eta(\cdot, 0) = i, \quad \eta(\cdot, 1) = j \circ s.$$

Nach Bemerkung 2.6 gilt

$$\begin{aligned} Id_{H_*(W,W_-)} &= i_* \circ (i_*)^{-1} = \eta(\cdot,0)_* \circ (i_*)^{-1} \\ &= \eta(\cdot,1)_* \circ (i_*)^{-1} = (j \circ s)_* \circ (i_*)^{-1} \\ &= j_* \circ s_* \circ (i_*)^{-1}. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach Satz 2.7

$$s_* : H_*(W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}, W_-) \to H_*(W_-, W_-) \cong \{0\}.$$

Damit ist $s_* = 0$ und somit $Id_{H_*(W,W_-)} = 0$. Damit ist aber $H_*(W, W_-) \cong \{0\}$.

$$\begin{tikzcd} H_*(W,W_-) \arrow[rrr, "Id_{H_*(W,W_-)} = (i_*)^{-1} \circ i_*"] \arrow[dr, "(i_*)^{-1}"'] & & & H_*(W,W_-) \\ & H_*(W \cap J_0^{c+\frac{\gamma}{2}}, W_-) \arrow[r, "s_*"] \arrow[urr, "i_* = \eta(\cdot,0)_* = \eta(\cdot,1)_*", "= j_* \circ s_*"'] & H_*(W_-, W_-) \cong 0 \arrow[ur, "j_*"'] & \end{tikzcd}$$

□

Fassen wir alle bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels zusammen, so erhalten wir folgenden Satz.

Satz 5.10. *Zu $\delta > 0$, so dass $\bar{u}$ einziger kritischer Punkt von J_0 in $B_\delta(\bar{u})$ ist, gibt es ein $\Lambda \geq 1$, so dass für $\lambda \geq \Lambda$ J_λ einen kritischen Punkt u_λ hat mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$.*

Beweis. Sei $\delta > 0$, so dass $\bar{u}$ einziger kritischer Punkt von J_0 in $B_\delta(\bar{u})$ ist. Mit den Sätzen 2.22 und 2.23 gibt es ein Gromoll-Meyer Paar (W, W_-) mit

$$H_*(W, W_-) \cong C_*(J_0, \bar{u}).$$

In diesem Kapitel haben wir vorausgesetzt, dass $\bar{u}$ nichttriviale kritische Gruppen besitzt. d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit

$$C_n(J_0, \bar{u}) \ncong \{0\}.$$

D.h. $H_n(W, W_-) \ncong \{0\}$. Satz 5.9 liefert uns zu δ ein $\Lambda \geq 1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ J_λ einen kritischen Punkt u_λ mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$ besitzt, oder $H_*(W, W_-) \cong \{0\}$. Da die zweite Aussage nicht möglich ist, erhalten wir für alle $\lambda \geq \Lambda$ einen kritischen Punkt u_λ von J_λ mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$. □

Folgerung 5.11. *Es gibt $\lambda_n \to \infty$, $u_n \in H$ mit u_n ist kritischer Punkt von J_{λ_n} und $\|u_n - \bar{u}\|_{\lambda_n} \leq \frac{1}{n}$.*

Beweis. Sei $\delta > 0$, so dass $\bar{u}$ einziger kritischer Punkt von J_0 in $B_\delta(\bar{u})$ ist. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{1}{\delta}$. Dann gibt es zu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ein $\Lambda_n \geq 1$ aus Satz 5.10, so dass J_λ einen kritischen Punkt u_λ für alle $\lambda \geq \Lambda_n$ hat mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \frac{1}{n}$. Wähle $\lambda_n \geq \max\{\Lambda_n, \lambda_{n-1} + 1\}$ und $u_n := u_{\lambda_n}$. □

KAPITEL 6

Nichttriviale Homologiegruppen von zwei Niveaumengen

Sei $H = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, H_0 ein nichttrivialer abgeschlossener Unterraum von H mit $H_0 \neq H$ und für $\lambda \geq 1$ sei $H_\lambda = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda)$ ein Hilbertraum mit

(A_1) es ist $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\|u\|_\lambda \leq \|u\|_{\tilde\lambda}$ für $\lambda \leq \tilde\lambda$, $u \in H$,$\|\cdot\|_\lambda$, $\|\cdot\|$ sind äquivalent;

(A_2) für $u \in H_0, v \in H$, $\lambda \geq 1$ gilt $\langle u,v\rangle_\lambda = \langle u,v\rangle$;

(A_3) ist $\lambda_n \to \infty$ und $u_n \in H$, so dass $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt ist, dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in H_0$ mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in H.

Für $\lambda \geq 1$, $(u_n) \subseteq H$ und $u \in H$ ist

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } H \quad \Leftrightarrow \quad u_n \rightharpoonup u \text{ in } H_\lambda.$$

Sei $P : H \to H_0$ die orthogonale Projektion aus Kapitel 4.

Sei $k : H \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

(k_1) sei $k : H \to \mathbb{R}$ vollstetig (siehe Definition A.1) und stetig differenzierbar;

(k_2) sei $Dk : H \to H'$ vollstetig und stetig differenzierbar.

Nach Lemma A.4 ist $k|_{H_0}$ auch vollstetig. Sei $\lambda \geq 1$. Seien

$$\begin{aligned} J_\lambda : H \to \mathbb{R}, &\quad J_\lambda(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - k(u), \\ J_0 : H_0 \to \mathbb{R}, &\quad J_0(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2 - k|_{H_0}(u). \end{aligned}$$

Die Funktionale J_λ, $\lambda \geq 1$, und J_0 sind zweimal stetig differenzierbar. Wegen Voraussetzung (A_2) ist $J_\lambda|_{H_0} = J_0$ für alle $\lambda \geq 1$. Da die Funktionale k und $k|_{H_0}$ vollstetig sind, bilden J_λ und J_0 beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.

Für $\lambda \geq 1$ seien $K_\lambda := \nabla_\lambda k : H \to H$, wobei $\nabla_\lambda k$ aus Bemerkung A.8, und $\nabla_\lambda J_\lambda := Id_H - K_\lambda$. Sei $K_0 := \nabla(k|_{H_0})$. Da K_λ und K_0 vollstetig sind nach

Bemerkungen A.8 und 4.2, bilden $\nabla_\lambda J_\lambda$ und ∇J_0 beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.

Zudem setzen wir folgende Bedingungen voraus

(j_1) J_0 erfüllt die (PS)-Bedingung.

(j_2) J_λ, $\lambda \geq 1$, erfüllt die (PS)-Bedingung.

(j_3) Ist $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$, $c \in \mathbb{R}$ mit $J_{\lambda_n}(u_n) \to c$ und $\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0$, dann gibt es eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}$ und ein $u \in H_0$ mit $\|u_{n_k} - u\|_{\lambda_{n_k}} \to 0$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, reguläre Werte von J_0 mit $H_*(J_0^b, J_0^a) \neq 0$, dabei ist H_* die singuläre Homologie aus [8, Kapitel 3].

6.1 Existenz von kritischen Punkten von J_λ mit Niveau in $[a,b]$ für $\lambda \geq 1$ groß

Wir haben vorausgesetzt, dass $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, reguläre Werte von J_0 sind und es gelte $H_*(J_0^b, J_0^a) \ncong \{0\}$.

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass J_λ, $\lambda \geq 1$ groß, einen kritischen Punkt u_λ mit Niveau in $[a,b]$ hat.

Aus der Voraussetzung $H_*(J_0^b, J_0^a) \ncong \{0\}$ erhalten wir mit Satz 2.13 ein $K \subseteq J_0^b$ kompakt, so dass die Einbettung

$$i : (K, J_0^a \cap K) \hookrightarrow (J_0^b, J_0^a)$$

eine nichttriviale Abbildung i_* von $H_*(K, J_0^a \cap K)$ nach $H_*(J_0^b, J_0^a)$ induziert. Nach Satz 2.24 gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass die Einbettung

$$j : (J_0^b, J_0^a) \hookrightarrow (J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$$

einen Isomorphismus j_* von $H_*(J_0^b, J_0^a)$ nach $H_*(J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$ induziert. Nach Bemerkung 2.6 ist $j_* \circ i_* = (j \circ i)_*$. Damit induziert die Einbettung $j \circ i$ von $(K, J_0^a \cap K)$ nach $(J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$ eine nichttriviale Abbildung $(j \circ i)_*$ von $H_*(K, J_0^a \cap K)$ nach $H_*(J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$, d.h.

$$(j \circ i)_* \neq 0. \tag{6.1}$$

Nun betrachten wir zu $\lambda \geq 1$ den Fluß σ_λ zu $-\nabla_\lambda J_\lambda$. Nach [7][10.4.5 und 10.4.6] existiert dieser und nach [7][10.5.1] ist σ_λ stetig. Wir werden σ_λ, $\lambda \geq 1$ groß, verwenden, um zu zeigen, dass eine der folgenden Aussagen gilt

(a) J_λ hat einen kritischen Punkt u_λ mit Niveau in $[a,b]$.

(b) Es gibt eine Homotopie

$$\eta : (K, J_0^a \cap K) \times [0,1] \to (J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$$

mit

$$\eta(\cdot, 0) = j \circ i, \qquad \eta(u,1) \in J_0^a \; \forall u \in K$$
$$\eta(u,t) = u \; \forall u \in J_0^a \cap K, \; t \in [0,1].$$

Grundsätzlich ist für $\lambda \geq 1$, $u \in H$ und $t \in (T_\lambda^-(u), T_\lambda^+(u))$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) &= DJ_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) \left(\frac{d}{dt}\sigma_\lambda(u,t) \right) \\
&\overset{Bem4.2}{=} \langle \nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)), \frac{d}{dt}\sigma_\lambda(u,t) \rangle_\lambda \\
&= -\|\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t))\|_\lambda^2,
\end{aligned}$$

d.h. $J_\lambda(\sigma_\lambda(u,\cdot))$ ist monoton fallend.

Um die Gültigkeit der Aussagen (a) oder (b) zu zeigen, benötigen wir noch zwei Lemmata.

Lemma 6.1. *Ist $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von J_0, so gibt es ein $\Lambda \geq 1$ und ein $\varrho > 0$, so dass*

$$\inf_{u \in J_\lambda^{-1}([c-\varrho, c+\varrho])} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda > 0$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$. Insbesondere ist c ein regulärer Wert von J_λ für $\lambda \geq \Lambda$.

Beweis. Angenommen, es gibt $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \in H$ mit

$$J_{\lambda_n}(u_n) \in [c - \tfrac{1}{n}, c + \tfrac{1}{n}], \quad \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Nach Voraussetzung (j_3) gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) und $u \in H_0$ mit $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0$. Dann gilt

$$|\|u_n\|_{\lambda_n} - \|u\|| \overset{(A_2)}{=} |\|u_n\|_{\lambda_n} - \|u\|_{\lambda_n}| \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Weiter gilt $u_n \to u$ in H mit Voraussetzung (A_1). Damit ist $k(u_n) \to k(u)$ wegen der Vollstetigkeit von k und somit

$$c \leftarrow J_{\lambda_n}(u_n) = \tfrac{1}{2}\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - k(u_n) \to \tfrac{1}{2}\|u\|^2 - k(u) = J_0(u).$$

Es folgt $J_0(u) = c$ und nach Bemerkung 5.1 ist u ein kritischer Punkt von J_0. Das ist ein Widerspruch, da c regulärer Wert von J_0 ist. $\square$

Lemma 6.2. *Sei $R > 0$. Sei $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von J_0. Dann gibt es ein $\Lambda \geq 1$ mit*

$$\langle \nabla J_0(Pu), P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\rangle > 0$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$ und $Pu \in J_0^{-1}(\{c\})$.

Beweis. Da c ein regulärer Wert von J_0 ist, J_0 die (PS)-Bedingung erfüllt nach Voraussetzung (j_1) und $J_0^{-1}(\{c\})$ abgeschlossen ist, ist

$$\alpha := \inf_{u \in J_0^{-1}(\{c\})} \|\nabla J_0(u)\| > 0.$$

Sei

$$m := \sup_{u \in B_R(0)} \|\nabla J_0(u)\|.$$

Nach Lemma 4.4 gibt es $\Lambda \geq 1$ mit

$$\|K_\lambda(u) - K_0(Pu)\|_\lambda \leq \tfrac{\alpha^2}{2m}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$. Sei $\lambda \geq \Lambda$. Es ist für $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$

$$\begin{aligned} & \|\nabla J_0(Pu) - P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\| = \|Pu - K_0(Pu) - (Pu - PK_\lambda(u))\| \\ = \; & \|K_0(Pu) - PK_\lambda(u)\| \overset{(A_2)}{=} \|K_0(Pu) - PK_\lambda(u)\|_\lambda \\ = \; & \|P(K_0(Pu) - K_\lambda(u))\|_\lambda \leq \|K_0(Pu) - K_\lambda(u)\|_\lambda \leq \tfrac{\alpha^2}{2m}. \end{aligned}$$

Damit ist für $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$ und $Pu \in J_0^{-1}(\{c\})$

$$\begin{aligned} & \langle \nabla J_0(Pu), P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\rangle \\ = \; & \|\nabla J_0(Pu)\|^2 - \langle \nabla J_0(Pu), \nabla J_0(Pu) - P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\rangle \\ \geq \; & \|\nabla J_0(Pu)\|^2 - \|\nabla J_0(Pu)\| \cdot \|\nabla J_0(Pu) - P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\| \\ \geq \; & \alpha^2 - m \cdot \tfrac{\alpha^2}{2m} = \tfrac{\alpha^2}{2} > 0. \end{aligned}$$

da $\|Pu\| \overset{(A_2)}{=} \|Pu\|_\lambda \leq \|u\|_\lambda \leq R$. □

Nun zeigen wir, dass Aussage (a) oder (b) für ein $\Lambda \geq 1$ und alle $\lambda \geq \Lambda$ gilt.

Satz 6.3. *Es gibt ein $\Lambda \geq 1$, so dass (a) oder (b) für alle $\lambda \geq \Lambda$ gilt.*

Beweis. Sei $\tilde{K} := K \cap J_0^{-1}([a,b])$.

Nach Lemma 6.1 gibt es ein $\Lambda_1 \geq 1$ und ein $0 < \varrho < \epsilon$, so dass

$$\beta_\lambda := \inf_{u \in J_\lambda^{-1}([a-\varrho,a])} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda > 0 \tag{6.2}$$

für $\lambda \geq \Lambda_1$. Nach Lemma 5.4 gibt es ein $R > 0$ und ein $\Lambda_2 \geq \Lambda_1$ mit

$$\|\sigma_\lambda(u,t)\|_\lambda \leq R \tag{6.3}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda_2$, $u \in \tilde{K}$ und $t \in [0, T_\lambda^+(u))$ mit

$$\sigma_\lambda(u,t) \in J_\lambda^{-1}([a-\varrho, b]).$$

Nach Lemma 5.6 gibt es ein $\Lambda_3 \geq \Lambda_2$ mit

$$\frac{\varrho}{2} + J_\lambda(u) \geq J_0(Pu) \tag{6.4}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda_3$ und $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$. Nach Lemma 6.2 gibt es $\Lambda \geq \Lambda_3$ mit

$$\langle \nabla J_0(Pu), P\nabla_\lambda J_\lambda(u)\rangle > 0 \tag{6.5}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit

$$\|u\|_\lambda \leq R, \quad Pu \in J_0^{-1}(\{a\}).$$

<u>Schritt 1:</u> Ist $\lambda \geq \Lambda$, und hat J_λ keinen kritischen Punkt mit Niveau in $[a,b]$, dann gibt es ein $\beta > 0$ mit

$$\|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \geq \beta$$

für alle $u \in H$ mit

$$J_\lambda(u) \in [a-\varrho, b].$$

Sei $\lambda \geq \Lambda$, und hat J_λ keinen kritischen Punkt mit Niveau in $[a,b]$.

Da nach Voraussetzung (j_2) J_λ die (PS)-Bedingung erfüllt, $J_\lambda^{-1}([a,b])$ abgeschlossen ist und keinen kritischen Punkt enthält, ist nach Bemerkung 5.1

$$\beta_1 := \inf_{u \in J_\lambda^{-1}([a,b])} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda > 0.$$

Sei $\beta := \min\{\beta_1, \beta_\lambda\}$, β_λ aus (6.2). Dann ist

$$\|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda \geq \beta$$

für alle $u \in J_\lambda^{-1}([a-\varrho, b])$.

<u>Schritt 2:</u> Für $u \in \tilde{K}$,

$$t := \sup\{s' \in [0, T_\lambda^+(u)) \mid \forall s \in [0,s'] \; ist \; J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) \geq a\}$$

und $s \in [0,t)$ ist $\|\sigma_\lambda(u,s)\|_\lambda \leq R$ und $J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) \leq b+\epsilon$.

Sei $u \in \tilde{K}$ und

$$t := \sup\{s' \in [0, T_\lambda^+(u)) \mid \forall s \in [0,s'] \; ist \; J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) \geq a\}.$$

Sei

$$t' := \sup\{s' \in [0, T_\lambda^+(u)) \mid \forall s \in [0,s'] \; ist \; \|\sigma_\lambda(u,s))\|_\lambda \leq R\}.$$

Angenommen, $t' < t \leq T_\lambda^+(u)$. Da σ_λ und $\|\cdot\|_\lambda$ stetig sind, ist $\|\sigma_\lambda(u,t')\|_\lambda \leq R$. Damit ist

$$b \geq J_0(u) = J_\lambda(\sigma_\lambda(u,0)) \geq J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t')) \overset{(6.4)}{\geq} J_0(P\sigma_\lambda(u,t')) - \frac{\varrho}{2} \geq a - \frac{\varrho}{2}.$$

Also ist für $s \in (t',t)$ nahe t' auch

$$b \geq J_\lambda(\sigma_\lambda(u,s)) \geq a - \varrho.$$

Nach (6.3) ist also $\|\sigma_\lambda(u,s)\|_\lambda \leq R$ für $s \in (t',t)$ nahe t'. Das ist ein Widerspruch zur Definition von t'. Also ist $t \leq t'$. Somit ist für $s \in [0,t)$ $\|\sigma_\lambda(u,s)\|_\lambda \leq R$ und nach (6.4)

$$J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) \leq J_\lambda(\sigma_\lambda(u,s)) + \frac{\varrho}{2} \leq J_0(u) + \frac{\varrho}{2} \leq b + \frac{\varrho}{2} \leq b + \epsilon.$$

<u>Schritt 3:</u> Unter der Voraussetzung von Schritt 1, gibt es zu $u \in \tilde{K}$ ein $t \geq 0$ mit $J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = a$.

Sei $u \in \tilde{K}$. Angenommen, es ist $J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) \geq a$ für alle $t \in [0, T_\lambda^+(u))$. Dann ist nach Schritt 2

$$\|\sigma_\lambda(u,t)\|_\lambda \leq R, \quad \forall t \in [0, T_\lambda^+(u)).$$

Somit gilt für $t \in [0, T_\lambda^+(u))$ nach (6.4)

$$J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) \geq J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) - \frac{\varrho}{2} \geq a - \varrho.$$

Nach Lemma 2.15 ist $T_\lambda^+(u) = \infty$. Wegen

$$a - \varrho \leq J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) \leq J_\lambda(\sigma_\lambda(u,0)) = J_0(u) \leq b$$

für $t \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} a - \varrho \quad &\leq \quad J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t)) = J_0(u) + \int_0^t \frac{d}{dt} J_\lambda(\sigma_\lambda(u,s)) \, ds \\ &\overset{Schritt\ 1}{\leq} \quad J_0(u) - \beta^2 t \overset{t\to\infty}{\to} -\infty. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt die Existenz eines $t' > 0$ mit $J_0(P\sigma_\lambda(u,t')) < a$. Wegen

$$J_0(P\sigma_\lambda(u,0)) = J_0(Pu) = J_0(u) \geq a$$

gibt es ein $t < t'$ mit $J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = a$, da P, σ_λ und J_0 stetig sind.

Schritt 4: Unter den Voraussetzungen von Schritt 1 gibt es eine stetige Abbildung $T : \tilde{K} \to [0,\infty)$ mit

$$\begin{gathered} J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) \in (a, b+\epsilon] \quad \forall t \in [0, T(u)), \\ J_0(P\sigma_\lambda(u,T(u))) = a \end{gathered}$$

und $T|_{K\cap J_0^a} = 0$.

Sei $u \in \tilde{K}$. Nach Schritt 3 gibt es ein $t \in [0, T_\lambda^+(u))$ mit $J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = a$. Nach Schritt 2 ist $\|\sigma_\lambda(u,t)\|_\lambda \leq R$. Nach (6.5) ist damit

$$\langle \nabla J_0(P\sigma_\lambda(u,t)), P\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t))\rangle_\lambda > 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) &= \langle \nabla J_0(P\sigma_\lambda(u,t)), P\frac{d}{dt}\sigma_\lambda(u,t)\rangle \\ &= -\langle \nabla J_0(P\sigma_\lambda(u,t)), P\nabla_\lambda J_\lambda(\sigma_\lambda(u,t))\rangle < 0. \end{aligned}$$

Es folgt für $s > t$ nahe t

$$J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) < J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = a. \tag{6.6}$$

Somit ist $t \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$\begin{gathered} J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) \geq a \forall s \in [0,t] \\ J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = a \in J_0^a \end{gathered}$$

eindeutig. Damit folgt aber auch $J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) > a$ für $s \in [0,t)$. Weiter ist nach Schritt 2 für $s \in [0,t]$ auch $J_0(P\sigma_\lambda(u,s)) \leq b + \epsilon$.

Sei nun $T : K \to [0,\infty)$ definiert durch

$$\begin{gathered} J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) \in (a, b+\epsilon] \quad \forall t \in [0, T(u)), \\ J_0(P\sigma_\lambda(u,T(u))) = a. \end{gathered}$$

für $u \in \tilde{K}$ und $T(u) = 0$ für $u \in K \cap J_0^a$.

Sei $u \in K\backslash J_0^a$ und $(u_n) \in K$ mit $u_n \to u$ in K. Für $n \in \mathbb{N}$ groß ist $u_n \in K\backslash J_0^a$ wegen der Stetigkeit von J_0. Angenommen, $(T(u_n))$ ist unbeschränkt oder es ist $\limsup T(u_n) > T(u)$. Dann gibt es wie in (6.6) ein $t \in (T(u), T_\lambda^+(u))$ nahe $T(u)$ mit $T(u_n) \geq t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ groß. Dann ist

$$a = J_0(P\sigma_\lambda(u, T(u))) > J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = \lim J_0(P\sigma_\lambda(u_n, t)) \geq a.$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt $\limsup T(u_n) \leq T(u)$. Angenommen, es ist $\liminf T(u_n) < T(u)$. O.E. sei $T(u_n) \to \liminf T(u_n)$. Dann ist

$$a < J_0(P\sigma_\lambda(u, \lim T(u_n))) = \lim J_0(P\sigma_\lambda(u_n, T(u_n))) = a.$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt $T(u_n) \to T(u)$.

Sei nun $u \in K$ mit $J_0(u) = a$ und $(u_n) \in \tilde{K}$ mit $u_n \to u$ in K. Mit (6.6) ist für $t \in (0, T_\lambda^+(u))$ nahe 0 also

$$J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) < J_0(P\sigma_\lambda(u,0)) = J_0(u) = a.$$

Angenommen, es gibt $t \in (0, T_\lambda^+(u))$ nahe 0 mit o.E. $T(u_n) \geq t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ groß. Es folgt

$$a > J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) = \lim J_0(P\sigma_\lambda(u_n,t)) \geq a.$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt $T(u_n) \to 0 = T(u)$.

Sei nun $u \in K$ mit $J_0(u) = a$ und $(u_n) \in K \cap J_0^a$ mit $u_n \to u$ in K. Dann ist

$$T(u_n) = 0 \to 0 = T(u).$$

Sei nun $u \in K$ mit $J_0(u) < a$ und $(u_n) \in K$ mit $u_n \to u$ in K. Dann ist $J_0(u_n) < a$ für $n \in \mathbb{N}$ groß und somit

$$T(u_n) = 0 \to 0 = T(u).$$

Insgesamt ist T stetig.

Schritt 5: Gilt (a) nicht, so gilt (b), d.h. es gibt eine Homotopie

$$\eta : (K, J_0^a \cap K) \times [0,1] \to (J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$$

mit

$$\eta(\cdot, 0) = j \circ i, \qquad \eta(u,1) \in J_0^a \; \forall u \in K$$
$$\eta(u,t) = u \; \forall u \in J_0^a \cap K, \; t \in [0,1].$$

Gilt (a) nicht, dann gelten die Voraussetzungen aus Schritt 1. Nach Schritt 4 gibt es eine stetige Abbildung $T : K \to [0,\infty)$ mit

$$J_0(P\sigma_\lambda(u,t)) \in (a, b+\epsilon] \quad \forall t \in [0, T(u)),$$
$$J_0(P\sigma_\lambda(u, T(u))) = a$$

für $u \in \tilde{K}$ und $T|_{K \cap J_0^a} = 0$.

Sei $\eta : (K, J_0^a \cap K) \times [0,1] \to (J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$ definiert durch

$$\eta(u,t) := P\sigma_\lambda(u, tT(u)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \eta(u,0) &= P\sigma_\lambda(u,0) = u = (j \circ i)(u) && \forall u \in K, \\ J_0(\eta(u,1)) &= J_0(P\sigma_\lambda(u, T(u))) \leq a && \forall u \in K, \\ \eta(u,t) &= P\sigma_\lambda(u,0) = u && \forall u \in J_0^a \cap K,\ t \in [0,1]. \end{aligned}$$

□

Der Beweis, dass Aussage (b) nicht gelten kann für $\lambda \geq 1$ groß, ist jetzt nur noch eine Kleinigkeit.

Satz 6.4. *Es gibt $\Lambda \geq 1$, so dass J_λ, $\lambda \geq \Lambda$, einen kritischen Punkt mit Niveau in $[a,b]$ hat.*

Beweis. Nach Satz 6.3 gibt es ein $\Lambda \geq 1$, so dass für $\lambda \geq \Lambda$ (a) oder (b) gilt. Sei $\lambda \geq \Lambda$. Angenommen, (a) gilt nicht, d.h. J_λ hat keinen kritischen Punkt mit Niveau in $[a,b]$. Dann gilt (b), d.h. es gibt eine Homotopie

$$\eta : (K, J_0^a \cap K) \times [0,1] \to (J_0^{b+\epsilon}, J_0^a)$$

mit

$$\eta(\cdot, 0) = j \circ i, \qquad \eta(u,1) \in J_0^a \ \forall u \in K$$
$$\eta(u,t) = u \ \forall u \in J_0^a \cap K,\ t \in [0,1].$$

Sei

$$r : (K, J_0^a \cap K) \to (J_0^a, J_0^a), \quad r(u) := \eta(u,1).$$

Die Abbildung r induziert eine Abbildung r_* von $H_*(K, J_0^a \cap K)$ nach $H*(J_0^a, J_0^a)$. Nach Satz 2.7 ist $H_*(J_0^a, J_0^a) \cong \{0\}$. Damit ist $r_* = 0$. Sei

$$e : (J_0^a, J_0^a) \hookrightarrow (J_0^{b+\epsilon}, J_0^a).$$

Weiter gilt mit Bemerkung 2.6

$$0 \overset{(6.1)}{\neq} (j \circ i)_* = \eta(\cdot, 0)_* = \eta(\cdot, 1)_* = (e \circ r)_* = e_* \circ r_* = 0.$$

Das ist ein Widerspruch, es folgt, dass Aussage (a) gilt.

$$
\begin{tikzcd}
 & H_*(J_0^b, J_0^a) \arrow[dr, "j_*"] & \\
H_*(K, J_0^a \cap K) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[rr, "(j\circ i)_* = \eta(\cdot,0)_*", "= \eta(\cdot,1)_* = (e\circ r)_*"'] \arrow[dr, "r_*"'] & & H_*(J_0^{b+\epsilon}, J_0^a) \\
 & H_*(J_0^a, J_0^a) \cong \{0\} \arrow[ur, "e_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

KAPITEL 7

Anwendung

Im Abschnitt 7.2 konstruieren wir Räume H, H_λ, $\lambda \geq 1$, und H_0 und zeigen, dass diese die Voraussetzungen (A_1) bis (A_3) aus den Kapiteln 3 bis 6 erfüllen.

Dazu verwenden wir folgende Bedingungen an das Potenzial $V_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $V_\lambda(x) = a_0(x) + \lambda a(x)$, $\lambda \geq 1$,

(V_1) $a_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(V_2) $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $a(x) \geq 0$ und es gibt eine kompakte Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{R}^N$ mit nichtleerem Inneren $\Omega :=\text{int } Z$, so dass $a(x) = 0$ ist für $x \in Z$ und $a(x) > 0$ f.ü. in $\mathbb{R}^N \backslash Z$ und ist $\partial\Omega$ lokal Lipschitz-stetiges Gebiet;

(V_{3a}) es gibt $M > 0$ und $r > 0$ mit

$$\mu(\{x \in W_r(y) | a(x) < M\}) \to 0, \quad |y| \to \infty.$$

Im Abschnitt 7.3 konstruieren wir das Funktional k und zeigen, dass dieses die Voraussetzungen (k_1) und (k_2) aus den Kapiteln 3, 4, 5 und 6 erfüllt.

Mit der Voraussetzung an die nichtlineare Funktion f

(f_1) f ist eine Carathéodory-Funktion und es gibt Konstanten $c > 0$ und $2 < p < 2^*$ mit

$$|f(x,t)| \leq c(|t| + |t|^{p-1}) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \text{ f.ü. } x \in \mathbb{R}^N;$$

erhalten wir die stetige Differenzierbarkeit von k.

Mit den Bedingungen

(f_2) f ist eine Carathéodory-Funktion, $f(x,\cdot)$ ist stetig differenzierbar f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x,0) = 0$ f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$ und es gibt Konstanten $c > 0$ und $2 < p < 2^*$ mit

$$|f_t(x,t)| \leq c(1 + |t|^{p-2}) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \text{ f.ü. } x \in \mathbb{R}^N;$$

(f_3) es ist

$$\lim_{t \to 0} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^N} |f_t(x,t)| = 0;$$

werden wir sehen, dass k zweimal stetig differenzierbar ist. Hier folgt Bedingung (f_1) aus Bedingung (f_2).

Setzen wir zusätzlich zu (f_1) oder (f_2) die folgende Bedingung an V voraus,

(V_3) für jedes $M > 0$ und $r > 0$ gilt

$$\mu(\{x \in W_r(y) | a(x) < M\}) \to 0, \quad |y| \to \infty.$$

so werden wir die Vollstetigkeit von k und Dk erhalten.

Im letzten Abschnitt 7.4 werden wir sehen, dass unter den Bedingungen (f_2), (f_3), (V_1) bis (V_3) und der folgenden Bedingung

(f_4) es ist $f(x,t) = -f(x,-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und f.ü. in $\mathbb{R}^N$ und es gibt $r_0, c_0 > 0$, $q > 2$ mit $f(x, r_0) \geq c_0$ und

$$0 < (q-1)f(x,t)t \leq t^2 f_t(x,t).$$

für alle $t \neq 0$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$;

die Voraussetzungen (j_1) bis (j_3) aus den Kapiteln 5 und 6 erfüllt sind. Wir werden einige der Aussagen unter der schwächeren Voraussetzung (V_{3a}) statt (V_3) zeigen. Im nächsten Kapitel 8 werden wir sehen, dass wir unter der Voraussetzung (V_{3a}) statt (V_3) die gleichen Ergebnisse aus den Kapiteln 5 und 6 erhalten.

7.1 Eigenschaften von f, F

In diesem Abschnitt listen wir einige Eigenschaften der Funktionen f und F auf, dabei ist

$$F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\, ds.$$

Lemma 7.1. *Unter den Voraussetzungen (f_2) und (f_3) gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $A_\epsilon > 0$ mit*

$$|f_t(x,t)| \leq \epsilon + A_\epsilon |t|^{p-2}, \qquad |f(x,t)| \leq \epsilon|t| + A_\epsilon |t|^{p-1},$$
$$|F(x,t)| \leq \epsilon |t|^2 + A_\epsilon |t|^p,$$

für $t \in \mathbb{R}$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung (f_3) ein $\delta > 0$ mit

$$|f_t(x,t)| \le \epsilon$$

für alle $|t| \le \delta$ und f.ü. in $x \in \mathbb{R}^N$. Nun ist für $|t| \ge \delta$ und f.ü. in $x \in \mathbb{R}^N$

$$|f_t(x,t)| \le c(1 + |t|^{p-2}) \le c(\frac{|t|^{p-2}}{\delta^{p-2}} + |t|^{p-2}) \le c(\frac{1}{\delta^{p-2}} + 1)|t|^{p-2}.$$

Für $A_\epsilon := c(\frac{1}{\delta^{p-2}} + 1)$ ist

$$|f_t(x,t)| \le \epsilon + A_\epsilon |t|^{p-2}$$

für $t \in \mathbb{R}$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$. Damit ist für $t \in \mathbb{R}$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &= |f(x,0) + \int_0^t f_t(x,s)\, ds| \le |f(x,0)| + |\int_0^t |f_t(x,s)|\, ds| \\ &\overset{(f_2)}{=} |\int_0^t |f_t(x,s)|\, ds| \le \epsilon|t| + A_\epsilon |t|^{p-1}. \end{aligned}$$

Somit ist für $t \in \mathbb{R}$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$

$$|F(x,t)| \le |\int_0^t |f(x,s)|\, ds| \le \epsilon|t|^2 + A_\epsilon |t|^p.$$

$\square$

Lemma 7.2. *Unter den Voraussetzungen (f_2) und (f_4) ist*

$$0 < qF(x,t) \le f(x,t)t$$

für $t \neq 0$ und f.ü. in $x \in \mathbb{R}^N$.

Beweis. Sei zuerst $t > 0$. Wegen (f_4) ist $f(x,t) > 0$ für $t > 0$, f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$. Weiter ist $f(x,\cdot)$ stetig f.ü. in $x \in \mathbb{R}^N$ nach (f_1). Damit ist

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds > 0, \quad \forall t > 0, \text{f.ü. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Weiter ist für $t > 0$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
(q-1)F(x,t) &= \int_0^t (q-1)f(x,s)\,ds \overset{(f_4)}{\leq} \int_0^t f_t(x,s)s\,ds \\
&= f(x,s)s|_0^t - \int_0^t f(x,s)\,ds \\
&= f(x,t)t - F(x,t).
\end{aligned}$$

Ähnlich sieht man die Aussage für $t < 0$. □

Lemma 7.3. *Unter den Voraussetzungen (f_2) und (f_4) gibt es $c' > 0$ mit*

$$f(x,t)t \geq c'|t|^q$$

für $|t| \geq r_0$, wobei r_0 aus (f_4), und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$.

Beweis. Es gilt für $t \geq r_0$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{q-1}{t} \overset{(f_4)}{\leq} \frac{f_t(x,t)}{f(x,t)}$$

Damit gilt für $t \geq r_0$ und f.ü. in $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{t^{q-1}}{r_0^{q-1}}\right) &= (q-1)(\log(t) - \log(r_0)) = \int_{r_0}^t \frac{q-1}{s}\,ds \leq \int_{r_0}^t \frac{f_t(x,s)}{f(x,s)}\,ds \\
&= \log(f(x,t)) - \log(f(x,r_0)) = \log\left(\frac{f(x,t)}{f(x,r_0)}\right).
\end{aligned}$$

Somit ist für $t \geq r_0$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$

$$f(x,t) \geq f(x,r_0)\frac{t^{q-1}}{r_0^{q-1}} \overset{(f_4)}{\geq} c_0\frac{t^{q-1}}{r_0^{q-1}}.$$

Setze $c' := \frac{c_0}{r_0^{q-1}}$. Ähnlich sieht man die Aussage für $t \leq -r_0$. □

Lemma 7.4. *Unter den Voraussetzungen (f_2) und (f_4) gibt es $c', c'' > 0$ mit*

$$F(x,t) \geq c'|t|^q - c''$$

für $|t| \geq r_0$, wobei r_0 aus (f_4), und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$.

Beweis. Nach Lemma 7.3 gibt es $c''' > 0$ mit

$$f(x,t)t \geq c'''|t|^q$$

für $|t| \geq r_0$, wobei r_0 aus (f_4), und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$. Für $t \geq r_0$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds \overset{(f_4)}{\geq} \int_{r_0}^t f(x,s)\,ds \overset{Lem.7.3}{\geq} \int_{r_0}^t c''' s^{q-1}\,ds = c'''\tfrac{1}{q}t^q - c'''\tfrac{1}{q}r_0^q.$$

Setze $c' := \frac{c'''}{q}$ und $c'' := \frac{c'''}{q}r_0^q$. Ähnlich sieht man die Behauptung für $t \leq -r_0$. □

Lemma 7.5. *Sei $\alpha > 0$. Unter den Voraussetzungen (f_2) und (f_4) gibt es für $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$g(x,t) := f(x,t) + \alpha t,$$

wobei α aus Abschnitt 7.2, und $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x,t) := \int_0^t g(x,s)$, ein $r' > 0$ und ein $2 < \tilde{q} < q$ mit

$$0 < \tilde{q}G(x,t) \leq g(x,t)t$$

für $|t| \geq r'$ und f.ü. $\mathbb{R}^N$.

Beweis. Nach Lemma 7.2 ist für alle $t \neq 0$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$

$$0 < qF(x,t) \leq f(x,t)t \tag{7.1}$$

Es folgt für $t \neq 0$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$

$$G(x,t) = F(x,t) + \tfrac{\alpha}{2}t^2 > 0.$$

Nach Lemma 7.4 gibt es $c', c'' > 0$ mit

$$F(x,t) \geq c'|t|^q - c'' \tag{7.2}$$

für $|t| \geq r_0$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$, wobei r_0 aus (f_4). Sei $2 < \tilde{q} < q$. Für $|t| \geq r_0$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$ ist

$$\begin{aligned}
g(x,t)t &= f(x,t)t + \alpha t^2 \overset{(7.1)}{\geq} qF(x,t) + \alpha t^2 \\
&= \tilde{q}(F(x,t) + \frac{\alpha}{2}t^2) + (q-\tilde{q})F(x,t) - \alpha(\tfrac{\tilde{q}}{2} - 1)t^2 \\
&= \tilde{q}G(x,t) + (q-\tilde{q})F(x,t) - \alpha(\tfrac{\tilde{q}}{2} - 1)t^2 \\
&\overset{(7.2)}{\geq} \tilde{q}G(x,t) + (q-\tilde{q})c'|t|^q - (q-\tilde{q})c'' - \alpha(\tfrac{\tilde{q}}{2} - 1)t^2.
\end{aligned}$$

Für $|t| \geq r_1 := (\frac{2c''}{c'})^{\frac{1}{q}}$ ist

$$\frac{1}{2}(q-\tilde{q})c'|t|^q \geq (q-\tilde{q})c''$$

und für $|t| \geq r_2 := \left(\frac{2\alpha(\frac{\tilde{q}}{2}-1)}{c'(q-\tilde{q})}\right)^{\frac{1}{q-2}}$

$$\frac{1}{2}(q-\tilde{q})c'|t|^q \geq \alpha(\tfrac{\tilde{q}}{2}-1)t^2.$$

Es folgt für $r' := \max\{r_0, r_1, r_2\}$, $|t| \geq r'$, f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} g(x,t)t &\geq \tilde{q}G(x,t) + (q-\tilde{q})c'|t|^q - (q-\tilde{q})c'' - \alpha(\tfrac{\tilde{q}}{2}-1)t^2 \\ &\geq \tilde{q}G(x,t) + 0 = \tilde{q}G(x,t). \end{aligned}$$

□

7.2 Die Räume H, H_λ, $\lambda \geq 1$, und H_0

Sei E die Menge aller Funktionen in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ mit der Eigenschaft

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2\,dx < \infty.$$

E ist mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation aus $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ein Vektorraum, da für $u, v \in E$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)(\lambda u)^2\,dx &= \lambda^2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2\,dx < \infty, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)(u+v)^2 &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\cdot 2(u^2+v^2)\,dx \\ &= 2\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2\,dx + 2\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)v^2\,dx < \infty. \end{aligned}$$

Nun konstruieren wir ein Skalarprodukt auf E.

Nach (V_1) ist $\alpha_0 :=$ ess inf$a_0 \in \mathbb{R}$. Sei $\alpha := 1 - \min\{0, \alpha_0\}$. Für $\lambda \geq 1$ sei $V_\lambda^\alpha : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$V_\lambda^\alpha(x) := V_\lambda(x) + \alpha.$$

Es ist für $\lambda \geq 1$ und f.ü. in $\mathbb{R}^N$

$$V_\lambda^\alpha = a_0 + \alpha + \lambda a \overset{(V_2)}{\geq} a_0 + \alpha \geq \alpha_0 + \alpha \geq 1. \tag{7.3}$$

Für $\lambda \geq 1$ sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda : E \times E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle u, v \rangle_\lambda := \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^N} + V_\lambda^\alpha(x) uv) \; dx.$$

Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$, $\lambda \geq 1$, ist mit (V_1) wohldefiniert und symmetrisch. Weiter ist sie positiv definit, denn für $u \in E$ ist

$$\langle u, u \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_\lambda^\alpha(x) u^2 \right) \; dx \overset{(7.3)}{\geq} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) \, dx. \tag{7.4}$$

Wir werden nun zeigen, dass der normierte Raum $H := (E, \| \cdot \|)$ vollständig ist, wobei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda, \; \lambda = 1.$$

Sei $(u_n) \subseteq H$ eine Cauchyfolge in H. Nach (7.4) ist (u_n) auch eine Cauchyfolge in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Sei $u \in W^{1,2}(R^N)$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,2}(R^N)$. Nach Bemerkung 2.1 ist auch $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Wir werden zeigen, dass jede Teilfolge von (u_n) eine Teilfolge besitzt, die in H gegen u konvergiert. Damit folgt dann auch schon $u_n \to u$ in H.

Nach [10, Lemma A.1.] gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) mit $u_n \to u$ p.w. f.ü. in $\mathbb{R}^N$. Sei

$$\nu : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad \nu(x) := \sqrt{\max\{V_1^\alpha(x), 0\}}.$$

Es ist ν meßbar und damit auch νu_n meßbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(\nu u_n)^2 = V_1^\alpha u_n^2 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Somit ist (νu_n) eine Folge in $L^2(\mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nu u_n - \nu u_m)^2 \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} V_1^\alpha (u_n - u_m)^2 \; dx \leq \|u_n - u_m\|^2$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Damit ist (νu_n) eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Sei v der Grenzwert von (νu_n) in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Nach [10, Lemma A.1.] gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) mit $\nu u_n \to v$ p.w. f.ü. in $\mathbb{R}^N$. Wegen $u_n \to u$ p.w. f.ü. in $\mathbb{R}^n$ ist auch $\nu u_n \to \nu u$ p.w. f.ü. in $\mathbb{R}^N$. Es folgt $\nu u = v$ und

$$V_1^\alpha u^2 = (\nu u)^2 = v^2 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

D.h.

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2\,dx \overset{(7.3)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N} V_1^\alpha(x)u^2\,dx < \infty,$$

d.h. $u \in E$, und

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_1^\alpha(x)(u_n - u)^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} (v u_n - v)^2\,dx \to 0,$$

d.h. $u_n \to u$ in H. Damit ist H vollständig.

Also ist H ein Hilbertraum.

Als nächstes werden wir zeigen, dass die Normen $\|\cdot\|_\lambda$, $\lambda \geq 1$, und $\|\cdot\|$ äquivalent sind. Damit erhalten wir dann Hilberträume H_λ definiert durch $H_\lambda := (E, \langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda)$, $\lambda \geq 1$.

Für $\lambda \geq 1$ und $u \in H$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|u\|_\lambda \leq \|u\| \leq \|u\|_\lambda.$$

Weiter gilt für $\lambda, \tilde{\lambda} \in [1, \infty)$ mit $\lambda \leq \tilde{\lambda}$ und $u \in H$

$$\|u\|_\lambda \leq \|u\|_{\tilde{\lambda}}.$$

Also ist Bedingung (A_1) aus den Kapiteln 3 bis 6 erfüllt.

Für $u \in H_0^1(\Omega)$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2\,dx \overset{(V_2)}{=} 0.$$

Sei H_0 der Unterraum von H mit den Elementen aus dem Raum $H_0^1(\Omega)$. Mit (7.4) ist $\|u\| \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ für $u \in H_0$. Weiter ist für $u \in H_0$

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + (a_0(x) + \alpha)u^2)\,dx \\
&\overset{(V_1)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + (\text{ess sup} a_0 + \alpha)u^2)\,dx \\
&\overset{(7.3)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N} ((\text{ess inf} a_0 + \alpha)|\nabla u|^2 + (\text{ess sup} a_0 + \alpha)u^2)\,dx \\
&\leq (\text{ess sup} a_0 + \alpha) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx \\
&= (\text{ess sup} a_0 + \alpha)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Da $H_0^1(\Omega)$ vollständig ist und die Normen $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ und $\|\cdot\|\|_{H_0}$ äquivalent sind, ist H_0 auch vollständig und damit ein nichttrivialer abgeschlossener Unterraum von H. Es ist auch $H_0 \neq H$.

Sei $\lambda \geq 1$. Es ist für $u \in H_0$ $a \cdot u = 0$ und somit für $v \in H$

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_\lambda &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathbb{R}^N} + (a_0(x) + \alpha + \lambda a(x))uv\right)\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathbb{R}^N} + (a_0(x) + \alpha)uv\right)\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathbb{R}^N} + (a_0(x) + \alpha + a(x))uv\right)\, dx = \langle u, v\rangle
\end{aligned}$$

Damit gilt auch Bedingung (A_2) aus den Kapiteln 3 bis 6.

Zuletzt zeigen wir, dass Bedingung (A_3) aus den Kapiteln 3 bis 6 erfüllt ist. Sei $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$, so dass $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt ist. Wegen $\|u_n\| \leq \|u_n\|_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist (u_n) auch in H beschränkt. Also gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H. Wegen (7.4) ist die Einbettung $H \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ stetig und linear. Nach Bemerkung 2.2 ist auch $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Mit Voraussetzung (V_{3a}) wird in [4, Lemma 4.1] $u = 0$ f.ü. in $\mathbb{R}^N \setminus Z$ gezeigt. Aus der Einleitung des Artikels [4] ist bekannt, dass dann $u \in H_0^1(\Omega)$ ist, d.h. $u \in H_0$.

7.3 Der Operator k

Sei $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\, ds$. Wir zeigen, dass das Funktional

$$k : H \to \mathbb{R}, \quad k(u) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\, dx + \frac{\alpha}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^2\, dx$$

stetig differenzierbar ist, falls (f_1) gilt, und zweimal stetig differenzierbar ist, falls (f_2) und (f_3) gelten.

Die Konstante α ist aus Abschnitt 7.2.

Auf dem Raum $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(R^N)$ benutzen wir die Norm

$$\|u\|_{2\wedge p} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N),$$

auf $L^2(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{p}{p-1}}(R^N)$ die Norm

$$\|u\|_{2\vee\frac{p}{p-1}} = \inf\{\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|w\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)} | v \in L^2(\mathbb{R}^N), w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N),$$
$$u = v + w\},$$

und auf $L^\infty(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{p}{p-2}}(R^N)$ die Norm

$$\|u\|_{\infty\vee\frac{p}{p-2}} = \inf\{\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|w\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)} | v \in L^\infty(\mathbb{R}^N), w \in L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N),$$
$$u = v + w\}.$$

Proposition 7.6. *Gilt Voraussetzung (f_1), so ist*

$$I : L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(R^N) \to \mathbb{R}, \quad I(u) := \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u)\, dx$$

stetig differenzierbar mit

$$DI(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)v\, dx, \quad \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(R^N).$$

Beweis. Es ist $|F(x,t)| \leq c(|t|^2 + |t|^p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$ nach Voraussetzung (f_1). Weiter ist $F(\cdot, u)$ meßbar für $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ und damit integrierbar. Also ist I wohldefiniert. Ähnlich sieht man, dass $f(\cdot, u)v$ integrierbar ist für $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Wie im Beweis von [10, Proposition 1.12] sieht man, dass I Gateaux-differenzierbar ist mit

$$D_G I(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)v\, dx$$

für $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. In [10, Theorem A.4] wird unter der Voraussetzung (f_1) gezeigt, dass für $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ $f(\cdot, u) \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ und

$$L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(R^N) \to L^2(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{p}{p-1}}(R^N), \quad u \mapsto f(\cdot, u)$$

stetig ist. Sei $(u_n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ mit $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Seien $w_2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ und $w_p \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ mit

$$f(\cdot, u_n) - f(\cdot, u) = w_2 + w_p$$

Sei $v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& |\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)v\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v\,dx| \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n) - f(x,u)||v|\,dx \\
\le\ & \int\limits_{\mathbb{R}^N} (|w_2| + |w_p|)|v|\,dx \le \|w_2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|w_p\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
\le\ & (\|w_2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|w_p\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)})\|v\|_{2\wedge p}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
& |\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)v\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v\,dx| \\
\le\ & \inf\{(\|w_2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|w_p\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)})\|v\|_{2\wedge p} \mid \\
& w_2 \in L^2(\mathbb{R}^N), w_p \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N), f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u) = w_2 + w_p\}, \\
=\ & \|f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u)\|_{2\vee\frac{p}{p-1}}\|v\|_{2\wedge p}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
& \|D_G I(u_n) - D_G I(u)\|_{(L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N))'} \\
=\ & \sup_{v\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N), \|v\|_{2\wedge p}=1} |\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)v\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v\,dx| \\
\le\ & \sup_{v\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N), \|v\|_{2\wedge p}=1} \|f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u)\|_{2\vee\frac{p}{p-1}}\|v\|_{2\wedge p} \\
=\ & \|f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u)\|_{2\vee\frac{p}{p-1}} \to 0.
\end{aligned}$$

Somit ist I Gateaux-differenzierbar und $D_G I$ ist stetig. Damit ist I stetig differenzierbar. □

Lemma 7.7. *Mit den Voraussetzungen* (f_2) *und* (f_3) *ist* $f_t(\cdot,u)$ *in* $L^\infty(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)$ *für* $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *und der Operator*

$$L^p(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N), \quad u \mapsto f_t(\cdot,u)$$

ist stetig.

Beweis. Sei $(u_n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ mit $u_n \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Sei $\epsilon > 0$. Nach Lemma 7.1 gibt es ein $A_\epsilon > 0$ mit

$$|f_t(x,t)| \leq \frac{\epsilon}{8} + A_\epsilon |t|^{p-2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$. Sei $\delta_\epsilon := \left(\frac{\epsilon}{8A_\epsilon}\right)^{\frac{1}{p-2}}$. Sei $\psi \in C_c^\infty((-\delta_\epsilon, \delta_\epsilon))$ mit $0 \leq \psi \leq 1$ und $\psi|_{[-\frac{\delta_\epsilon}{2}, \frac{\delta_\epsilon}{2}]} = 1$. Seien

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad & g(x,t) &:= \psi(t) f_t(x,t) \\ h &: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad & h(x,t) &:= (1-\psi(t)) f_t(x,t). \end{aligned}$$

Dann ist für $t \in \mathbb{R}$, f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} |g(x,t)| &\leq \psi(t) \left(\frac{\epsilon}{8} + A_\epsilon |t|^{p-2}\right) \leq \frac{\epsilon}{8} + A_\epsilon \delta_\epsilon^{p-2} \leq \frac{\epsilon}{4}, \\ |h(x,t)| &\leq (1-\psi(t)) \left(\frac{\epsilon}{8} + A_\epsilon |t|^{p-2}\right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{8} \frac{2^{p-2}|t|^{p-2}}{\delta_\epsilon^{p-2}} + A_\epsilon |t|^{p-2} \leq c'_\epsilon |t|^{p-2}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

wobei $c'_\epsilon := \frac{\epsilon}{8} \frac{2^{p-2}}{\delta_\epsilon^{p-2}} + A_\epsilon$. Damit ist für $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$

$$f_t(\cdot, v) = g(\cdot, v) + h(\cdot, v) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N).$$

Nach [10, Theorem A.4] und (7.5) ist $h(\cdot, u_n) \to h(\cdot, u)$ in $L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)$, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ groß ist

$$\|h(\cdot, u_n) - h(\cdot, u)\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{7.6}$$

Somit gilt für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned} \|f_t(\cdot, u_n) - f_t(\cdot, u)\|_{\infty \vee \frac{p}{p-2}} &\leq \|g(\cdot, u_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|g(\cdot, u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + \|h(\cdot, u_n) - h(\cdot, u)\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)} \\ &\overset{(7.5),(7.6)}{\leq} \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Proposition 7.8. *Gelten die Voraussetzungen (f_2) und (f_3), so ist*

$$I : L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}, \quad I(u) := \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\, dx$$

zweimal stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} DI(u)(v) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v\,dx, \\ D^2I(u)(v,w) &= D(DI)(u)(v)(w) = \int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u)vw\,dx, \end{aligned}$$

für alle $u, v, w \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(R^N)$.

Beweis. Damit ist I stetig differenzierbar nach Proposition 7.6 mit

$$DI(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v\,dx$$

für $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Ähnlich wie im Beweis von Proposition 7.6 sieht man, dass $f_t(\cdot,u)vw$ integrierbar ist für $u, v, w \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Wie im Beweis von [10, Proposition 1.12] sieht man, dass DI Gateaux-differenzierbar ist mit

$$D_G(DI)(u)(v)(w) = \int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u)vw\,dx$$

für $u, v, w \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Mit den Voraussetzungen (f_2) und (f_3) wird in Lemma 7.7 gezeigt, dass $f_t(\cdot,u) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)$ ist für $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ und der Operator

$$L^p(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N), \quad u \mapsto f_t(\cdot,u)$$

stetig ist. Sei $(u_n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ mit $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Seien $w_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $w_p \in L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)$ mit

$$f_t(\cdot,u_n) - f_t(\cdot,u) = w_\infty + w_p$$

Dann ist für $v, w \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} & |\int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u_n)vw\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u)vw\,dx| \\ \leq \; & \int_{\mathbb{R}^N} |f_t(x,u_n) - f_t(x,u)||vw|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|w_\infty| + |w_p|)|vw|\,dx \\ \leq \; & \|w_\infty\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|w_p\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ \leq \; & \|w_\infty\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{2\wedge p} \|w\|_{2\wedge p} + \|w_p\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{2\wedge p} \|w\|_{2\wedge p} \\ = \; & (\|w_\infty\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|w_p\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)}) \|v\|_{2\wedge p} \|w\|_{2\wedge p}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
& |\int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u_n)vw\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u)vw\,dx| \\
\leq\ & \inf\{(\|w_\infty\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|w_p\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N)})\|v\|_{2\wedge p}\|w\|_{2\wedge p} \mid \\
& w_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N), w_p \in L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^N), f_t(\cdot,u_n) - f_t(\cdot,u) = w_\infty + w_p\} \\
=\ & \|f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u)\|_{\infty\vee\frac{p}{p-2}}\|v\|_{2\wedge p}\|w\|_{2\wedge p}.
\end{aligned}
$$

Es folgt für $v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$

$$
\begin{aligned}
& \|D_G(DI)(u_n)(v) - D_G(DI)(u)(v)\|_{(L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N))'} \\
=\ & \sup_{w\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N), \|w\|_{2\wedge p}=1} |D_G(DI)(u_n)(v)(w) - D_G(DI)(u)(v)(w)| \\
=\ & \sup_{w\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N), \|w\|_{2\wedge p}=1} |\int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u_n)vw\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u)vw\,dx| \\
\leq\ & \sup_{w\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N), \|w\|_{2\wedge p}=1} \|f_t(\cdot,u_n) - f_t(\cdot,u)\|_{\infty\vee\frac{p}{p-2}}\|v\|_{2\wedge p}\|w\|_{2\wedge p} \\
=\ & \|f_t(\cdot,u_n) - f_t(\cdot,u)\|_{\infty\vee\frac{p}{p-2}}\|v\|_{2\wedge p}.
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
& \|D_G(DI)(u_n) - D_G(DI)(u)\|_{L(L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N),(L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N))')} \\
=\ & \sup_{v\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N), \|v\|_{2\wedge p}=1} \|D_G(DI)(u_n)(v) - D_G(DI)(u)(v)\|_{(L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N))'} \\
\leq\ & \sup_{v\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N), \|v\|_{2\wedge p}=1} \|f_t(\cdot,u_n) - f_t(\cdot,u)\|_{\infty\vee\frac{p}{p-2}}\|v\|_{2\wedge p} \\
=\ & \|f_t(\cdot,u_n) - f_t(\cdot,u)\|_{\infty\vee\frac{p}{p-2}} \to 0
\end{aligned}
$$

□

Satz 7.9. *Unter der Voraussetzung (V_1), (V_2) gelten folgende Aussagen*

(1) gilt (f_1), so ist k stetig differenzierbar mit

$$Dk(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v\,dx + \alpha\int_{\mathbb{R}^N} uv\,dx,$$

für alle $u, v \in H$;

(2) *gelten* (f_2) *und* (f_3)*, so ist k zweimal stetig differenzierbar mit*

$$D^2k(u)(v,w) \quad = \quad D(Dk)(u)(v)(w) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u)vw\,dx + \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^N} vw\,dx.$$

für alle $u, v, w \in H$.

Beweis. Nach Abschnitt 7.2 ist die Einbettung

$$i : H \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

stetig. Nach Bemerkung 2.1 sind auch die folgenden Einbettungen stetig

$$i_1 : W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N), \quad i_2 : W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N).$$

Seien $k_F : H \to \mathbb{R}$ und $k_L : H \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$k_F := I \circ i_2 \circ i, \quad k_L = \frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \circ i_1 \circ i,$$

wobei I aus Proposition 7.6 bzw. 7.8 ist.

Da die Einbettungen i, i_1, i_2 stetig linear sind, sind sie zweimal stetig differenzierbar mit

$$\begin{gathered} Di = i, \quad Di_1 = i_1, \quad Di_2 = i_2, \\ D^2i(u)(v) = 0 \;\forall u, v \in H, \\ D^2i_1(u)(v) = 0, \quad D^2i_2(u)(v) = 0 \;\forall u, v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{gathered}$$

Weiter ist $\frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} D(\frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})(u)(v) &= \frac{\alpha}{2} \cdot 2\langle u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^N} uv\,dx, \\ D^2(\frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})(u)(v,w) &= D(D(\frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}))(u)(v)(w) = \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^N} vw\,dx. \end{aligned}$$

für alle $u, v, w \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Damit ist k_L zweimal stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} Dk_L(u)(v) &= D(\frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})((i_1 \circ i)u)(D(i_1 \circ i)(u)(v)) = \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^N} uv\,dx, \\ D^2k_L(u)(v,w) &= D(\frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})((i_1 \circ i)u)(D^2(i_1 \circ i)(u)(v,w)) \\ &\quad + D^2(\frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})((i_1 \circ i)u)(D(i_1 \circ i)(u)(w), D(i_1 \circ i)(u)(v)) \\ &= D^2(\frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})((i_1 \circ i)u)((i_1 \circ i)w, (i_1 \circ i)v) \\ &= \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^N} vw\,dx. \end{aligned}$$

für alle $u, v, w \in H$.

Gilt Voraussetzung (f_1), so ist I stetig differenzierbar mit

$$DI(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v\,dx,$$

für alle $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(R^N)$. Damit ist k_F stetig differenzierbar mit

$$Dk_F(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v\,dx,$$

für alle $u, v \in H$.

Gelten die Voraussetzung (f_2) und (f_3), so ist I zweimal stetig differenzierbar mit

$$D^2I(u)(v,w) = \int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u)vw\,dx,$$

für alle $u, v, w \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(R^N)$. Damit ist k_F zweimal stetig differenzierbar mit

$$D^2k_F(u)(v,w) = \int_{\mathbb{R}^N} f_t(x,u)vw\,dx,$$

für alle $u, v, w \in H$.

Mit $k = k_F + k_L$ folgen nun die Behauptungen. □

Satz 7.10. *Unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_3) und (f_1) sind k und Dk vollstetig.*

Beweis. Aus der Einleitung des Artikels [4] ist bekannt, dass aus der Voraussetzung (V_3) die Kompaktheit der Einbettungen

$$H \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad 2 \le q < 2^*,$$

folgt. Diese sind dann auch vollstetig, insbesondere ist die Einbettung

$$i_0 : H \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$$

vollstetig. Es folgt auch die Vollstetigkeit der Einbettung

$$i : H \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N).$$

Sei I aus Proposition 7.6. Wegen (f_1) ist I nach Proposition 7.6 und k nach Satz 7.9 stetig differenzierbar.

Wegen

$$k = I \circ i + \frac{\alpha}{2} \| \cdot \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \circ i_0,$$

ist nach Lemma A.3 k vollstetig.

Weiter gilt für $u \in H$

$$Dk(u) = (DI(iu)) \circ i + \alpha \langle i_0 u, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Sei $u \in H$ und $(u_n) \subseteq H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H. Dann gilt

$$\begin{gathered} iu_n \to iu \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N), \\ i_0 u_n \to i_0 u \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N). \end{gathered}$$

Somit gilt

$$(DI(iu_n)) \circ i \to (DI(iu)) \circ i$$

und nach dem Rieszschen Darstellungssatz [3][4.1]

$$\langle i_0 u_n, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to \langle i_0 u, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} Dk(u_n) &= (DI(iu_n)) \circ i + \alpha \langle i_0 u_n, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\to (DI(iu)) \circ i + \alpha \langle i_0 u, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= Dk(u). \end{aligned}$$

Damit ist Dk vollstetig. □

Satz 7.11. *Unter den Voraussetzungen (f_1), (V_1) und (V_2) sind $k|_{H_0}$ und $D(k|_{H_0})$ vollstetig.*

Beweis. Nach Bemerkung 2.1 sind die Einbettungen

$$i_q : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 2 \leq q < 2^*,$$

kompakt, also auch vollstetig. Es existieren die Einbettungen

$$j_q : L^q(\Omega) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall 2 \leq q < 2^*.$$

und sie sind stetig. In Abschnitt 7.2 haben wir gezeigt, dass die Einbettung

$$j : H_0 \to H_0^1(\Omega)$$

existiert und stetig ist. Nach Lemma A.3 sind also die Abbildungen $j_q \circ i_q \circ j$, $2 \leq q < 2^*$, vollstetig. Insbesondere ist

$$i_0 := j_2 \circ i_2 \circ j : H_0 \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$$

vollstetig. Es folgt auch die Vollstetigkeit der Abbildung

$$i : H_0 \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N).$$

Sei I aus Proposition 7.6. Wegen (f_1) ist I nach Proposition 7.6 und $k|_{H_0}$ nach Satz 7.9 stetig differenzierbar.

Wegen

$$k|_{H_0} = I \circ i + \frac{\alpha}{2} \| \cdot \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \circ i_0,$$

ist nach Lemma A.3 $k|_{H_0}$ vollstetig.

Weiter gilt für $u \in H_0$

$$D(k|_{H_0})(u) = (DI(iu)) \circ i + \alpha \langle i_0 u, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Sei $u \in H_0$ und $(u_n) \subseteq H_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H_0. Dann gilt

$$\begin{aligned} iu_n &\to iu \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N), \\ i_0 u_n &\to i_0 u \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$(DI(iu_n)) \circ i \to (DI(iu)) \circ i$$

und nach dem Rieszschen Darstellungssatz [3][4.1]

$$\langle i_0 u_n, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to \langle i_0 u, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} D(k|_{H_0})(u_n) &= (DI(iu_n)) \circ i + \alpha \langle i_0 u_n, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\to (DI(iu)) \circ i + \alpha \langle i_0 u, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= D(k|_{H_0})(u). \end{aligned}$$

Damit ist $D(k|_{H_0})$ vollstetig. □

7.4 Palais-Smale-Bedingung

Für $\lambda \geq 1$ seien wie in den Kapiteln 3 bis 6

$$J_\lambda : H \to \mathbb{R}, \qquad J_\lambda(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - k(u),$$
$$J_0 : H_0 \to \mathbb{R}, \qquad J_0(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2 - k|_{H_0}(u).$$

In diesem Abschnitt setzen wir die Bedingungen (f_2) bis (f_4), (V_1), (V_2) und (V_{3a}) voraus. Wir zeigen zuerst, dass J_λ, $\lambda \geq 1$, die (PS)-Bedingung erfüllt, falls zusätzlich (V_3) gilt. Danach zeigen wir, dass auch J_0 die (PS)-Bedingung erfüllt. Zum Schluss zeigen wir, dass die Bedingung (j_3) aus den Kapiteln 5 und 6 erfüllt ist.

7.4.1 Weitere Eigenschaften des Potentials V_λ, $\lambda \geq 1$

In diesem Abschnitt werden wir eine Eigenschaft des Potentials V_λ, $\lambda \geq 1$, festhalten, die wir aus der Voraussetzung (V_{3a}) erhalten. Diese Eigenschaft geht ausschliesslich in die (PS)-Eigenschaften von J_λ, $\lambda \geq 1$ groß, ein.

Lemma 7.12. *Gegeben sind die Voraussetzungen (V_1), (V_2) und (V_{3a}). Seien $M > 0$ und $r > 0$ aus Voraussetzung (V_{3a}). Sei*

$$D := \{x \in \mathbb{R}^N | a(x) < M\}$$

Dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $R > 0$ mit

$$\int_{D \cap W_r(y)} u^2 \, dx \leq \epsilon \int_{W_r(y)} (|\nabla u|^2 + V_\lambda^\alpha(x) u^2) \, dx$$

für alle $\lambda \geq 1$ und $u \in H$, $|y| \geq R$.

Die Beweisidee stammt aus einem Artikel von Thomas Bartsch, Alexander Pankov und Zhi-qiang Wang [4][Beweis von Proposition 2.4].

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Seien

$$1 < s < \frac{N}{N-2}, \quad s' := \frac{s}{s-1}.$$

Nach [2][5.4 Theorem] existiert die Einbettung

$$W^{1,2}(W_r(0)) \hookrightarrow L^{2s}(W_r(0))$$

und ist stetig. Sei C die Norm dieser Einbettung.

Sei $y \in \mathbb{R}^N$. Nach [2][6.2 Theorem] exitiert

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2s}(W_r(y)).$$

Damit existiert

$$H \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2s}(W_r(y)). \tag{7.7}$$

Da D meßbar ist, ist auch $D \cap W_r(y)$ meßbar für alle $y \in \mathbb{R}^N$ und somit die charakteristische Funktion

$$\chi_{D\cap W_r(y)} \in L^{s'}(W_r(y)). \tag{7.8}$$

Nach Voraussetzung (V_3) gibt es ein $R > 0$ mit

$$\mu(D \cap W_r(y)) = \mu(\{x \in W_r(y) | a(x) < M\}) < \frac{\epsilon^{s'}}{C^{2s'}}$$

für alle $|y| \geq R$.

Sei $|y| \geq R$ und $u \in H$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{D\cap W_r(y)} u^2\, dx &= \int\limits_{W_r(y)} \chi_{D\cap W_r(y)} \cdot u^2\, dx \\
&\overset{(7.7),(7.8)}{\leq} \left(\int\limits_{W_r(y)} \chi^{s'}_{D\cap W_r(y)}\, dx \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int\limits_{W_r(y)} (u^2)^s\, dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \mu(D \cap W_r(y))^{\frac{1}{s'}} \left(\int\limits_{W_r(y)} u^{2s}\, dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \frac{\epsilon}{C^2} \left(\int\limits_{W_r(y)} u^{2s}\, dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \frac{\epsilon}{C^2} \left(\int\limits_{W_r(0)} (u(x+y))^{2s}\, dx \right)^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\epsilon \int\limits_{W_r(y)} (|\nabla u|^2 + V_\lambda^\alpha(x) u^2)\, dx \overset{(7.3)}{\geq} \epsilon \int\limits_{W_r(y)} (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx$$

$$= \epsilon \int\limits_{W_r(0)} (|\nabla(u(x+y))|^2 + (u(x+y))^2)\, dx \geq \frac{\epsilon}{C^2} \left(\int\limits_{W_r(0)} (u(x+y))^{2s}\, dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Insgesamt ist

$$\int\limits_{D\cap W_r(y)} u^2\,dx \le \epsilon \int\limits_{W_r(y)} (|\nabla u|^2 + V_\lambda^\alpha(x)u^2)\,dx.$$

□

Lemma 7.13. *Gegeben sind die Voraussetzungen (V_1), (V_2) und (V_{3a}). Sei $M > 0$ aus Voraussetzung (V_{3a}). Sei*

$$D := \{x \in \mathbb{R}^N | a(x) < M\}.$$

Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $R > 0$ mit

$$\int\limits_{D\cap W_R(0)^c} u^2\,dx \le \epsilon \|u\|_\lambda^2$$

für alle $\lambda \ge 1$ und $u \in H$.

Die Beweisidee stammt aus einem Artikel von Thomas Bartsch, Alexander Pankov und Zhi-Qiang Wang [4][Beweis von Proposition 2.1].

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Sei $r > 0$ aus Voraussetzung (V_{3a}). Nach Lemma 7.12 gibt es ein $R' > 0$ mit

$$\int\limits_{D\cap W_r(y)} u^2\,dx \le \epsilon \int\limits_{W_r(y)} (|\nabla u|^2 + V_\lambda^\alpha(x)u^2)\,dx \tag{7.9}$$

für alle $u \in H$ und $|y| \ge R'$. Sei $j \in \mathbb{N}$ mit $j \ge \frac{R'}{r}$ und $R := jr$. Sei $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ mit

$$\mu(W_r(x_n) \cap W_r(x_m)) = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m,$$
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_r(x_n) = \overline{W_R(0)^c}.$$

Dann ist für $u \in H$

$$\epsilon \int\limits_{W_R(0)^c} (|\nabla u|^2 + V_\lambda^\alpha(x)u^2)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon \int\limits_{W_r(x_n)} (|\nabla u|^2 + V_\lambda^\alpha(x)u^2)\,dx$$

$$\overset{(7.9)}{\ge} \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{D\cap W_r(x_n)} u^2\,dx = \int\limits_{D\cap W_R(0)^c} u^2\,dx.$$

Es folgt

$$\int\limits_{D\cap W_R(0)^c} u^2\,dx \le \epsilon \|u\|_\lambda^2.$$

□

7.4.2 (PS)-Bedingung von J_0, J_λ, $\lambda \geq 1$ und weitere (PS)- Eigenschaften

Im Abschnitt 7.3 Satz 7.9 haben wir gezeigt, dass J_λ, $\lambda \geq 1$, stetig differenzierbar ist mit

$$DJ_\lambda(u)(v) \quad = \quad \langle u, v\rangle_\lambda - \int\limits_{\mathbb{R}^N} (f(x,u)v + \alpha uv)\, dx,$$

für alle $u, v \in H$. Daraus folgt auch, dass $J_0 = J_\lambda|_{H_0}$ stetig differenzierbar ist mit

$$DJ_0(u)(v) \quad = \quad \langle u, v\rangle - \int\limits_{\mathbb{R}^N} (f(x,u)v + \alpha uv)\, dx,$$

für alle $u, v \in H_0$. Dann ist wegen (A_2) $J_\lambda|_{H_0} = J_0$ für alle $\lambda \geq 1$.

Proposition 7.14. *Es gibt ein $\Lambda \geq 1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $c \in \mathbb{R}$ jede $(PS)_c$-Folge von J_λ beschränkt ist.*
Gilt sogar (V_3), dann gilt die Aussage für alle $\lambda \geq 1$.

Beweis. Seien α und α_0 aus dem Abschnitt 7.2.

Gilt (V_3), dann sei $M > 0$ mit

$$M \geq \alpha - \alpha_0$$

und $\lambda \geq 1$. Gilt (V_3) nicht, dann sei $M > 0$ aus Voraussetzung (V_{3a}) und $\Lambda \geq 1$ mit

$$\Lambda M \geq \alpha - \alpha_0$$

und $\lambda \geq \Lambda$. In jedem Fall gilt

$$\lambda M \geq \alpha - \alpha_0. \tag{7.10}$$

Sei

$$D_1 := \{x \in \mathbb{R}^N | a(x) < M\}.$$

Nach Lemma 7.13 gibt es $R > 0$ mit

$$\int\limits_{D_1 \cap W_R(0)^c} u^2\, dx \leq \frac{1}{4\alpha} \|u\|_\lambda^2 \tag{7.11}$$

für alle $u \in H$ und $\lambda \geq 1$. Sei q aus (f_4). Nach Lemma 7.5 gibt es $r > 0$ und $q > \tilde{q} > 2$ mit

$$0 < \tilde{q}G(x,t) \leq g(x,t)t \tag{7.12}$$

für $|t| \geq r$ und f.ü. $\mathbb{R}^N$.

Seien $c \in \mathbb{R}$ und $(u_n) \in H$ eine $(\mathrm{PS})_c$-Folge von J_λ mit

$$J_\lambda(u_n) \to c, \quad DJ_\lambda(u_n) \to 0.$$

Es ist für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned} c + 1 + \tfrac{1}{\tilde{q}}\|u_n\|_\lambda \geq & J_\lambda(u_n) - \tfrac{1}{\tilde{q}} DJ_\lambda(u_n)(u_n) \\ = & (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|_\lambda^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\, dx. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Seien für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} D_2^n &:= \{x \in \mathbb{R}^N \mid a(x) < M,\ |u_n(x)| < r\} \cap W_R(0) \\ D_3^n &:= \{x \in \mathbb{R}^N \mid |u_n(x)| \geq r,\ a(x) \geq M\} \\ &\quad \cup \{x \in \mathbb{R}^N \mid a(x) < M,\ |u_n(x)| \geq r,\ x \in W_R(0)\} \\ D_4^n &:= \{x \in \mathbb{R}^N \mid |u_n(x)| < r,\ a(x) \geq M\}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\int\limits_{D_3^n} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\, dx \overset{(7.12)}{\geq} 0. \tag{7.14}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \int\limits_{D_1 \cap W_R(0)^c} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\, dx \\ = & \int\limits_{D_1 \cap W_R(0)^c} (\tfrac{1}{\tilde{q}}(f(x,u_n)u_n + \alpha u_n^2) - F(x,u_n) - \tfrac{\alpha}{2}u_n^2)\, dx \\ \overset{\tilde{q}<q}{\geq} & \int\limits_{D_1 \cap W_R(0)^c} (\tfrac{1}{q} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) - \alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})u_n^2)\, dx \\ \overset{Lem.(7.2)}{\geq} & -\alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}}) \int\limits_{D_1 \cap W_R(0)^c} u_n^2\, dx \\ \overset{(7.11)}{\geq} & -\frac{1}{4}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|_\lambda^2. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Ähnlich sieht man für $i = 2, 4$.

$$\int\limits_{D_i^n} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x, u_n)u_n - G(x, u_n))\, dx \geq -\alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}}) \int\limits_{D_i^n} u_n^2\, dx.$$

Es ist weiter

$$\int\limits_{D_2^n} u_n^2\, dx \leq r^2 \mu(D_2^n) \leq r^2 2^N R^N. \tag{7.16}$$

Mit (7.14) bis (7.16) ist

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x, u_n)u_n - G(x, u_n))\, dx \\ &\geq -\frac{1}{4}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|_\lambda^2 - \alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}}) \int\limits_{D_4^n} u_n^2\, dx - \alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}}) r^2 2^N R^N \end{aligned} \tag{7.17}$$

Für $x \in D_4^n$ ist $a(x) \geq M$ und damit

$$\begin{aligned} V_\lambda^\alpha(x) &= a_0(x) + \alpha + \lambda a(x) \geq \alpha_0 + \alpha + \lambda M \\ &\overset{(7.10)}{\geq} \alpha_0 + \alpha + \alpha - \alpha_0 = 2\alpha. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \alpha \int\limits_{D_4^n} u_n^2\, dx &\leq \frac{1}{2} \int\limits_{D_4^n} V_\lambda^\alpha(x) u_n^2\, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int\limits_{D_4^n} (|\nabla u_n|^2 + V_\lambda^\alpha(x) u_n^2)\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Es ist für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned}
c + 1 + \tfrac{1}{\tilde{q}}\|u_n\|_\lambda &\overset{(7.13)}{\geq} (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|_\lambda^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x, u_n)u_n - G(x, u_n))\, dx \\
&\overset{(7.17)}{\geq} (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})(\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{4}\|u_n\|_\lambda^2 - \alpha \int\limits_{D_4^n} u_n^2\, dx - \alpha r^2 2^N R^N) \\
&= (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})(\frac{3}{4}\|u_n\|_\lambda^2 - \alpha \int\limits_{D_4^n} u_n^2\, dx - \alpha r^2 2^N R^N) \\
&\overset{(7.18)}{\geq} (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})(\frac{1}{4}\|u_n\|_\lambda^2 - \alpha r^2 2^N R^N) \\
&= \frac{1}{4}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|_\lambda^2 - \alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})r^2 2^N R^N.
\end{aligned}$$

Damit ist $(\|u_n\|_\lambda)$ beschränkt. Damit ist aber auch (u_n) beschränkt in H nach (A_1). □

Bemerkung 7.15. Im Beweis von Proposition 7.14 haben wir gezeigt, dass es ein $\Lambda \geq 1$ gibt, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$, $c \in \mathbb{R}$ $(u_n) \subseteq H$ eine (PS)$_c$-Folge von J_λ und $n \in \mathbb{N}$ groß gilt

$$\begin{aligned}
& J_\lambda(u_n) - \tfrac{1}{\tilde{q}} DJ_\lambda(u_n)(u_n) \\
= \;& (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|_\lambda^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x, u_n)u_n - G(x, u_n))\, dx \\
\geq \;& \frac{1}{4}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|_\lambda^2 - \alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})r^2 2^N R^N
\end{aligned}$$

und somit

$$\limsup \|u_n\|_\lambda^2 \leq \frac{8\tilde{q}}{\tilde{q} - 2} \cdot c + r',$$

wobei $r' := 4\alpha r^2 2^N R^N$; die Konstanten $\tilde{q}$ und r' sind unabhängig von λ, c und (u_n).

Satz 7.16. *Unter der zusätzlichen Voraussetzung (V_3) erfüllt J_λ, $\lambda \geq 1$, die (PS)-Bedingung.*

Beweis. Sei $\lambda \geq 1$ und $c \in \mathbb{R}$. Sei $(u_n) \subseteq H$ eine (PS)$_c$-Folge von J_λ. Nach Proposition 7.14 ist (u_n) beschränkt in H. Somit gibt es eine Teilfolge o.E.

(u_n) und ein $u \in H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H. Nach Satz 7.10 ist Dk vollstetig, d.h. $Dk(u_n) \to Dk(u)$ in H'.

Wegen (A_1) ist $i : H \hookrightarrow H_\lambda$ isomorph. Nach dem Darstellungssatz von Riesz ist die Abbildung

$$j_1 : H_\lambda \to H'_\lambda, \quad v \mapsto \langle v, \cdot \rangle_\lambda,$$

isomorph. Weiter ist auch die Abbildung

$$j_2 : H' \to H'_\lambda, \quad L \mapsto L \circ i^{-1},$$

isomorph. Es gilt in H'

$$\begin{aligned} Dk(u) &\leftarrow DJ_\lambda(u_n) + Dk(u_n) = \langle iu_n, i\cdot \rangle_\lambda \\ &= j_2^{-1}(\langle iu_n, \cdot \rangle_\lambda) = (j_2^{-1} \circ j_1)(iu_n) \\ &= (j_2^{-1} \circ j_1 \circ i)u_n. \end{aligned}$$

Somit ist

$$u_n \to (j_2^{-1} \circ j_1 \circ i)^{-1}(Dk(u)) \quad \textit{in } H.$$

□

Satz 7.17. *J_0 erfüllt die (PS)-Bedingung.*

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}$. Sei $(u_n) \subseteq H_0$ eine $(\mathrm{PS})_c$-Folge von J_0.

Nach Lemma 7.5 gibt es $r > 0$ und $q > \tilde{q} > 2$ mit

$$0 < \tilde{q}G(x,t) \leq g(x,t)t \tag{7.19}$$

für $|t| \geq r$ und f.ü. $\mathbb{R}^N$. Für $n \in \mathbb{N}$ groß ist

$$\begin{aligned} c + 1 + \frac{1}{\tilde{q}}\|u_n\| &\geq J_0(u_n) - \frac{1}{\tilde{q}}DJ_0(u_n)(u_n) \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\tfrac{1}{\tilde{q}}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\, dx. \end{aligned}$$

Sei

$$D_n := \{x \in \mathbb{R}^N | |u_n(x)| \leq r\}.$$

Es ist

$$\int\limits_{D_n^c} (\frac{1}{\tilde{q}}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\, dx \overset{(7.19)}{\geq} 0. \tag{7.20}$$

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{D_n} (\frac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\, dx \\
&= \int\limits_{D_n} (\frac{1}{\tilde{q}}(f(x,u_n)u_n + \alpha u_n^2) - F(x,u_n) - \frac{\alpha}{2}u_n^2)\, dx \\
&\overset{\tilde{q}<q}{\geq} \int\limits_{D_n} (\frac{1}{q} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) - \alpha(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})u_n^2)\, dx \qquad (7.21)\\
&\overset{Lem.(7.2)}{\geq} -\alpha(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}) \int\limits_{D_n} u_n^2\, dx \geq -\alpha(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}) \int\limits_{\Omega} u_n^2\, dx \\
&\geq -\alpha(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}) r^2 \mu(\Omega) \overset{(V_2)}{>} -\infty.
\end{aligned}
$$

Sei $c' := -\alpha(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})r^2\mu(\Omega)$. Es folgt für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$
\begin{aligned}
c + 1 + \tfrac{1}{\tilde{q}}\|u_n\| \quad &\geq \quad (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\frac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\, dx \\
&\overset{(7.21),(7.20)}{\geq} \quad (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|^2 + c'.
\end{aligned}
$$

Also ist (u_n) beschränkt in H_0.

Es gibt eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H_0. Nach Satz 7.11 ist $D(k|_{H_0})$ vollstetig. Nach Satz A.5 ist $\nabla(k|_{H_0})$ vollstetig, d.h. $\nabla(k|_{H_0})(u_n) \to \nabla(k|_{H_0})(u)$ in H_0. Somit ist

$$u_n = \nabla J_0(u_n) + \nabla(k|_{H_0})(u_n) \to 0 + \nabla(k|_{H_0})(u) = \nabla(k|_{H_0})(u).$$

□

Wie in Bemerkung A.8 sieht man, dass es $\nabla_\lambda k : H \to H$, $\lambda \geq 1$, stetig gibt mit

$$Dk(u)(v) = \langle \nabla_\lambda k(u), v\rangle_\lambda \quad \forall u, v \in H.$$

Sei $\nabla_\lambda J_\lambda := Id_H - \nabla_\lambda k$. Dann ist $\nabla_\lambda J_\lambda$ stetig mit

$$DJ_\lambda(u)(v) = \langle \nabla_\lambda J_\lambda(u), v\rangle_\lambda \quad \forall u, v \in H. \qquad (7.22)$$

Proposition 7.18. *Ist $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$, $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$J_{\lambda_n}(u_n) \to c, \quad \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0,$$

dann ist $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt.

Beweis. Der Beweis ist sehr ähnlich zum Beweis von Proposition von 7.14.
Seien α und α_0 aus dem Abschnitt 7.2.
Seien $c \in \mathbb{R}$, $(u_n) \in H$ mit

$$J_{\lambda_n}(u_n) \to c, \quad \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Sei q aus (f_4). Nach Lemma 7.5 gibt es $r > 0$ und $q > \tilde{q} > 2$ mit

$$0 < \tilde{q} G(x,t) \leq g(x,t)t \tag{7.23}$$

für $|t| \geq r$ und f.ü. $\mathbb{R}^N$. Es ist für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned} c + 1 + \tfrac{1}{\tilde{q}}\|u_n\|_{\lambda_n} &\geq J_{\lambda_n}(u_n) - \tfrac{1}{\tilde{q}}\langle \nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n), u_n\rangle_{\lambda_n} \\ &= J_{\lambda_n}(u_n) - \tfrac{1}{\tilde{q}} DJ_{\lambda_n}(u_n)(u_n) \\ &= (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|^2_{\lambda_n} + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\, dx. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Sei M aus Voraussetzung (V_3) und

$$D_1 := \{x \in \mathbb{R}^N | a(x) < M\}.$$

Nach Lemma 7.13 gibt es $R > 0$ mit

$$\int\limits_{D_1 \cap W_R(0)^c} u^2\, dx \leq \frac{1}{4\alpha}\|u\|^2_\lambda \tag{7.25}$$

für alle $\lambda \geq 1$ und $u \in H$. Seien für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} D_2^n &:= \{x \in \mathbb{R}^N \mid a(x) < M,\ |u_n(x)| < r\} \cap W_R(0) \\ D_3^n &:= \{x \in \mathbb{R}^N \mid |u_n(x)| \geq r,\ a(x) \geq M\} \\ &\quad \cup \{x \in \mathbb{R}^N \mid a(x) < M,\ |u_n(x)| \geq r,\ x \in W_R(0)\} \\ D_4^n &:= \{x \in \mathbb{R}^N \mid |u_n(x)| < r,\ a(x) \geq M\}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\int_{D_3^n} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\,dx \overset{(7.12)}{\geq} 0. \tag{7.26}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{D_1 \cap W_R(0)^c} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\,dx \\
&= \int_{D_1 \cap W_R(0)^c} (\tfrac{1}{\tilde{q}}(f(x,u_n)u_n + \alpha u_n^2) - F(x,u_n) - \tfrac{\alpha}{2}u_n^2)\,dx \\
&\overset{\tilde{q}<q}{\geq} \int_{D_1 \cap W_R(0)^c} (\tfrac{1}{q} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) - \alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})u_n^2)\,dx \\
&\overset{Lem.(7.2)}{\geq} -\alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}}) \int_{D_1 \cap W_R(0)^c} u_n^2\,dx \\
&\overset{(7.25)}{\geq} -\frac{1}{4}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|_{\lambda_n}^2.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Ähnlich sieht man für $i = 2, 4$.

$$\int_{D_i^n} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\,dx \geq -\alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}}) \int_{D_i^n} u_n^2\,dx.$$

Es ist weiter

$$\int_{D_2^n} u_n^2\,dx \leq r^2 \mu(D_2^n) \leq r^2 2^N R^N. \tag{7.28}$$

Mit (7.26) bis (7.28) ist

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (\tfrac{1}{\tilde{q}} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\,dx \\
&\geq -\frac{1}{4}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}})\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}}) \int_{D_4^n} u_n^2\,dx - \alpha(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\tilde{q}}) r^2 2^N R^N
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Für $x \in D_4^n$ ist $a(x) \geq M$ und damit für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned}
V_{\lambda_n}^{\alpha}(x) &= a_0(x) + \alpha + \lambda_n a(x) \geq \alpha_0 + \alpha + \lambda_n M \\
&\geq 2\alpha.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\alpha \int\limits_{D_4^n} u_n^2\,dx &\leq \frac{1}{2}\int\limits_{D_4^n} V_{\lambda_n}^\alpha(x)u_n^2\,dx\\ &\leq \frac{1}{2}\int\limits_{D_4^n}(|\nabla u_n|^2 + V_{\lambda_n}^\alpha(x)u_n^2)\,dx \qquad (7.30)\\ &\leq \frac{1}{2}\|u_n\|_{\lambda_n}^2.\end{aligned}$$

Es ist für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned}c+1+\tfrac{1}{\bar{q}}\|u_n\|_{\lambda_n} &\overset{(7.24)}{\geq} (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\bar{q}})\|u_n\|_{\lambda_n}^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^N}(\tfrac{1}{\bar{q}}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))\,dx\\ &\overset{(7.29)}{\geq} (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\bar{q}})(\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \frac{1}{4}\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \alpha\int\limits_{D_4^n} u_n^2\,dx - \alpha r^2 2^N R^N)\\ &= (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\bar{q}})(\frac{3}{4}\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \alpha\int\limits_{D_4^n} u_n^2\,dx - \alpha r^2 2^N R^N)\\ &\overset{(7.30)}{\geq} (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\bar{q}})(\frac{1}{4}\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \alpha r^2 2^N R^N)\\ &= \frac{1}{4}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\bar{q}})\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \alpha(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\bar{q}})r^2 2^N R^N.\end{aligned}$$

Damit ist $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt. □

Satz 7.19. *Ist $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$, $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$J_{\lambda_n}(u_n) \to c, \quad \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0,$$

dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in H_0$ mit $\|u_{n_k} - u\|_{\lambda_{n_k}} \to 0$.

Beweis. Sei $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$, $c \in \mathbb{R}$ mit

$$J_{\lambda_n}(u_n) \to c, \quad \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0.$$

Nach Proposition 7.18 ist $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt. Nach (A_3) gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H.

Schritt 1: $Dk(u_n)(u_n) \to Dk(u)(u)$ und $Dk(u_n) \to Dk(u)$ in H'.

Es ist

$$H \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

stetig. Nach Bemerkung 2.1 existieren die Einbettungen

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq q \leq 2^*$$

und sind stetig. Somit existieren die Einbettungen

$$\begin{aligned} i_0 &: H \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \\ i_2 &: H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \\ i &: H \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

und sind stetig.

Nach [4][Lemma 4.2] ist

$$i_0 u_n \to i_0 u \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N), \quad i_2 u_n \to i_2 u \text{ in } L^p(\mathbb{R}^N)$$

und somit

$$iu_n \to iu \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$$

Sei I aus Proposition 7.6. Wegen (f_2) gilt auch (f_1) und I ist nach Proposition 7.6 und k nach Satz 7.9 stetig differenzierbar. Wegen

$$k = I \circ i + \frac{\alpha}{2} \|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \circ i_0,$$

ist für $v \in H$

$$Dk(v) = (DI(iv)) \circ i + \alpha \langle i_0 v, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Es folgt in H'

$$\begin{aligned} Dk(u_n) =& (DI(iu_n)) \circ i + \alpha \langle i_0 u_n, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ \to& (DI(iu)) \circ i + \alpha \langle i_0 u, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ =& Dk(u). \end{aligned} \tag{7.31}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} Dk(u)(u_n - u) =& (DI(iu))(iu_n - iu)) + \alpha \langle i_0 u, i_0 u_n - i_0 u) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ \to& 0. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Damit gilt mit (7.31) und (7.32)

$$\begin{aligned} & |Dk(u_n)(u_n) - Dk(u)(u)| \\ \leq\ & |Dk(u_n)(u_n) - Dk(u)(u_n)| + |Dk(u)(u_n) - Dk(u)(u)| \\ \leq\ & \|Dk(u_n) - Dk(u)\|_{H'} \|u_n\| + |Dk(u)(u_n - u)| \\ \to\ & 0. \end{aligned}$$

Schritt 2: $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0$.
Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow &\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \|u_n\|_{\lambda_n} \geq |\langle \nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n), u_n\rangle_{\lambda_n}| \\ \overset{(7.22)}{=} & |\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - Dk(u_n)(u_n)|. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow &\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \|u\| \overset{(A_2)}{=} \|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \|u\|_{\lambda_n} \\ \geq & |\langle \nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n), u\rangle_{\lambda_n}| \overset{(7.22)}{=} |\langle u_n, u\rangle_{\lambda_n} - Dk(u_n)(u)| \\ \overset{(A_2)}{=} & |\langle u_n, u\rangle - Dk(u_n)(u)|. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Wegen $u_n \rightharpoonup u$ in H ist

$$\langle u_n, u\rangle \to \|u\|^2$$

und nach Schritt 1 ist

$$Dk(u_n)(u) \to Dk(u)(u).$$

Es folgt

$$0 \overset{(7.34)}{\leftarrow} |\langle u_n, u\rangle - Dk(u_n)(u)| \to |\|u\|^2 - Dk(u)(u)|. \tag{7.35}$$

Es folgt mit Schritt 1, (7.33) und (7.35)

$$\begin{aligned} |\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \|u\|^2| \quad \leq \quad & |\|u_n\|_{\lambda_n}^2 - Dk(u_n)(u_n)| \\ & + |Dk(u_n)(u_n) - Dk(u)(u)| \\ & + |\|u\|^2 - Dk(u)(u)| \\ \to \quad & 0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \quad &= \quad \|u_n\|_{\lambda_n}^2 + \|u\|_{\lambda_n}^2 - 2\langle u_n, u\rangle_{\lambda_n} \\ &\overset{(A_2)}{=} \quad \|u_n\|_{\lambda_n}^2 + \|u\|^2 - 2\langle u_n, u\rangle \\ &\to \quad \|u\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, u\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

7.5 Lösungen von (P$_\lambda$) für $\lambda \geq 1$ groß in den Fällen (Min), (Deg) und (Krit)

Wir haben in den Abschnitten 7.2 und 7.3 die Variationsstruktur von (P$_\lambda$) und (P$_0$) gezeigt, falls (V_1), (V_2) und (f_1) gelten. In Abschnitt 7.2 haben wir gezeigt, dass unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_3) die Bedingungen (A_1) bis (A_3) erfüllt sind. In Abschnitt 7.3 haben wir gezeigt, dass unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_3) und (f_1) die Bedingung (k_1) erfüllt ist.

Falls wir ein striktes lokales Minimum $\bar{u}$ von J_0 haben, können wir Satz 3.2 anwenden. Wir erhalten dann ein δ_0, so dass für alle $0 < \delta < \delta_0$ ein $\Lambda_\delta \geq 1$ existiert, derart dass für alle $\lambda \geq \Lambda_\delta$ das Energiefunktional J_λ ein lokales Minimum u_λ besitzt mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$. Setzen wir für ein $r > 0$

$$0 \leq F(x,t) \leq \alpha' t^2 \text{ für alle } |t| \geq r,$$

wobei λ_1 das Inverse des ersten Eigenwerts der Abbildung $\triangle$ in $H_0^1(\Omega)$ ist und $\alpha' < \lambda_1 + \alpha_0$, voraus, so erhalten wir ein lokales Minimum $\bar{u}$ von J_0.

In Kapitel 7 Abschnitt 7.2 haben wir gezeigt, dass unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_3) und (f_2), (f_3) die Bedingungen (A_1) bis (A_3), (k_1) und (k_2) erfüllt sind. Damit können wir unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_3) und (f_2), (f_3) Satz 4.7 anwenden, falls wir einen nichtausgearteten kritischen Punkt $\bar{u}$ von J_0 haben. D.h. wir erhalten ein $\delta_0 > 0$, so dass zu $0 < \delta < \delta_0$ ein $\Lambda_\delta \geq 1$ gibt, derart dass für alle $\lambda \geq \Lambda_\delta$ das Funktional J_λ einen kritischen Punkt u_λ besitzt mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$. Wir erhalten hier sogar für $\lambda \geq \Lambda_\delta$

$$\deg(i \circ \nabla_\lambda J_\lambda \circ i^{-1}, U_\delta(\bar{u}), 0) = \deg(\nabla J_0, U_\delta(\bar{u}), 0),$$

wobei $i : H \hookrightarrow H_\lambda$ und $\nabla_\lambda J_\lambda : H \to H$ definiert durch $DJ_\lambda(u)(v) = \langle \nabla_\lambda J_\lambda(u), v\rangle_\lambda$ für alle $u, v \in H$. Ist ess inf$a_0 > -\lambda_1$ und gilt zusätzlich (f_4), so liefert das Mountain-pass-Theorem [10][Theorem 1.17] einen nichttrivialen kritischen Punkt $\bar{u}$. Ist $\bar{u}$ ein kritischer Punkt von J_0 und ausgeartet, so wählen wir $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\eta|_\Omega = 1$ und betrachten statt k das vollstetige Funktional

$$\tilde{k} : H \to \mathbb{R}, \quad \tilde{k}(u) = k(u) + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)(u - \bar{u})^2\, dx$$

für $\mu > 0$. Für $\mu > 0$ klein ist $\bar{u}$ ein nichtausgearteter kritischer Punkt von $\tilde{J}_0 = \tilde{J}_\lambda|_{H_0}$, wobei $\tilde{J}_\lambda := \frac{1}{2}\|\cdot\|_\lambda^2 - \tilde{k}$, $\lambda \geq 1$. Satz 4.7 läßt sich auf $\tilde{J}_0$, $\lambda \geq 1$ beliebig, und $\bar{u}$ anwenden.

Wir zeigten in Kapitel 7 Abschnitt 7.2, dass unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_3) und (f_2) bis (f_4) die Bedingungen (A_1) bis (A_3), (k_1), (k_2) und (j_1) bis (j_3) gelten. Damit können wir unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_3) und (f_2) bis (f_4) Satz 6.4 anwenden, falls wir einen isolierten kritischen Punkt $\bar{u}$ von J_0 haben mit nichttrivialen kritischen Gruppen $C_*(J_0, \bar{u})$. Dann erhalten wir ein $\delta_0 > 0$, so dass zu $0 < \delta < \delta_0$ ein $\Lambda_\delta \geq 1$ gibt, derart dass für alle $\lambda \geq \Lambda_\delta$ das Funktional J_λ einen kritischen Punkt u_λ besitzt mit $\|u_\lambda - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$.

Unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_3) und (f_2) bis (f_4) können wir Satz 6.4 anwenden, falls wir reguläre Werte $a, b \in R$ mit $a < b$ von J_0 mit nicht-trivialen Homologiegruppen $H_*(J_0^b, J_0^a)$ haben. Dann erhalten wir ein $\Lambda \geq 0$, derart dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ das Funktional J_λ einen kritischen Punkt u_λ mit Niveau in $[a, b]$ besitzt, d.h. $J_\lambda(u_\lambda) \in [a, b]$.

KAPITEL 8

Ein allgemeinerer Fall als in Kapitel 7

Wir haben in Kapitel 7 Räume H_λ, $\lambda \geq 1$, H_0 und Funktionale J_λ, $\lambda \geq 1$, J_0 konstruiert, die die Voraussetzungen aus den Kapiteln 5 und 6 erfüllen. In diesem Abschnitt werden wir die Bedingungen aus dem Kapitel 7 abschwächen, so dass die Operatoren k und Dk nicht mehr vollstetig sind. Wir werden zeigen, dass dann die wesentlichen Aussagen aus den Kapiteln 5 und 6 trotzdem richtig bleiben.

Wir setzen die Bedingungen (V_1), (V_2) und (V_{3a}) an das Potential aus Kapitel 7 und (f_2) bis (f_4) voraus. In Kapitel 7 Abschnitt 7.2 haben wir gezeigt, dass dann die Bedingung (A_1) bis (A_3) aus den Kapiteln 5 und 6 erfüllt sind. Weiter haben wir in Kapitel 7 Satz 7.17 und Satz 7.19 gezeigt, dass (j_1) und (j_3) aus den Kapiteln 5 und 6 gelten.

Folgende Bemerkung werden wir oft verwenden.

Bemerkung 8.1. Es ist

$$H \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

stetig. Nach Bemerkung 2.1 existieren die Einbettungen

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq q \leq 2^*$$

und sind stetig. Somit existieren die Einbettungen

$$\begin{aligned}
&i_2 : H \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)\\
&i_p : H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)\\
&i : H \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

und sind stetig.

Sei $\lambda_n \to \infty$ und $(u_n) \subseteq H$ mit $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt. Dann gibt es nach (A_3) eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H. Nach [4, Lemma 4.2.] ist

$$\begin{aligned}
&i_2 u_n \to i_2 u \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N),\\
&i_p u_n \to i_p u \text{ in } L^p(\mathbb{R}^N),\\
&i u_n \to i u \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Sei I aus Proposition 7.6. Nach Proposition 7.6 ist I und nach Satz 7.9 ist k zweimal stetig differenzierbar. Wegen

$$k = I \circ i + \frac{\alpha}{2} \| \cdot \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \circ i_2,$$

ist für $v \in H$

$$Dk(v) = (DI(iv)) \circ i + \alpha \langle i_2 v, i_2 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Es folgt

$$k(u_n) = I(iu_n) + \frac{\alpha}{2} \|i_2 u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to I(iu) + \frac{\alpha}{2} \|i_2 u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = k(u)$$

und in H'

$$\begin{aligned} Dk(u_n) &= (DI(iu_n)) \circ i + \alpha \langle i_0 u_n, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\to (DI(iu)) \circ i + \alpha \langle i_0 u, i_0 \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= Dk(u). \end{aligned}$$

8.1 (PS)-Eigenschaften für J_λ für $\lambda \geq 1$

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene (PS)-Eigenschaften von J_λ, $\lambda \geq 1$, auflisten.

Sei M aus Voraussetzung (V_{3a}) und α, α_0 aus Kapitel 7 Abschnitt 7.2.

Lemma 8.2. *Sei $(u_n) \subseteq H$, $u \in H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H. Dann gilt für alle $v \in H$*

$$Dk(u_n)(v) \to Dk(u)(v).$$

Beweis. Sei $(u_n) \subseteq H$, $u \in H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H.

Schritt 1: Für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ist $Dk(u_n)(\varphi) \to Dk(u)(\varphi)$.

Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sei $R > 0$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subseteq U_R(0)$. Nach Bemerkung 2.1 sind die Einbettungen

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(U_R(0)), \quad W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(U_R(0))$$

kompakt, also auch vollstetig und nach Lemma A.3 auch die Einbettungen

$$H \hookrightarrow L^2(U_R(0)), \quad H \hookrightarrow L^p(U_R(0)).$$

Damit gilt

$$u_n|_{U_R(0)} \to u|_{U_R(0)} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N), L^p(\mathbb{R}^N) \text{ und } L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N).$$

Es folgt nach Bemerkung 8.1

$$\begin{aligned} &\int\limits_{U_R(0)} (f(x,u_n)+\alpha u_n)\varphi\,dx = DI(u_n|_{U_R(0)})(\varphi)+\alpha\langle u_n|_{U_R(0)},\varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ \to\ & DI(u|_{U_R(0)})(\varphi)+\alpha\langle u|_{U_R(0)},\varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int\limits_{U_R(0)} (f(x,u)+\alpha u)\varphi\,dx. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} Dk(u_n)(\varphi) &= \int\limits_{U_R(0)} (f(x,u_n)+\alpha u_n)\varphi\,dx \\ &\to \int\limits_{U_R(0)} (f(x,u)+\alpha u)\varphi\,dx = Dk(u)(\varphi). \end{aligned}$$

Schritt 2: Für $v\in H$ ist $Dk(u_n)(v)\to Dk(u)(v)$.

Seien i_2 und i_p aus Bemerkung 8.1. Nach Bemerkung 2.1 existieren die Einbettungen

$$\begin{aligned} j_2 &: W^{1,2}(\mathbb{R}^N)\to L^2(\mathbb{R}^N) \\ j_p &: W^{1,2}(\mathbb{R}^N)\to L^p(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

und sind stetig. Seien c_2 die Norm von i_2, c_p von i_p, d_2 von j_2 und d_p von j_p.

Es gilt für $v,w\in H$

$$\begin{aligned} |Dk(w)(v)| &= |DI(w)(v)+\alpha wv| \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x,w)+\alpha w|\,|v|\,dx \\ &\overset{(f_2)}{\le} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (c+\alpha)(|w|+|w|^{p-1})|v|\,dx \\ &\le (c+\alpha)\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (c+\alpha)\|w\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\le (c+\alpha)(c_2d_2\|w\| + c_p^{p-1}d_p\|w\|^{p-1})\|v\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

Sei $v\in H$. Sei $\epsilon>0$. Sei $C>0$ mit $\|u_n\|\le C$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\|u\|\le C$. Sei $c' := (c+\alpha)(c_2d_2C + c_p^{p-1}d_pC^{p-1})$. Dann ist für $w\in H$

$$|Dk(u_n)(w)|\le c'\|w\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)},\quad |Dk(u)(w)|\le c'\|w\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)}. \tag{8.1}$$

Wegen $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ gibt es ein $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit

$$\|v-\varphi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\le \frac{\epsilon}{3c'}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}|Dk(u_n)(v) - Dk(u_n)(\varphi)| =&|Dk(u_n)(v-\varphi)| \overset{(8.1)}{\leq} c'\|v-\varphi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \\ \leq& c'\frac{\epsilon}{3c'} = \frac{\epsilon}{3}\,, \\ |Dk(u)(v) - Dk(u)(\varphi)| \leq& \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Nach Schritt 1 ist für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$|Dk(u_n)(\varphi) - Dk(u)(\varphi)| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{8.3}$$

Es folgt für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned}|Dk(u_n)(v) - Dk(u)(v)| \quad &\leq \quad |Dk(u_n)(v) - Dk(u_n)(\varphi)| \\ &\quad\quad +|Dk(u_n)(\varphi) - Dk(u)(\varphi)| \\ &\quad\quad +|Dk(u)(\varphi) - Dk(u)(v)| \\ &\overset{(8.2),(8.3)}{\leq} \quad \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

□

Lemma 8.3. *Es gibt ein $\Lambda \geq 1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ und alle $c \in \mathbb{R}$ jede (PS)$_c$-Folge $(u_n) \subseteq H$ von J_λ eine schwach konvergente Teilfolge besitzt und dieser Grenzwert ein kritischer Punkt von J_λ ist.*

Beweis. Sei $\Lambda \geq 1$ aus Proposition 7.14.

Sei $\lambda \geq \Lambda$, $c \in \mathbb{R}$ und $(u_n) \subseteq H$ eine (PS)$_c$-Folge von J_λ. Nach Proposition 7.14 ist (u_n) beschränkt. Damit gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H und in H_λ. Sei $v \in H$. Es gilt

$$|\langle u_n, v\rangle_\lambda - Dk(u_n)(v)| = |DJ_\lambda(u_n)(v)| \to 0.$$

Weiter gilt

$$\langle u_n, v\rangle_\lambda \to \langle u, v\rangle_\lambda.$$

Nach Lemma 8.2 gilt

$$Dk(u_n)(v) \to Dk(u)(v).$$

Es folgt

$$DJ_\lambda(u)(v) = \langle u, v\rangle_\lambda - Dk(u)(v) = 0.$$

Somit ist u ein kritischer Punkt von J_λ. □

Satz 8.4. *Es gibt ein $\Lambda \geq 1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ und alle $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $u_0 \in H$, es einen kritischen Punkt u von J_λ gibt mit $\|u - u_0\|_\lambda \leq \delta$, falls es eine (PS)$_c$-Folge $(u_n) \subseteq H$ von J_λ gibt mit $\|u_n - u_0\|_\lambda \leq \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $\Lambda \geq 1$ aus Lemma 8.3

Sei $\lambda \geq \Lambda$, $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $u_0 \in H$ und $(u_n) \subseteq H$ eine (PS)$_c$-Folge von J_λ mit $\|u_n - u\|_\lambda \leq \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 8.3 gibt es eine Teilfolge o.E. $(u_n) \subseteq H$ und ein $u \in H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H und H_λ und u ist ein kritischer Punkt von J_λ. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|u - u_0\|_\lambda^2 &= \|u\|_\lambda^2 + \|u_0\|_\lambda^2 - 2\langle u, u_0\rangle_\lambda \\
&\leq \liminf(\|u_n\|_\lambda^2 + \|u_0\|_\lambda^2 - 2\langle u_n, u_0\rangle_\lambda) \\
&= \liminf \|u_n - u_0\|_\lambda^2 \leq \delta^2.
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.5. *Es gibt ein $\Lambda \geq 1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$, $c \in \mathbb{R}$ und jede (PS)$_c$-Folge $(u_n) \subseteq H$ von J_λ gilt*

$$\frac{1}{2}Dk(u_n)(u_n) - k(u_n) \to c.$$

Beweis. Sei $\Lambda \geq 1$ aus Proposition 7.14.

Sei $\lambda \geq \Lambda$, $c \in \mathbb{R}$ und $(u_n) \subseteq H$ eine (PS)$_c$-Folge von J_λ. Nach Proposition 7.14 ist (u_n) beschränkt. Es folgt

$$c \leftarrow J_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}DJ_\lambda(u_n)(u_n) = \frac{1}{2}Dk(u_n)(u_n) - k(u_n).$$

□

Lemma 8.6. *Zu $R' > 0$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $\Lambda \geq 1$ und ein $R \geq 0$ mit*

$$\int_{B_R(0)^c} |u|^p \, dx \leq \epsilon, \qquad \int_{B_R(0)^c} u^2 \, dx \leq \epsilon.$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$, $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R'$.

Beweis. Seien $R' > 0$ und $\epsilon > 0$.

Seien M aus (V_{3a}) und α und α_0 aus Kapitel 7 Abschnitt 7.2. Nach Bemerkung 2.1 existiert die Einbettung $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ und ist stetig. Sei c' die Norm dieser Einbettung. Sei $\theta \in (0,1)$ mit

$$p = 2\theta + 2^*(1-\theta).$$

Seien

$$\epsilon' := \min\{\left(\frac{\epsilon}{(c'R')^{2^*(1-\theta)}}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \epsilon\}, \quad \Lambda \geq \frac{2(R')^2}{\epsilon' M}.$$

Sei

$$D := \{x \in \mathbb{R}^N | a(x) < M\}.$$

Nach Lemma 7.13 gibt es ein $R'' > 0$ mit

$$\int\limits_{D \cap W_{R''}(0)^c} u^2 \, dx \leq \frac{\epsilon'}{2R'^2} \|u\|_\lambda^2 \tag{8.4}$$

für alle $\lambda \geq 1$ und $u \in H$. Sei $R := N^{\frac{1}{2}} R''$.

Sei $\lambda \geq \Lambda$, $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R'$. Dann ist

$$\int\limits_{D \cap B_R(0)^c} u^2 \, dx \leq \int\limits_{D \cap W_{R''}(0)^c} u^2 \, dx \overset{(8.4)}{\leq} \frac{\epsilon'}{2R'^2} \|u\|_\lambda^2 \leq \frac{\epsilon'}{2R'^2} R'^2 = \frac{\epsilon'}{2}.$$

Weiter ist für $x \in D^c \cap B_R(0)^c$

$$V_\lambda^\alpha(x) = a_0(x) + \alpha + \lambda a(x) \overset{(7.3)}{\geq} \lambda M$$

d.h.

$$\int\limits_{D^c \cap B_R(0)^c} u^2 \, dx \leq \frac{1}{\lambda M} \int\limits_{D^c \cap B_R(0)^c} V_\lambda^\alpha(x) u^2 \, dx \leq \frac{1}{\lambda M} \|u\|_\lambda^2 \leq \frac{(R')^2}{\lambda M} \leq \frac{\epsilon'}{2}.$$

Insgesamt ist

$$\int\limits_{B_R(0)^c} u^2 \, dx \leq \epsilon' \leq \epsilon. \tag{8.5}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)^c} |u|^p \, dx &\leq \left(\int_{B_R(0)^c} |u|^2 \, dx \right)^{\theta} \left(\int_{B_R(0)^c} |u|^{2^*} \, dx \right)^{1-\theta} \\
&\overset{(8.5)}{\leq} (\epsilon')^{\theta} \left(\int_{B_R(0)^c} |u|^{2^*} \, dx \right)^{1-\theta} \\
&\leq \frac{\epsilon}{(c'R')^{2^*(1-\theta)}} \left(\int_{B_R(0)^c} |u|^{2^*} \, dx \right)^{1-\theta} \\
&\leq \frac{\epsilon}{(R')^{2^*(1-\theta)}} \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{2^*(1-\theta)} \\
&\overset{(7.4)}{\leq} \frac{\epsilon}{(R')^{2^*(1-\theta)}} \|u\|_{\lambda}^{2^*(1-\theta)} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.7. *Zu $R' > 0$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $\Lambda \geq 1$ und ein $R \geq 0$ mit*

$$\left| \int_{B_R(0)^c} f(x,u)u \, dx \right| \leq \epsilon, \quad \left| \int_{B_R(0)^c} F(x,u) \, dx \right| \leq \epsilon$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$, $u \in H$ mit $\|u\|_{\lambda} \leq R'$.

Beweis. Seien $R' > 0$ und $\epsilon > 0$. Nach Lemma 7.1 gibt es $A > 0$ mit

$$|f(x,t)| \leq \frac{\epsilon}{2R'^2}|t| + A|t|^{p-1}, \quad |F(x,t)| \leq \frac{\epsilon}{2R'^2}|t|^2 + A|t|^p$$

für $t \in \mathbb{R}$ und f.ü. $x \in \mathbb{R}^N$.

Nach Lemma 8.6 gibt es ein $\Lambda \geq 1$ und ein $R \geq 0$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit $\|u\|_{\lambda} \leq R'$ gilt

$$\int_{B_R(0)^c} |u|^p \, dx \leq \frac{\epsilon}{2A}. \tag{8.6}$$

Sei $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R'$. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{2R'^2} \int\limits_{B_R(0)^c} u^2\, dx &\leq \frac{\epsilon}{2R'^2}\|u\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \\ &\overset{(7.4)}{\leq} \frac{\epsilon}{2R'^2}\|u\|^2_\lambda \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$A \int\limits_{B_R(0)^c} |u|^p\, dx \overset{(8.6)}{\leq} A\frac{\epsilon}{2A} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Damit ist

$$\int\limits_{B_R(0)^c} (\frac{\epsilon}{4R'^2}u^2 + A|u|^p)\, dx \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}|\int\limits_{B_R(0)^c} f(x,u)u\, dx| &\leq \int\limits_{B_R(0)^c} (\frac{\epsilon}{2R'^2}u^2 + A|u|^p)\, dx \leq \epsilon, \\ |\int\limits_{B_R(0)^c} F(x,u)\, dx| &\leq \int\limits_{B_R(0)^c} (\frac{\epsilon}{2R'^2}u^2 + A|u|^p)\, dx \leq \epsilon.\end{aligned}$$

□

Satz 8.8. *Zu $\epsilon > 0$ und $C \geq 0$ gibt es ein $\Lambda \geq 1$, so dass es für alle $\lambda \geq \Lambda$, $c \leq C$ und jede (PS)$_c$-Folge $(u_n) \subseteq H$ von J_λ eine Teilfolge (u_{n_k}) und einen kritischen Punkt $u \in H$ von J_λ gibt mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in H und $|J_\lambda(u) - c| \leq \epsilon$.*

Beweis. Seien M aus (V_{3a}) und α und α_0 aus Kapitel 7 Abschnitt 7.2. Sei $\epsilon > 0$ und $C \geq 0$.

Sei $\Lambda_1 \geq 1$, so dass Proposition 7.14 und Lemma 8.3 gelten. Nach Bemerkung 7.15 ist für $\lambda \geq \Lambda_1$, $c \leq C$, $(u_n) \subseteq H$ eine (PS)$_c$-Folge von J_λ

$$\limsup \|u_n\|^2_\lambda \leq \frac{8\tilde{q}}{\tilde{q}-2} \cdot c + r' \leq \frac{8\tilde{q}C}{\tilde{q}-2} + r', \tag{8.7}$$

dabei sind $r' > 0$ und $\tilde{q} > 2$ unabhängig von λ, c und (u_n). Sei $R' := \sqrt{\frac{8\tilde{q}C}{\tilde{q}-2} + r'} > 0$. Nach Lemma 8.6 gibt es ein $\Lambda_2 \geq \Lambda_1$ und ein $R'' \geq 0$ mit

$$\int\limits_{B_{R''}(0)^c} u^2\, dx \leq \frac{\epsilon}{3\alpha}. \tag{8.8}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda_2$, $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq 2R'$. Nach Lemma 8.7 gibt es ein $\Lambda \geq \Lambda_2$ und ein $R \geq R''$ mit

$$|\int_{B_R(0)^c} f(x,u)u\,dx| \leq \frac{\epsilon}{6}, \quad |\int_{B_R(0)^c} F(x,u)\,dx| \leq \frac{\epsilon}{6} \tag{8.9}$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$, $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq 2R'$.

Sei $\lambda \geq \Lambda$, $c \leq C$ und $(u_n) \subseteq H$ eine $(\mathrm{PS})_c$-Folge von J_λ. Nach Lemma 8.3 gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) und einen kritischen Punkt $u \in H$ von J_λ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H und H_λ. Wegen

$$\limsup \|u_n\|_\lambda^2 \overset{(8.7)}{\leq} \frac{8\tilde{q}C}{\tilde{q}-2} + r' = (R')^2$$

sei o.E. $\|u_n\|_\lambda \leq 2R'$. Damit ist auch

$$\|u\|_\lambda \leq \liminf \|u_n\|_\lambda \leq 2R'.$$

Nach Bemerkung 2.1 sind die Einbettungen

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(U_R(0)), \quad W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(U_R(0))$$

kompakt, also auch vollstetig und nach Lemma A.3 auch die Einbettungen

$$H \hookrightarrow L^2(U_R(0)), \quad H \hookrightarrow L^p(U_R(0)).$$

Damit gilt

$$u_n|_{U_R(0)} \to u_\lambda|_{U_R(0)} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N), L^p(\mathbb{R}^N) \text{ und } L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N).$$

Es folgt nach Bemerkung 8.1

$$\begin{aligned}
&\int_{U_R(0)} (F(x,u_n) + \frac{\alpha}{2}u_n^2)\,dx = I(u_n|_{U_R(0)}) + \frac{\alpha}{2}\|u_n|_{U_R(0)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
\to\quad & I(u|_{U_R(0)}) + \frac{\alpha}{2}\|u|_{U_R(0)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{U_R(0)} (F(x,u) + \frac{\alpha}{2}u^2)\,dx.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
k(u) = & \int\limits_{B_R(0)^c} (F(x,u) + \frac{\alpha}{2}u^2)\, dx + \int\limits_{U_R(0)} (F(x,u) + \frac{\alpha}{2}u^2)\, dx \\
& \overset{(8.9),(8.8)}{\leq} \frac{\epsilon}{3} + \int\limits_{U_R(0)} (F(x,u) + \frac{\alpha}{2}u^2)\, dx \\
\leftarrow & \frac{\epsilon}{3} + \int\limits_{U_R(0)} (F(x,u_n) + \frac{\alpha}{2}u_n^2)\, dx \\
& \leq \frac{\epsilon}{3} + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (F(x,u_n) + \frac{\alpha}{2}u_n^2)\, dx \\
& = \frac{\epsilon}{3} + k(u_n),
\end{aligned}
$$

$$
k(u) \leq \liminf k(u_n) + \frac{\epsilon}{3}, \tag{8.10}
$$

$$
\begin{aligned}
k(u) = & \int\limits_{B_R(0)^c} (F(x,u) + \frac{\alpha}{2}u^2)\, dx + \int\limits_{U_R(0)} (F(x,u) + \frac{\alpha}{2}u^2)\, dx \\
& \geq \int\limits_{U_R(0)} (F(x,u) + \frac{\alpha}{2}u^2)\, dx \\
\leftarrow & \int\limits_{U_R(0)} (F(x,u_n) + \frac{\alpha}{2}u_n^2)\, dx \\
& \overset{(8.9),(8.8)}{\geq} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (F(x,u_n) + \frac{\alpha}{2}u_n^2)\, dx - \frac{\epsilon}{3} \\
& = k(u_n) - \frac{\epsilon}{3},
\end{aligned}
$$

$$
k(u) \geq \limsup k(u_n) - \frac{\epsilon}{3}, \tag{8.11}
$$

$$\begin{aligned}
Dk(u)(u) &= \int\limits_{B_R(0)^c} (f(x,u)u + \alpha u^2)\,dx + \int\limits_{U_R(0)} (f(x,u)u + \alpha u^2)\,dx \\
&\geq \int\limits_{U_R(0)} (f(x,u)u + \alpha u^2)\,dx \\
&\leftarrow \int\limits_{U_R(0)} (f(x,u_n)u_n + \alpha u_n^2)\,dx \\
&\overset{(8.9),(8.8)}{\geq} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (f(x,u_n)u_n + \alpha u_n^2)\,dx - \frac{\epsilon}{2} \\
&= Dk(u_n)(u_n) - \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$Dk(u)(u) \geq \limsup Dk(u_n)(u_n) - \frac{\epsilon}{2}, \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}
\|u\|_\lambda^2 &= DJ_\lambda(u)(u) + Dk(u)(u) = Dk(u)(u) \\
&\overset{(8.12)}{\geq} \limsup Dk(u_n)(u_n) - \frac{\epsilon}{2} \\
&= \limsup (DJ_\lambda(u_n)(u_n) + Dk(u_n)(u_n)) - \frac{\epsilon}{2} \\
&= \limsup \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - k(u) \leq \liminf \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - k(u) \\
&\overset{(8.11)}{\leq} \liminf \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \limsup k(u_n) + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \liminf (\frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - k(u_n)) + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \lim J_\lambda(u_n) + \frac{\epsilon}{3} = c + \frac{\epsilon}{3} < c + \epsilon.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - k(u) \overset{(8.13)}{\geq} \frac{1}{2}\limsup \|u_n\|_\lambda^2 - k(u) - \frac{\epsilon}{2} \\
&\overset{(8.10)}{\geq} \limsup \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \liminf k(u_n) - \frac{5}{6}\epsilon \\
&\geq \limsup (\frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - k(u_n)) - \frac{5}{6}\epsilon \\
&= \lim J_\lambda(u_n) - \frac{5}{6}\epsilon = c - \frac{5}{6}\epsilon > c - \epsilon.
\end{aligned}$$

□

8.2 Gültigkeit des Satzes 5.10 aus Kapitel 5

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass Satz 5.10 aus Kapitel 5 gilt. Dazu werden wir uns die einzelnen Lemmata und Sätze , die wir im Beweis von Satz 5.10 benutzt haben, und zuletzt den Beweis von Satz 5.10 anschauen.

Im Beweis von Lemma 5.3 haben wir $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit $u_n \in J_{\lambda_n}^{-1}([a,b])$, $\|u_n\|_{\lambda_n} \geq R$, $\{J_{\lambda_n}(u_n)\}$ konvergent und $\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0$. Wir haben mit Voraussetzung (j_3) und Bemerkung 5.1 eine Teilfolge o.E. (u_n) und einen kritischen Punkt $u \in H_0$ von J_0 gefunden mit $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0$. Wir haben im Beweis von Lemma 5.3 Bemerkung 5.1 benutzt. Dort verwendeten wir die Vollstetigkeit von Dk, um $Dk(u_n) \to Dk(u)$ zu erhalten. Das gilt aber schon nach Bemerkung 8.1. Weiter unten im Beweis von Lemma 5.3 haben wir die Vollstetigkeit von k benutzt, um $k(u_n) \to k(u)$ zu erhalten. Auch das folgt schon aus Bemerkung 8.1. Somit läßt sich Lemma 5.3 auch im allgemeinen Fall zeigen.

Im Beweis von Lemma 5.4 haben wir Lemma 5.3 benutzt, aber nicht die Vollstetigkeit von k und Dk oder Bedingung (j_2). Dass Lemma 5.3 im allgemeinen Fall gilt, haben wir bereits gezeigt.

Im Beweis von Lemma 5.5 haben wir $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n - u_0\| \geq \delta$, $J_{\lambda_n}(u_n) \in [a,b]$, $Pu_n \in B_\delta(u_0)$, $(J_{\lambda_n}(u_n))$ konvergent und $\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0$. Wir haben mit Voraussetzung (j_3) eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H_0$ gefunden mit $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0$. Dann haben wir Bemerkung 5.1 angewandt, um zu zeigen, dass u ein kritischer Punkt von J_0 ist. Hier ging $Dk(u_n) \to Dk(u)$ ein, was aus der Vollstetigkeit von Dk folgte. Dass $(Dk(u_n))$ gegen $Dk(u)$ in H' konvergiert, erhalten wir hier aus Bemerkung 8.1. Also lässt sich Lemma 5.5 auch im allgemeinen Fall zeigen.

Im Beweis von Lemma 5.6 haben wir für $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n\|_{\lambda_n} \leq R$ und $J_0(Pu_n) - J_{\lambda_n}(u_n) > \epsilon$ Voraussetzung (A_3) und Bemerkung 4.1 benutzt, um eine Teilfolge o.E. (u_n) und $u \in H_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H und $Pu_n \rightharpoonup u$ in H zu erhalten. Bemerkung 4.1 ist im allgemeinen Fall immer noch gültig. Weiter haben wir die Vollstetigkeit von k verwendet, um $k(u_n) \to k(u)$ und $k(Pu_n) \to k(u)$ zu erhalten. Nun ist (Pu_n) beschränkt in H und $\|Pu_n\|_{\lambda_n} = \|Pu_n\|$ nach (A_2). Damit ist auch $(\|Pu_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt. Nach Bemerkung 8.1 gilt hier $k(u_n) \to k(u)$ und $k(Pu_n) \to k(u)$ auch ohne die Vollstetigkeit von k. Somit läßt sich Lemma 5.6 auch auch im allgemeinen Fall zeigen.

Im Beweis von Lemma 5.7 haben wir außer Lemma 4.4 nichts benutzt, was im allgemeinen Fall nicht gilt. Also ist hier zu prüfen, ob die Aussage aus Lemma 4.4 im allgemeinen Fall immer noch gilt.

Im Beweis von Lemma 4.4 haben wir gezeigt, dass es im speziellen Fall für alle $\delta > 0$ und $R > 0$ ein $\Lambda \geq 1$ gibt, so dass

$$\|K_\lambda(u) - K_0(Pu)\|_\lambda \leq \delta$$

für alle $\lambda \geq \Lambda$ und $u \in H$ mit $\|u\|_\lambda \leq R$ ist. Dabei ist $K_\lambda = \nabla_\lambda k$ aus Bemerkung A.8. Wie in Bemerkung A.8 sieht man $Dk(u)(v) = \langle \nabla_\lambda k_\lambda(u), v\rangle_\lambda$ für alle $u, v \in H$. Es ist $K_0 = \nabla(k|_{H_0})$. Angenommen, es gibt $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n\|_{\lambda_n} \leq R$ und

$$\|K_{\lambda_n}(u_n) - K_0(Pu_n)\|_{\lambda_n} \geq \delta.$$

Nach (A_3) gibt es eine Teilfolge o.E. (u_n) und ein $u \in H_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in H. Wie in Bemerkung 4.1 erhält man für eine Teilfolge o.E. (u_n) $Pu_n \rightharpoonup u$ in H. Nach Bemerkung 8.1 ist $Dk(u_n) \to Dk(u)$. Nun ist (Pu_n) beschränkt in H und $\|Pu_n\|_{\lambda_n} = \|Pu_n\|$ nach (A_2). Damit ist auch $(\|Pu_n\|_{\lambda_n})$ beschränkt. Nach Bemerkung 8.1 ist $Dk(Pu_n) \to Dk(u)$. Wie in Lemma 4.4 sieht man für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned}
\|K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} &\leq \|Dk(u_n)\|_{H'} \leq \|Dk(u)\|_{H'} + 1, \\
\|K_{\lambda_n}(Pu_n)\|_{\lambda_n} &\leq \|Dk(Pu_n)\|_{H'} \leq \|Dk(u)\|_{H'} + 1.
\end{aligned}$$

Es ist $K_0 = PK_\lambda|_{H_0}$ für alle $\lambda \geq 1$. Somit ist für $v_n := K_{\lambda_n}(u_n) - K_0(Pu_n)$ und $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned}
\|v_n\|_{\lambda_n} &\leq \|K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} + \|K_0(Pu_n)\|_{\lambda_n} = \|K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} + \|PK_{\lambda_n}(Pu_n)\|_{\lambda_n} \\
&\leq \|K_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} + \|K_{\lambda_n}(Pu_n)\|_{\lambda_n} \leq 2\|Dk(u)\|_{H'} + 2.
\end{aligned}$$

Wie oben sieht man, dass für eine Teilfolge o.E. (v_n) und ein $v \in H_0$ gilt $v_n, Pv_n \rightharpoonup v$ in H. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\delta^2 \leq& \|K_{\lambda_n}(u_n) - K_0(Pu_n)\|_{\lambda_n}^2 = \langle K_{\lambda_n}(u_n), v_n\rangle_{\lambda_n} - \langle K_0(Pu_n), v_n\rangle_{\lambda_n} \\
=& Dk(u_n)(v_n) - \langle K_0(Pu_n), Pv_n\rangle_{\lambda_n} = Dk(u_n)(v_n) - Dk|_{H_0}(Pu_n)(Pv_n) \\
=& Dk(u_n)(v_n) - Dk(Pu_n)(Pv_n) \\
\leq& \|Dk(u_n) - Dk(Pu_n)\|_{H'}\|v_n\| + |Dk(Pu_n)(v_n - Pv_n)|.
\end{aligned}$$

Wegen $Dk(u_n) - Dk(Pu_n) \to Dk(u) - Dk(u) = 0$ und (v_n) beschränkt in H ist für $n \in \mathbb{N}$ groß $|Dk(Pu_n)(v_n - Pv_n)| \geq \frac{\delta^2}{2}$. Nach Bemerkung 8.1 ist

$$i(v_n - Pv_n) \to 0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N), \quad i_2(v_n - Pv_n) \to 0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Es folgt für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2}{2} &\leq |Dk(Pu_n)(v_n - Pv_n)| \\ &\leq |DI(iu_n)(i(v_n - Pv_n))| + \alpha|\langle i_2 Pu_n, i_2(v_n - Pv_n)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}| \\ &\leq (\|DI(u)\|_{(L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N))'} + 1)\|i(v_n - Pv_n)\|_{2\wedge p} \\ &\quad +\alpha(\|i_2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 1)\|i_2(v_n - Pv_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\to 0\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

Wir hatten den Beweis von Satz 5.8 in acht Schritte aufgeteilt. Diese werden wir jetzt für den allgemeinen Fall betrachten. Zuerst haben wir verschiedene Eigenschaften aufgelistet, die wir aus den vorherigen Lemmata beziehen können. Wir haben bereits die Gültigkeit dieser Lemmata gezeigt. Damit bleiben die Eigenschaften im allgemeinen Fall erhalten.

In Schritt 1 benutzen wir Lemma 4.4. Dass dieses Lemma im allgemeinen Fall gilt, haben wir oben gezeigt.

In Schritt 2 benutzen wir (j_2), um

$$\inf_{u\in H, \|u-\bar{u}\|_\lambda \leq \delta} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda > 0$$

zu erhalten. Angenommen, im allgemeinen Fall gilt

$$\inf_{u\in H, \|u-\bar{u}\|_\lambda \leq \delta} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda = 0.$$

Dann gibt es eine Folge $(u_n) \subseteq H$ mit

$$\|u_n - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta, \quad \|\nabla_\lambda J_\lambda(u_n)\|_\lambda \to 0.$$

Dann ist $(J_\lambda(u_n))$ beschränkt, also o.E. konvergent gegen ein $c \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$\begin{aligned}\|DJ_\lambda(u_n)\|_{H'} &= \sup_{v\in H, \|v\|=1} |DJ_\lambda(u_n)(v)| = \sup_{v\in H, \|v\|=1} |\langle \nabla_\lambda J_\lambda(u_n), v\rangle_\lambda| \\ &\leq \sup_{v\in H, \|v\|=1} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u_n)\|_\lambda \|v\|_\lambda.\end{aligned}$$

Nun sind die Räume H und H_λ isomorph. Sei C die Norm der Einbettung $H \hookrightarrow H_\lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|DJ_\lambda(u_n)\|_{H'} &\leq \sup_{v\in H, \|v\|=1} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u_n)\|_\lambda \|v\|_\lambda \leq C \sup_{v\in H, \|v\|=1} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u_n)\|_\lambda \|v\| \\ &= C\|\nabla_\lambda J_\lambda(u_n)\|_\lambda \to 0.\end{aligned}$$

Somit ist (u_n) eine $(\mathrm{PS})_c$-Folge von J_λ. Bis hierhin war $\lambda \geq \Lambda$. Nach Satz 8.4 gibt es ein $\Lambda_0 \geq \Lambda$, so dass für $\lambda \geq \Lambda_0$ J_λ einen kritischen Punkt u hat mit $\|u - \bar{u}\|_\lambda \leq \delta$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung von Schritt 2. Damit gilt Schritt 2 für alle $\lambda \geq \Lambda_0$.

In den anderen Schritten werden nur Aussagen benutzt, die wir bereits für den allgemeinen Fall gezeigt haben.

In den Beweisen der Sätze 5.9 und 5.10 haben wir nur Aussagen benutzt, die im allgemeinen Fall gelten.

8.3 Gültigkeit des Satzes 6.4 aus Kapitel 6

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass auch Satz 6.4 aus Kapitel 6 im allgemeinen Fall richtig bleibt.

Wir werden auf die einzelnen Unterschiede in den Lemmata und Sätzen aus dem Kapitel 6 Abschnitt 6.1 hinweisen.

Im Beweis von Lemma 6.1 haben wir $\lambda_n \to \infty$, $(u_n) \subseteq H$ mit $J_{\lambda_n}(u_n) \in [c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}]$, $\|\nabla_{\lambda_n} J_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n} \to 0$, $u \in H_0$ mit $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0$ in H. Wir haben mit Voraussetzung (j_3) und Bemerkung 5.1 eine Teilfolge o.E. (u_n) und einen kritischen Punkt $u \in H_0$ von J_0 gefunden mit $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0$. Wir haben im Beweis von Lemma 6.1 Bemerkung 5.1 benutzt. Dort verwendeten wir die Vollstetigkeit von Dk, um $Dk(u_n) \to Dk(u)$ zu erhalten. Das gilt aber schon nach Bemerkung 8.1. Weiter haben wir im Beweis von Lemma 6.1 die Vollstetigkeit von k benutzt, um $k(u_n) \to k(u)$ zu erhalten. Auch das folgt schon aus Bemerkung 8.1. Somit läßt sich Lemma 6.1 auch im allgemeinen Fall zeigen.

Im Beweis von Lemma 6.2 wird wie schon im Beweis von Lemma 5.7 Lemma 4.4 benutzt. Dass die Aussage aus Lemma 4.4 im allgemeinen Fall gültig ist, haben wir bereits beim Betrachten des Beweises von Lemma 5.7 im allgemeinen Fall festgestellt. Es gehen im Beweis von Lemma 6.2 keine weiteren Bedingungen ein, die im allgemeinen Fall nicht gültig sind.

Wir hatten den Beweis von Satz 6.3 in fünf Schritte aufgeteilt. Diese werden wir jetzt für den allgemeinen Fall betrachten. Zuerst haben wir verschiedene Eigenschaften aufgelistet, die wir aus den vorherigen Lemmata beziehen können. Wir haben bereits die Gültigkeit dieser Lemmata gezeigt. Damit bleiben die Eigenschaften im allgemeinen Fall erhalten.

In Schritt 1 haben wir folgende Eigenschaft benutzt

$$\beta_1 := \inf_{u \in J_\lambda^{-1}([a,b])} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda > 0.$$

Diese Eigenschaft folgte aus (j_2) und der Voraussetzung, dass J_λ keinen kritischen Punkt mit Niveau in $[a,b]$ hat. Im allgemeinen Fall können wir (j_2) mit Hilfe von Satz 8.8 umgehen. Nach Lemma 6.1 erhalten wir ein $\varrho' > 0$ und ein $\Lambda_1 \geq \Lambda$ mit

$$\beta'_\lambda := \inf_{u \in J_\lambda^{-1}([b, b+\varrho'])} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda > 0.$$

für $\lambda \geq \Lambda_1$. Satz 8.8 liefert nun ein $\Lambda_2 \geq \Lambda_1$, so dass für alle $\lambda \geq \Lambda_2$, $c \leq b$ und jede (PS)$_c$-Folge $(u_n) \subseteq H$ von J_λ eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) und einen kritischen Punkt $u \in H$ von J_λ gibt mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in H und $|J_\lambda(u) - c| \leq \min\{\varrho, \varrho'\}$. Sei $\lambda \geq \Lambda_2$. Angenommen,

$$\inf_{u \in J_\lambda^{-1}([a,b])} \|\nabla_\lambda J_\lambda(u)\|_\lambda = 0.$$

Dann gibt es eine Folge $(u_n) \subseteq H$ mit $\|\nabla J_\lambda(u_n)\|_\lambda \to 0$ und $J_\lambda(u_n) \in [a,b]$. O.E. sei $(J_\lambda(u_n))$ konvergent gegen ein $c \in [a,b]$. Nach Satz 8.8 gibt es einen kritischen Punkt $u \in H$ von J_λ mit $|J_\lambda(u) - c| \leq \min\{\varrho, \varrho'\}$. Damit ist $J_\lambda(u) \in [a - \varrho, b + \varrho']$. Wegen $\beta_\lambda, \beta'_\lambda > 0$ ist $J_\lambda(u) \in [a,b]$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung von Schritt 1.

In den anderen Schritten werden nur Aussagen benutzt, die wir bereits gezeigt haben.

Im Beweis von Satz 6.4 haben wir nur Aussagen benutzt, die im allgemeinen Fall gelten.

ANHANG A

Grundlegende Aussagen und Begriffe

In diesem Anhang befinden sich zusätzliche Aussagen, die wegen der besseren Lesbarkeit der Arbeit aus dem wesentlichen Zusammenhang genommen wurden und hier zu finden sind.

A.1 Eigenschaften vollstetiger Operatoren

In diesem Abschnitt definieren wir zuerst vollstetige und kompakte Operatoren und gehen auf verschiedene Eigenschaften dieser Operatoren ein, die in den Kapiteln 3 bis 6 benötigt werden. Außerdem werden Beispiele in Bezug auf die Voraussetzungen (k_1) und (k_2) aufgelistet.

Definition A.1. Sei H ein reeller Hilbertraum und Y ein normierter Raum. Eine Abbildung $f : H \to Y$ heißt vollstetig, wenn Folgendes gilt

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } H \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x) \text{ in } Y.$$

Seien X und Y normierte Räume, $U \subseteq X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt kompakt, wenn sie stetig ist und wenn Folgendes gilt

$$U' \subseteq U \text{ beschränkt} \quad \Rightarrow \quad f(U') \text{ relativ kompakt.}$$

Eine lineare Abbildung ist genau dann vollstetig, wenn sie kompkat ist, siehe [3, Satz 8.2]. Eine vollstetige Abbildung ist kompakt, aber nicht jede kompakte Abbildung ist vollstetig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel A.2. Sei H ein reeller Hilbertraum mit $\dim H = \infty$. Nach [3, Satz 2.9] ist $B_1(0)$ nicht kompakt. Es ist $\|\cdot\|_H^2$ stetig und kompakt, aber nicht vollstetig. Denn nimmt man an, daß $\|\cdot\|_H^2$ vollstetig ist, dann ist für eine beschränkte Folge $\{x_n\}$ in $B_1(0)$ und eine Teilfolge o.E. $\{x_n\}$, ein $x \in H$ mit $x_n \rightharpoonup x$ in H

$$\|x_n - x\|_H^2 = \|x_n\|_H^2 + \|x\|_H^2 - 2\langle x_n, x\rangle_H \to \|x\|_H^2 + \|x\|_H^2 - 2\langle x, x\rangle_H = 0.$$

Damit ist $B_1(0)$ folgenkompakt und nach [3, 2.5 Kompaktheit] kompakt. Das ist ein Widerspruch.

Lemma A.3. *Seien H_1, H_2 reelle Hilberträume, X, Y normierte Räume. Dann gilt*

(i) $f : H_2 \to Y$ *vollstetig,* $L : H_1 \to H_2$ *stetig linear* $\quad\Rightarrow\quad$ $f \circ L$ *auch vollstetig;*

(i) $g : H_1 \to X$ *vollstetig,* $h : X \to Y$ *stetig* $\quad\Rightarrow\quad$ $h \circ g$ *auch vollstetig.*

Beweis. Seien $(u_n) \subseteq H_1$, $u \in H_1$ mit $u_n \rightharpoonup u$. Dann gilt nach Bemerkung 2.2 auch $Lu_n \rightharpoonup Lu$. Wegen der Vollstetigkeit von f ist

$$(f \circ L)(u_n) = f(Lu_n) \to f(Lu) = (f \circ L)(u).$$

Seien $(u_n) \subseteq H_1$, $u \in H_1$ mit $u_n \rightharpoonup u$. Dann gilt wegen der Vollstetigkeit von g $g(u_n) \to g(u)$ und wegen der Stetigkeit von h

$$(h \circ g)(u_n) = h(g(u_n)) \to h(g(u)) = (h \circ g)(u).$$

□

Lemma A.4. *Sei H ein reeller Hilbertraum, Y ein normierter Raum, H_0 ein abgeschlossener Unterraum von H, $f : H \to Y$ vollstetig. Dann ist $f|_{H_0}$ auch vollstetig.*

Beweis. Sei $\{x_n\} \subseteq H_0$ schwach konvergent in H_0 gegen $x \in H_0$. Wegen Bemerkung 2.2 und $H_0 \hookrightarrow H$ ist auch $x_n \rightharpoonup x$ in H. Damit gilt

$$f|_{H_0}(x_n) = f(x_n) \to f(x) = f|_{H_0}(x) \quad \text{in } Y$$

□

Lemma A.5. *Sei H ein reeller Hilbertraum, $f : H \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es ist Df genau dann vollstetig, wenn ∇f vollstetig ist.*

Beweis. Für $u, v \in H$ gilt

$$\begin{aligned} \|Df(x) - Df(y)\|_{H'} &= \sup_{\|z\|=1} |Df(x)(z) - Df(y)(z)| \\ &= \sup_{\|z\|=1} |\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), z\rangle_H| \\ &= \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_H. \end{aligned}$$

□

Lemma A.6. *Sei H ein reeller Hilbertraum und Y ein normierter Raum, $f : H \to Y$ vollstetig und differenzierbar in $x_0 \in H$. Dann ist $Df(x_0)$ auch vollstetig.*

Beweis. Sei $\{x_n\} \subseteq H$ mit $x_n \rightharpoonup 0$ in H. Es ist $\{x_n\}$ beschränkt durch ein $C > 0$. Sei $\epsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ mit

$$\|f(x_0 + x) - f(x_0) - Df(x_0)(x)\|_Y \leq \frac{\epsilon}{2C}\|x\|_H.$$

für alle $x \in H$ mit $\|x\|_H \leq \delta$. Da f vollstetig ist, ist $\{f(x_0 + \delta x_n)\}$ konvergent gegen $f(x_0)$ in Y. Damit gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f(x_0 + \delta x_n) - f(x_0)\|_Y \leq \tfrac{\delta\epsilon}{2},$$

für $n \geq n_0$. Damit ist für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\|Df(x_0)(x_n)\|_Y &= \delta^{-1}\|Df(x_0)(\delta x_n)\|_Y \\
&\leq \delta^{-1}\|f(x_0 + \delta x_n) - f(x_0) - Df(x_0)(\delta x_n)\|_Y \\
&\quad +\delta^{-1}\|f(x_0 + \delta x_n) - f(x_0)\|_Y \\
&\leq \delta^{-1} \cdot \frac{\epsilon}{2C}\|\delta x_n\|_H + \delta^{-1} \cdot \frac{\delta\epsilon}{2} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Unter dem Spezialfall H, H_λ, $\lambda \geq 1$, und H_0, k mit den Voraussetzungen (A_1) bis (A_3) und (k_1), (k_2) aus den Kapiteln 3 bis 6 werden wir weitere Eigenschaften von k, H, H_λ, $\lambda \geq 1$, und H_0 auflisten.
Im Folgenden sei $\lambda \geq 1$ fest und i die Einbettung $H \hookrightarrow H_\lambda$, welche wegen (A_1) existiert und ein Isomorphismus ist.

Ob die Bedingungen (k_1) und (k_2) durch

k ist zweimal stetig differenzierbar und k ist vollstetig

ersetzt werden können, ist noch unklar. Das folgende Beispiel belegt, dass im Allgemeinen die Bedingungen (k_1) und (k_2) nicht durch

k ist zweimal stetig differenzierbar und Dk ist vollstetig

ersetzt werden können.

Beispiel A.7. Sei H ein reeller Hilbertraum mit $\dim H = \infty$, dann ist Id_H stetig, nicht kompakt nach [3, Satz 2.9], insbesondere nicht vollstetig. Aber $DId_H = Id_H$ ist konstant, also vollstetig.

Bemerkung A.8. Sei $i : H \hookrightarrow H_\lambda$. Nach Voraussetung (k_1) ist k stetig differenzierbar und vollstetig. Nach Lemma A.3 ist damit auch $k \circ i^{-1}$ vollstetig. Weiter ist $k \circ i^{-1}$ stetig differenzierbar mit

$$D(k \circ i^{-1})(u)(v) \;=\; Di(k(i^{-1}u))(D(i^{-1})(u)(v)) = Dk(i^{-1}u)(i^{-1}v)$$

für $u, v \in H_\lambda$. Wie oben sieht man, dass mit der Voraussetzung (k_2) und mit Lemma A.3 nicht nur Dk, sondern auch

$$D(k \circ i^{-1}) : H_\lambda \to (H_\lambda)', \quad u \mapsto Dk(i^{-1}u)(i^{-1}\cdot)$$

vollstetig ist. Weiter ist mit (k_2) k zweimal stetig differenzierbar und somit auch $k \circ i^{-1}$ mit

$$\begin{aligned} D^2(k \circ i^{-1})(u)(v, w) &= D^2k(i^{-1}u)(i^{-1}v, D(i^{-1})(u)(w)) \\ &= D^2k(i^{-1}u)(i^{-1}v, i^{-1}w) \end{aligned}$$

für $u, v, w \in H_\lambda$. Sei $\nabla_\lambda k := i^{-1} \circ \nabla_\lambda(k \circ i^{-1}) \circ i$ wobei $\nabla_\lambda(k \circ i^{-1}) : H_\lambda \to H_\lambda$ definiert ist durch

$$D(k \circ i^{-1})(u)(v) = \langle \nabla_\lambda(k \circ i^{-1})(u), v \rangle_\lambda$$

für $u, v \in H_\lambda$. Nach Lemma A.5 und A.3 ist $\nabla_\lambda k$ vollstetig.

A.2 Nichttriviale Abbildungsgrade, Homologiegruppen und kritische Gruppen

In diesem Abschnitt listen wir verschiedene Sätze aus dem Buch [5] von Kung-ching Chang auf. In dieser Arbeit wird dieser Abschnitt nicht verwendet werden, allerdings wird er in der Einleitung erwähnt und kann zur Anwendung der Sätze 6.4 und 5.10 verwendet werden.

Satz A.9. *Sei H ein Hilbertraum, $f : H \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $p \in H$ ein nichtausgearteter kritischer Punkt von f mit Morseindex $m \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$C_n(f, p) = H_n(f^{f(p)}, f^{f(p)} \backslash \{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Beweis. Siehe [5][Kapitel 1, Theorem 4.1]. □

Satz A.10. *Sei H ein reeller Hilbertraum. Seien $D \subseteq H$ ein n-topologischer Ball und $S \subseteq H$, so dass ∂D und S homologisch verlinkt sind (siehe dazu [5][Kapitel 2, Definition 1.2]). Sind $f : H \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ mit*

$$\begin{aligned} f(x) &> a \qquad && \forall x \in S \\ f(x) &\leq a \qquad && \forall x \in \partial D \\ b &> \max\{f(x) | x \in \bar{D}\}, && \end{aligned}$$

dann ist $H_n(f^b, f^a) \neq 0$.

Beweis. Siehe [5][Kapitel 2, Theorem 1.1′]. □

Satz A.11. *Sei H ein reeller Hilbertraum. Ist $f : H \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und p ein Mountain-Pass-Punkt von f, d.h. $C_1(f, p) \neq 0$. Weiter sei $D^2 f(p)$ ein Fredholm Operator mit*

$$\mathit{dim} \ker(D^2 f(p)) = 1, \quad \mathit{falls}\ 0 \in \sigma(D^2 f(p)).$$

Dann ist

$$C_n(f, p) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Beweis. Siehe [5][Kapitel 2, Theorem 1.6]. □

Satz A.12. *Sei H ein reeller Hilbertraum und $f : H \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und erfülle die (PS)-Bedingung. Sei $T : H \to H$ kompakt mit $\nabla f = Id_H - T$ und $p \in H$ ein isolierter kritischer Punkt von f. Dann ist für $\epsilon > 0$ klein*

$$\deg(\nabla f, U_\epsilon(p), 0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \; \mathit{rang}\; C_n(f, p).$$

Beweis. Siehe [5][Kapitel 2, Theorem 3.2]. □

Literaturverzeichnis

[1] R. Abraham. *Transversal Mappings And Flows*. W.A. Benjamin, Inc., 1967.

[2] R. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, Inc., 1975.

[3] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 1985.

[4] T. Bartsch, A. Pankov, Z.-Q. Wang. Nonlinear schrödinger equations with steep potential well. *Communications in Contemporary Mathematics*, 3(4):549–569, 2001.

[5] K.-c. Chang. *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*. Birkhäuser, 1993.

[6] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1985.

[7] J. Dieudonne. *Grundzüge der modernen Analysis*. Friedr.Vieweg+Sohn Braunschweig, 1972.

[8] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1972.

[9] Y. Sato, K. Tanaka. Sign-changing multi-bump solutions for nonlinear schrödinger equations with steep potential wells. *Transactions Of The American Mathematical Society*, 361(12):6205–6253, Dezember 2009.

[10] M. Willem. *Minimax Theorems*. Birkhäuser, 1996.

Selbständigkeitserklärung

Ich versichere, daß ich diese Doktorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.