On the presentation theory of the group SU3

Kleima, Dirk

SUMMARY

This thesis treats some aspects of the representation theory of the group SU_3. After a survey of preliminary matter in chapter 1 the differential operator method to be used is explained for the group SU_2 in chapter 2.

In chapter 3 a set of polynomials in 3+3 variables is obtained which span all irreducible representations and implicitly also contain the Clebsch-Gordan coefficients for the coupling of any two triangle representations of opposite type, $\bigtriangledown \times \bigtriangleup$. These Clebsch-Gordan coefficients are expressed in ordinary SU_2 Clebsch-Gordan coefficients, and later on (in chapter 6) in SU_2 Clebsch-Gordan coefficients for infinite dimensional representations.

We show in chapter 4 that the polynomials obtained in chapter 3 are identical to Beg and Ruegg's spherical harmonics in unitary three-space and extend their methods to unitary n-space.

In chapter 5 we introduce another type of polynomial which contains the Clebsch-Gordan coefficients for the coupling of any two triangle representations of the same type, $\bigtriangledown \times \bigtriangledown$.

The last chapter treats and uses the SU_2 Clebsch-Gordan coefficients for infinite dimensional representations mentioned above and also explains why the SU_3 coupling of chapters 3 and 5 can be regarded as a successive coupling of three SU_2 spinors (involving infinite dimensional representations in the case of chapter 3).

There is also a suggestion for the labeling of the states in the reduction of the not simply reducible direct product $\bigtriangledown \times \bigtriangledown \times \bigtriangledown$. This reduction would in principle give the general SU_3 Clebsch-Gordan coefficient.

The chapter ends with explicit expressions for the SU_3 Clebsch-Gordan coefficients obtained.

SAMENVATTING

Dit proefschrift handelt over enkele eenvoudige aspecten van de representatietheorie van de groep, SU_3, van unitaire unimodulaire 3×3 matrices.

In hoofdstuk 1 wordt de benodigde kennis van de representatietheorie van half-enkelvoudige Lie-groepen geresumeerd. Beschreven wordt, hoe men door het (her-)invoeren van coördinaten de infinitesimale generatoren van een groep als differentiaaloperatoren schrijft.

Invariante operatoren, die gebruikt zullen worden om onderscheid te maken tussen verschillende irreducibele representaties, worden langs verschillende wegen ingevoerd. Zulke invariante operatoren, en dan i.h.b. de Casimir-operator, worden ook als differentiaaloperatoren geschreven.

De polynomen in de variabelen die eigenfuncties zijn van zo'n Casimir differentiaaloperator, zijn dan bases van de algemeenste irreducibele representaties van de groep. In principe kan men, door voldoend gecompliceerde en van voldoend veel variabelen afhangende polynomen te construeren die irreducibele representaties opspannen, ook de algemeenste Clebsch-Gordan coëfficiënten vinden. Hierbij is het gebruik van invariante functies soms nuttig.

In hoofdstuk 2 wordt de methode gedemonstreerd aan de groep SU_2.

In hoofdstuk 3 wordt dan een polynoombasis geconstrueerd voor de irreducibele representaties van SU_3. Deze functies bevatten impliciet bovendien een eenvoudig type SU_3 Clebsch-Gordan coëfficiënt, n.l. voor de reductie van een direct product van twee willekeurige zogenaamde driehoeksrepresentaties, $\bigtriangledown \times \bigtriangleup$.

In hoofdstuk 4 worden de in het vorige hoofdstuk geconstrueerde functies geïdentificeerd met de door Beg en Ruegg geconstrueerde sferische harmonikalen in de 3-dimensionale unitaire ruimte. Hun beschouwingen worden daarna uitgebreid tot de sferische harmonikalen voor de n-dimensionale unitaire ruimte.

Dan wordt in hoofdstuk 5 een ander type polynomen gevonden, die ook de irreducibele representaties opspannen, maar bovendien de Clebsch-Gordan coëfficiënten bevatten voor de reductie van directe producten van willekeurige driehoeksrepresentaties van hetzelfde type, $\bigtriangledown \times \bigtriangledown$.

Hoofdstuk 6 tenslotte geeft een nadere beschouwing van de verkregen polynomen. Aangetoond wordt, waarom de eenvoudige gevallen van SU_3 koppeling van twee driehoeksrepresentaties in de hoofdstukken 3 en 5 uitgevoerd formeel overeenkomen met de koppeling van drie SU_2 spinoren.

Voor de polynomen uit hoofdstuk 3 treden SU_2 Clebsch-Gordan coëfficiënten, K, voor oneindig-dimensionale representaties op. Enkele eigenschappen van de coëfficiënten K en hun uitdrukking in gewone Clebsch-Gordan coëfficiënten worden afgeleid.

Aangeduid wordt nog, hoe de gebruikte methoden uitgebreid zouden kunnen worden tot de koppeling van $\bigtriangledown \times \bigtriangledown \times \bigtriangledown$. Hieruit zouden de algemeenste Clebsch-Gordan coëfficiënten althans in principe moeten volgen.

Aan het eind van hoofdstuk 6 worden de verkregen Clebsch-Gordan coëfficiënten nog eens uitgeschreven.