Desarrollo de pensamiento numérico elemental, usando situaciones problema de estructuras multiplicativas

TULIO RAFAEL AMAYA DE ARMAS[I]
ADRIANA ARIAS CARMONA[II]
JULIO CÉSAR VERA CORREA[III]
HUMBERTO ÁLVAREZ SÉPULVEDA[IV]
http://dx.doi.org/10.22347/2175-2753v15i46.3579

Resumen
El objetivo de este trabajo fue analizar las estrategias utilizadas por estudiantes de segundo año de educación básica, al resolver situaciones problema de estructuras multiplicativas. La muestra la conformaron 76 estudiantes de una institución educativa colombiana. Para la recolección de la información se utilizaron entrevistas basadas en las tareas resueltas por los estudiantes. La información se procesó utilizando la técnica análisis de contenido. Los resultados evidencian el uso de diversas estrategias de solución, como el tanteo, sumas repetidas con sumandos iguales y agrupación de elementos convencionales. Varias respuestas superaron lo establecido por los estándares básicos de competencias matemáticas para ese grado. Se concluye destacando el papel de las situaciones problema y de las representaciones semióticas, ya que funcionaron como conectores de los conceptos matemáticos con elementos del contexto sociocultural.
Palabras clave: situaciones problema; representaciones semióticas; estructuras multiplicativas; entrevistas basadas en tareas; sumas de sumandos iguales.

Submetido em: 28/06/2021
Aprovado em: 16/01/2023

[I] Institución Educativa Madre Amalia, Sincelejo, Colômbia; https://orcid.org/0000-0003-0342-4338; e-mail: tuama1@hotmail.com.
[II] Institución Educativa Nuevo Horizonte - Paulo VI, Medellín, Colômbia; https://orcid.org/0009-0003-4444-2601; e-mail: adrianaarias1976@gmail.com.
[III] Institución Educativa Presbítero Antonio José Bernal Londoño, Medellín, Colômbia; https://orcid.org/0000-0003-1141-6071; e-mail: cesarin.vera@gmail.com.
[IV] Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile; https://orcid.org/0000-0001-5729-3404; e-mail: halvarez@ucsc.cl.

Development of elementary numerical thinking, using problem situations of multiplicative structures

Abstract
The objective of this work was to analyze the strategies used by students of the second year of basic education, when solving problem situations of multiplicative structures. The sample was made up of 76 students from a Colombian educational institution. For the collection of information, interviews based on the tasks solved by the students were used. The information was analyzed using the content analysis technique. The results show the use of various solution strategies, such as trial and error, repeated sums with equal addends and grouping of conventional elements. Several responses exceeded the basic math proficiency standards for that grade. It concludes by highlighting the role of problem situations and semiotic representations, since they functioned as connectors of mathematical concepts with elements of the sociocultural context.
Keywords: number thinking; problem situations; multiplicative structures; task-based interviews; sums of equal additions.

Desenvolvimento do pensamento numérico elementar, usando situações-problema de estruturas multiplicativas

Resumo
O objetivo deste trabalho foi analisar as estratégias utilizadas por alunos do segundo ano do ensino básico, na resolução de situações problema de estruturas multiplicativas. A amostra foi composta por 76 alunos de uma instituição educacional colombiana. Para a coleta de informações, foram utilizadas entrevistas com base nas tarefas resolvidas pelos alunos. As informações foram analisadas por meio da técnica de análise de conteúdo. Os resultados mostram a utilização de várias estratégias de solução, como tentativa e erro, somas repetidas com adendos iguais e agrupamento de elementos convencionais. Várias respostas excederam os padrões básicos de proficiência em matemática para aquela série. Conclui destacando o papel das situações-problema e das representações semióticas, uma vez que funcionaram como conectores de conceitos matemáticos com elementos do contexto sociocultural.
Palavras-chave: pensamento numérico; situações problema; estruturas multiplicativas; entrevistas baseadas em tarefas; somas de adições iguais.

Introducción

La comprensión y uso de las operaciones básicas, es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que son indispensables para resolver problemas matemáticos a cualquier nivel (SANTOS; RODRIGUES, 2019). Igualmente, el estudio de las dificultades de los estudiantes al usar operaciones de estructura tanto aditivas como multiplicativas, y las relaciones entre ellas, podría permitir la comprensión de sus limitaciones, con el dominio de estas estructuras, para poder emprender planes que faciliten mejorar dichas dificultades.

Una de las metas esperadas en la enseñanza de las matemáticas, es conseguir que los estudiantes de educación básica primaria, usen las operaciones básicas para resolver problemas del contexto sociocultural donde habitan, que los ayuden a pasar de lo concreto a lo abstracto de forma lógica, secuencial y estructurada (ARTEAGA-MARTÍNEZ; MACÍAS; PIZAR, 2020). Asimismo, se busca que el estudiante se interese por escoger y realizar operaciones adecuadas a las necesidades que se le presenten, conscientemente, produciendo y conectando las representaciones semióticas de los objetos matemáticos que se estudien.

La resolución de situaciones problema que involucren estructuras lógico-matemática, tanto aditivas como multiplicativas, y que logren pasar de una estructura a otra de forma natural, está condicionada por la producción y articulación de las representaciones semióticas (OBANDO ZAPATA; MÚNERA CÓRDOBA, 2003), pues demandan del estudiante un gran esfuerzo por comprender los conceptos que se les proponen.

Además, el dominio adecuado de las operaciones aditivas y multiplicativas es fundamental en la formación matemática de cualquier persona, pues son indispensables para poder aprender otros temas matemáticos en niveles más avanzados. Asimismo, se sabe que las estructuras aditivas son el fundamento de las estructuras multiplicativas, pues, los primeros pasos de los niños en el razonamiento multiplicativo se provienen de sus experiencias en el razonamiento aditivo (JACOB; WILLIS, 2003). No obstante, con el solo desarrollo del pensamiento aditivo no es posible lograr que los niños progresen matemáticamente, pues, no todas las multiplicaciones se pueden hacer por operaciones con sumas repetitivas de sumandos iguales. Por lo tanto, es necesario que el estudiante llegue a comprender y analizar otras estrategias de solución que los lleve a comprender ambas estructuras, y las diferencias entre ellas para que los para que los pueda utilizar en la solución de problemas del contexto, que los ayuden a desempeñarse adecuadamente en como un ser social.

Sin embargo, ambos pensamientos en su conjunto, son el fundamento del conocimiento matemático, lo que establece la necesidad de desarrollarlos adecuadamente desde los primeros años de escolaridad. De esta manera el docente actúa como facilitador de los procesos matemáticos desarrollados desde la primera infancia, orientando didácticamente las matemáticas, para que éstos puedan ser asimilados y aplicados en su quehacer cotidiano.

Si estas estructuras, aditivas y multiplicativas, no se desarrollan adecuadamente el estudiante puede habituarse a cometer errores y a considerarlos como correctos, y por lo tanto, llevarlo a hacer análisis inapropiados de situaciones que se le presenten en la vida cotidiana, lo que puede ser nocivo para su desarrollo personal y profesional.

La pregunta que orientó el proceso de investigación fue: ¿Qué estrategias utilizan los estudiantes de segundo grado de educación básica primaria, al resolver situaciones problema contextualizadas de estructuras multiplicativas? El trabajo fue motivado por los continuos errores que cometen los estudiantes al resolver problemas de estructuras multiplicativas, en muchos casos, por la mecanización del algoritmo tradicional, el poco uso o comprensión de la descomposición aditiva de los factores, o el uso inadecuado de objetos figurales de referencia. Elementos de suma importancia en el dominio de las estructuras multiplicativas, pues, su manejo inadecuado puede impedir en los estudiantes la comprensión de ambas estructuras, y, por tanto, la identificación de elementos de enlace, o diferenciadores entre ellas.

Lo anterior enfatiza la necesidad de posibilitar que los estudiantes se enfrenten a situaciones problema contextualizadas, de estructuras multiplicativas, a través de varias de sus representaciones, que les faciliten articular sus elementos, y los diferentes significados asociados a cada una de ellas.

Fundamentos teóricos para el análisis

Las situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas

El enunciado de una situación problema involucra las condiciones de un problema, es decir, una situación para la que quien intenta resolverla no tiene una solución inmediata, ni visionada para resolverla, pero con la necesidad de hacerlo, haciendo que ponga todo de su parte por resolverla (MÚNERA CÓRDOBA, 2011), pero contrario a un problema, esta puede conducir a múltiples soluciones. Según Obando Zapata y Múnera Córdoba (2003) para que las situaciones problema sean un detonador de la actividad cognitiva de los estudiantes, deben involucrar implícitamente los conceptos que se pretenden trabajar, representar un verdadero problema para el estudiante, que lo haga dudar de sus conocimientos previos, pero que sean accesibles a él, y lo lleven a proponer nuevas soluciones y a validarlas. En este sentido, Múnera Córdoba (2011, p. 181) afirma que "las situaciones problema dinamizan la actividad del estudiante y orientan su manera de pensar respecto a las actividades planteadas y los conceptos implícitos en las mismas".

De manera similar a lo anterior, el Ministerio de Educación Nacional (COLOMBIA, 1998) considera que el trabajo con situaciones problema contextualizadas de estructuras multiplicativas, proporciona elementos que pueden facilitar los procesos comprensivos en matemáticas. Esto porque, dichas situaciones, facilitan a los estudiantes el uso de sus presaberes, obligándolos hacer ajustes en sus estructuras previamente construidas, al confrontar sus concepciones erróneas con elementos contextuales y formales de otras estructuras matemáticas, conducentes a aprendizajes significativos. Pues, al usar situaciones contextualizadas, el estudiante tiene la posibilidad de ir articulando elementos del contexto sociocultural, con representaciones formales de los objetos estudiados e ir asignándoles significado y sentido (AMAYA DE ARMAS; CASTELLANOS; PINO-FAN, 2021); esto le permitirá pasar de forma natural, de lo concreto a lo abstracto e ir modificando sus estructuras mentales, lo que le facilitará la adquisición de los aprendizajes (BRUNER; GOODNOW; AUSTIN, 2001).

Lo anterior también puede respaldarse en los trabajos de Brousseau (2007), Sevillano García (2008) y Múnera Córdoba (2011) para quienes las características de las actividades a que se enfrentan los estudiantes, en su proceso de aprendizaje, es una componente fundamental para que éstos pongan lo máximo de su parte para comprender los conceptos que se les proponen. Según Sevillano García (2008, p. 265)

> resulta imprescindible un proceso de enseñanza-aprendizaje constructivista, preocupado no tanto de transmitir cuanto de poner a los alumnos en condiciones de elaborar su propio conocimiento, desde ese trabajo individual, pero también desde la participación del trabajo en grupo y considerando el contexto desde el que se interactúa.

Brousseau (2007) considera que una actividad contextualizada en una situación problema provee condiciones para avanzar y profundizar en la comprensión de los objetos matemáticos, además de potenciar las habilidades y las actitudes que tienen los estudiantes sobre las matemáticas, es decir, proporciona condiciones para que los estudiantes sean matemáticamente competentes. Según Arias Carmona (2021) esto permite a los estudiantes explorar sus conocimientos, reflexionar sobre las acciones que realizan y que están ligadas a este proceso de solución, y a partir de esto comunicar sus respuestas a las cuestiones por las que se indagan, posibilitando la modificación de sus estructuras cognitivas. De esta manera surgen y se producen procesos interactivos de mutua colaboración entre los participantes del proceso, se resuelven interrogantes que posibilitan la conceptualización, la simbolización y formalización de los conceptos, lo que resulta ser un dinamizador de la actividad matemática, facilitando, de esta forma, la construcción de saberes (FARFÁN MÁRQUEZ, 2012).

En este sentido, es fundamental que el trabajo que realicen, tanto docentes como estudiantes, para favorecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje, tenga en cuenta elementos contextuales, para evitar intervenciones en vacío y lograr que quien aprende participe activamente de su propio proceso de aprendizaje (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2010). Esto permite inferir que se necesitan actividades que exijan del estudiante el uso de sus saberes previos, de forma que estimulen su capacidad de asombro, que lo lleven a reflexionar y despierten su interés, su disposición para el estudio y a relacionar las matemáticas trabajada en la escuela, con elementos del contexto sociocultural (ARIAS CARMONA, 2021). Por lo que actividades que simulen hechos del ámbito sociocultural donde habitan los estudiantes, podrían ser un escenario adecuado, para generar tales condiciones. Es decir, el proceso en sí mismo debería ser del completo agrado del estudiante, que despierte sus ganas de trabajar, de modo tal, que el que aprende le queden ganas de seguirlo haciendo, con la posibilidad de replicarlo (ESCUDERO RIOS; GODED RAMBAUD; LAGO CASTRO, 2010).

Los registros y las representaciones semióticas

"Los registros semióticos son los contenedores donde se reproducen las representaciones" (AMAYA DE ARMAS, 2020, p. 118). Las representaciones son configuraciones elaboradas por medio de signos, con ciertos significados, utilizadas por los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, al comunicar una idea (ARIAS CARMONA, 2021). A través de las representaciones semióticas, se representan los objetos matemáticos, ya que estas son el único medio de acceso a dichos objetos (DUVAL, 2017). En una representación intervienen dos tipos de elementos: unos procesos y otros productos (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2000): los primeros refieren a los procesos mentales realizados por quien realiza las transformaciones, y los segundos son las representaciones semióticas exteriorizadas que representan los objetos estudiados.

Con las representaciones se pueden hacer dos tipos de transformaciones: transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento. Las transformaciones tipo conversión son las que se hacen cuando se decodifican los elementos de una representación en un registro y se recodifican en otro, pues, para hacerlas siempre se cambia de registro (AMAYA DE ARMAS, 2020). Asimismo, las transformaciones tipo conversión siempre se hacen por elaboración semántica, y la representación resultante, solo contiene, parte de la idea que se quiere expresar del objeto representado. Las representaciones tipo tratamiento, son las que se hacen cuando se decodifican los elementos de una representación en un registro y se recodifican en el mismo registro, es decir, para hacerlas no se cambia de registro; algunas se hacen por manipulación sintáctica y otras por elaboración semántica, esto es, se pueden hacer cambiando los símbolos o sin cambiarlos.

En la habilidad para hacer las transformaciones e identificar los elementos comunes en varias representaciones, está el fundamento para hacer las articulaciones entre diferentes representaciones de un mismo objeto, ya que para articularlas hay que poner en paralelo los elementos sus comunes, es decir, una vez producidas las representaciones, es necesario buscar los elementos ostensibles en una de ellas, y asignarle los elementos correspondientes, en otras. Este proceso de articulación requiere de mucha fluidez perceptiva de quien lo hace (RAU; ALEVEN; RUMMEL, 2017), ya que es necesario buscar los elementos comunes en todas las representaciones producidas, que, en la mayoría de los casos, tienen distintas apariencias en cada una de estas; pero al hacerlo, facilita conectar las representaciones con elementos conceptuales y socioculturales correspondientes.

Estructuras multiplicativas

Hay que tener en cuenta que el pensamiento multiplicativo no todas las veces es posible generalizarlo de forma sencilla a partir del pensamiento aditivo, pues, con el solo pensamiento aditivo no es suficiente que los niños avancen matemáticamente (JACOB; WILLIS, 2003), por lo tanto, se debe buscar la forma de hacer que el estudiante genere habilidades de pensamiento multiplicativo. En este sentido, Bryant, Nunes y Tzekaki (2009) consideran que los primeros pasos de los niños en el razonamiento multiplicativo provienen directamente de sus experiencias con el razonamiento aditivo, sin embargo, la continuidad entre estos dos tipos de razonamiento puede llevar al estudiante a cometer graves errores al resolver tareas multiplicativas. Debido a esto, si quien aprende no es instruido para que pueda reconocer la diferencia entre lo aditivo y lo multiplicativo, le será muy complicado poder avanzar de un pensamiento a otro. Basado en lo anterior, es posible afirmar que las estructuras multiplicativas van más allá de una forma rápida de hacer adiciones repetidas de sumandos iguales (FERNÁNDEZ VERDÚ; LLINARES, 2010), lo que implica que, para llegar a comprender las estructuras multiplicativas, se necesita ir más allá de las estructuras aditivas, como facilitadoras de las multiplicativas por repetición de sumandos iguales.

El pensamiento multiplicativo se puede entender como la capacidad de un individuo para resolver problemas cotidianos en los que utilice propiedades de la multiplicación o la división (WRIGHT, 2011); para lograrlo, se pueden usar muchas estrategias, tales como agrupación convencional de términos, sumas repetidas con sumandos iguales o el modelado de figuras con una matriz rectangular con rejillas iguales, que conduzcan al concepto de área (ARIAS CARMONA, 2021). Tales estrategias se pueden construir utilizando múltiplos y factores, agrupamientos, propiedades de las operaciones o algoritmos.

Se ilustra la multiplicación como una agrupación convencional a través de un ejemplo: cuando se escoge una figura icónica como representante de un grupo, esta figura puede representar cualquier cantidad convenida, y en esa convención pueden establecerse otras figuras contenidas en ella, o que por agrupación de otros símbolos se pueda obtener una equivalente; como sucede con los billetes que se usan en un país específico. Dichos billetes funcionan como un sistema numérico particular, donde cada símbolo representa una cantidad convenida en el sistema económico del país. En la figura 1, se muestra como ejemplo, un billete de cien mil pesos colombiano.

Figura 1 - Billete de cien mil pesos colombianos

Fuente: ARIAS CARMONA (2021).

Como puede apreciarse en la Figura 2, en Colombia existen billetes de otras denominaciones, menores, con las que se puede representar los cien mil pesos, lo que convencionalmente se le ha llamado cambiar el billete por menudos o por sencillos, es transformarlo en otras representaciones equivalentes de éste, por transformaciones tipo tratamiento. Hay muchas formas de hacer esto, entre ellas puede hacerse por multiplicación directa o por sumas repetidas de dos billetes de 50.000, de cinco de 20.000, de diez de 10.000, de veinte de 5.000, de cincuenta de 2.000 o de cien de 1.000, o con una combinación adecuada de éstos, las cuales, todas implican multiplicaciones como sumas repetidas de representaciones figurales convencionales, que representan el valor de una moneda en Colombia.

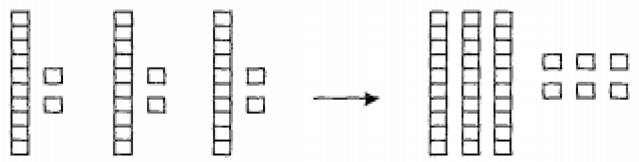
Figura 2 - Billetes colombianos de varias denominaciones

Fuente: ARIAS CARMONA (2021).

En el caso de la multiplicación como sumas repetidas de sumandos iguales, puede apreciarse que, por ejemplo, que 9×4 equivale a 9+9+9+9, que también puede escribirse como 36, por lo que es importante que quien aprende logre entender la relación que hay entre la suma repetida de sumandos iguales y la multiplicación, ya que, multiplicar 9×4, es equivalente a sumar 4 veces el 9, o a sumar 9 veces 4, esto podría ayudar a los estudiantes a descubrir propiedades como la conmutatividad.

También se puede descomponer el número resultante de la multiplicación anterior, con la combinación de otros factores, con los que se pueda hacer la ilustración del significado del valor posicional. Esto es, con orientaciones adecuadas, se puede mostrar al estudiante la estructura del valor posicional, solo con hacer transformaciones a la representación del número, por ejemplo 12×3, que también es equivalente a 12+12+12, que se pueden escribir como 30+6 y como 10+10+10+6, es decir, tres decenas más seis unidades, que también pueden mostrárseles en una representación figural, como la mostrada en la figura 3.

Figura 3 - Ilustración figural de una multiplicación como sumas repetidas



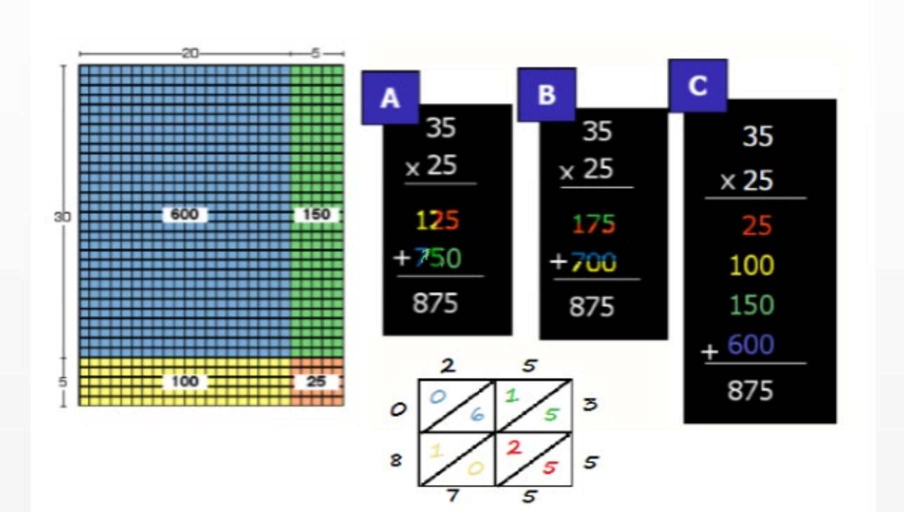
Fuente: ARIAS CARMONA (2021).

La figura 3, se ilustra el paso de la estructura 12+12+12 a 30+6, para que el estudiante pueda iniciarse en el estudio del valor posicional de los números enteros. Chinnappan (2002, p. 341) considera que "la comprensión de los niños sobre la multiplicación como una operación podría mejorarse mediante el compromiso con una variedad de situaciones de la vida real", pues Farfán Márquez (2012), considera que un componente fundamental para poder comprender una operación es llegar a reconocer la necesidad de usarla conscientemente en situaciones cotidianas, que determinen su utilidad.

En este punto, vale la pena aclarar que el número 36 equivalente a 3 decenas y 6 unidades, corresponde a una estructura aritmética, pues, existen otros tipos de estructuras, como la algebraica, que es multiplicativa y se escribe de manera similar, pero las expresiones tienen otro significado, por ejemplo, al escribir 3x, se está expresando la multiplicación del número 3, con la letra x, que de ninguna manera podría considerarse equivalente o similar a escribir 36, ya que si en la expresión 3x se remplaza la x por el 6, el valor de la expresión sería 18 y no 36.

El modelado de figuras con una matriz rectangular con rejillas iguales, se ilustra también con el ejemplo mostrado en la Figura 4; para esto se toma una rejilla de colores y tres algoritmos no tradicionales, los cuales son presentados por Ball, Thames y Phelps (2008). En el ejemplo se ilustra la multiplicación de 35×25 utilizando algoritmos aritméticos muy similares al utilizado convencionalmente en Colombia, pero diseñados por los autores, para poder articular sus elementos con los de la rejilla de colores, que también aparece en la figura 4, y con una representación del algoritmo hindú también mostrado al final de dicha figura. Sería interesante hacer el ejercicio de articulación de los elementos de cada algoritmo con los de la rejilla, pues los colores utilizados podrían facilitar articular los elementos de estas representaciones de la citada multiplicación. El caso más elemental lo constituye la articulación entre los elementos de la rejilla de colores con los del algoritmo mostrado en C, pues, los colores en C corresponden a números enteros, los cuales aparecen, cada uno de un solo color, comparables con las zonas y los colores de la rejilla, lo que podría facilitar establecer conexiones entre ambas representaciones. Los algoritmos mostrados en A, B y en la cuadrícula donde se representa el algoritmo de la multiplicación hindú, los números están pintados de varios colores, pero que se pueden hacer corresponder con relativa facilidad, con las zonas coloreadas en la rejilla.

Figura 4 - Modelado de figuras con una matriz rectangular con rejillas iguales



Fuente: El autor (2021) adaptado de BALL; THAMES; PHELPS (2008).

Diseño metodológico

Es un trabajo eminentemente cualitativo, el cual se desarrolló en cuatro fases: de fundamentación, exploratoria, de desarrollo y de socialización de resultados, en donde la continuidad y secuenciación, facilitó la comprensión del fenómeno estudiado. En la fase de fundamentación, se realizó una revisión bibliográfica de búsqueda de elementos para fundamentar la propuesta de investigación, y se elaboraron, escogieron y adaptaron las situaciones problema utilizadas para recolectar la información. En la fase exploratoria, se aplicó una prueba piloto a diez estudiantes de segundo año de básica primaria de una institución del mismo núcleo educativo donde se recogió la información, buscando que las características de los estudiantes fueran lo más parecidas posible a la de los niños participantes en la muestra. También se hizo validación por pares expertos, y los resultados, tanto del pilotaje como de los comentarios de los expertos, sirvió para hacer ajustes a los cuestionarios, y mejorar, tanto la redacción como hacer ajustes a algunos ítems de los cuestionarios. En la fase de desarrollo, se aplicaron los cuestionarios para recoger la información, se hicieron las entrevistas, se hicieron todas las triangulaciones para el análisis, y se sistematizó la información. Y en la fase de socialización, se hizo entrega del informe final, se defendió ante expertos y se organizó y presentó el presente artículo.

Muestra de informantes

La muestra de informante estuvo constituida por 76 estudiantes de segundo año de educación básica primaria de una institución educativa colombiana, los cuales estaban repartidos en tres grupos (A con 26 estudiantes, B con 26 estudiantes y C con 24 estudiantes), y que al momento de recolectar la información tenían edades entre 7 y 9 años. Se hizo un muestreo intencional, en el cual se tuvo como criterios de inclusión, que el estudiante quisiera participar voluntariamente del estudio y que su tasa de inasistencia a clases fuera baja.

En Colombia (2006), en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, sugiere que el estudiante al finalizar segundo grado de educación básica:

- Modela o describe grupos o conjuntos con el mismo número de elementos, y reconoce la multiplicación como la operación adecuada para encontrar el número total de elementos en todos los grupos o conjuntos
- Reconoce la adición de sumandos iguales como una multiplicación y la representa con los símbolos apropiados

Recolección de la información

La información se recogió en el segundo semestre de 2020, en seis encuentros por vídeo llamadas a través de *Google Meet*, con una duración de dos horas cada una, las cuales fueron grabadas. En cada encuentro se aplicó un cuestionario, los que debido a la contingencia generada por el Covid 19, se les pasaron a los estudiantes a través de la plataforma *Classroom*, y éstos luego de resolverlos los escaneaban y devolvían por la misma vía, o por correo electrónico. Durante el proceso de solución de los cuestionarios, o al final de estos, se hicieron las entrevistas basadas en las tareas que resolvían los estudiantes, pues se buscaba que en sus respuestas los participantes hicieran evidentes sus conocimientos y razonamientos (FERNÁNDEZ VERDÚ; LLINARES, 2010) sobre las estructuras multiplicativas, y del uso que hacen de las estructuras aditivas. Según Rivera López, Salgado Béltran y Dolores Flores (2019), las entrevistas basadas en tareas facilitan la recolección de información cualitativa en matemáticas, ya que, permiten develar ideas y procedimientos utilizados por los estudiantes al resolverlas; con esto se buscaba, además, validar las respuestas aportadas por los participantes.

Instrumentos y técnicas utilizados para recoger la información

Para recoger la información se utilizaron cuestionarios abiertos, y entrevistas basadas en las tareas que resolvieron los estudiantes (GOLDIN, 2000). Todos los cuestionarios se diseñaron con la misma estructura, tratando de hacerlos comparables entre sí, para facilitar la triangulación de instrumentos, al hacer el análisis de los resultados, y en ellos se plantearon situaciones problema de estructuras multiplicativas, utilizando elementos del contexto sociocultural. Las entrevistas tuvieron como estructura los cuestionarios, ya que las preguntas se derivaron de sus soluciones. Las preguntas fueron del tipo ¿Cómo obtuviste ese resultado? ¿Por qué hiciste esto…? ¿Cómo interpretas ese resultado? A continuación, en el cuadro 1, se muestran tres de las situaciones utilizadas para recoger la información.

Cuadro 1 - Ejemplo de situaciones utilizadas para recoger la información

Tarea 1.

Situación 1. Andrés debe elegir una canasta que cumpla con las siguientes condiciones:

- Contiene más de 25 huevos.
- Contiene menos de 33 huevos.
- El número de las unidades de la cantidad de huevos es 2

Situación 2. De una escuela se quiere llevar a un grupo de niños al Gran Circo Los Enanos, que llegó a la ciudad la semana pasada. A continuación, se muestra una tabla donde se registra el valor de las entradas por etapa de madurez de la persona.

Entradas al Circo	
Etapa de madurez	COSTO
Niño	$4.000
Adulto	$6.000

a) En segundo grado hay 29 niños, y los van a acompañar 5 de sus profesores ¿Cuánto dinero deben pagar por concepto de entradas?
b) En segundo grado hay 23 niños, 7 de ellos van a ser acompañados por sus padres (papá y mamá) y además, por 4 de sus profesores ¿cuánto deben pagar por la entrada de todos?
c) La maestra recoge el dinero de las entradas de 26 niños y en total tiene $146 000, ¿Cuántos adultos han pagado su entrada?
d) Describe la forma como obtuviste la respuesta al literal c) de esta situación.

Tarea 2.

Situación 1. La discografía Maxmusic les dice a sus artistas que dará un premio llamado disco brillante, por la vena de 100 copias de su disco. En la siguiente tabla se muestran los premios entregados a tres artistas de Maxmusic. ¿Cuál es la cantidad mínima de discos que ha vendido esta discográfica?

Serrat					
Melendi					
Sanz					

Fuente: El autor (2021).

Procesamiento y análisis de la información

Para procesar la información, tanto la oral como la escrita, se utilizó la técnica análisis de contenido (BERNÁRDEZ, 1995), donde se agruparon ideas básicas de acuerdo a criterios temáticos, lo que permitió establecer diferencias y similitudes en las soluciones. Luego de la revisión de cada situación, los resultados se organizaron por categorías de análisis, con lo que se hizo la triangulación frente a los fundamentos teóricos, para finalmente hacer el análisis y sistematizar los resultados. Para ilustrar algunos detalles del proceso, se colocan ejemplos de los manuscritos de algunos estudiantes, de las soluciones por ellos reportadas y de las entrevistas. Se utilizan nombres ficticios para proteger la identidad de los estudiantes.

En la tabla 1, se presentan, tanto las categorías, como los elementos tenidos en cuenta para analizar la información.

Tabla 1 - Categorías y elementos para el análisis de la información

Categorías de análisis	Indicadores para el análisis
Características de las soluciones dadas a la tarea	Escoge la operación adecuada para resolver la situación Identifica y usa los valores posicionales de los números, en la solución de la tarea
Identificación y uso de condiciones dadas en las situaciones, para resolver la tarea	Identifica y usa las relaciones de orden para resolver la tarea Identifica y usa convenciones dadas en las actividades para resolverlas
Estrategias utilizadas para resolver la situación	Usa elementos de las estructuras aditivas para llegar a la estructura multiplicativa Usa estrategias por sumas repetidas, de tanteo, o por agrupación de factores para resolver la tarea Produce y articula representaciones semióticas al resolver la tarea

Fuente: El autor (2021).

Resultados y análisis de la información

Con relación a las características de las soluciones reportadas por los estudiantes, en su totalidad escogieron operaciones adecuadas al resolver las tareas que se les propusieron. Las estrategias que más utilizaron los estudiantes al resolver las situaciones, fueron operar por tanteo y la de sumas repetidas con sumandos iguales, éstas casi siempre las combinaban con otras. Al ejecutar el algoritmo de la multiplicación primero apartaban los ceros, realizaban las operaciones y al final, los agregaban al resultado. Cuando se les preguntó a los estudiantes por qué hacían esto, “no pudieron explicitar las funciones del cero en términos convencionales”

(ÁVALOS ESPARZA; SOLARES PINEDA, 2018, p. 63), comentando que así se los enseñó a hacer la maestra, y que, de esta forma, les resulta más fácil realizarlas. No obstante, luego de este requerimiento, comenzaron a realizar las operaciones colocando los ceros. Se nota aquí, un conflicto epistémico de origen didáctico, pues la maestra indujo a los estudiantes a usar objetos matemáticos desprovistos de sentido, por lo que les resultó muy difícil asignar significado a los procedimientos realizados, automatizando el proceso (BROUSSEAU; D' AMORE, 2018). Sin embargo, Ávalos Esparza y Solares Pineda (2018), consideran que el cero es muy útil para indicar ausencia de acumulación de valores en un valor posicional específico; por ejemplo, se puede utilizar para diferenciar los números 1003, 1030, 103 y 130 de 13, pues indica un vacío de agrupación de cantidades en la posición donde es colocado el cero, por lo que estos resultados contribuyen a considerar que la reconstrucción del cero dentro del sistema posicional, a pesar de lo útil que es, resulta ser lenta y compleja.

Hubo dos aspectos que facilitaron que los estudiantes comprendieran con mayor facilidad las actividades, y favoreció la resolución de las tareas: (1) la presentación de éstas en situaciones problema contextualizadas y (2) el registro escogido como de partida. (1) La presentación de las tareas en situaciones contextualizadas, se convirtió en un recurso exploratorio de estrategias metacognitivas (ARTEAGA-MARTÍNEZ; MACÍAS; PIZAR, 2020), pues, permitieron a los estudiantes el uso de sus conocimientos previos y con ello un mejor el control de sus acciones al resolver las actividades. Por su parte, (2) el registro utilizado como de partida para configurar las actividades (SPINILLO; LAUTERT; SANTOS, 2021), jugó un papel muy importante en la comprensión de las actividades y en el tipo de estrategias utilizadas por los estudiantes, en la solución de las tareas, pues, la configuración de los objetos estudiados en registros como el tabular o el analítico-aritmético, les facilitó a los estudiantes escoger los registros auxiliares apropiados, lo que facilitó las soluciones dadas a las tareas. En general, luego que los estudiantes comprendieron cada tarea, utilizaron el registro analítico-aritmético como primer registro auxiliar, y desde ahí dieron sus respuestas. La combinación de ambos aspectos (1) y (2), pudo condicionar el éxito de los estudiantes al resolver estas tareas aritméticas (ZAZKIS; MAMOLO, 2016), es decir, presentar los objetos estudiados en representaciones, lo más perceptualmente posible, pudo facilitar que los estudiantes hicieran muy buenos acercamientos a su significado matemático (FARFÁN MÁRQUEZ, 2012). Asimismo, el trabajo con múltiples formas de representación requiere de mucha fluidez perceptiva del aprendiz (RAU; ALEVEN; RUMMEL, 2017), y las situaciones problema contextualizadas les permitieron a los estudiantes identificar elementos equivalentes en varias representaciones, lo que los llevó a articularlas con elementos disciplinares y socioculturales correspondientes.

Respecto a la identificación y uso de los valores posicionales de los números, al resolver las tareas, su comprensión permitió que la totalidad de los estudiantes utilizaran adecuadamente esta información, y a partir de ella dieran sus respuestas a las cuestiones por las que se indagaron. Asimismo, la identificación de los valores posicionales y las relaciones de orden entre las cantidades, ayudó a que los estudiantes hicieran explicitas las conexiones entre los números involucrados en las multiplicaciones, llevándolos a compararlos, ordenarlos (SPINILLO; LAUTERT; SANTOS, 2021), y relacionarlos con elementos socioculturales. Lo que muestra que la comprensión del valor posicional es uno de los requisitos para entender las situaciones y resolverlas (CHINNAPPAN, 2002), pues, lo utilizaron para descomponer aditivamente algunos factores, utilizando el potencial de la suma para llegar a la multiplicación (FERNÁNDEZ VERDÚ; LLINARES, 2010).

El siguiente es un fragmento de la entrevista que se realizó a José al resolver la tarea 1:

Entrevistador: ¿Cómo resolviste la situación 1 de esta tarea?

José: Buscando la canasta que cumple esas condiciones, y esta es la que tiene el 32

Entrevistador: ¿Por qué escogiste esa respuesta?

José: Escogí la que tenía 32 huevos porque tiene que terminar en 2 y como dice que tiene que tener menos de 33 huevos escogí el 32 – muestra su manuscrito: Figura 5 -. Además, el que escogí tiene más de 25 huevos, así que esa es la correcta.

Entrevistador: Hazme el favor de explicarme lo que hiciste para resolver la situación 2 de esta tarea.

José: Saqué lo que pagan los niños y lo que pagan los profesores y después sumé

Entrevistador: En la parte b) ¿por qué multiplicaste por 14?

José: Porque hay 7 niños que van con su papá y su mamá, entonces son 14 adultos

Entrevistador: ¿Cómo hiciste para encontrar la respuesta a la parte c)?

José: Aquí sí pagan 7 adultos y como 7×6 es 42, le quedan 104.000 pesos, que son los 26 niños.

Entrevistador: Explícame cómo hiciste los procedimientos.

José: Bueno, multipliqué 26×4 y me dio 104.000 y luego el 6.000 lo fui probando 6.000×1, el 6.000×2, 6.000×3, hasta que con siete me dio 146, que son 6 adultos.

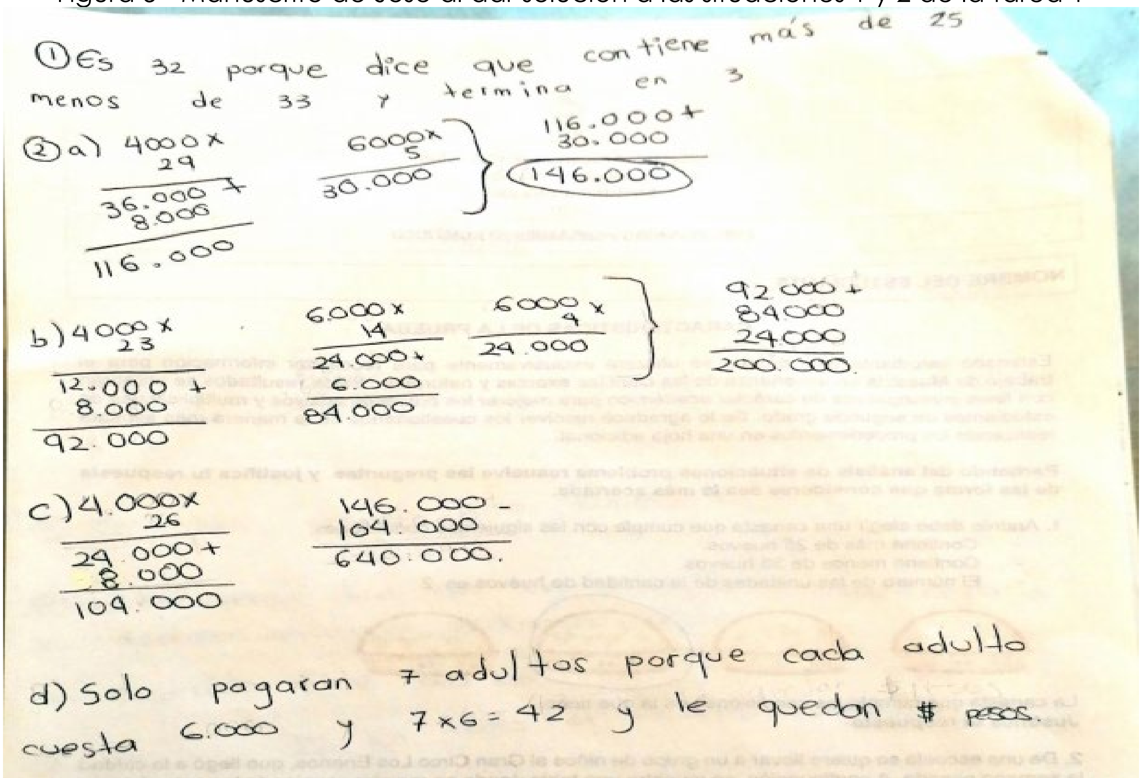
Entrevistador: ¿En tu respuesta por qué colocas 146 en lugar de 146.000?

José: Por ahorrar, nos han enseñado que los ceros siempre se colocan al final, porque así es más fácil hacer las operaciones

Entrevistador: ¿Por qué multiplicaste por 6.000?

José: Porque es el valor de la entrada de un adulto.

Figura 5 - Manuscrito de José al dar solución a las situaciones 1 y 2 de la tarea 1



Fuente: El autor (2021).

En las respuestas dadas por José a la situación 1 de la tarea 1, análogo a lo realizado por sus compañeros, hizo adecuadas comparaciones, utilizando las condiciones dadas, justificando por qué escogió esa respuesta, y mostrándose muy seguro de sí al hacerlo. Al igual que José, el 76.3% de sus compañeros, en las soluciones dadas a la situación 2 de la tarea 1, las operaciones realizadas, fueron por multiplicaciones directas y sumas de los resultados, utilizando el algoritmo de la multiplicación que se usa tradicionalmente en Colombia. Considerando la disposición de la información de la situación 2 en una tabla, en la que, en una columna se coloca la información de las personas y en la otra el valor a pagar, y que el estudiante para dar su respuesta, debe articular con otra información que se da por fuera de la tabla (BROUSSEAU; D' AMORE, 2018), la solución dada por este grupo de estudiantes, supera las expectativas sugeridas por el Colombia (2006) para ese nivel escolar, pues las multiplicaciones realizadas fueron directas. Además, los restantes (23,7%) presentaron algún tipo de dificultades al resolver esta situación. Dichas dificultades consistieron en sumar todas las personas que asistirían al circo, sin tener en cuenta que el precio pagado por un niño era diferente al pagado por un adulto; combinar los valores que se debían pagar con el número de personas que asistieron al circo. Asimismo, consideraron que cada niño debía ir acompañado de un adulto, lo que pudo ser motivado por factores ontogenéticos, ligados a la inseguridad que se vive en algunas regiones del país, donde los niños no pueden salir solos a la calle; o sumar las personas que asistieron al circo con el precio que estas debían pagar por concepto de entrada.

En aquellas situaciones donde se pedía encontrar uno de los factores, el 40,8% de los estudiantes inició multiplicando inductivamente el factor conocido por los números naturales, iniciando en 1, hasta llegar a la respuesta; por su parte el 42,1%, sumó el factor conocido tantas veces como fuera necesario, hasta llegar a la respuesta y 17,1%, dio respuestas incorrectas. Teniendo en cuenta que en este tipo de situaciones se utiliza la idea intuitiva del concepto de ecuación para encontrar una incógnita (AMAYA DE ARMAS; CASTELLANOS; PINO-FAN, 2021), las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolverlas, son bastante complejas, pues, operaron de forma analítica para encontrar las cantidades indeterminadas (RADFORD, 2014), utilizando procedimientos aritméticos propios de los niveles iniciales de algebrización (BAUTISTA-PÉREZ; BUSTAMANTE-ROSARIO; AMAYA DE ARMAS, 2021).

En relación a la Identificación y uso de las convenciones dadas en las actividades, esto es, en aquellas situaciones donde se requería la interpretación de la multiplicación como una agrupación convencional, similar a lo reportado por Jacob y Willis (2003), un 35.5% de los estudiantes identificaban grupos iguales en los elementos de las situaciones planteadas, sumando repetidas veces el valor convencional, y otro grupo (47.4%), en todas las actividades realizó sumas repetidas para obtener sus respuestas. Mientras los restantes (17,1%) mecanizaron una forma de realizar las operaciones, sin hacer un uso adecuado de las convenciones establecidas en las situaciones, centraron su atención en el conteo de los objetos figurales convencionales, dando como respuesta el resultado de este conteo. Este último grupo de estudiantes acudió a un tipo de comparación relativa y no absoluta (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2010), pues, considerando únicamente lo aditivo de la estructura, en la realización del conteo, sin tener en cuenta la composición de las unidades convencionales utilizadas, ni las proporciones que tales unidades pueden generar (CEBOLA; BROCARDO, 2019). Por las características de las dificultades, a este grupo de niños habría que reforzárseles elementos que les faciliten utilizar estrategias de agrupamiento y conteo que los lleven a reflexionar en torno a soluciones más complejas (JACOB; WILLIS, 2003). Estos niños parecen no comprender que los mismos grupos también se pueden contar, y que los resultados del conteo se pueden utilizar para hacer multiplicaciones sobre los contenidos de las convenciones establecidas para llegar a una respuesta. Asimismo, la forma mecánica en que resolvían las operaciones los hizo realizar multiplicaciones en un solo sentido, como si el multiplicando y el multiplicador debieran dejarse fijos, haciendo inoperante la propiedad conmutativa de la multiplicación. Los procesos comprensivos mostrados por este último grupo de estudiantes fueron de tipo instruccional, ya que se limitaron a desarrollar los algoritmos y realizar operaciones, sin dar evidencias de comprender las estructuras numéricas, sin articular las pocas representaciones que produjeron, y sin argumentar sobre la forma como desarrollaron los procedimientos (CHINNAPPAN, 2002). Seguidamente se muestran algunos fragmentos de la entrevista realizada a Karen al resolver la situación 1 de la tarea 2:

Entrevistador: ¿Cómo resolviste esta situación?

Karen: Mirando la tabla me di cuenta que Melendi es el que más discos vendió

Entrevistador: ¿Qué resultado obtuviste en este ejercicio?

Karen: Me dio nueve

Entrevistador: ¿Cómo llegaste a ese resultado?

Karen: Conté los discos que vendieron todos los cantantes y me dio nueve

Entrevistador: Según tu respuesta ¿ningún cantante alcanzó a ganar un premio?

Karen: No porque para ganar el premio debe vender 100 discos y ninguno alcanzó a llegar a los 100

Entrevistador: ¿Y con nueve discos la discografía le entrega el premio?

Karen: No, se lo da ahora que complete 100 discos

Entrevistador: ¿Por qué entonces estos artistas recibieron premios?

Karen: Espere y reviso bien. Ahora sí, me dio 900 discos

Entrevistador: ¿Cómo llegaste a esa respuesta?

Karen: Porque los cantantes han recibido nueve premios, y como cada premio es de cien discos, entonces sume 100 +100 + 100 + 100 + 100 + 100 +100 + 100 + 100 y me dio 900.

Karen al igual que el 64.4% de sus compañeros, inicialmente, no interpretó adecuadamente la situación, lo que la condujo, a dar respuestas erróneas, dando como respuesta el conteo de los premios de los cantantes, y similar a lo reportado por Santos y Rodrigues (2019) no tuvo en cuenta el valor convencional asignado a cada premio. Luego de contar todos los premios y multiplicar por 100, entonces dio una respuesta adecuada. Este tipo de respuestas muestra que el pensamiento multiplicativo de este pequeño grupo de estudiantes, está mucho más desarrollado que el de sus demás compañeros, pues, incluyeron en sus estrategias de solución, tanto las figuras contables, como las convenciones del valor establecido para cada figura, lo que pudo facilitar que sus respuestas fueran más adecuadas a las soluciones esperadas.

Consideraciones sobre la relevancia de los resultados

Los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo, han llevado a los autores a pensar que para que este tipo de actividades sea relevante en el desarrollo formativo de los estudiantes de este nivel de enseñanza, se deberían tener las siguientes condiciones.

❖ Que las actividades que se planteen se configuren con situaciones problema del contexto sociocultural donde habitan los estudiantes, con elementos científicos y tecnológicos, de tal forma, que les faciliten articular sus presaberes con conceptos disciplinares y elementos socioculturales correspondientes.

- ❖ Que en el proceso instructivo se reproduzcan todas las representaciones posibles del objeto estudiado, y se haga un análisis de congruencias de los elementos equivalentes, ostensibles en cada una de ellas.
- ❖ Que en las situaciones problema se enfatice en la representación de elementos convencionales agrupados, que les faciliten a los estudiantes iniciarse en procesos de abstracción usando elementos del contexto.
- ❖ Que los resultados del proceso evaluativo sean utilizados como insumo básico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.
- ❖ Finalmente, teniendo en cuenta los resultados obtenidos, pudiera ser útil que los estudiantes compartan con sus compañeros, sus estrategias de solución a cada situación problemas de estructuras multiplicativas, pues el uso de múltiples estrategias, puede ampliar su horizonte y llevarlos a futuras soluciones más rápidas y adecuadas. Asimismo, el solo hecho de comunicar sus resultados, y la interacción con pares, lleva a los estudiantes a utilizar argumentos estructurados, que los harán ajustar los procesos comprensivos; por lo que es fundamental la gestión del profesor como formalizador de resultados, promoviendo, moderando las discusiones y confrontando ideas en el proceso argumentativo (SOLAR-BEZMALINOVIC, 2018).

Conclusiones

Luego de hacer el análisis de la información, se pueden formular las siguientes conclusiones: Respecto al uso del pensamiento aditivo para llegar al pensamiento multiplicativo, les facilitó a los estudiantes resolver las situaciones y responde las cuestiones por las que se indagaron, es decir, establecer conexiones entre estructuras y establecer algunas diferencias entre ellas (AINSWORTH; LABEKE, 2004).

Respecto a la pertinencia del marco teórico utilizado, se destaca, el papel de las representaciones semióticas, como elementos articuladores de los objetos matemáticos, y de mucha utilidad en los procesos comprensivos de los estudiantes, pues, las conexiones que hicieron de los elementos socioculturales inmersos en las situaciones contextualizadas con elementos conceptuales, facilitó la comprensión de los problemas (AINSWORTH; LABEKE, 2004).

Asimismo, el paso a paso de las entrevistas basadas en las tareas, fungió como elemento interventivo, pues, en su interactuar, los estudiantes fueron ganando protagonismo, adoptando una actitud activa de toma de decisiones, lo que los llevó a minimizar sus dificultades al resolverlas y a cambiar sus concepciones erróneas dando respuestas más adecuadas a las tareas (IZAGIRRE; CAÑO; ARGUIÑANO, 2018).

La comprensión de los valores posicionales y de las relaciones de orden entre las cantidades involucradas en las situaciones problema utilizadas, ayudó a los estudiantes a dar solución a las tareas, y a verificar requisitos que les facilitó interpretar las situaciones y a escoger las operaciones que finalmente utilizaron para dar sus respuestas, así como a elaborar argumentos para justificar la forma como realizaron los procesos y procedimientos de solución.

Respecto a la representatividad de la muestra se puede decir que, aunque esta fue pequeña el nivel de desarrollo de pensamiento numérico en los estudiantes de este núcleo educativo parece ser muy homogéneo, por lo que con una muestra pequeña pudiera lograrse una representatividad satisfactoria.

Respecto a la validez de los resultados, obtenidos utilizando herramientas virtuales, se puede decir que la falta de seguridad de que las soluciones hayan sido dada por los estudiantes, sin la ayuda de un adulto, es una de las grandes limitaciones que podemos reportar en este estudio, pues no hubo forma de establecer un control más riguroso al respecto.

Referencias

AMAYA DE ARMAS, T. Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico- matemático de futuros profesores de matemáticas en el desarrollo de una clase utilizando funciones. *Revista Bolema*, Rio Claro, SP, v. 34, n. 66, p. 110-131, 2020. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06. Disponible en: https://www.scielo.br/j/bolema/a/HfyHn3MvjmDpCZ55Qg3vRnn/?format=pdf&lang=es. Acceso en: 25 jul. 2022.

AMAYA DE ARMAS, T.; CASTELLANOS, A. G.; PINO-FAN, L. R. Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Revista Uniciencia*, Heredia, v. 35, n. 2, p. 1-21, 2021. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.35-2.12. Disponible en: https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/14504. Acceso en: 2 dic. 2022.

AINSWORTH, S.; LABEKE, N. van. Multiple forms of dynamic representation. *Learning and Instruction*, Oxford, v. 14, n. 3, p. 241-255, 2004.

ARIAS CARMONA, A. P. *Desarrollo de pensamiento numérico en estudiantes de segundo año de educación básica, con el uso de situaciones problema de estructuras multiplicativas*. 2021. 131 f. Tesis (Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales) – Facultad de las Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2021.

ARTEAGA-MARTÍNEZ, B.; MACÍAS, J.; PIZARRO, N. La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *Revista Uniciencia*, Heredia, v. 34, n. 1, p. 263-280, 2020. DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.15. Disponible en: https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/12779/17822. Acceso en: 9 sep. 2022.

ÁVALOS ESPARZA, O.; SOLARES PINEDA, D. V. Los ceros también valen". Conocimientos de alumnos de sexto grado de primaria sobre el cero como elemento del sistema decimal. *Revista Educación Matemática*, Ciudad de México, v. 30, n. 3, p. 55-82, 2018. DOI: http://dx.doi.org/10.24844/EM3003.03. Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol30/3/03_REM_30-3.pdf. Acceso en: 11 sep. 2022.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special?. *Journal of Teacher Education*, Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BAUTISTA-PÉREZ, J. L.; BUSTAMANTE-ROSARIO, M. H.; AMAYA DE ARMAS, T. Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. *Revista Educación Matemática*, Ciudad de México, v. 33, n. 1, p. 125-152, 2021. DOI: http://dx.doi.org/10.24844/EM3301.05. Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol33/1/05_REM_33-1.pdf. Acceso en: 23 mar. 2022.

BERNÁRDEZ, E. *El papel del léxico en la organización textual.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 1995.

BROUSSEAU, G. *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zarzal, 2007.

BROUSSEAU, G.; D' AMORE, B. Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica de lo empírico a lo didáctico. *Revista Educación Matemática*, [*S. l.*], v. 30, n. 3, p. 41-54, 2018. DOI: http://dx.doi.org/10.24844/EM3003.02. Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol30/3/02_REM_30-3.pdf. Acceso en: 17 ene. 2021.

BRUNER, J.; GOODNOW, J.; AUSTIN, G. *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Narcea Ediciones, 2001.

BRYANT, P.; NUNES, T.; TZEKAKI, M. Multiplicative reasoning and mathematics achievement: multiplicative reasoning and mathematics achievement. *In*: TZEKAKI, M.; KALDRIMIDOU, M.; SAKONIDI, H. (ed.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Thessaloniki, Greece: PME, 2009. p. 217-224.

CEBOLA, G.; BROCARDO, J. Strategies, representations, and flexibility in multiplicative comparison task resolution. *Revista Bolema*, Rio Claro, SP, v. 33, n. 64, p. 568-590, 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a06. Disponible en: https://www.scielo.br/j/bolema/a/Sjnb6vB9dF7yCZRzNgtQvTy/?lang=pt. Acceso en: 19 ene. 2022.

CHINNAPPAN, M. Modelling of multiplicative structures in a B10B Program. *In*: WEI-CHANG, Y.; CHU, C.; ALWIS, T. de; Bhatti, F. (ed.). *Proceedings of the Seventh Asian Technology Conference in Mathematics*. Blacksburg, VA: ACTM, 2002. p. 339-348.

COLOMBIA. Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998.

COLOMBIA. Ministerio de Educación Nacional. *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 2006.

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano*: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. 2. ed. Cali: Universidad del Valle, 2017.

ESCUDERO RIOS, I.; GODED RAMBAUD, E.; LAGO CASTRO, P. *Tratamiento y aplicación de las artes en las diversas áreas del currículo*. Madrid: Amazon, 2010.

FARFÁN MÁRQUEZ, R. M. *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. Barcelona: Editorial Gedisa S.A., 2012.

GOLDIN, G. A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. *In*: KELLY, A.; LESH, R. (ed.). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New York: Routledge, 2000. p. 517-545.

FERNÁNDEZ VERDÚ, C.; LLINARES, S. De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, Madrid, v. 34, n, 1, p. 67-80, 2010.

IZAGIRRE, A.; CAÑO, L.; ARGUIÑANO, A. La competencia matemática en Educación Primaria mediante el aprendizaje basado en proyectos. *Revista Educación Matemática*, Ciudad de México, v. 32, n. 3, p. 241-262, 2020. DOI: http://dx.doi.org/10.24844/EM3203.09. Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol32/3/09REM32-3.pdf. Acceso en: 20 jul. 2021.

JACOB, L.; WILLIS, S. *The development of multiplicative thinking in young children*. *In*: ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP, 26., 2003, Geelong. *Proceedings* […]. Geelong: [Deaking University], 2003.

MÚNERA CÓRDOBA, J. J. Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Revista Educación y Pedagogía*, [*S. l.*], v. 23, n. 59, p. 179-193, 2011.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (Estados Unidos). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla España: Proyecto Sur, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (Estados Unidos). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8*. Reston EE. UU: NCTM, 2010.

OBANDO ZAPATA, G.; MÚNERA CÓRDOBA, J. J. Las situaciones problemas como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista Educación y Pedagogía*, [*S. l.*], v. 15, n. 35, p. 183-199, 2003. Disponible en: https://educrea.cl/wp-content/uploads/2018/01/DOC1-Situacionesproblemaestrategia.pdf. Acceso en: 23 mar. 2021.

RADFORD, L. The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, [*S. l.*], v. 26, p. 257-277, 2014.

RAU, M.; ALEVEN, V.; RUMMEL, N. Supporting students in making sense of connections and in becoming perceptually fluent in making connections among multiple graphical representations. *Journal of Educational Psychology*, Arlington, v. 109, n. 3, p. 355-373, 2017. DOI: http://dx.doi.org/10.1037/edu0000145. Disponible en: https://psycnet.apa.org/doiLanding?doi=10.1037%2Fedu0000145. Acceso en: 12 dic. 2021.

RIVERA LÓPEZ, M. I.; SALGADO BÉLTRAN, G.; DOLORES FLORES, C. Explorando las conceptualizaciones de la pendiente en estudiantes universitarios. *Revista Bolema*, Rio Claro, SP, v. 33, n. 65, p. 1027-1046, 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a03. Disponible en: https://www.scielo.br/j/bolema/a/sRTHMjD9Lf4Y3wXtgdtcMJN/?format=pdf&lang=es. Acceso en: 20 dic. 2021.

SANTOS, S.; RODRIGUES, M. The development of multiplicative calculation flexibility by 3 rd grade students. *Revista Bolema*, Rio Claro, SP, v. 33, n. 64, p. 542-567, 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a05. Disponible en: https://www.scielo.br/j/bolema/a/Ccj7NBZGjxYqp76MBQRpNqb/?format=pdf&lang=pt. Acceso en: 21 dic. 2021.

SOLAR-BEZMALINOVIC, H. Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, Bogotá, n. 74, p. 155-176, 2018.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M. dos. The importance of expliciting the one-to-many correspondence in solving problems of multiplicative structure. *Revista Bolema*, Rio Claro, SP, v. 35, n. 69, p. 112-128, 2021. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a06. Disponible en: https://www.scielo.br/j/bolema/a/yNWVCJtCP7TWJkL5SkYtg4x/?lang=pt. Acceso en: 23 mar. 2021.

SEVILLANO GARCÍA, M. L. (coord.). *Nuevas tecnologías en educación social*. Madrid: McGraw Hill, 2008.

WRIGHT, V. J. *The development of multplicative thinking and proportional reasoning*: models of conceptual learning and transfer. 2011. Thesis. (Doctoral of Philosophy) - University of Waikato, Waikato, 2011.

ZAZKIS, R.; MAMOLO, A. On numbers: concepts, operations, and structure. *In*: GUTIÉRREZ, Á.; LEDER, G. C.; BOERO, P. (ed.). *The second handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers, 2016. p. 39-71. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_2. Disponible en: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-6300-561-6_2. Acceso en: 21 ene. 2022.