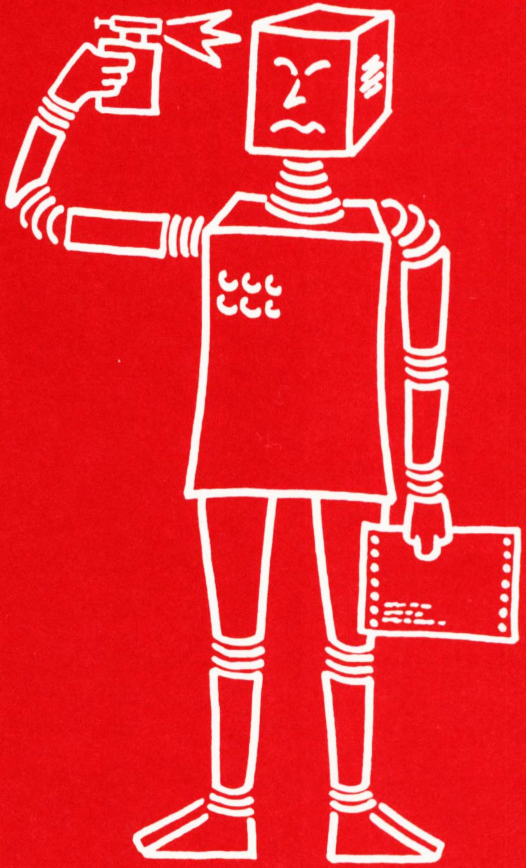
SEKI-PROJEKT

Universität Kaiserslautern
Fachbereich Informatik
Postfach 3049
D-6750 Kaiserslautern
West Germany

Universität Karlsruhe
Institut für Informatik I
Postfach 6380
D-7500 Karlsruhe
West Germany



Ein mehrsortiger Resolutionskalkül mit Paramodulation

Christoph Walther
Institut für Informatik I
Universität Karlsruhe
Postfach 6380
D-7500 Karlsruhe 1

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
Postfach 63 80, D 7500 Karlsruhe 1

Interner Bericht 23/84

EIN MEHRSORTIGER RESOLUTIONSKALKÜL MIT PARAMODULATION

Christoph Walther
Institut für Informatik I
Universität Karlsruhe
Postfach 6380
D-7500 KARLSRUHE 1

EIN MEHRSORTIGER RESOLUTIONSKALKÜL MIT PARAMODULATION

Christoph Walther
Institut für Informatik I
Universität Karlsruhe
Postfach 6380
D-7500 Karlsruhe 1

ZUSAMMENFASSUNG

Der Resolutionskalkül mit Paramodulationsregel wird zu einem mehrsortigen Kalkül erweitert. Als Grundlage für das automatische Beweisen erhält man mit diesem Kalkül einen stark reduzierten Suchraum und einfachere Beweise. Die Vollständigkeit, die Korrektheit und der Sortensatz, der den neuen Kalkül mit seinem einsortigen Gegenstück in Beziehung setzt, werden bewiesen. Ergebnisse über Grundtermersetzungen und Unifikation in einem mehrsortigen Kalkül werden vorgestellt. Die Implementierung eines automatischen Beweisers für den neuen Kalkül wird beschrieben. Die Vorteile der Methode werden anhand ausgewählter Beispiele belegt.

ABSTRACT

The resolution calculus with paramodulationrule is extended to a many-sorted calculus. As a basis for Automated Theorem Proving, this many-sorted calculus leads to a remarkable reduction of the search space and also to simpler proofs. Soundness and completeness of the new calculus and the Sort-Theorem, which relates the many-sorted calculus to its one-sorted counterpart, are shown. In addition results about groundterm rewriting and unification in a many-sorted calculus are obtained. The practical consequences for an implementation of an automated theorem prover based on the many-sorted calculus are described. The advantages of the proposed method is verified by certain examples.

INHALT

"As a rule," said Holmes, "the more bizarre a thing is the less mysterious it proves to be. It is your commonplace, featureless cases which are really puzzling."

A.C. Doyle, The Red-Headed League

0. Mehrsortige Kalküle und automatisches Beweisen

Sorten finden häufig Verwendung beim praktischen Gebrauch der Prädikatenlogik erster Stufe. Man schreibt beispielsweise Formeln wie

(i) $\forall x{:}S.\Phi(x)$ bzw. $\exists x{:}S.\Phi(x)$,

d.h. "für alle x der Sorte S..." oder "es gibt ein x der Sorte S..." und behandelt diese Ausdrücke formal als Abkürzungen für

(ii) $\forall x.\ S(x) \supset \Phi(x)$ bzw. $\exists x.\ S(x) \wedge \Phi(x)$.

Man verwendet also *sortenrechte* Formeln (wie z.B. in (i))als bequeme Kurzschreibweise für gewöhnliche prädikatenlogische Formeln (wie z.B. in (ii)). Fast alle Mathematikbücher sind in einer solchen (meist impliziten) Sortensprache geschrieben, wobei die Verwendung bestimmter Alphabete meist die Sorte der bezeichneten Objekte angibt, wie z.B. i,j,k ... für natürliche Zahlen, $\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}$ ... für Vektoren usw. Aber Sorten beeinflussen darüberhinaus die Herleitungen von Formeln aus gegebenen sortenrechten Formeln: Ist beispielsweise P ein auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definiertes einstelligen Prädikat, so wird man aus $\forall x{:}\mathbb{Z}.\ P(x)$ nicht $P(\sqrt{2})$ herleiten wollen. Mit der Verwendung von Sorten werden Beweise vereinfacht, da ein *mehrsortiger Kalkül* für Schlüsse in *mehrsortigen Theorien* besser geeignet ist, und es ist daher nicht weiter verwunderlich, daß die Verwendung sortenrechter Formeln sowie Herleitungen, die die Sortiertheit von Formeln berücksichtigen, im praktischen Ge-

Gebrauch der Prädikatenlogik zu finden sind. Damit stellt sich die Frage, ob und wie weit die Vorteile, die ein mehrsortiger Kalkül bietet, nicht auch für das automatische Beweisen nutzbar gemacht werden können. Doch was genau ist unter einem mehrsortigen Kalkül zu verstehen und welcher Art sind die Vorteile, die er bietet?

Mehrsortige Kalküle Die Entwicklung eines mehrsortigen Kalküls aus einem (korrekten und vollständigen) einsortigen Kalkül läßt sich wie folgt skizzieren: Gegeben sei eine Menge von *Sortensymbolen*, die durch die sogenannte *Untersortenordnung* geordnet ist. Jedem Variablen-, Konstanten- und Funktionssymbol (des einsortigen Kalküls) wird genau ein Sortensymbol, die sogenannte *Ergebnissorte*, zugeordnet. Die *Sorte eines Terms* ist dann durch die Ergebnissorte des äußersten Symbols dieses Terms bestimmt. Weiter wird jeder Argumentstelle eines Funktions- oder Prädikatensymbols (des einsortigen Kalküls) genau ein Sortensymbol, die sogenannte *Argumentsorte* (für die jeweilige Argumentstelle) zugewiesen. Bei der Bildung der Formeln des mehrsortigen Kalküls, den *sortenrechten Formeln*, dürfen nur solche Terme als Argument eines Funktions- oder Prädikatensymbols verwendet werden, deren Sorte eine Untersorte oder gleich der Argumentsorte für die entsprechende Argumentstelle ist.

Die *Schlußregeln* des mehrsortigen Kalküls sind die Schlußregeln des einsortigen Kalküls, jedoch mit der Einschränkung, daß aus sortenrechten Formeln nur sortenrechte Formeln durch Anwendung der eingeschränkten Schlußregeln gewonnen werden können. Bezeichne nun $\vdash_{\Sigma} \Phi$, daß die Formel Φ ein Theorem des mehrsortigen Kalküls ist und HYP $\vdash_{\Sigma} \Phi$, daß Φ aus der Menge der (sortenrechten) Hypothesen HYP im mehrsortigen Kalkül ableitbar ist. Weiter sei angenommen, daß man einen *Wahrheitsbegriff* für sortenrechte Formeln habe. Dabei soll $\Vdash_{\Sigma} \Phi$ die Allgemeingültigkeit einer sortenrechten Formel bezeichnen und HYP $\Vdash_{\Sigma} \Phi$ für die semantische Implikation stehen. Natürlich ist man nur einem mehrsortigen Kalkül interessiert, der vollständig und korrekt ist, d.h. $\vdash_{\Sigma}$ und $\Vdash_{\Sigma}$ müssen so definiert sein, daß

(1) $\Vdash_{\Sigma} \Phi$ gdw. $\vdash_{\Sigma} \Phi$

für jede sortenrechte Formel Φ gilt.

Angenommen, die Beziehung (1) gilt. Dann ist es weiter von Interesse, welches Verhältnis zwischen den Theoremen des mehrsortigen und denen des einsortigen Kalküls besteht. Um einen Vergleich beider Kalküle zu ermöglichen, werden die Zuordnungen von Konstanten- und Funktionssymbolen zu ihren Ergebnis- und Argumentsorten sowie die Untersortenordnung durch eine Menge prädikatenlogischer Formeln, der Menge A^{Σ} der *Sortenaxiome*, dargestellt. Außerdem wird für jede sortenrechte Formel Φ (wie z.B. die Formeln in (i)), deren *Relativierung* $\hat{\Phi}$ (oder auch Sortenbeschränkung) gebildet (wie z.B. die Formeln in (ii)). Dabei werden Sortensymbole als einstellige Prädikatensymbole verwendet, um die Ergebnissorten der Variablensymbole anzugeben. Mit Hilfe dieser Begriffsbildungen läßt sich nun die Beziehung zwischen den Theoremen des einsortigen Kalküls und denen des aus ihm hervorgegangenen mehrsortigen Kalküls angeben: Die Definitionen von $\vdash_{\Sigma}$ und $\Vdash_{\Sigma}$ sollen so beschaffen sein, daß sie den Forderungen

(2.1) $\Vdash_{\Sigma} \Phi$ gdw. $A^{\Sigma} \Vdash \hat{\Phi}$

(2) und

(2.2) $\vdash_{\Sigma} \Phi$ gdw. $A^{\Sigma} \vdash \Phi$

für jede sortenrechte Formel Φ genügen. Forderung (2) heißt der *Sortensatz*, (2.1) ist sein *modelltheoretischer* Teil und (2.2) der *beweistheoretische* Teil. Mit dem Sortensatz werden also beide Kalküle miteinander in Beziehung gesetzt. Darüberhinaus zeigt der Sortensatz die Vorteile des mehrsortigen Kalküls auf:

Man erhält im allgemeinen eine *kürzere* Herleitung mit *kleineren* Formeln aus einer *kleineren* Menge von Hypothesen, wenn man $\vdash_{\Sigma} \Phi$ anstatt $A^{\Sigma} \vdash \hat{\Phi}$ beweist.

Ursache dafür ist, daß Aussagen über Sortenbeziehungen im einsortigen Kalkül explizit hergeleitet werden müssen, während diese im mehrsortigen Kalkül in die Schlußregeln gleichsam eingebaut sind.

Zusammenfassend läßt sich die Beziehung zwischen ein- und mehrsortigem Kalkül durch folgendes Diagramm darstellen:

$$\begin{tikzcd}
\Vdash_{\Sigma} \Phi \arrow[r, leftrightarrow, "(1)"] \arrow[d, leftrightarrow, "(2.1)"'] & \vdash_{\Sigma} \Phi \arrow[d, leftrightarrow, "(2.2)"] \\
A^{\Sigma} \Vdash \hat{\Phi} \arrow[r, leftrightarrow, "(3)"'] & A^{\Sigma} \vdash \hat{\Phi}
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet (3) die Korrektheit und Vollständigkeit des gegebenen Kalküls.

Arbeiten zur mehrsortigen Prädikatenlogik Die Untersuchungen zur mehrsortigen Prädikatenlogik reichen ca. 50 Jahre zurück. Die in diesem Zeitraum vorgelegten Arbeiten waren durch die Beobachtung motiviert, daß bestimmte axiomatische Systeme mehr als eine Klasse fundamentaler Objekte enthalten, wie z.B. Punkte, Geraden und Flächen in der Geometrie. Daher ist es eine natürliche Vorgehensweise, verschiedene Klassen von Variablensymbolen zu verwenden, deren Wertebereiche auf die verschiedenen Klassen der gegebenen Objekte beschränkt sind. Um diesen Sachverhalt formal zu erfassen, wurden - ausgehend von unterschiedlichen Kalkülen erster Stufe - verschiedene Arten mehrsortiger Kalküle entwickelt. Allen vorgeschlagenen Kalkülen ist gemeinsam, daß sie den (jeweiligen) Sortensatz erfüllen, d.h. daß sich diese mehrsortigen Kalküle bezüglich ihrer Mächtigkeit nicht von ihren einsortigen Gegenstücken unterscheiden, wobei aber Herleitungen im mehrsortigen Kalkül i.a. einfacher sind. Im einzelnen sind folgende Arbeiten zu nennen:

In seiner Dissertation stellte *J. Herbrand* eine mehrsortige Version seines Kalküls vor und gab einen Beweis für den beweistheoretischen Teil des Sortensatzes an [Her30]. Dieser Beweis ist jedoch fehlerhaft, da Herbrand nicht erkannte, daß bestimmte Herleitungen in seinem einsortigen Kalkül nicht in Herleitungen des mehrsortigen Kalküls übertragen werden können.

Dieser Fehler wurde von *A. Schmidt* erkannt [Sch38]. Schmidt entwickelte eine mehrsortige Version eines Hilbert-Kalküls ohne Untersorten und bewies den beweistheoretischen Teil des Sortensatzes für diesen Kalkül [Sch38, Sch51].

H. Wang definierte eine mehrsortige Version eines Hilbert-Kalküls ohne Untersorten und ohne Funktionssymbole [Wan52]. Wang bewies die Vollständigkeit und Korrektheit seines Kalküls und den modelltheoretischen Teil des Sortensatzes.

Dieser Beweis war jedoch fehlerhaft, wie von *P.C. Gilmore* gezeigt wurde. Gilmore erweiterte den Kalkül von Wang durch Untersorten und gab einen Beweis für den beweistheoretischen Teil des Sortensatzes für diesen erweiterten Kalkül an [Gil58].

T. Hailperin stellte einen Kalkül vor, der als Verallgemeinerung von Wangs mehrsortigem Kalkül aufgefaßt werden kann [Hai57]. In diesem Kalkül können Sortenbeziehungen durch beliebige Formeln ausgedrückt werden, anstatt durch atomare Formeln, d.h. mit einstelligen Prädikaten. Hailperin bewies einen Satz, der dem beweistheoretischen Teil des Sortensatzes entspricht.

A. Oberschelp schlug verschiedene mehrsortige Versionen eines

Kalküls von *Montague* und *Henkin* [MH56] vor. In diesen Kalkülen sind sowohl Funktionssymbole als auch Untersortenbeziehungen zugelassen. Oberschelp bewies sowohl die Vollständigkeit und Korrektheit dieser Kalküle als auch die jeweiligen modelltheoretischen Teile der zugehörigen Sortensätze [Obe62].

Verschiedene mehrsortige Kalküle, die auf dem Kalkül des natürlichen Schließens basieren [Gen34], wurden von *A.V. Idelson* untersucht [Ide64].

Automatisches Beweisen Mit der Entwicklung des automatischen Beweisens und den damit verbundenen Implementierungen von Beweissystemen auf Rechenanlagen bildeten Logikkalküle zunehmend die Grundlage zur *Berechnung* von Beweisen. Die Vorteile mehrsortiger Kalküle blieben dabei nicht unbemerkt (vergl. [Hay71, Hen72, Coh83]). Auch verwendeten verschiedene Beweissysteme Arten mehrsortiger Kalküle [Wey77, Cha78, BM79], allerdings ohne die Eigenschaften dieser Kalküle theoretisch untersucht zu haben. Durch die Entwicklung des automatischen Beweisens erhalten die zitierten Arbeiten zur mehrsortigen Prädikatenlogik (die in diesem Gebiet bisher unbeachtet blieben) eine praktische Bedeutung:

Die meisten Beweissysteme basieren auf einem Kalkül erster Stufe, dessen Schlußregeln die Faktorisation, die Resolution und die Paramodulation sind [Rob65, WR73], und dessen Formeln (auch Klauseln genannt) in skolemisierter konjunktiver Normalform vorliegen [Lov78]. Ein solcher Kalkül soll hier *RP-Kalkül* genannt werden. In dieser Arbeit wird der *ΣRP-Kalkül*, eine mehrsortige Version des RP-Kalküls, entwickelt sowie eine Definition der *E-Unerfüllbarkeit* von Mengen *sortenrechter Klauseln* gegeben.

Die Korrektheit und die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls wird bewiesen. Weiter wird gezeigt, daß dieser mehrsortige Kalkül den Sortensatz erfüllt. Die in dieser Arbeit vorgestellten

Ergebnisse lassen sich in folgendem Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{tikzcd}
S \text{ ist } \Sigma E\text{-unerfüllbar} \arrow[r, leftrightarrow, "(1)"] \arrow[d, leftrightarrow, "(2.1)"'] & S^E \vdash_{\Sigma RP} \square \arrow[d, leftrightarrow, "(2.2)"] \\
\hat{S} \cup A^{\Sigma} \text{ ist E-unerfüllbar} \arrow[r, leftrightarrow, "(3)"'] & \hat{S}^E \cup A^{\Sigma} \vdash_{RP} \square
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet S^E die Erweiterung einer Menge S von sortenrechten Klauseln durch die Menge aller funktionalreflexiver Axiome [WR73], $\hat{S}(\hat{S}^E)$ ist die Menge aller relativierten Klauseln aus $S(S^E)$ und $\square$ steht für die leere Klausel. Der Begriff "ΣE-unerfüllbar" steht für die E-Unerfüllbarkeit einer sortenrechten Klauselmenge, wobei wie üblich unter E-Unerfüllbarkeit die Unerfüllbarkeit unter der Berücksichtigung der festen Deutung eines bestimmten Prädikatensymbols *E* als syntaktisches Gleichheitszeichen verstanden wird. Mit $\vdash_{\Sigma RP}$ und $\vdash_{RP}$ werden Herleitungen im ΣRP- bzw. im RP-Kalkül angegeben.

1. ÜBERSICHT

Zunächst werden *sortenrechte Termersetzungen* betrachtet, da wesentliche Aspekte von E-Interpretationen mittels Termersetzungssystemen beschrieben werden können. Die dafür entwickelte Technik, Termersetzungen mittels bestimmter partieller Funktionen, den sogenannten *Selektoren*, und durch Selektoren *induzierte Relationen* zu beschreiben, erweist sich dabei als nützliches Handwerkszeug. Mit den so gewonnenen Ergebnissen kann dann die *Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls im Basisfall* (engl. ground case) bewiesen werden.

Es wird gezeigt, daß die Vollständigkeit für den allgemeinen Fall nur dann gegeben ist, wenn die geordnete Menge der Sortensymbole eine bestimmte Struktur besitzt. Außerdem muß im Fall der Paramodulation die Menge der zu widerlegenden Klauseln spezielle Reflexivitätsklauseln enthalten, um die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls zu erzwingen. Es wird gezeigt, daß diese Einschränkungen spezifisch für den ΣRP-Kalkül sind, da sie durch das Prinzip der *größten Allgemeinheit* bedingt werden, das grundlegend für den RP-Kalkül ist.

Es wird dann gezeigt, daß diese Einschränkungen überflüssig sind, wenn der ΣRP-Kalkül um eine zusätzliche Schlußregel, die sogenannte *Abschwächungsregel*, erweitert wird. Diese Regel ist spezifisch für einen mehrsortigen Kalkül, da sie nicht anwendbar ist, wenn die Menge der Sortensymbole einelementig ist. Damit ist der RP-Kalkül als Spezialfall des ΣRP-Kalküls anzusehen. Es werden spezielle Resultate über die *Unifikation im ΣRP-Kalkül* vorgestellt, mit deren Hilfe dann der *Vollständigkeitssatz für den ΣRP-Kalkül im allgemeinen Fall* bewiesen werden kann. Der theoretische Teil der Arbeit wird durch den Nachweis der *Korrektheit des ΣRP-Kalküls* und durch den Beweis des *Sortensatzes* abgeschlossen.

Die Nützlichkeit des ΣRP-Kalküls für das automatische Beweisen wurde durch eine Implementierung in einem Beweissystem, der *Markgraf Karl Refutation Procedure* [BES81, Ohl82], nachgewiesen. Es wird gezeigt, welche Änderungen allgemein erforderlich sind, um ausgehend von einem Beweiser für den RP-Kalkül einen *Beweiser für den ΣRP-Kalkül* zu erhalten.

Der praktische Einsatz des ΣRP-Kalküls im automatischen Beweisen bewirkt eine drastische Reduzierung des Suchraumes und kürzere Widerlegungen kleinerer Mengen kleinerer Klauseln. Die Zusammenhänge zwischen der "Sortiertheit" von Beweisproblemen und den Vorteilen, die der ΣRP-Kalkül gegenüber dem RP-Kalkül bietet, werden anhand ausgewählter Beweisprotokolle der Markgraf Karl Refutation Procedure verdeutlicht.

Ein für mehrsortige Kalküle besonders geeignetes Teilgebiet des automatischen Beweisens ist die *Automatisierung von Induktionsbeweisen*. Es werden die Vorteile eines mehrsortigen Kalküls in diesem Teilgebiet erläutert und mit Problemlösungen verglichen, die bei aus der Literatur bekannten Induktionsbeweissystemen verwendet wurden.

Abschließend wird der hier vorgestellte Kalkül mit einem aus der Literatur bekannten, mehrsortigen Kalkül verglichen. Eine Liste weiterführender Fragestellungen schließt die Arbeit ab.

In dieser Arbeit werden folgende mathematische Kurzschreibweisen verwendet:

id	Identitätsfunktion
$f_{\mid M}$	Restriktion einer Funktion f auf eine Teilmenge M ihres Definitionsbereichs
$f(t)\downarrow$	t ist Element des Definitionsbereichs von f
$f(t)\uparrow$	*nicht* $f(t)\downarrow$, d.h. f ist für t nicht definiert
$f \in (M \to N)$	f ist eine Funktion mit Definitionsbereich M und Wertebereich N
$\circ$	Funktionalkomposition
$\mid$	metasprachliche Negation, z.B. steht $x \nless y$ für *nicht* $x < y$
$\lvert M \rvert$	Kardinalität der Menge M
$M \setminus N$	mengentheoretische Differenz
$M \times N$	kartesisches Produkt der Mengen M und N
$M - L$	Abkürzung für $M \setminus \{L\}$
$\not{\square}$	kennzeichnet das Ende einer Fallunterscheidung in einem Beweis
$\boxtimes$	kennzeichnet das Ende eines Beispiels, einer Definition oder eines Beweises
∇	kennzeichnet die Herleitung eines Widerspruchs in einem (indirekten) Beweis
gdw.	Abkürzung für *genau dann wenn*

2. Grundbegriffe des RP-Kalküls

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe für den RP-Kalkül und die in den nachfolgenden Abschnitten verwendeten Schreibweisen eingeführt. Die zentralen Begriffsbildungen aus der formalen Logik und dem automatischen Beweisen werden dabei als bekannt vorausgesetzt (vergl. [EFT78, Men64, Lov78]).

Syntaktische Begriffe Seien $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}$ paarweise disjunkte Alphabete, wobei $\mathfrak{V}$ eine unendliche Menge von *Variablensymbolen*, $\mathfrak{F}$ eine nicht leere Menge von *Funktionssymbolen* und $\mathfrak{P}$ eine nicht leere Menge von *Prädikatensymbolen* ist. Bezüglich einer als gegeben vorausgesetzten *Stelligkeitsfunktion* für Funktions- und Prädikatensymbole bezeichnet dann *T* die Menge aller wohldefinierten *Terme* über $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{F}$ und *AT* die Menge aller wohldefinierten *atomaren Formeln* (oder kurz *Atome*) über $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{C}$ ist die Menge aller Konstantensymbole, d.h. derjenigen Funktionssymbole mit Stelligkeit 0.

Ein *Literal* ist ein Atom, auch *positives* Literal genannt, oder ein Ausdruck der Form $\bar{A}$, auch *negatives* Literal genannt, wobei A ein Atom ist. Für jedes Literal L bezeichnet $|L|$ das *Atom* und L^c das *Komplement* von L. Das *Prädikatzeichen* von L ist P gdw. $|L| = P(t_1 \ldots t_n)$ für irgendwelche $t_i \in T$. Ein Paar von Literalen mit gleichem Prädikatzeichen heißt *komplementär*, falls das eine positiv und das andere negativ ist. *LIT* steht für die Menge aller Literale. Eine *Klausel* ist eine endliche Menge von Literalen und $\square$ bezeichnet die *leere Klausel*. Die *Klauselsprache* $\mathfrak{L}$ ist die Menge aller Klauseln über $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}$.

Sei D eine Menge von Termen, von Literalen oder von Klauseln, dann ist *vars(D)* die Menge aller in D auftretenden Variablensymbole. D heißt *variablenfremd* gdw. $vars(\{q\}) \cap vars(\{r\}) = \emptyset$ für alle $q,r \in D$ mit $q \neq r$.

Der Index *gr* wird als Abkürzung für *Grund* (engl. *ground*), d.h. Variablenfreiheit verwendet. Beispielsweise ist ein *Grundterm* ein variablenfreier Term und T_{gr} bezeichnet die Menge aller Grundterme. AT_{gr}, LIT_{gr} und $\mathcal{L}_{gr}$ sind entsprechend definiert.

Das Prädikatensymbol $E \in \mathfrak{P}$ wird als syntaktisches Gleichheitszeichen verwendet. S^E bezeichnet die Erweiterung einer Klauselmenge S durch die Menge aller funktionalreflexiven Axiome [WR73]. Die Menge aller *Gleichheitsatome* AT^E ist gegeben durch $AT^E = \{E(q\ r) \mid q,r \in T\}$.

Substitutionen und Unifikatoren Eine Funktion $\sigma \in (T \rightarrow T)$ heißt *Substitution*, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

(1) $\sigma \circ \sigma = \sigma$,

(2) $\sigma_{|\mathfrak{C}} = id$,

(3) $\sigma f(t_1 \ldots t_n) = f(\sigma t_1 \ldots \sigma t_n)$, und

(4) $\{x \in \mathfrak{V} \mid \sigma x \neq x\}$ ist endlich .

Durch die Forderungen (2) und (3) ist jede Substitution σ eindeutig durch ihre Einschränkung $\sigma_{|\mathfrak{V}}$ auf $\mathfrak{V}$ bestimmt. Diese Eigenschaft wird nachfolgend oft genutzt, indem Substitutionen σ mit $\sigma x_i = t_i$ (wobei $x_i \in \mathfrak{V}$, $t_i \in T \setminus \{x_i\}$ und $1 \leq i \leq n$) jeweils durch eine Menge von Paaren $\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ *repräsentiert* werden. Wegen Bedingung (4) sind diese Mengen immer endlich. ε ist die *Identitätssubstitution* und *SUB* steht für die Menge aller Substitutionen. Die Anwendung von Substitutionen auf Literale, Mengen von Termen und auf Mengen von Literalen ist wie gewohnt definiert.

Der Definitionsbereich (engl. *domain*) einer Substitution σ ist durch $DOM(\sigma) = \{x \in \mathfrak{V} \mid \sigma x \neq x\}$ definiert. Der Wertebereich (engl. *codomain*) von σ ist gegeben durch $COD(\sigma) = \sigma(DOM(\sigma))$. Für $V \subset \mathfrak{V}$ und $\theta, \lambda \in SUB$ sagt man, daß θ und λ auf V *übereinstimmen*, kurz $\theta = \lambda[V]$, gdw. $\theta x = \lambda x$ für jedes $x \in V$. Das nachfolgende Lemma wird in den späteren Abschnitten häufig verwendet:

Lemma 2.1 Seien θ, $\lambda \in$ SUB, $t \in$ T und V, W $\subset \mathfrak{V}$. Dann gilt:
(1) $=[V]$ ist eine Äquivalenzrelation ,
(2) $\theta = \lambda[V \cup W]$ gdw. $\theta = \lambda[V]$ und $\theta = \lambda[W]$, und
(3) wenn $vars(\{t\}) \subset V$ und $\theta = \lambda[V]$, dann $\theta t = \lambda t$.

Eine *Umbenennungssubstitution* ν für eine Teilmenge V von $\mathfrak{V}$ ist eine Substitution mit folgenden Eigenschaften:

(1) $DOM(\nu) = V$,

(2) $COD(\nu) \subset \mathfrak{V}$, und

(3) $\nu_{|V}$ ist injektiv .

Eine Umbenennungssubstitution für eine Klausel C oder eine Klauselmenge S ist eine Umbenennungssubstitution für die Menge aller Variablensymbole in C bzw. in S.

Für eine Substitution σ und eine Klausel C heißt σC eine *Instanz* von C, und falls $\sigma C \in \mathfrak{L}_{gr}$, eine *Grundinstanz* von C.

Eine Substitution σ ist ein *Unifikator* einer nicht leeren Menge D von Termen oder Atomen gdw. $|\sigma D|=1$. In diesem Fall *unifiziert* σ die Menge D und D heißt *unifizierbar*. σ heißt *allgemeinster Unifikator* von D gdw. σ D unifiziert und außerdem $\theta = \theta \circ \sigma$ für jeden Unifikator θ von D gilt.

Selektoren Eine partielle Funktion $\delta \in (T \to T)$ heißt *Argumentselektor* gdw. es eine natürliche Zahl $k(\delta)$ gibt, so daß für jeden Term $f(t_1 \ldots t_n)$ mit $k(\delta) \leq n$ gilt: $\delta(f(t_1 \ldots t_n)) = t_{k(\delta)}$. *SEL* bezeichnet die Menge aller Argumentselektoren. Eine partielle Funktion

$\alpha \in (T \to T)$ heißt *Selektor* gdw.

(1) $\alpha = id_{|T}$ oder

(2) α ist ein Argumentselektor oder

(3) α entsteht durch Funktionalkomposition endlich vieler Argumentselektoren.

SEL* ist die Menge aller Selektoren und *SEL*$^+$ steht für $SEL^* \setminus \{id_{|T}\}$. Ähnlich wie Substitutionen durch endliche Mengen von Paaren aus $\mathfrak{V} \times T$ dargestellt werden können, lassen sich Selektoren durch endliche Listen (oder Zeichenreihen) natürlicher Zahlen *repräsentieren* (wobei einem Selektor $\alpha = \delta_n \circ \ldots \circ \delta_1$, $\delta_i \in SEL$, die Liste $\langle k(\delta_n), \ldots, k(\delta_1) \rangle$ zugeordnet wird). Diese Listen sind in der Literatur als *Occurrences* oder *Positions* bekannt (vergl. [Ros73, HO80]).

Jeder Selektor α induziert eine symmetrische und transitive Relation $\underset{\alpha}{\sim} \subset T \times T$ durch: $q \underset{\alpha}{\sim} r$ gdw. $\alpha(q){\downarrow}$, $\alpha(r){\downarrow}$ und q unterscheidet sich von r höchstens in dem durch α selektiertem Unterterm. $\lessdot$ ist eine *partielle Ordnungsrelation* auf $SEL^* \times SEL^*$ definiert durch: $\alpha \lessdot \beta$ gdw. $\alpha = \delta \circ \beta$ für irgendein $\delta \in SEL^+$. Diese Ordnung ist verträglich mit der *Untertermordnung* auf Termen, denn α selektiert einen Unterterm des durch β selektierten Terms.

Ein Paar von Selektoren α und β heißt *schwach unabhängig*, abgekürzt $\alpha \,\underline{\perp}\, \beta$, gdw. $\alpha \not\lessdot \beta$ und $\alpha \not\gtrdot \beta$. α und β sind *unabhängig*, abgekürzt $\alpha \perp \beta$, gdw. $\alpha \not\underline{\lessdot} \beta$ und $\alpha \not\underline{\gtrdot} \beta$, wobei $\alpha \underline{\lessdot} \beta$ für $\alpha \lessdot \beta$ oder $\alpha = \beta$ steht.

Für eine Menge I von Literalen, ein Paar q,r von Termen und einen Selektor α ist $q \underset{\alpha I}{\rightarrow} r$ eine Abkürzung für $q \underset{\alpha}{\sim} r$ und $E(\alpha(q)\alpha(r)) \in I$. Das folgende Lemma wird später häufig verwendet (vergl. [Ros73]):

Lemma 2.2 Seien $q,r \in T$, $\alpha,\beta \in SEL^*$, $I \subset LIT$ und $\sigma \in SUB$. Dann gilt:

(1) Wenn $q \underset{\alpha}{\sim} r$ und $\alpha(q) = \alpha(r)$, dann $q = r$,

(2) $q \underset{\beta\circ\alpha}{\sim} r$ gdw. $\alpha(q) \underset{\beta}{\sim} \alpha(r)$ und $q \underset{\alpha}{\sim} r$,

(3) $q \xrightarrow[\beta\circ\alpha]{}_I r$ gdw. $\alpha(q) \xrightarrow[\beta]{}_I \alpha(r)$ und $q \underset{\alpha}{\sim} r$,

(4) wenn $q \underset{\alpha}{\sim} r$, dann $\sigma q \underset{\alpha}{\sim} \sigma r$,

(5) wenn $\alpha(q)\downarrow$, dann $\sigma\alpha(q) = \alpha(\sigma q)$,

(6) wenn $\alpha \perp \beta$ und $q \underset{\beta}{\sim} r$, dann $\alpha(q) = \alpha(r)$, und

(7) wenn $\alpha \,\underline{\perp}\, \beta$ und $q \xrightarrow[\alpha]{}_I q' \xrightarrow[\beta]{}_I r$ für irgendein $q' \in T$, dann $q \xrightarrow[\beta]{}_I r' \xrightarrow[\alpha]{}_I r$ für irgendein $r' \in T$.

Die Anwendung von Selektoren $\alpha \in SEL^+$ auf Atome ist genauso definiert wie deren Anwendung auf Terme. Für Literale definiert man $\alpha(L) = \alpha(|L|)$. Für ein Paar von Literalen L und K ist $L \underset{\alpha}{\sim} K$ definiert wie für Terme, wobei jedoch zusätzlich gefordert wird, daß L und K nicht komplementär sind. Damit ist dann auch $L \xrightarrow[\alpha]{}_I K$ definiert. Setzt man jetzt noch $id_{|T}(L)\uparrow$, so gilt Lemma 2.2 auch für Literale.

Grundtermersetzungssysteme Ein *Grundtermersetzungssystem* ist eine Menge gerichteter Gleichungen $\mathcal{R} = \{E(q_i\ r_i) \in AT^E_{gr} \mid i \in J\}$ für $J \subset \mathbb{N}$. $\Rightarrow_{\mathcal{R}}$ ist definiert durch: $q \Rightarrow_{\mathcal{R}} r$ gdw. $E(q\ r) \in \mathcal{R}$. $\longrightarrow_{\mathcal{R}}$ bezeichnet die *Reduktionsrelation* bzgl. $\mathcal{R}$, d.h. $q \longrightarrow_{\mathcal{R}} r$ für ein Grundtermpaar q,r gdw. $q \xrightarrow[\alpha]{}_{\mathcal{R}} r$ für irgendein $\alpha \in SEL^*$. Wie üblich steht $\xrightarrow{+}_{\mathcal{R}}$ für die transitive Hülle von $\longrightarrow_{\mathcal{R}}$ und $\xrightarrow{*}_{\mathcal{R}}$ für die reflexive Hülle von $\xrightarrow{+}_{\mathcal{R}}$.

Für eine Folge $q_1,\ldots,q_{n+1}$ von Grundtermen $(n\geq 1)$ und eine Folge

$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ von Selektoren ist $q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \ldots q_n \xrightarrow[\alpha_n]{} q_{n+1}$ eine $\mathfrak{R}$-*Reduktion von* q_{n+1} *aus* q_1 *der Länge* n gdw. $q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{}_{\mathfrak{R}} q_2 \ldots q_n \xrightarrow[\alpha_n]{}_{\mathfrak{R}} q_{n+1}$ gilt.

$\mathfrak{R}$ heißt *symmetrisch* gdw. $\Rightarrow_{\mathfrak{R}}$ eine symmetrische Relation ist. $\xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}}$ ist eine Äquivalenzrelation, falls $\mathfrak{R}$ symmetrisch ist.

In den nachfolgenden Abschnitten sollen auch *Grundliterale* durch Grundtermersetzungssysteme $\mathfrak{R}$ verändert werden. Dazu definiert man für ein Paar L und K von Grundliteralen $L \longrightarrow_{\mathfrak{R}} K$ gdw. $L \xrightarrow[\alpha]{}_{\mathfrak{R}} K$ für irgendein $\alpha \in SEL^+$.

Für eine Literalmenge I ist das in I *enthaltene* Grundtermersetzungssystem $\mathfrak{R}(I)$ gegeben durch: $\mathfrak{R}(I) = I \cap AT^E_{gr}$.

Ableitungsregeln und Deduktionen $Res(C,L,D,K,\sigma) = \sigma(C-L) \cup \sigma(D-K)$ bzeichnet die *Resolvente* der Klauseln C und D bezüglich der komplementären Literale $L \in C$ und $K \in D$, wobei σ ein allgemeinster Unifikator von $\{|L|,|K|\}$ ist. Eine Substitution σ *faktorisiert* eine Klausel C und σC ist ein *Faktor* von C gdw. σ ein allgemeinster Unifikator einer Teilmenge von C ist oder $\sigma = \gamma \circ \tau$ gilt, wobei τ C faktorisiert und γ ein allgemeinster Unifikator einer Teilmenge von τC ist.

$Par(C,L,D,E(q\,r),\alpha,\sigma) = \sigma(C-L) \cup \sigma(D-E(q\,r)) \cup \{\sigma K\}$ ist der *Paramodulant* der Klauseln C und D bzgl. der Literale $L \in C$ und $E(q\,r) \in D$ gdw. σ ein allgemeinster Unifikator von $\{\alpha(L),q\}$ ist, $\sigma L \underset{\alpha}{\sim} \sigma K$ und $\alpha(\sigma K) = \sigma r$ gilt (bzw. σ ist ein allgemeinster Unifikator von $\{\alpha(L),r\}$, $\sigma L \underset{\alpha}{\sim} \sigma K$ und $\alpha(\sigma K) = \sigma q$), wobei σK das *Modulantliteral* genannt wird (vergl. [Lov78]).

Für eine variablenfremde Klauselmenge S und eine Klausel C bezeichnet $S \vdash C$ die Existenz einer *Deduktion* von C aus S, d.h. es gibt eine Liste von Klauseln $\langle B_1,\ldots,B_n \rangle$ mit $B_n = C$ und $B_i \in S$ oder $B_i = \nu_i R_i$, wobei $1 \le i \le n$, R_i ist eine Resolvente, ein Faktor oder ein Paramodulant von Klauseln aus $\{B_1,\ldots,B_{i-1}\}$ und ν_i ist eine Umbenennungssubstitution für $\{B_1,\ldots,B_{i-1}\}$. In diesem Fall hat die Deduktion die *Länge* n. Eine Deduktion der leeren Klausel $\square$ aus S wird wie üblich auch eine *Widerlegung* von S genannt. $S \vdash_{R} C$ bezeichnet eine Deduktion ohne Paramodulanten und $S \vdash_{P} C$ eine Deduktion ohne Resolventen.

Semantische Begriffe Für eine Klauselmenge S bezeichnet S_{gr} die Menge aller Grundinstanzen der Klauseln in S. Für die Berechnung von S_{gr} wird im folgenden davon ausgegangen, daß $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}$ minimal sind, d.h. jedes Symbol aus $\mathfrak{F}$ und aus $\mathfrak{P}$ wird in mindestens einer Klausel aus S verwendet. Damit wird erreicht, daß T_{gr} das *Herbrand-Universum* und AT_{gr} die *Herbrand-Basis* von S ist [Lov78], wenn zusätzlich angenommen wird, daß $\mathfrak{C} = \{c\}$ falls S kein Konstantensymbol enthält.

Eine Grundliteralmenge $I \subset LIT_{gr}$ ist eine *Interpreation* gdw. für alle $L \in I$ $L^c \notin I$ gilt. I heißt *reflexiv* gdw. $E(t\,t) \in I$ für alle $t \in T_{gr}$. I ist *E-abgeschlossen* (engl. *E-closed*) gdw. für alle $L \in I$ und alle $K \in LIT_{gr}$ gilt, daß $K \in I$ falls $L \underset{\alpha}{\longrightarrow}_I K$ für irgendein $\alpha \in SEL^+$ (bzw. falls $L \longrightarrow_{\mathfrak{R}(I)} K$). Eine reflexive und E-abgeschlossene Interpretation heißt *E-Interpretation*. Folgendes Lemma wird in späteren Abschnitten häufig verwendet:

Lemma 2.3 Für jede E-abgeschlossene Interpretation I gilt:

(1) Wenn I reflexiv ist, dann $E(q\,r) \in I$ gdw. $E(r\,q) \in I$.

(2) Wenn $L \in I$, $K \in LIT_{gr}$ und $L \overset{*}{\longrightarrow}_{\mathfrak{R}(I)} K$, dann $K \in I$.

Eine Interpretation I *erfüllt eine Grundklausel* C gdw. $I \cap C \neq \emptyset$. I *erfüllt eine Klausel* C gdw. I jede Grundinstanz σC von C erfüllt. I *erfüllt eine Klauselmenge* S gdw. I jede Klausel aus S erfüllt. In diesem Fall ist I ein *Modell* von S und S ist *erfüllbar*. Ist I eine E-Interpretation, so ist S *E-erfüllbar*, I ist ein *E-Modell* von S und I *E-erfüllt* S.

3. Grundbegriffe des ΣRP-Kalküls

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe für den ΣRP-Kalkül und die in den nachfolgenden Abschnitten verwendeten Schreibweisen eingeführt. Dabei werden die zentralen Begriffsbildungen aus der mehrsortigen Logik (vergl. [Obe62]) den Begriffsbildungen des RP-Kalküls angepaßt, um so eine möglichst nahtlose Erweiterung des RP-Kalküls zu einem mehrsortigen Kalkül zu erreichen.

Sorten und Signaturen Sei $\mathcal{S}$ eine endliche und nicht leere Menge von *Sortensymbolen*. Die *Untersortenordnung* $\leq_{\mathcal{S}}$ von $\mathcal{S}$ ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. s_1 heißt *Untersorte* von s_2 und s_2 *Obersorte* von s_1, falls $s_1 \leq_{\mathcal{S}} s_2$. $s_1 <_{\mathcal{S}} s_2$ steht für $s_1 \leq_{\mathcal{S}} s_2$ und $s_1 \neq s_2$. s_1 ist eine *direkte* Untersorte von s_2, $s_1 \ll_{\mathcal{S}} s_2$, gdw. $s_1 <_{\mathcal{S}} s_2$ und $s_1 <_{\mathcal{S}} s <_{\mathcal{S}} s_2$ für kein $s \in \mathcal{S}$. Die Menge aller *gemeinsamen Untersorten* $s_1 \sqcap_{\mathcal{S}} s_2$ zweier Sortensymbole s_1 und s_2 ist gegeben durch $\{s \in \mathcal{S} \mid s \leq_{\mathcal{S}} s_1 \text{ und } s \leq_{\mathcal{S}} s_2\}$. Die Menge der *maximalen Sorten* $\max_{\mathcal{S}}(S)$ einer Sortensymbolmenge $S \subset \mathcal{S}$ ist definiert als $\{s \in S \mid s \nless_{\mathcal{S}} s' \text{ für alle } s' \in S\}$. Ist $\mathcal{S}$ aus dem Kontext bekannt, so werden Indizes nicht geschrieben - beispielsweise steht dann $\leq$ für $\leq_{\mathcal{S}}$.

$\langle\mathcal{S},<\rangle$ ist eine *Wohlordnung*, denn $\mathcal{S}$ ist endlich und $<$ ist irreflexiv und asymmetrisch. Diese Tatsache wird später in Beweisen verwendet. Im folgenden werden nur noch geordnete Mengen von Sortensymbolen $\langle\mathcal{S},\leq\rangle$ betrachtet, die ein *maximales Element* s_o besitzen, d.h. $s \leq s_o$ für alle $s \in \mathcal{S}$. $\langle\mathcal{S},\leq\rangle$ hat eine *Baumstruktur* gdw. für alle $s, s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ mit $s_1 \geq s \leq s_2$ gilt, daß $s_1 \leq s_2$ oder $s_1 \geq s_2$.

Für eine geordnete Menge von Sortensymbolen $\langle\mathcal{S},\leq\rangle$ bezeichnet $\mathcal{S}^*$ die Menge aller endlichen Zeichenreihen von Symbolen aus $\mathcal{S}$, wobei e für die leere Zeichenreihe steht. Für jedes $s \in \mathcal{S}$ und jedes $w \in \mathcal{S}^*$ sei $\mathfrak{V}_s$ eine Menge von Variablensymbolen, $\mathcal{F}_{w,s}$ eine

Menge von Funktionssymbolen und $\mathfrak{P}_w$ eine Menge von Prädikatensymbolen, so daß diese Mengen paarweise disjunkt sind. Zusätzlich wird gefordert, daß $E \in \mathfrak{P}_{s_o s_o}$ und daß $\mathcal{F}_{e,s} \neq \emptyset$ für jedes in $<\mathfrak{S},\leq>$ *minimale* s gilt. Eine *$\mathfrak{S}$-Signatur* Σ ist dann eine Familie $\Sigma_{w,s}$ von Mengen mit $\Sigma_{w,s} = \mathfrak{V}_s \cup \mathcal{F}_{w,s} \cup \mathfrak{P}_w$, wobei $w \in \mathfrak{S}^*$ und $s \in \mathfrak{S}$. Für $\mathfrak{V} = \cup\, \mathfrak{V}_s$, $\mathcal{F} = \cup\, \mathcal{F}_{w,s}$, $\mathfrak{C} = \cup\, \mathcal{F}_{e,s}$ und $\mathfrak{P} = \cup\, \mathfrak{P}_w$, mit $w \in \mathfrak{S}^*$ und $s \in \mathfrak{S}$, werden Terme, Atome, Literale usw. wie in Abschnitt 2 definiert. Dabei ist die Stelligkeit eines Funktions- oder Prädikatensymbols durch die Länge der entsprechenden Zeichenreihe w festgelegt.

Syntaktische Begriffe Die *Ergebnissorte* (engl. *rangesort*) $[a]$ eines Variablen- oder Funktionssymbols a ist s, falls $a \in \mathfrak{V}_s \cup \mathcal{F}_{w,s}$ (für irgendein $w \in \mathfrak{S}^*$). Die *i.te Argumentsorte* (engl. *domainsort*) $[m]_i$ eines Funktions- oder Prädikatensymbols $m \in \mathcal{F}_{s_1 \ldots s_k, s} \cup \mathfrak{P}_{s_1 \ldots s_k}$ ist s_i, falls $1 \leq i \leq k$. Die *Sorte* $[t]$ eines Terms t ist s gdw. $t \in \mathfrak{V}_s \cup \mathcal{F}_{e,s}$ oder $t = f(t_1 \ldots t_k)$ und $[f] = s$.

Für einen Term t und einen Selektor α mit $\alpha(t)\downarrow$ ist die *α-maximale Sorte* von t, bezeichnet mit $[t]_\alpha$, gegeben durch:

(1) $[t]_\alpha = [t]$, falls $\alpha = id_{|T}$,

(2) $[t]_\alpha = [f]_i$, falls $t = f(t_1 \ldots t_n)$, $\alpha(t) = t_i$ und $\alpha \in SEL$,

(3) $[t]_\alpha = [\delta(t)]_\beta$, falls $\alpha = \beta \circ \delta$ mit $\beta \in SEL$ und $\delta \in SEL^+$.

Für Selektoren $\alpha \in SEL^+$ wird die α-maximale Sorte eines Atoms genauso definiert wie für Terme. Für Literale L definiert man $[L]_\alpha = [|L|]_\alpha$. Das folgende Lemma ist einfach zu beweisen:

Lemma 3.1 Seien $q,r \in T$, $\alpha,\beta \in SEL^*$ und $\sigma \in SUB$. Dann gilt:

(1) Wenn $\beta \in SEL^+$, dann $[q]_{\beta\circ\alpha} = [\alpha(q)]_\beta$,

(2) wenn $q \notin \mathcal{V}$ und $\alpha(q)\!\downarrow$, dann $[q]_\alpha = [\sigma q]_\alpha$,

(3) wenn $q \underset{\beta}{\sim} r$ und $\alpha \underline{\not<\!\cdot}\, \beta$, dann $[\alpha(q)] = [\alpha(r)]$, und

(4) wenn $q \underset{\beta}{\sim} r$ und $\alpha \not<\!\cdot\, \beta$, dann $[q]_\alpha = [r]_\alpha$.

Offensichtlich gilt dieses Lemma auch für Atome und Literale.

Ein Term t heißt *sortenrecht* oder ein *Σ-Term* bzgl. einer gegebenen $\mathcal{S}$-Signatur Σ gdw. für jeden Selektor α mit $\alpha(t)\!\downarrow$ gilt: $[\alpha(t)] \leq [t]_\alpha$. Ein Atom A heißt *sortenrecht* oder ein *Σ-Atom* gdw. $A \in \mathcal{P}_e$ oder $[\alpha(A)] \leq [A]_\alpha$ für jeden Selektor α mit $\alpha(A)\!\downarrow$. Ein Literal L ist *sortenrecht* bzw. ein *Σ-Literal* gdw. $|L|$ sortenrecht ist. T_Σ bezeichnet die Menge aller Σ-Terme, AT_Σ steht für die Menge aller Σ-Atome und LIT_Σ ist die Menge aller Σ-Literale. Folgende Lemmata finden in den späteren Abschnitten häufig Verwendung:

Lemma 3.2 Seien $q \in T_\Sigma$, $r \in T$ und $\alpha \in SEL^*$.
Dann gilt:
Wenn $q \underset{\alpha}{\sim} r$, $\alpha(r) \in T_\Sigma$ und $[\alpha(r)] \leq [r]_\alpha$, dann $r \in T_\Sigma$.

Lemma 3.3 Sei $s \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{F}_{s_1\ldots s_n,s}$ und $f(q_1\ldots q_n) \in T$.
Dann gilt:

(1) $\mathcal{V}_s \cup \mathcal{F}_{e,s} \subset T_\Sigma$, und

(2) $f(q_1\ldots q_n) \in T_\Sigma$ gdw. $q_i \in T_\Sigma$ und $[q_i] \leq s_i$
für jedes i mit $1 \leq i \leq n$.

Offensichtlich gelten diese Lemmata genauso für Atome und Literale.

Eine endliche Menge von Σ-Literalen heißt *sortenrechte* Klausel oder *Σ-Klausel*. Die *mehrsortige Sprache* $\mathcal{L}_\Sigma$ ist definiert als die Menge aller sortenrechten Klauseln. $T_{\Sigma gr}$ bezeichnet die Menge aller variablenfreien Σ-Terme. $AT_{\Sigma gr}$, $LIT_{\Sigma gr}$ und $\mathcal{L}_{\Sigma gr}$ sind entsprechend definiert.

Gelegentlich werden Sortensymbole als einstellige Prädikatensymbole verwendet. In diesen Fällen wird $s \in \mathcal{P}_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$ angenommen. $LIT^{\mathcal{S}}$ ($LIT^{\mathcal{S}}_\Sigma$) bezeichnet dann die Menge aller (Σ-) Literale der *erweiterten Sprache* $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ ($\mathcal{L}^{\mathcal{S}}_\Sigma$). Ein Atom oder Literal, dessen Prädikatzeichen ein Sortensymbol ist, heißt *Sortenatom* bzw. *Sortenliteral*.

Sortenaxiome und Relativierungen Die Menge der *Sortenaxiome* A^Σ für eine $\mathcal{S}$-Signatur Σ ist eine kleinste Teilmenge von $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}_\Sigma$, die folgenden Bedingungen genügt:

(1) $\{s(a)\} \in A^\Sigma$, falls $a \in \mathcal{F}_{e,s}$,

(2) $\{\bar{s}_1(x_1),\ldots,\bar{s}_k(x_k),\ s(f(x_1\ldots x_k))\} \in A^\Sigma$,

falls $x_i \in \mathcal{V}_{s_i}$, $f \in \mathcal{F}_{s_1\ldots s_k,s}$ und $x_i \neq x_j$,

(3) $\{\bar{s}_1(y),\ s_2(y)\} \in A^\Sigma$, falls $y \in \mathcal{V}_{s_1}$ und $s_1 \ll s_2$, und

(4) A^Σ ist variablenfremd .

A^Σ ist endlich, falls $\mathcal{F}$ endlich ist.

Die *Relativierung* $\hat{C}^\Sigma$ einer *Σ-Klausel* C ist eine Σ-Klausel aus $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}_\Sigma$ mit

$$\hat{C}^\Sigma = \{\bar{s}_1(x_1),\ldots,\bar{s}_n(x_n)\} \cup C \quad ,$$

wobei $x_i \in \mathfrak{V}_{s_i}$ und $\{x_1,\ldots,x_n\} = \text{vars}(C)$. Die *Relativierung* $\hat{S}^{\Sigma}$ einer Σ-*Klauselmenge* S ist diejenige Teilmenge von $\mathcal{L}^{\$}_{\Sigma}$ mit

$$\hat{S}^{\Sigma} = \{\hat{C}^{\Sigma} \in \mathcal{L}^{\$}_{\Sigma} \mid C \in S\} \quad .$$

Ist Σ durch den Kontext bekannt, so wird $\hat{C}$ anstatt $\hat{C}^{\Sigma}$ und $\hat{S}$ anstatt $\hat{S}^{\Sigma}$ geschrieben.

Substitutionen und Unifikatoren Eine Substitution σ, die $\sigma(T_{\Sigma}) \subset T_{\Sigma}$ erfüllt, heißt Σ-*Substitution*. SUB_{Σ} bezeichnet die Menge aller Σ-Substitutionen. Eine Σ-*Umbenennungssubstitution* ν für eine Menge D von Variablensymbolen, Literalen oder Klauseln ist eine Umbenennungssubstitution für D mit $[\nu x] = [x]$ für alle $x \in \mathfrak{V}$. Offenbar ist jede Σ-Umbenennungssubstitution eine Σ-Substitution.

Für eine Σ-Klausel C und eine Σ-Substitution σ heißt σC eine Σ-*Instanz* von C und falls $\sigma C \in \mathcal{L}_{\Sigma gr}$, eine Σ-*Grundinstanz* von C. Das folgende Lemma ist einfach zu beweisen:

Lemma 3.4 Seien $\theta, \sigma \in SUB_{\Sigma}$ und $\lambda \in SUB$. Dann gilt:

(1) Wenn $\theta \circ \sigma \in SUB$, dann $\theta \circ \sigma \in SUB_{\Sigma}$,

(2) wenn $\theta = \lambda \circ \sigma$, dann $\theta = \delta \circ \sigma$ für irgendein $\delta \in SUB_{\Sigma}$,

(3) $\sigma(LIT_{\Sigma}) \subset LIT_{\Sigma}$, und

(4) $\sigma(\mathcal{L}_{\Sigma}) \subset \mathcal{L}_{\Sigma}$.

Eine Menge D von Σ-Termen oder Σ-Atomen ist Σ-*unifizierbar* gdw. D durch irgendeine Σ-Substitution σ unifiziert wird. In diesem Fall ist σ ein Σ-*Unifikator* von D. σ heißt *allgemeinster* Σ-*Unifikator* von D gdw. $\sigma \in SUB_{\Sigma}$ und σ ein allgemeinster Unifikator von D ist.

Eine Σ-Substitution μ heißt *Abschwächungssubstitution* für eine Menge $V \subset \mathfrak{V}$ gdw. μ folgenden Bedingungen genügt:

(1) $COD(\mu) \subset \mathfrak{V}$,

(2) $COD(\mu) \cap V = \emptyset$,

(3) $\mu_{|V}$ ist injektiv , und

(4) $[\mu x] < [x]$, falls $x \in DOM(\mu)$.

Für jedes $V \subset \mathfrak{V}$ bezeichnet *ASUB(V)* die Menge aller Abschwächungssubstitutionen für V. Offenbar gilt $\varepsilon \in ASUB(V)$ und $ASUB(V) \subset SUB_\Sigma$ für alle $V \subset \mathfrak{V}$.

Grundtermersetzungssysteme Die Σ-*Reduktionsrelation* $\rightarrow_{\Sigma\mathfrak{R}}$ eines Grundtermersetzungssystems bezüglich einer gegebenen $\mathfrak{S}$-Signatur Σ ist gegeben durch $\rightarrow_{\Sigma\mathfrak{R}} = \rightarrow_{\mathfrak{R}} \cap (T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr})$. $\xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$ bezeichnet die transitive Hülle von $\rightarrow_{\Sigma\mathfrak{R}}$ und $\xrightarrow{*}_{\Sigma\mathfrak{R}}$ die reflexive Hülle von $\xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$. $\mathfrak{R}$ heißt Σ-*maximal* gdw. $\Rightarrow_{\mathfrak{R}} = \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$ gilt. Das folgende Lemma wird im weiteren oft verwendet:

Lemma 3.5 Seien $\mathfrak{R}$ ein Σ-maximales Grundtermersetzungssystem, $q_1,q_2 \in T_{gr}$ und $\alpha,\beta \in SEL^*$. Dann gilt für $i \in \{1,2\}$:

(1) Wenn $q_1 \Rightarrow_{\mathfrak{R}} q_2$, dann $q_i \in T_{\Sigma gr}$, und

(2) wenn $q_1 \xrightarrow[\beta]{}_{\mathfrak{R}} q_2$, $\alpha <\cdot \beta$ und $\alpha(q_i)\downarrow$,

dann $[\alpha(q_i)] \leq [q_i]_\alpha$.

Ableitungsregeln und Deduktionen Die Resolvente R zweier Σ-Klauseln ist eine Σ-*Resolvente* gdw. der allgemeinste Unifikator, mit dem R gebildet wird, eine Σ-Substitution ist. Wird eine Σ-Klausel durch eine Σ-Substitution faktorisiert, so ist der entstehende Faktor ein Σ-*Faktor*. Ein Paramodulant $P = Par(C,L,D,E(q\ r),\alpha,\sigma)$ zweier Σ-Klauseln C und D ist ein Σ-*Paramodulant* gdw. $\sigma \in SUB_\Sigma$ und $[\sigma r] \leq [\sigma L]_\alpha$ (bzw. $[\sigma q] \leq [\sigma L]_\alpha$, falls σr durch σq ersetzt wird). Für eine Σ-Klausel C und eine Σ-Substitution μ heißt μC eine *abgeschwächte Variante* von C gdw. μ eine Abschwächungssubstitution für irgendein $V \supset vars(C)$ ist. Offenbar ist jede Σ-Resolvente, jeder Σ-Faktor, jeder Σ-Paramodulant und jede abgeschwächte Variante eine Σ-Klausel.

Für eine variablenfremde Σ-Klauselmenge S und eine Σ-Klausel C bezeichnet $S \vdash_\Sigma C$ die Existenz einer Σ-*Deduktion* von C aus S, d.h. es gibt eine Liste von Σ-Klauseln $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$ mit $B_n = C$, $B_i \in S$ oder $B_i = \nu_i R_i$, wobei $1 \leq i \leq n$, R_i ist eine Σ-Resolvente, ein Σ-Faktor, ein Σ-Paramodulant oder eine abgeschwächte Variante von Klauseln aus $\{B_1,\ldots,B_{i-1}\}$, und ν_i ist eine Σ-Umbenennungssubstitution für $\{B_1,\ldots,B_{i-1}\}$. In diesem Fall hat die Σ-Deduktion die *Länge* n. Eine Σ-Deduktion der leeren Klausel $\square$ aus S heißt auch Σ-*Widerlegung* von S. $S \vdash_{\Sigma R} C$ bezeichnet eine Σ-Deduktion ohne Σ-Paramodulanten und $S \vdash_{\Sigma P} C$ eine Σ-Deduktion ohne Σ-Resolventen.

Semantische Begriffe Für eine Σ-Klauselmenge S bezeichnet $S_{\Sigma gr}$ die Menge aller Σ-Grundinstanzen der Σ-Klauseln in S. Eine Interpretation I Σ-*erfüllt* eine Σ-*Klausel* C gdw. I jede Σ-Grundinstanz σC von C erfüllt. I Σ-*erfüllt* eine Σ-*Klauselmenge* S gdw. I jede Klausel aus S Σ-erfüllt. In diesem Fall ist I ein Σ-*Modell* von S und S ist Σ-*erfüllbar*. Ist I eine E-Interpretation, so ist S ΣE-*erfüllbar*, I ist ein ΣE-Modell von S und I ΣE-*erfüllt* S. Das folgende Lemma ist leicht zu beweisen:

Lemma 3.6 Sei $S \subset \mathfrak{L}_{\Sigma}$ und $I \subset LIT_{gr}$ eine Interpretation. Dann gilt:

(1) S ist Σ-unerfüllbar gdw. $S_{\Sigma gr}$ ist unerfüllbar ,

(2) S ist ΣE-unerfüllbar gdw. $S_{\Sigma gr}$ ist E-unerfüllbar ,

(3) $S_{\Sigma gr} \subset S_{gr}$, und

(4) wenn I S Σ-erfüllt, dann Σ-erfüllt $I \cap LIT_{\Sigma gr}$ ebenfalls S .

Wie man sich leicht überzeugt, gilt 3.6 (4) im allgemeinen nicht für die ΣE-Erfüllbarkeit, da es E-Interpretationen I gibt, so daß $I \cap LIT_{\Sigma gr}$ weder reflexiv noch E-abgeschlossen und damit keine E-Interpretation ist.

In den nachfolgenden Abschnitten steht jetzt $<\mathcal{S},\leq>$ immer für eine partiell geordnete Menge von Sortensymbolen, Σ für eine $\mathcal{S}$-Signatur und S für irgendeine variablenfremde Σ-Klauselmenge.

4. Die Abschwächungsregel

Im Unterschied zur Erweiterung eines Hilbert-Kalküls zu einem mehrsortigen Kalkül, die man gewinnt, indem Ableitungsregeln und logischen Axiome des gegebenen Kalküls in geeigneter Weise eingeschränkt werden (vergl. [Obe62]), kommt bei der Erweiterung des RP-Kalküls neben diesen Einschränkungen noch eine *zusätzliche Ableitungsregel*, die Abschwächungsregel, hinzu. Diese neue Regel, mit der aus Klauseln die abgeschwächten Varianten dieser Klauseln hergeleitet werden, ist unabdingbar für die Vollständigkeit des mehrsortigen RP-Kalküls, d.h. der ΣRP-Kalkül ohne Abschwächungsregel ist unvollständig.

Diese Unvollständigkeit ist eine Folge des "Prinzips der größten Allgemeinheit", das den RP-Kalkül gegenüber Hilbert-Kalkülen auszeichnet: Im RP-Kalkül können (abgesehen von Faktoren) aus gegebenen oder hergeleiteten Formeln (Klauseln), im Gegensatz zu Hilbert-Kalkülen, keine Instanzen dieser dieser Formeln hergeleitet werden. Eine Präzisierung dieser für das automatische Beweisen wichtigen Eigenschaft liefern Wos und Robinson mit dem Begriff des *konservativen* (conservative) *Kalküls* bzw. der *konservativen Ableitungsregel* [WR73]. Wie die beiden nachfolgenden Beispiele zeigen, muß man aber gewisse Instanzen von Klauseln, nämlich solche, bei denen Variable durch neue Variable kleinerer Sorte ersetzt werden, im ΣRP-Kalkül herleiten können, um $\Sigma(E)$-unerfüllbare Σ-Klausmengen im ΣRP-Kalkül zu widerlegen.

Die Unvollständigkeit des ΣRP-Kalküls ohne Abschwächungsregel hat zwei Ursachen:

(1) Im ΣRP-Kalkül gilt der *Unifikationssatz* nicht mehr (vergl. Abschnitt 7). Dies betrifft die Bildung der für eine Σ-Widerlegung erforderlichen Σ-Resolventen, Σ-Faktoren und Σ-Paramodulanten.

Beispiel 4.1 Sei $\mathcal{S} = \{A,B,C,D\}$ mit $D \ll B \ll A$ und $D \ll C \ll A$. Sei weiter $P \in \mathfrak{P}_A$, $d \in \mathcal{F}_{e,D}$, $u \in \mathfrak{V}_B$, $v \in \mathfrak{V}_C$ und $w \in \mathfrak{V}_D$. Die Σ-Klauselmenge $S = \{\{P(u)\}, \{\bar{P}(v)\}\}$ ist Σ-unerfüllbar, denn $S_{\Sigma gr} = \{\{P(d)\}, \{\bar{P}(d)\}\}$ ist unerfüllbar. Aber weder $\sigma = \{u \leftarrow v\}$ noch $\tau = \{v \leftarrow u\}$ sind Σ-Substitutionen (s. a. Satz 7.1 in Abschnitt 7), d.h. keine Σ-Resolvente kann mit Klauseln aus S gebildet werden. Mit Hilfe der Abschwächungsregel kann jedoch folgende Σ-Widerlegung von S gebildet werden (wobei der Lesbarkeit wegen auf Σ-Umbenennungssubstitutionen verzichtet wird):

(C1)	$\forall u.\ \{P(u)\}$	, gegeben
(C2)	$\forall v.\ \{\bar{P}(v)\}$	, gegeben
(W3)	$\forall w.\ \{P(w)\}$	, abgeschwächte Variante μC1 von C1 mit $\mu = \{u \leftarrow w\}$
(R4)	$\square$	, Σ-Resolvente von C2 und W3, denn $\Theta = \{v \leftarrow w\}$ ist eine Σ-Substitution.

$\boxtimes$

(2) *Paramodulation* ist unvollständig im ΣRP-Kalkül ohne Abschwächungsregel: Für den RP-Kalkül ist bekannt, daß E-unerfüllbare Klauselmengen, die bezüglich Faktorisation und Paramodulation abgeschlossen sind, auch unerfüllbar sind [WR73]. Dagegen findet man ΣE-unerfüllbare Σ-Klauselmengen, deren Abschluß bezüglich Σ-Faktorisation und Σ-Paramodulation nicht Σ-unerfüllbar ist.

Beispiel 4.2 Sei $\mathcal{S} = \{A,B\}$ mit $B \ll A$ und sei $P \in \mathfrak{P}_B$, $\{b_1,b_2\} \subset \mathcal{F}_{e,B}$, $\{x,y\} \subset \mathfrak{V}_A$ und $z \in \mathfrak{V}_B$. Die Σ-Klauselmenge $S = \{\{P(b_1)\}, \{E(xy)\}, \{\bar{P}(b_2)\}\}$ ist ΣE-unerfüllbar, denn $S_{\Sigma gr} = \{\{P(b_1)\}, \{E(b_1,b_2)\},\ldots,\{\bar{P}(b_2)\}\}$ ist E-unerfüllbar. Aus S können vier Paramodulanten abgeleitet werden, nämlich $\{P(x)\},\{P(y)\},\{\bar{P}(x)\}$ und $\{\bar{P}(y)\}$, von denen wegen $[x] = [y] \not\leq [P]_1$ keiner eine Σ-Klausel und damit auch kein Σ-Paramodulant ist. Mit Hilfe der Abschwächungsregel findet man jedoch folgende Σ-Widerlegung von S (bei der der Lesbarkeit wegen auf Σ-Umbenennungssubstitutionen verzichtet wird):

(C1)		$\{P(b_1)\}$	, gegeben
(C2)	$\forall x,y$	$\{E(xy)\}$	, gegeben
(C3)		$\{\bar{P}(b_2)\}$	, gegeben
(W4)	$\forall x,z$	$\{E(xz)\}$	, abgeschwächte Variante μC2 von C2 mit $\mu = \{y \leftarrow z\}$
(P5)	$\forall z$	$\{P(z)\}$	, Σ-Paramodulant von C1 und W4
(R6)		$\square$	, Σ-Resolvente von P5 und C3.

$\boxtimes$

Beide Beispiele zeigen, daß erst mit Verwendung der Abschwächungsregel $\Sigma(E)$-unerfüllbare Σ-Klauselmengen auch Σ-widerlegbar werden. Daß dies immer gilt, wird mit dem Beweis des Vollständigkeitssatzes für den ΣRP-Kalkül (Abschnitt 8) gezeigt.

Nun kann die Vollständigkeit eines Kalküls trivialerweise immer durch Hinzunahme zusätzlicher Ableitungsregeln erzwungen werden. Folgende Überlegung zeigt jedoch, daß die Hinzunahme der Abschwächungsregel die (in einem intuitiven Sinn) kleinste für die Vollständigkeit hinreichende Erweiterung des mehrsortigen Kalküls darstellt:

Man kann den RP-Kalkül als einen Spezialfall des ΣRP-Kalküls auffassen, bei dem die Menge der Sortensymbole $\mathcal{S}$ genau das Element s_o enthält. Da für jede Abschwächungssubstitution μ $[\mu x] < [x]$ für jedes $x \in DOM(\mu)$ erfüllt sein muß, $[\mu x] < [x]$ für $\mathcal{S} = \{s_o\}$ aber immer falsch ist, gilt $DOM(\mu) = \emptyset$ bzw. $\mu = \varepsilon$. Damit gibt es keine echten abgeschwächten Varianten, und der ΣRP-Kalkül mit einelementiger Sortensymbolmenge ist identisch mit dem RP-Kalkül.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die Abschwächungsregel lediglich dazu dient, einen vollständigen, mehrsortigen Kalkül in möglichst einfacher Anlehnung an den RP-Kalkül zu definieren. Wie in Abschnitt 11 gezeigt wird, kann bei einer praktischen Realisierung des ΣRP-Kalküls durch einen automatischen Beweiser auf eine direkte Implementierung dieser Regel verzichtet werden, wobei dann der implementierte Kalkül im Sinne von Wos und Robinson [WR73] konservativ ist.

5. SORTENRECHTE TERMERSETZUNGEN

E-Interpretationen und E-Modelle lassen sich formal mittels Grundtermersetzungssystemen bequem handhaben, wenn die E-Abgeschlossenheit einer Interpretation I über die Reduktionsrelation $\mathfrak{R}(I)$ definiert wird.

Für die Vollständigkeit der Σ-Paramodulation (im Basisfall) sind Grundtermersetzungssysteme und deren Σ-Reduktionsrelation von besonderer Bedeutung. Wie später gezeigt wird, hängt die Vollständigkeit der Σ-Paramodulation im wesentlichen davon ab, daß die Relationen $\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}}$ und $\xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$ für gewisse Grundtermersetzungssysteme $\mathfrak{R}$ auf $T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}$ übereinstimmen: Gesucht wird ein Kriterium für Grundtermersetzungssysteme $\mathfrak{R}$, das hinreichend ist für

$$\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} \cap \, (T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}) = \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} \quad .$$

Dabei besteht das Problem darin, daß bei einer Reduktion $q \xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} r$ mit $q,r \in T_{\Sigma gr}$ im allgemeinen Terme als "Zwischenergebnisse" anfallen, die nicht sortenrecht sind. Dies sei an einem Beispiel erläutert:

Beispiel 5.1 Sei $\mathcal{S} = \{A,B\}$, $f \in \mathcal{F}_{A,B}$, $g \in \mathcal{F}_{B,B}$, $a,b \in \mathcal{F}_{e,A}$ und $c,d \in \mathcal{F}_{e,B}$. Dann ist $\mathfrak{R} = \{$(i) $a \Rightarrow g(c)$, (ii) $g(c) \Rightarrow g(d)$, (iii) $g(d) \Rightarrow b\}$ ein Termersetzungssystem mit $f(a) \xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} f(b)$, da

$$(*) \quad f(a) \xrightarrow{(i)} f(g(c)) \xrightarrow{(ii)} f(g(d)) \xrightarrow{(iii)} f(b)$$

eine $\mathfrak{R}$-Reduktion ist. Wie man sich leicht überzeugt, ist dies die einzige $\mathfrak{R}$-Reduktion von $f(b)$ aus $f(a)$. Da diese $\mathfrak{R}$-Reduktion aber mit $f(g(c))$ und $f(g(d))$ Terme enthält, die nicht sortenrecht sind, ergibt sich

$$f(a) \not\xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} f(b) \quad . \quad \boxtimes$$

Welcher Forderung müsste nun $\mathfrak{R}$ genügen, um doch noch $f(a) \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} f(b)$ zu ermöglichen?

Wie man sieht, wird bei der $\mathfrak{R}$-Reduktion (*) ausgehend von dem sortenrechten Term f(a) zunächst eine "sortenfalsche" Ersetzung vorgenommen, die dann aber im Verlaufe der $\mathfrak{R}$-Reduktion "berichtigt" wird, da man ja zuletzt den sortenrechten Term f(b) erhält. Wenn man nun die gerichtete Gleichung (i), die in (*) aus $T_{\Sigma gr}$ herausführt, mit der gerichteten Gleichung (iii), die wieder nach $T_{\Sigma gr}$ zurückführt, zu einer neuen gerichteten Gleichung

$$\text{(iv)}\ a \Rightarrow b$$

zusammenfaßt und $\mathfrak{R}$ um (iv) erweitert, erhält man die neue $\mathfrak{R}$-Reduktion

$$f(a) \xrightarrow{(iv)} f(b)$$

und damit

$$f(a) \overset{+}{\longrightarrow}_{\Sigma\mathfrak{R}} f(b) \quad .$$

Dieses Beispiel legt nahe, die Transitivität eines Grundtermersetzungssystems $\mathfrak{R}$ zu fordern, d.h. $\Rightarrow_{\mathfrak{R}} = \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathfrak{R}}$, um $\overset{+}{\longrightarrow}_{\mathfrak{R}} = \overset{+}{\longrightarrow}_{\Sigma\mathfrak{R}}$ auf $T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}$ zu garantieren.

Folgendes Beispiel zeigt jedoch, daß die Transitivität allein noch nicht hinreichend ist:

Beispiel 5.2 Seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$ gegeben wie in Beispiel 5.1, wobei $\mathfrak{R}$ jedoch anstatt (ii) die gerichtete Gleichung

$$\text{(ii')}\ c \Rightarrow d$$

enthält. Da die Reduktion (*) aus Beispiel 5.1 auch hier die einzige $\mathfrak{R}$-Reduktion von f(b) aus f(a) ist und (*) nicht sortenrechte Terme enthält, gilt immer noch

$$f(a) \overset{+}{\not\longrightarrow}_{\Sigma\mathfrak{R}} f(b) \quad ,$$

obwohl jetzt $\Rightarrow_{\mathfrak{R}} = \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathfrak{R}}$ erfüllt ist. ⊠

Das Problem ist hier, daß die Transitivität nicht ausgenutzt werden kann, da nur der Unterterm c des Terms g(c), der f(g(c)) sortenfalsch macht, und nicht g(c) direkt ersetzt wird.

Es muß also gefordert werden, daß $\mathfrak{R}$ mit $c \Rightarrow d$ auch $g(c) \Rightarrow g(d)$ enthält. Ist $\mathfrak{R}$ außerdem transitiv, so ergibt sich wie im vorherigen Fall

$$a \Rightarrow_{\mathfrak{R}} b$$

und damit dann

$$f(a) \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} f(b) \quad .$$

Für ein Grundtermersetzungssystem $\mathfrak{R}$ fordert man also, daß $\mathfrak{R}$ transitiv und abgeschlossen bezüglich $\longrightarrow_{\Sigma\mathfrak{R}}$ ist, d.h. man fordert

$$\Rightarrow_{\mathfrak{R}} \; = \; \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathfrak{R}} \cup \longrightarrow_{\Sigma\mathfrak{R}} \quad ,$$

um $\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} \cap (T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}) = \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$ zu garantieren.

Da hier $\Rightarrow_{\mathfrak{R}} \subset T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}$ vorausgesetzt wird, ist, wie man sich leicht überzeugt, diese Bedingung äquivalent mit

$$\Rightarrow_{\mathfrak{R}} \; = \; \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} \quad ,$$

d.h. mit der *Σ-Maximalität von* $\mathfrak{R}$.

Zusammenfassend ergibt sich folgender Hauptsatz, der in diesem Abschnitt bewiesen werden soll:

<u>*Σ-Reduktionssatz*</u> Sei $\mathfrak{R}$ ein Σ-maximales Grundtermersetzungssystem. Dann gilt

$$\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} \cap (T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}) = \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} \quad .$$

Das Hauptproblem beim Beweis dieses Satzes ist der Nachweis, daß

$$\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} \cap (T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}) \subset \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$$

gilt. Dies läßt sich durch Induktion über die Länge n einer $\mathfrak{R}$-Reduktion

$$(1) \quad q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \ldots q_n \xrightarrow[\alpha_n]{} q_{n+1}, \qquad q_1, q_{n+1} \in T_{\Sigma gr}$$

zeigen: Es wird ein konstruktives Verfahren angegeben, mit dem aus jeder $\mathfrak{R}$-Reduktion (1), die $\{q_2,\ldots,q_n\} \not\subset T_{\Sigma gr}$ erfüllt, eine $\mathfrak{R}$-Reduktion $q_1 \to r_2 \ldots r_{n-1} \to q_{n+1}$ gewonnen wird, die kürzer als die gegebene $\mathfrak{R}$-Reduktion (1) ist. Damit können Schritt für Schritt alle Terme $q_i \notin T_{\Sigma gr}$ aus der gegebenen $\mathfrak{R}$-Reduktion entfernt werden und man erhält zuletzt eine $\mathfrak{R}$-Reduktion von q_{n+1} aus q_1, in der alle Terme sortenrecht sind, d.h. für die $q_1 \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} q_{n+1}$ gilt.

Das konstruktive Verfahren läßt sich wie folgt skizzieren:

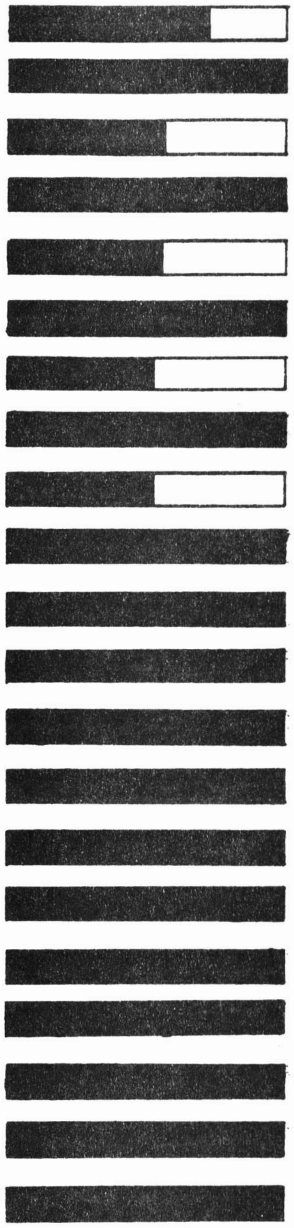
Zunächst wird aus (1) eine $\mathfrak{R}$-Reduktion

$$(2) \quad q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{} q_i \ldots q_{j-1} \xrightarrow[\alpha_{j-1}]{} q_j, \quad (2 \le i < j \le n+1)$$

ausgewählt, für die $\alpha_{i-1} = \alpha_{j-1}$ gilt und in der alle Terme $\alpha_{i-1}(q_i),\ldots,\alpha_{i-1}(q_{j-1})$ sortenrecht sind, aber an der Position α_{i-1} in $q_i,\ldots,q_{j-1}$ der Signatur nicht genügen. Die Existenz einer solchen $\mathfrak{R}$-Reduktion wird durch das Σ-*Reduktionslemma* (5.1) gesichert.

Mit Hilfe des *Verschiebelemmas* (5.2) wird dann gezeigt, daß (2) immer noch eine $\mathfrak{R}$-Reduktion ist, wenn jeder Selektor $\alpha_h (i \le h \le j-1)$, für den $\alpha_h \lessdot \alpha_{i-1}$ gilt, in (2) durch α_{i-1} ersetzt wird. Für Beispiel 5.2 entspricht dies dem Übergang von $f(g(c)) \to_{\mathfrak{R}} f(g(d))$ mittels $c \Rightarrow_{\mathfrak{R}} d$ nach $f(g(c)) \to_{\mathfrak{R}} f(g(d))$ mittels $g(c) \Rightarrow_{\mathfrak{R}} g(d)$, der in einem Grundtermersetzungssystem $\mathfrak{R}$ mit $\longrightarrow_{\Sigma\mathfrak{R}} \subset \Rightarrow_{\mathfrak{R}}$ immer möglich ist.

	ΣRP	RP	$\Sigma RP/_{RP}$ *100
CPU seconds	1	1.4	74
steps executed	3	3	100
links generated	21	36	58
R-links	1	1	100
P-links	20	35	57
F-links	0	0	100
initial links	14	26	54
R-links	0	0	100
P-links	14	26	54
F-links	0	0	100
clauses generated	6	6	100
initial	3	3	100
deduced	3	3	100
resolvents	1	1	100
paramodulants	2	2	100
factors	0	0	100
literals generated	6	6	100
initial	3	3	100
deduced	3	3	100
level of proof	3	3	100
clauses in proof	7	7	100



Die Ersetzung der Selektoren α_h durch α_{i-1} in (2) garantiert, daß $\alpha_h \perp \alpha_{j-1}$ gilt. Damit kann das *Vertauschungslemma* (5.3) angewendet werden, wonach es eine $\mathfrak{R}$-Reduktion zu (2) gibt, in der die Reihenfolge der Ersetzungen so vertauscht wurde, daß die erste Ersetzung nun mittels des Selektors α_{j-1} vorgenommen wird, d.h. es gibt eine $\mathfrak{R}$-Reduktion der Form

(3) $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{j-1}]{} r_i \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{} r_{i+1} \cdots r_{j-1} \xrightarrow[\alpha_{j-2}]{} q_j$.

Da $\alpha_{j-1} = \alpha_{i-1}$ gilt, läßt sich (3) mit Hilfe des *Transitivitätslemmas* (5.4) zu der $\mathfrak{R}$-Reduktion

(4) $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{} r_{i+1} \cdots r_{j-1} \xrightarrow[\alpha_{j-2}]{} q_j$

verkürzen. Damit ist eine $\mathfrak{R}$-Reduktion

(5) $q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \cdots q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{} r_{i+1} \cdots r_{j-1} \xrightarrow[\alpha_{j-2}]{} q_j \cdots q_n \xrightarrow[\alpha_n]{} q_{n+1}$

der Länge n-1 gefunden worden, also eine $\mathfrak{R}$-Reduktion von q_{n+1} aus q_1, die kürzer ist als die gegebene $\mathfrak{R}$-Reduktion (1).

Nachfolgend sollen nun die benötigten Hilfssätze und anschließend der Σ-Reduktionssatz bewiesen werden:

<u>*Lemma 5.1*</u> (Σ-Reduktionslemma) Sei $\mathfrak{R}$ ein Σ-maximales Grundtermersetzungssystem und

(1) $q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \cdots q_n \xrightarrow[\alpha_n]{} q_{n+1}$,

($n \geq 1$), eine $\mathfrak{R}$-Reduktion mit $q_1, q_{n+1} \in T_{\Sigma gr}$ und $\{q_2, \ldots, q_n\} \not\subset T_{\Sigma gr}$. Dann gibt es Indizes i und j mit $2 \leq i < j \leq n+1$, so daß für alle h mit $i \leq h \leq j-1$ gilt:

(2) $\alpha_{j-1} = \alpha_{i-1}$,

(3) $\alpha_{i-1}(q_h) \in T_{\Sigma gr}$, und

(4) $[\alpha_{i-1}(q_h)] \nsubseteq [q_h]_{\alpha_{i-1}}$.

Beweis Da $\{q_2,...,q_n\} \not\subset T_{\Sigma gr}$ gilt, gibt es irgendwelche Terme $q \in \{q_2,...,q_n\}$ und dazu Selektoren $\beta \in SEL^+$ mit $\beta(q)\downarrow$ und $[\beta(q)] \not\leq [q]_\beta$. Sei nun α ein solcher Selektor, der minimal bezüglich $\lessdot$ ist, und sei q_m ein Term der $\mathfrak{R}$-Reduktion (1) mit

(5) $\alpha(q_m)\downarrow$ und $[\alpha(q_m)] \not\leq [q_m]_\alpha$, $(2 \leq m \leq n)$.

Sei q_{i-1} der erste Term links von q_m in der $\mathfrak{R}$-Reduktion (1), der

(6) $[\alpha(q_{i-1})] \leq [q_{i-1}]_\alpha$, falls $\alpha(q_{i-1})\downarrow$ $(i-1<m)$

erfüllt und sei q_j der erste Term rechts von q_m in (1), der

(7) $[\alpha(q_j)] \leq [q_j]_\alpha$, falls $\alpha(q_j)\downarrow$ $(m<j)$

erfüllt.

Die Existenz von q_{i-1} ist gesichert, da q_1 in (1) links von q_m steht und als Σ-Term $[\alpha(q_1)] \leq [q_1]_\alpha$ für $\alpha(q_1)\downarrow$ erfüllt. Ebenso garantiert $q_{n+1} \in T_{\Sigma gr}$ die Existenz von q_j.

Da q_{i-1} der erste Term links von q_m in (1) ist, der (6) erfüllt gilt sicher $\alpha(q_i)\downarrow$ und $[\alpha(q_i)] \not\leq [q_i]_\alpha$. Die folgende Fallunterscheidung zeigt, daß damit auch $\alpha(q_{i-1})\downarrow$ wahr ist:

Fall (i) $\alpha \lessdot \alpha_{i-1}$: Aus $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{}_{\mathfrak{R}} q_i$ und $\alpha(q_i)\downarrow$ ergibt sich mit Lemma 3.5 (2) $[\alpha(q_i)] \leq [q_i]_\alpha$, d.h. dieser Fall ist unmöglich. $\nabla\emptyset$

Fall (ii) $\alpha \gtrdot \alpha_{i-1}$: Mit $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{}_{\mathfrak{R}} q_i$ erhält man $\alpha_{i-1}(q_{i-1})\downarrow$ und damit auch $\alpha(q_{i-1})\downarrow$. $\emptyset$

Fall (iii) $\alpha \perp \alpha_{i-1}$: Aus $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{}_{\mathfrak{R}} q_i$ ergibt sich mit Lemma 2.2 (6) $\alpha(q_{i-1}) = \alpha(q_i)$, und da $\alpha(q_i)\downarrow$ gilt, muß $\alpha(q_{i-1})\downarrow$ gelten. $\emptyset$

In jedem (möglichen) Fall ergibt sich also $\alpha(q_{i-1})\downarrow$, und mit (6) erhält man

(8) $\alpha(q_{i-1})\downarrow$ und $[\alpha(q_{i-1})] \leq [q_{i-1}]_\alpha$ $(i-1<m)$.

Auf die gleiche Weise läßt sich $\alpha(q_j)\downarrow$ beweisen, und man erhält mit (7)

(9) $\alpha(q_j)\downarrow$ und $[\alpha(q_j)] \leq [q_j]_\alpha$ $(m<j)$.

Mit q_{i-1} und q_j hat man also Terme der $\mathfrak{R}$-Reduktion (1) gefunden, die der Signatur an der Stelle α genügen. Folgende Überlegung zeigt, daß man damit auch die Terme q_i, q_{j-1} der $\mathfrak{R}$-Reduktion (1) gefunden hat, bei denen die Signatur an der Stelle α durch $q_{i-1} \longrightarrow_{\mathfrak{R}} q_i$ "verletzt" wird, wobei dieser "Sortenfehler" erst mit $q_{j-1} \longrightarrow_{\mathfrak{R}} q_j$ berichtigt wird (vergl. Beispiel 5.1). Andernfalls müsste für irgendein h mit $i \leq h \leq j-1$ $[\alpha(q_h)] \leq [q_h]_\alpha$ gelten, falls $\alpha(q_h)\downarrow$ wahr wäre:

Fall (i) $i \leq h < m$: Dann ist q_h und nicht q_{i-1} der erste Term links von q_m in der $\mathfrak{R}$-Reduktion (1), der $[\alpha(q_h)] \leq [q_h]_\alpha$, falls $\alpha(q_h)\downarrow$, erfüllt. $\nabla\not\emptyset$

Fall (ii) $h = m$: Wegen (5) ist dieser Fall unmöglich. $\nabla\not\emptyset$

Fall (iii) $m < h \leq j-1$: Dann ist q_h und nicht q_j der erste Term rechts von q_m in der $\mathfrak{R}$-Reduktion (1), der $[\alpha(q_h)] \leq [q_h]_\alpha$, falls $\alpha(q_h)\downarrow$, erfüllt. $\nabla\not\emptyset$

Damit ist also

(10) $\alpha(q_h)\downarrow$ und $[\alpha(q_h)] \not\leq [q_h]_\alpha$ für alle h mit $i \leq h \leq j-1$

bewiesen, d.h. alle Terme zwischen den Indizes i und j-1 (einschließlich) in der $\mathfrak{R}$-Reduktion (1) genügen an der Stelle α nicht nur der Signatur. Allerdings gilt, daß alle durch α

selektierten Unterterme dieser Terme sortenrecht sind: Gäbe es nämlich einen Index h' mit $i \leq h' \leq j-1$, so daß $\alpha(q_{h'})$ nicht sortenrecht wäre, so müsste ja $[\delta(\alpha(q_{h'}))] \nleq [\alpha(q_{h'})]_\delta = [q_{h'}]_{\delta\circ\alpha}$ für irgendein $\delta \in SEL^+$ mit $\delta(\alpha(q_{h'}))\downarrow$ gelten. Da jedoch $\delta\circ\alpha <\cdot\, \alpha$ gilt, steht dies im Widerspruch zur Minimalität von α. Man erhält somit

(11) $\alpha(q_h) \in T_{\Sigma gr}$, für alle h mit $i \leq h \leq j-1$.

Es soll nun bewiesen werden, daß

(12) $\alpha = \alpha_{i-1}$

gilt: Nimmt man an, (12) sei falsch, so ergibt sich $\alpha <\cdot\, \alpha_{i-1}$, $\alpha \perp \alpha_{i-1}$ oder $\alpha \cdot\!> \alpha_{i-1}$, d.h. $\alpha <\cdot\, \alpha_{i-1}$ oder $\alpha \nleq\cdot\, \alpha_{i-1}$.

Fall (i) $\alpha <\cdot\, \alpha_{i-1}$: Da $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{}_{R} q_i$ wegen (1) und $\alpha(q_i)\downarrow$ wegen (10) gilt, erhält man mit Lemma 3.5 (2) $[\alpha(q_i)] \leq [q_i]_\alpha$, d.h. einen Widerspruch zu (10). $\nabla\!\!\not{0}$

Fall (ii) $\alpha \nleq\cdot\, \alpha_{i-1}$: Wegen $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{}_{R} q_i$ erhält man mit Lemma 3.1 (3) $[\alpha(q_{i-1})] = [\alpha(q_i)]$ und mit Lemma 3.1 (4) $[q_{i-1}]_\alpha = [q_i]_\alpha$. Wegen (8) ergibt sich somit $[\alpha(q_i)] \leq [q_i]_\alpha$, d.h. ein Widerspruch zu (10). $\nabla\!\!\not{0}$

Genauso zeigt man

(13) $\alpha = \alpha_{j-1}$.

Mit (12) und (13) erhält man jetzt (2), aus (12) und (11) ergibt sich (3), und mit (12) und (10) ist (4) bewiesen. ⊠

Lemma 5.2 (Verschiebelemma) Sei $\mathfrak{R}$ ein Σ-maximales Grundtermersetzungssystem und $q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \ldots q_n \xrightarrow[\alpha_n]{} q_{n+1}$, $n\geq 1$, eine $\mathfrak{R}$-Reduktion mit $\{\alpha_1(q_1),\ldots,\alpha_1(q_{n+1})\}\subset T_{\Sigma gr}$. Dann gibt es Selektoren $\beta_1,\ldots,\beta_n \in SEL^*$, sodaß für alle h mit $1\leq h\leq n$ gilt:

(1) $q_1 \xrightarrow[\beta_1]{}{}_{\mathfrak{R}} q_2 \xrightarrow[\beta_2]{}{}_{\mathfrak{R}} q_3 \ldots q_n \xrightarrow[\beta_n]{}{}_{\mathfrak{R}} q_{n+1}$,

(2) $\beta_h = \alpha_1$, falls $\alpha_h <\!\cdot\ \alpha_1$, und

(3) $\beta_h = \alpha_h$, falls $\alpha_h \not<\!\cdot\ \alpha_1$.

Beweis Dieses Lemma wird mittels Induktion über die Länge n der $\mathfrak{R}$-Reduktion gezeigt:

Induktionsanfang n = 1: Das Lemma gilt trivialerweise.∅

Induktionsschritt: Sei $q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \ldots q_n \xrightarrow[\alpha_n]{} q_{n+1} \xrightarrow[\alpha_{n+1}]{} q_{n+2}$ eine $\mathfrak{R}$-Reduktion mit $\{\alpha_1(q_1),\ldots,\alpha_1(q_{n+2})\} \subset T_{\Sigma gr}$. Als Induktionshypothese wird für jede $\mathfrak{R}$-Reduktion der Länge n die Existenz einer Folge von Selektoren $\beta_1,\ldots,\beta_n \in SEL^*$ angenommen, die die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen.

Für $\alpha_{n+1} \not<\!\cdot\ \alpha_1$ definiert man $\beta_{n+1} = \alpha_{n+1}$ und erhält mit der Induktionshypothese eine Folge von Selektoren $\beta_1,\ldots,\beta_n,\beta_{n+1}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Sei nun $\alpha_{n+1} <\!\cdot\ \alpha_1$. Dann gilt $\alpha_{n+1} = \beta\circ\alpha_1$ für irgendein $\beta \in SEL^+$ und somit $q_{n+1} \xrightarrow[\beta\circ\alpha_1]{}{}_{\mathfrak{R}} q_{n+2}$. Mit Lemma 2.2 (3) ergibt sich $\alpha_1(q_{n+1}) \xrightarrow[\beta]{}{}_{\mathfrak{R}} \alpha_1(q_{n+2})$ und $q_{n+1} \underset{\alpha_1}{\sim} q_{n+2}$. Da nach Voraussetzung $\alpha_1(q_{n+1}),\alpha_1(q_{n+2}) \in T_{\Sigma gr}$ gilt, erhält man $\alpha_1(q_{n+1}) \longrightarrow_{\Sigma\mathfrak{R}} \alpha_1(q_{n+2})$ und somit $\alpha_1(q_{n+1}) \Rightarrow_{\mathfrak{R}} \alpha_1(q_{n+2})$, denn $\mathfrak{R}$ ist Σ-maximal.

Mit $q_{n+1} \underset{\alpha_1}{\sim} q_{n+2}$ ergibt sich dann $q_{n+1} \xrightarrow[\alpha_1]{}{}_{\mathfrak{R}} q_{n+2}$, d.h. mit $\beta_{n+1} = \alpha_1$ und der Induktionshypothese erhält man eine Folge von

Selektoren $\beta_1,\dots,\beta_n,\beta_{n+1}$, die die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen. $\emptyset\boxtimes$

Lemma 5.3 (Vertauschungslemma) Sei $\mathfrak{R}$ ein Grundtermersetzungssystem und $q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \dots q_n \xrightarrow[\alpha_n]{} q_{n+1}$, $n\geq 1$, eine $\mathfrak{R}$-Reduktion mit $\alpha_i \perp \alpha_n$ für alle i mit $1\leq i\leq n$. Dann gibt es Terme $r_2,\dots,r_n \in T_{gr}$, so daß $q_1 \xrightarrow[\alpha_n]{} r_2 \xrightarrow[\alpha_1]{} r_3 \dots r_n \xrightarrow[\alpha_{n-1}]{} q_{n+1}$ eine $\mathfrak{R}$-Reduktion ist.

Beweis Das Lemma wird durch Induktion über die Länge n der $\mathfrak{R}$-Reduktion bewiesen:

Induktionsanfang n = 1: Das Lemma gilt trivialerweise.$\emptyset$

Induktionsschritt: Sei $q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \dots q_{n+1} \xrightarrow[\alpha_{n+1}]{} q_{n+2}$ eine $\mathfrak{R}$-Reduktion mit $\alpha_i \perp \alpha_{n+1}$ für jedes i mit $1\leq i\leq n+1$. Als Induktionshypothese wird angenommen, daß das Lemma für alle $\mathfrak{R}$-Reduktionen der Länge n gilt. Also gibt es Terme $r_3,\dots,r_{n+1} \in T_{gr}$, so daß $q_2 \xrightarrow[\alpha_{n+1}]{} r_3 \xrightarrow[\alpha_2]{} r_4 \dots r_{n+1} \xrightarrow[\alpha_n]{} q_{n+2}$ eine $\mathfrak{R}$-Reduktion ist. Damit ist auch $q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \xrightarrow[\alpha_{n+1}]{} r_3$ eine $\mathfrak{R}$-Reduktion und da nach Voraussetzung $\alpha_1 \perp \alpha_{n+1}$ gilt, erhält man mit Lemma 2.2 (7) $q_1 \xrightarrow[\alpha_{n+1}]{}_{\mathfrak{R}} r_2 \xrightarrow[\alpha_1]{}_{\mathfrak{R}} r_3$ für irgendein $r_2 \in T_{gr}$. Also hat man Terme $r_2,\dots,r_{n+1} \in T_{gr}$ gefunden, so daß $q_1 \xrightarrow[\alpha_{n+1}]{}_{\mathfrak{R}} r_2 \xrightarrow[\alpha_1]{}_{\mathfrak{R}} r_3 \dots r_{n+1} \xrightarrow[\alpha_n]{}_{\mathfrak{R}} q_{n+2}$ gilt.$\boxtimes$

Lemma 5.4 (Transitivitätslemma) Sei $\mathfrak{R}$ ein Σ-maximales Grundtermersetzungssystem und $q_1 \xrightarrow[\alpha]{} q_2 \dots q_n \xrightarrow[\alpha]{} q_{n+1}$, $n\geq 1$, eine $\mathfrak{R}$-Reduktion. Dann gilt $q_1 \xrightarrow[\alpha]{}_{\mathfrak{R}} q_{n+1}$.

Beweis Es gilt $q_i \underset{\alpha}{\sim} q_{i+1}$ und $\alpha(q_i) \Rightarrow_{\mathfrak{R}} \alpha(q_{i+1})$ für alle i mit $1\leq i\leq n$. Also gilt $\alpha(q_i) \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} \alpha(q_{i+1})$, denn $\mathfrak{R}$ ist Σ-maximal, damit auch $\alpha(q_1) \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} \alpha(q_{n+1})$, da $\xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$ transitiv ist und schließlich $\alpha(q_1) \Rightarrow_{\mathfrak{R}} \alpha(q_{n+1})$ wegen der Σ-Maximalität von $\mathfrak{R}$.

Mit $q_i \underset{\alpha}{\sim} q_{i+1}$ und der Transitivität von $\underset{\alpha}{\sim}$ ergibt sich $q_1 \underset{\alpha}{\sim} q_{n+1}$ und mit $\alpha(q_1) \Rightarrow_{\mathfrak{R}} \alpha(q_{n+1})$ erhält man $q_1 \underset{\alpha}{\longrightarrow}_{\mathfrak{R}} q_{n+1}$. ⊠

Abschließend soll nun der Hauptsatz dieses Abschnitts, der Σ-Reduktionssatz bewiesen werden:

Satz 5.5 (Σ-Reduktionssatz) Für jedes Σ-maximale Grundtermersetzungssystem $\mathfrak{R}$ gilt:

$$\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} \cap (T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}) = \xrightarrow{+}_{\Sigma \mathfrak{R}} \quad .$$

Beweis "$\supset$" Mit $\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} \supset \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$ und $(T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}) \supset \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$ erhält man $\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} \cap (T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr}) \supset \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}}$. ∅

"$\subset$" Der Beweis wird indirekt geführt, indem man annimmt, daß es Terme $q_1, q_{n+1} \in T_{\Sigma gr}$ gibt, für die zwar $q_1 \xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} q_{n+1}$ aber nicht $q_1 \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} q_{n+1}$ gilt: Sei

(1) $q_1 \underset{\alpha_1}{\longrightarrow} q_2 \ldots q_n \underset{\alpha_n}{\longrightarrow} q_{n+1}$

eine $\mathfrak{R}$-Reduktion von q_{n+1} aus q_1 mit minimaler Länge. Da q_1, $q_{n+1} \in T_{\Sigma gr}$ und $q_1 \not\xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}} q_{n+1}$, gilt $n \geq 2$ und $\{q_2, \ldots, q_n\} \not\subset T_{\Sigma gr}$. Nach dem Σ-Reduktionslemma (5.1) gibt es dann Indizes i und j mit $2 \leq i < j \leq n+1$, so daß für jedes h mit $i \leq h \leq j-1$ gilt:

(2) $\alpha_{j-1} = \alpha_{i-1}$,

(3) $\alpha_{i-1}(q_h) \in T_{\Sigma gr}$, und

(4) $[\alpha_{i-1}(q_h)] \not\subseteq [q_h]_{\alpha_{i-1}}$.

Im folgenden wird nun der durch i und j bestimmte Teil

(5) $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{} q_i \ \ldots \ q_{j-1} \xrightarrow[\alpha_{j-1}]{} q_j$

der $\mathfrak{R}$-Reduktion (1) betrachtet: Da $\alpha_{i-1}(q_{i-1}) \Rightarrow_{\mathfrak{R}} \alpha_{i-1}(q_i)$, $\alpha_{j-1}(q_{j-1}) \Rightarrow_{\mathfrak{R}} \alpha_{j-1}(q_j)$ und $\mathfrak{R}$ Σ-maximal ist, gilt mit Lemma 3.5 (1) $\alpha_{i-1}(q_{i-1}) \in T_{\Sigma gr}$ und $\alpha_{j-1}(q_j) \in T_{\Sigma gr}$. Unter Berücksichtigung von (2) und (3) ergibt sich damit $\{\alpha_{i-1}(q_{i-1}),\ldots,\alpha_{i-1}(q_j)\} \subset T_{\Sigma gr}$, und man erhält mit dem Verschiebelemma (5.2) eine Folge von Selektoren $\beta_{i-1},\ldots,\beta_{j-1} \in SEL^*$, so daß für alle h mit $i-1 \le h \le j-1$ gilt:

(6) $q_{i-1} \xrightarrow[\beta_{i-1}]{}{}_{\mathfrak{R}} q_i \xrightarrow[\beta_i]{}{}_{\mathfrak{R}} q_{i+1} \ \ldots \ q_{j-1} \xrightarrow[\beta_{j-1}]{}{}_{\mathfrak{R}} q_j$,

(7) $\beta_h = \alpha_{i-1}$, falls $\alpha_h \mathrel{<\!\cdot} \alpha_{i-1}$, und

(8) $\beta_h = \alpha_h$, falls $\alpha_h \not\mathrel{<\!\cdot} \alpha_{i-1}$.

Mit (2) und (8) erhält man

(9) $\beta_{j-1} = \alpha_{i-1}$.

Als nächstes soll nun gezeigt werden, daß für jeden Selektor β_h mit $i \le h \le j-1$ $\beta_h \mathrel{\underline{\perp}} \alpha_{i-1}$ erfüllt ist:

Fall (i) $\alpha_{i-1} \mathrel{\cdot\!>} \alpha_h$: Wegen (7) gilt $\beta_h = \alpha_{i-1}$ und damit natürlich auch $\beta_h \mathrel{\underline{\perp}} \alpha_{i-1}$.$\emptyset$

Fall (ii) $\alpha_{i-1} \mathrel{\underline{\perp}} \alpha_h$: Damit gilt $\alpha_h \not\mathrel{<\!\cdot} \alpha_{i-1}$ und mit (8) erhält man $\beta_h = \alpha_h$, also $\beta_h \mathrel{\underline{\perp}} \alpha_{i-1}$.$\emptyset$

Fall (iii) $\alpha_{i-1} \mathrel{<\!\cdot} \alpha_h$: Aus $q_h \xrightarrow[\alpha_h]{}{}_{\mathfrak{R}} q_{h+1}$ und $\alpha_{i-1}(q_h)\downarrow$ (wegen (3)) ergibt sich mit Lemma 3.5 (2) $[\alpha_{i-1}(q_h)] \le [q_h]_{\alpha_{i-1}}$ und damit ein Widerspruch zu (4).$\nabla\emptyset$

Damit ist $\beta_h \mathrel{\underline{\perp}} \alpha_{i-1}$ für jedes h mit $i \le h \le j-1$ bewiesen. Wegen (8) gilt $\beta_{i-1} = \alpha_{i-1}$, und mit (9) erhält man schließlich:

(10) $\beta_h \perp \beta_{j-1}$ für jedes h mit $i-1 \leq h \leq j-1$.

Aus (6) und (10) folgt jetzt mit dem Vertauschungslemma (5.3) die Existenz einer Folge von Termen $r_i, \ldots, r_{j-1} \in T_{gr}$, so daß

(11) $q_{i-1} \xrightarrow[\beta_{j-1}]{}_{\mathfrak{R}} r_i \xrightarrow[\beta_{i-1}]{}_{\mathfrak{R}} r_{i+1} \cdots r_{j-1} \xrightarrow[\beta_{j-2}]{}_{\mathfrak{R}} q_j$

und damit

(12) $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{}_{\mathfrak{R}} r_i \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{}_{\mathfrak{R}} r_{i+1}$

gilt, denn $\beta_{j-1} = \alpha_{i-1}$ wegen (9) und $\beta_{i-1} = \alpha_{i-1}$ wegen (8).
Aus (12) erhält man mit dem Transitivitätslemma (5.4)

(13) $q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{}_{\mathfrak{R}} r_{i+1}$.

Damit hat man eine $\mathfrak{R}$-Reduktion

$$q_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} q_2 \cdots q_{i-1} \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{} r_{i+1} \xrightarrow[\beta_i]{} r_{i+2} \cdots r_{j-1} \xrightarrow[\beta_{j-2}]{} q_j \xrightarrow[\alpha_j]{} q_{j+1} \cdots q_n \xrightarrow[\alpha_n]{} q_{n+1}$$

von q_{n+1} aus q_1 mit Länge n-1 gefunden, d.h. die $\mathfrak{R}$-Reduktion (1) ist nicht minimal. ∇⊠

Der Σ-Reduktionssatz gilt offensichtlich auch für $\mathfrak{R}$-Reduktionen von Basisliteralen und wird im nachfolgenden Abschnitt in folgender Fassung verwendet:

Für jedes Σ-maximale Grundtermersetzungssystem $\mathfrak{R}$ gilt:

$$\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}} \cap \ (LIT_{\Sigma gr} \times LIT_{\Sigma gr}) = \xrightarrow{+}_{\Sigma \mathfrak{R}} \quad .$$

6. Die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls im Basisfall

In diesem Abschnitt wird der

> *Vollständigkeitssatz für den ΣRP-Kalkül im Basisfall* Wenn $S_{\Sigma gr}$ E-unerfüllbar ist, dann gilt $S^{E}_{\Sigma gr} \vdash_{\Sigma} \square$

bewiesen. Bevor jedoch ein formaler Beweis für diesen Satz gegeben wird, sollen einige Vorbetrachtungen angestellt werden:

Σ-Deduktionen unterscheiden sich von Deduktionen durch

- die Einschränkung der *allgemeinsten Unifikatoren* auf Σ-Substitutionen und

- die Beschränkung der Σ-Paramodulation durch die Sortenrechtheit der *Modulantliterale*.

Da im Basisfall jeder allgemeinste Unifikator die leere Substitution ε ist - also eine Σ-Substitution - ist jede paramodulationsfreie Deduktion $\vdash_{R}$ aus einer sortenrechten Basisklauselmenge offensichtlich auch eine Σ-Deduktion $\vdash_{\Sigma R}$ aus dieser Menge, d.h. für jede sortenrechte Klauselmenge S gilt:

$$\{C \in \mathcal{L}_{\Sigma gr} \mid S_{\Sigma gr} \vdash_{\Sigma R} C\} = \{C \in \mathcal{L}_{gr} \mid S_{\Sigma gr} \vdash_{R} C\} \quad .$$

Damit ist jede Widerlegung einer sortenrechten Basisklauselmenge auch eine Σ-Widerlegung dieser Basisklauselmenge, d.h. der ΣRP-Kalkül ohne Paramodulation ist im Basisfall trivialerweise vollständig.

Auf Σ-Deduktionen $\vdash_{\Sigma P}$ aus Basisklauselmengen trifft dieser Sachverhalt nicht mehr zu, da die Beschränkung der Σ-Paramodulation durch die Sortenrechtheit der Modulantliterale auch im Basisfall wirksam ist, d.h. hier gilt nur noch:

$$\{C \in \mathcal{L}_{\Sigma gr} \mid S_{\Sigma gr} \vdash_{\Sigma P} C\} \subset \{C \in \mathcal{L}_{gr} \mid S_{\Sigma gr} \vdash_{P} C\} \quad .$$

Die Σ-Paramodulation bewirkt also eine echte *Verfeinerung* der Deduktionen im Basisfall. Damit hängt die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls im Basisfall allein von der Vollständigkeit dieser Verfeinerung ab, die folgendermaßen formuliert werden kann:

(*) Wenn $\{C \in \mathcal{L}_{gr} \mid S^{E}_{\Sigma gr} \vdash_{P} C\}$ unerfüllbar ist, dann ist auch $\{C \in \mathcal{L}_{\Sigma gr} \mid S^{E}_{\Sigma gr} \vdash_{\Sigma P} C\}$ unerfüllbar.

Um (*) zu beweisen, werden die folgenden Klauselmengen definiert:

Definition 6.1

$\mathrm{Par}(S) = \{C \in \mathcal{L}_{gr} \mid S^{E}_{\Sigma gr} \vdash_{P} C\}$

$\mathrm{Par}_{\Sigma}(S) = \{C \in \mathcal{L}_{\Sigma gr} \mid S^{E}_{\Sigma gr} \vdash_{\Sigma P} C\}$

$\mathrm{RPar}(S) = \{C \in \mathcal{L}_{gr} \mid S^{E}_{\Sigma gr} \vdash_{P} C$, wobei keine Klausel in $\vdash_{P}$ allein durch Paramodulation in ein positives Gleichheitsliteral entsteht$\}$

⊠

Da die Unerfüllbarkeit von Par(S) äquivalent mit der Unerfüllbarkeit von RPar(S) ist [Lov78], ist (*) bewiesen, wenn aus der Erfüllbarkeit von $\mathrm{Par}_{\Sigma}(S)$ die Erfüllbarkeit von RPar(S) geschlossen werden kann. Dies läßt sich folgendermaßen bewerkstelligen:

Zunächst werden sogenannte *ΣE-beschränkte Interpretationen* eingeführt, und es wird gezeigt, daß $\mathrm{Par}_{\Sigma}(S)$ eine ΣE-beschränkte Interpretation als Modell besitzt, vorausgesetzt $\mathrm{Par}_{\Sigma}(S)$ ist überhaupt erfüllbar. Weiter wird gezeigt, daß jede ΣE-beschränkte Interpretation ein Σ-maximales und symmetrisches Grundtermersetzungssystem enthält. Damit kann die sogenannte *Reduktionshülle* I^{*} einer ΣE-beschränkten Interpretation I eingeführt werden, von der dann gezeigt wird, daß auch diese wieder eine

Interpretation ist. Abschließend wird dann bewiesen, daß die Reduktionshülle I* einer ΣE-beschränkten Interpretation RPar(S) erfüllt, vorausgesetzt I ist ein Modell von $Par_\Sigma(S)$.

° ° °

Kernstück des Vollständigkeitsbeweises für die Paramodulation ist der Nachweis, daß jede bezüglich Paramodulation abgeschlossene Basisklauselmenge ein E-Modell besitzt, vorausgesetzt, diese Menge ist überhaupt erfüllbar: Man zeigt, daß jedes minimale Modell von Par(S) ein E-Modell ist [WR73].

Überträgt man diesen Beweis auf die Σ-Paramodulation, d.h. auf minimale Modelle von $Par_\Sigma(S)$, so erhält man jedoch kein E-Modell mehr, sondern ein Modell M, das mit einem E-Modell M* auf $LIT_{\Sigma gr}$ übereinstimmt, d.h. für das gilt

$$M = M^* \cap LIT_{\Sigma gr} \quad ,$$

wobei hier erst einmal vorausgesetzt wird, daß M* überhaupt existiert. Ursache dafür ist, daß alle Literale in $Par_\Sigma(S)$ sortenrecht sind. Diese Eigenschaft einer Interpretation, mit einer E-Interpretation auf $LIT_{\Sigma gr}$ übereinzustimmen, wird durch den Begriff der ΣE-beschränkten Interpretation beschrieben:

> *Definition 6.2* Sei I eine Interpretation. I heißt *Σ-reflexiv* gdw. $E(q\,q) \in I$ für alle $q \in T_{\Sigma gr}$. I ist *ΣE-abgeschlossen* gdw. für alle $L \in I$ und alle $K \in LIT_{\Sigma gr}$ mit $L \longrightarrow_{R(I)} K$, $K \in I$ gilt. I wird eine *ΣE-beschränkte Interpretation* genannt, gdw. I Σ-reflexiv und ΣE-abgeschlossen ist und außerdem $I \subset LIT_{\Sigma gr}$ gilt.⊠

Als erstes wird nun bewiesen, daß jedes erfüllbare $Par_\Sigma(S)$ ein ΣE-beschränktes Modell besitzt:

Lemma 6.1 Wenn $Par_{\Sigma}(S)$ erfüllbar ist, dann gibt es eine ΣE-beschränkte Interpretation, die $Par_{\Sigma}(S)$ erfüllt.

Beweis Sei M ein minimales Modell von $Par_{\Sigma}(S)$. Es wird gezeigt, daß M ΣE-beschränkt ist:

Σ-reflexiv: Da $\{E(q\,q)\} \in S^{E}_{\Sigma gr} \subset Par_{\Sigma}(S)$ für jedes $q \in T_{\Sigma gr}$ gilt und M $Par_{\Sigma}(S)$ erfüllt, gilt offensichtlich $E(q\,q) \in M$, d.h. M ist Σ-reflexiv.$\not{\emptyset}$

ΣE-abgeschlossen: Sei $L \in M$ und $K \in LIT_{\Sigma gr}$, so daß $L \longrightarrow_{\mathfrak{R}(M)} K$ gilt, d.h. $L \xrightarrow[\alpha]{}_{M} K$ für irgendein $\alpha \in SEL^{+}$. Nimmt man an, daß $M \cap C \neq \{L\}$ für jedes $C \in Par_{\Sigma}(S)$ gilt, so ergibt sich wegen $M \cap C \neq \emptyset$, daß $(M - L) \cap C \neq \emptyset$. Somit erfüllt $(M - L)$ $Par_{\Sigma}(S)$ im Widerspruch zur Minimalität von M.∇ Also gilt

(1) $M \cap C_{L} = \{L\}$ für mindestens ein $C_{L} \in Par_{\Sigma}(S)$

und wegen $E(\alpha(L)\alpha(K)) \in M$ mit der gleichen Schlußweise

(2) $M \cap C_{E} = \{E(\alpha(L)\alpha(K))\}$ für mindestens ein $C_{E} \in Par_{\Sigma}(S)$.

Sei nun C der Paramodulant von C_{L} und C_{E} bezüglich L und $E(\alpha(L)\alpha(K))$, d.h.

(3) $C = (C_{L} - L) \cup (C_{E} - E(\alpha(L)\alpha(K))) \cup \{K\}$.

Da $K \in LIT_{\Sigma gr}$, gilt $[\alpha(K)] \leq [K]_{\alpha}$. Wegen $K \underset{\alpha}{\sim} L$ ergibt sich mit Lemma 3.1 (4) $[K]_{\alpha} = [L]_{\alpha}$ und damit dann $[\alpha(K)] \leq [L]_{\alpha}$. Also ist C sogar ein Σ-Paramodulant, d.h. $C \in Par_{\Sigma}(S)$ und deswegen

(4) $M \cap C \neq \emptyset$.

Mit (1), (2) und (3) erhält man $M \cap C = M \cap \{K\}$ und wegen (4) dann $K \in M$, d.h. M ist ΣE-abgeschlossen.$\not{\emptyset}$

$M \subset LIT_{\Sigma gr}$: Angenommen es gilt $L \notin LIT_{\Sigma gr}$ für irgendein $L \in M$. Dann gilt auch $L \notin M \cap C$ für jedes $C \in Par_{\Sigma}(S)$, denn jede Klausel in $Par_{\Sigma}(S)$ enthält ausschließlich Σ-Literale. Damit ist dann $(M - L)$ auch ein Modell von $Par_{\Sigma}(S)$ und M war nicht minimal gewählt. $\nabla\emptyset\boxtimes$

Das durch Lemma 6.1 gesicherte ΣE-beschränkte Modell von $Par_{\Sigma}(S)$ soll nun zu einem Modell für RPar(S) erweitert werden. Dazu wird folgende Eigenschaft ΣE-beschränkter Interpretationen benötigt:

Lemma 6.2 Ist I eine ΣE-schränkte Interpretation, so ist $\mathfrak{R}(I)$ ein Σ-maximales und symmetrisches Grundtermersetzungssystem.

Beweis Zuerst wird die Symmetrie von $\mathfrak{R}(I)$ bewiesen:

Seien $q, r \in T_{\Sigma gr}$ beliebige Terme mit $q \Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} r$ und sei $\alpha \in SEL^{+}$ ein Selektor mit $\alpha(E(t_1\ t_2)) = t_1$ für irgendwelche Terme t_1 und t_2. Dann gilt offenbar $E(q\,q) \underset{\alpha}{\sim} E(r\,q)$ und $E(\alpha(E(q\,q))\ \alpha(E(r\,q))) = E(q\,r) \in I$, d.h.

$$E(q\,q) \xrightarrow[\alpha]{}_{I} E(r\,q) \quad .$$

Wegen der Σ-Reflexivität von I gilt $E(q\,q) \in I$. Weiter gilt $E(r\,q) \in LIT_{\Sigma gr}$ und daher mit der ΣE-Abgeschlossenheit von I $E(r\,q) \in I$, d.h. $r \Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} q$.$\emptyset$

Um die Σ-Maximalität von $\mathfrak{R}(I)$ zu beweisen, muß $\Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} = \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}(I)}$ gezeigt werden:

"$\subset$" Offenbar gilt $\Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} \subset \longrightarrow_{\mathfrak{R}(I)}$ und $\Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} \subset (T_{\Sigma gr} \times T_{\Sigma gr})$, denn I ist ΣE-beschränkt und erfüllt, daher $I \subset LIT_{\Sigma gr}$. Also gilt $\Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} \subset \longrightarrow_{\Sigma\mathfrak{R}(I)} \subset \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}(I)}$.$\emptyset$

"$\supset$" Seien $q_1, q_{n+1} \in T_{\Sigma gr}$ Terme mit $q_1 \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}(I)} q_{n+1}$, d.h. es gibt Terme $q_2,\ldots,q_n \in T_{\Sigma gr}$, $n\geq 1$, und eine Folge von Selektoren $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, so daß

(1) $q_1 \underset{\alpha_1}{\longrightarrow} q_2 \ldots q_n \underset{\alpha_n}{\longrightarrow} q_{n+1}$

eine $\mathfrak{R}(I)$-Reduktion ist. Durch Induktion über die Länge n der $\mathfrak{R}(I)$-Reduktion (1) wird jetzt bewiesen, daß

$$q_1 \Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} q_{n+1}$$

gilt:

Induktionsanfang n = 1: Sei $\alpha \in SEL^+$ ein Selektor, der $\alpha(E(t_1\, t_2)) = t_2$ für alle Terme t_1 und t_2 erfüllt. Dann gilt $\alpha(E(q_1\, q_1)) = q_1 \underset{\alpha_1}{\longrightarrow}_{\mathfrak{R}(I)} q_2 = \alpha(E(q_1\, q_2))$ und mit $E(q_1\, q_1) \underset{\alpha}{\sim} E(q_1\, q_2)$ erhält man mittels Lemma 2.2 (3)

(2) $E(q_1\, q_1) \xrightarrow[\alpha_1 \circ \alpha]{}_I E(q_1\, q_2)$.

Mit $q_1,q_2 \in T_{\Sigma gr}$ gilt $E(q_1\, q_2) \in LIT_{\Sigma gr}$, und wegen der Σ-Reflexivität von I gilt $E(q_1\, q_1) \in I$. Aus (2) folgt dann mit der ΣE-Abgeschlossenheit von I $E(q_1\, q_2) \in I$, d.h. $q_1 \Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} q_2$.$\emptyset$

Induktionsschritt Sei $q_1 \underset{\alpha_1}{\longrightarrow} q_2 \ldots q_{n+1} \xrightarrow[\alpha_{n+1}]{} q_{n+2}$ eine $\mathfrak{R}(I)$-Reduktion mit $q_1 \overset{+}{\longrightarrow}_{\Sigma\mathfrak{R}(I)} q_{n+2}$. Als Induktionshypothese wird angenommen, daß für jede $\mathfrak{R}(I)$-Reduktion $q \overset{+}{\longrightarrow}_{\Sigma\mathfrak{R}(I)} r$ mit Länge $\leq n$, $n\geq 1$, $q \Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} r$ gilt. Insbesondere gilt dann $q_1 \Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} q_2$ und $q_2 \Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} q_{n+2}$, d.h. $E(q_1\, q_2) \in I$ und $E(q_2\, q_{n+2}) \in I$. Sei der Selektor α wie im Induktionsanfang gewählt. Dann gilt $E(q_1\, q_2) \underset{\alpha}{\sim} E(q_1\, q_{n+2})$ und $E(\alpha(E(q_1\, q_2))$ $\alpha(E(q_1\, q_{n+2}))) = E(q_2\, q_{n+2}) \in I$, d.h.

(3) $E(q_1\, q_2) \underset{\alpha}{\longrightarrow}_I E(q_1\, q_{n+2})$.

Da $E(q_1\, q_2) \in I$, $E(q_1\, q_{n+2}) \in LIT_{\Sigma gr}$ und I ΣE-abgeschlossen ist, erhält man mit (3) $E(q_1\, q_{n+2}) \in I$, d.h. $q_1 \Rightarrow_{\mathfrak{R}(I)} q_{n+2}$. ∅⊠

Die Reduktionshülle einer ΣE-beschränkten Interpretation I erhält man, indem I um alle Literale erweitert wird, die ausgehend von Literalen aus I vermöge $\xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}(I)}$ hergeleitet werden können, wobei jedoch positive Gleichheitsliterale von dieser Erweiterung ausgeschlossen sind:

Definition 6.3 Für jede ΣE-beschränkte Interpretation I ist deren *Reduktionshülle* I^* gegeben durch:

$$I^* = I \cup \{K \in LIT_{gr} \backslash AT^E_{gr} \mid L \xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}(I)} K \text{ für irgendein } L \in I\}. ⊠$$

Im allgemeinen enthält die Reduktionshülle I^* auch Basisliterale, die nicht sortenrecht sind. Interessant ist jedoch, daß I^* bezüglich I keine zusätzlichen sortenrechte Basisliterale enthält:

Lemma 6.3 Für jede ΣE-beschränkte Interpretation I gilt:

$$I = I^* \cap LIT_{\Sigma gr} \quad .$$

Beweis "⊂" Es gilt $I \subset I^*$ und $I \subset LIT_{\Sigma gr}$, denn I ist ΣE-beschränkt. Also gilt auch $I \subset I^* \cap LIT_{\Sigma gr}$. ∅

"⊃" Sei $K \in I^* \cap LIT_{\Sigma gr}$. Für $K \in I$ ist der Satz bewiesen, also wird im weiteren $K \in I^* \backslash I$ angenommen. Nach Definition 6.3 gibt es dann irgendein $L \in I$ mit $L \xrightarrow{+}_{\mathfrak{R}(I)} K$. Nach Annahme hat man $K \in LIT_{\Sigma gr}$ und wegen der ΣE-Beschränkheit von I gilt $I \subset LIT_{\Sigma gr}$, d.h. $L \in LIT_{\Sigma gr}$. Da $\mathfrak{R}(I)$ nach Lemma 6.2 Σ-maximal ist, gilt daher mit dem Σ-Reduktionssatz (5.5) $L \xrightarrow{+}_{\Sigma\mathfrak{R}(I)} K$, d.h. es gibt eine $\mathfrak{R}(I)$-Reduktion

$$L = L_1 \underset{\alpha_1}{\longrightarrow} L_2 \; \ldots \; L_n \underset{\alpha_n}{\longrightarrow} L_{n+1} = K$$

mit $\{L_1,\ldots,L_{n+1}\} \subset LIT_{\Sigma gr}$. Durch Induktion über n kann unter

Verwendung der ΣE-Abgeschlossenheit von I leicht $\{L_1,\ldots,L_{n+1}\} \subset I$ gezeigt werden, womit insbesondere dann $K \in I$ bewiesen ist.$\emptyset$⊠

Es soll nun gezeigt werden, daß die Reduktionshülle einer ΣE-beschränkten Interpretation wieder eine Interpretation ist:

Lemma 6.4 Die Reduktionshülle I^* einer ΣE-beschränkten Interpretation I ist eine Interpretation.

Beweis Der Beweis wird indirekt geführt, indem die Annahme, daß $\{Q,Q^c\} \subset I^*$ für irgendein Basisliteral Q, zum Widerspruch geführt wird:

Nach Definition 6.3 gibt es Literale L und K^c in I mit

$$L \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(I)} Q \quad \text{und} \quad K^c \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(I)} Q^c \quad .$$

Wegen $K^c \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(I)} Q^c$ gilt offenbar auch $K \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(I)} Q$, und da $\mathfrak{R}(I)$ nach Lemma 6.2 symmetrisch ist, erhält man $Q \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(I)} K$. Mit $L \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(I)} Q$ und der Transitivität von $\xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(I)}$ ergibt sich damit

$$(*) \qquad L \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(I)} K \quad .$$

Angenommen, es gälte $K \in AT^E_{gr}$. Dann hat man wegen $K \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(I)} Q$, $Q \in AT^E_{gr}$ und nach Definition 6.3 $Q \in I$. Damit gilt $Q \in LIT_{\Sigma gr}$ und somit natürlich auch $Q^c \in LIT_{\Sigma gr}$. Man erhält also $Q^c \in I^* \cap LIT_{\Sigma gr}$ und mittels Lemma 6.3 dann $Q^c \in I$, d.h. I ist keine Interpretation.∇

Also muß $K \notin AT^E_{gr}$ gelten: Mit $(*)$ erhält man jetzt $K \in I^*$. Wegen $K^c \in I$ gilt $K^c \in LIT_{\Sigma gr}$ und damit auch $K \in LIT_{\Sigma gr}$. Man erhält also $K \in I^* \cap LIT_{\Sigma gr}$ und mit Lemma 6.3 dann $K \in I$. Somit gilt $\{K,K^c\} \subset I$, d.h. I ist keine Interpretation.∇⊠

Mittels Lemma 6.4 läßt sich nun die Existenz eines Modells für RPar(S) beweisen, vorausgesetzt $Par_\Sigma(S)$ ist erfüllbar:

> *Lemma 6.5* Wenn $Par_\Sigma(S)$ erfüllbar ist, dann ist auch RPar(S) erfüllbar.

Beweis Nach Lemma 6.1 gibt es ein ΣE-beschränktes Modell M für $Par_\Sigma(S)$. Also ist nach Lemma 6.4 die Reduktionshülle M^* von M eine Interpretation. Durch Induktion über die Länge der Deduktion $S^E_{\Sigma gr} \vdash_P C$ wird nun bewiesen, daß M^* jede Klausel $C \in RPar(S)$ erfüllt:

Induktionsanfang $C \in S^E_{\Sigma gr}$: Mit $S^E_{\Sigma gr} \subset Par_\Sigma(S)$ erhält man $C \in Par_\Sigma(S)$ und damit auch $M^* \cap C \neq \emptyset$, denn M erfüllt $Par_\Sigma(S)$ und es gilt $M \subset M^*$.∅

Induktionsschritt Sei $C = (C_L - L) \cup (C_E - E(\alpha(L)\alpha(K))) \cup \{K\}$ ein Paramodulant der Klauseln C_L, $C_E \in RPar(S)$ bezüglich L und $E(\alpha(L)\alpha(K))$. Dann gilt

$$(1) \qquad L \underset{\alpha}{\sim} K$$

und nach Definition 6.1

$$(2) \qquad L \notin AT^E_{gr} \quad .$$

Als Induktionshypothese wird $M^* \cap C_L \neq \emptyset$ und $M^* \cap C_E \neq \emptyset$ angenommen.

Falls $M^* \cap (C_L - L) \neq \emptyset$ oder $M^* \cap (C_E - E(\alpha(L)\alpha(K))) \neq \emptyset$, so gilt auch $M^* \cap C \neq \emptyset$ und der Induktionsschritt ist bewiesen.

Im folgenden wird nun angenommen, daß $M^* \cap (C_L - L) = \emptyset$ und $M^* \cap (C_E - E(\alpha(L)\alpha(K))) = \emptyset$ gilt. Mit der Induktionshypothese erhält man $L \in M^*$ und $E(\alpha(L)\alpha(K)) \in M^*$

und nach Definition 6.3 insbesondere

(3) $$E(\alpha(L)\alpha(K)) \in M \quad .$$

Mit (1) und (3) gilt $L \underset{\alpha}{\longrightarrow}_M K$ und damit

(4) $$L \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(M)} K \quad .$$

Wegen $L \in M^*$ gibt es irgendein $Q \in M$ mit $Q \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(M)} L$. Mit (4) erhält man dann $Q \xrightarrow{*}_{\mathfrak{R}(M)} K$ und mit (1) und (2) $K \notin AT^E_{gr}$, d.h. nach Definition 6.3 $K \in M^*$. Damit gilt dann $M^* \cap C = \{K\} \neq \emptyset$.∅⊠

Abschließend wird nun der Vollständigkeitssatz für den ΣRP-Kalkül im Basisfall bewiesen:

> *Satz 6.6* Wenn $S_{\Sigma gr}$ E-unerfüllbar ist, dann gilt $S^E_{\Sigma gr} \underset{\Sigma}{\vdash} \square$.

Beweis Wenn $S_{\Sigma gr}$ E-unerfüllbar ist, dann ist wegen $S_{\Sigma gr} \subset Par(S)$ auch Par(S) E-unerfüllbar. Mit Theorem 1 aus [WR73] ist dann Par(S) unerfüllbar und damit auch RPar(S) [Lov78]. Wegen Lemma 6.5 ist dann auch $Par_\Sigma(S)$ unerfüllbar und nach dem Kompaktheitssatz [Lov78] gibt es eine endliche, unerfüllbare Klauselmenge $P \subset Par_\Sigma(S)$. Mit der Vollständigkeit des RP-Kalküls [Rob65] erhält man $P \underset{R}{\vdash} \square$, und da jede Deduktion $\underset{R}{\vdash}$ aus einer Basisklauselmenge auch eine Σ-Deduktion $\underset{\Sigma R}{\vdash}$ ist, gilt $P \underset{\Sigma R}{\vdash} \square$. Wegen $P \subset Par_\Sigma(S)$ gilt $S^E_{\Sigma gr} \underset{\Sigma P}{\vdash} C$ für alle $C \in P$ und damit dann $S^E_{\Sigma gr} \underset{\Sigma}{\vdash} \square$.⊠

7. UNIFIKATION IM ΣRP-KALKÜL

Einer der wichtigsten Sätze der Unifikationstheorie 1. Ordnung ist das *Unifikationstheorem* [Rob65], das für jede Menge unifizierbarer Terme die Existenz eines allgemeinsten Unifikators sichert. Das Unifikationstheorem ist darüberhinaus von zentraler Bedeutung für den Nachweis der Vollständigkeit des RP-Kalküls [Rob65].

Bevor die Problematik bezüglich der Unifikation unter Sorten diskutiert wird, soll zunächst ein Lemma bewiesen werden, das gestattet, Σ-Substitutionen allein durch Betrachtung ihrer Einschränkungen auf die Menge der Variablen $\mathfrak{V}$ von gewöhnlichen Substitutionen zu unterscheiden:

Lemma 7.1 Sei $\sigma \in SUB$. Dann ist $\sigma \in SUB_\Sigma$ gdw. für jedes $x \in \mathfrak{V}$ gilt: $\sigma x \in T_\Sigma$ und $[\sigma x] \leq [x]$.

Beweis "$\Rightarrow$" Mit $\sigma \in SUB_\Sigma$ gilt $\sigma(T_\Sigma) \subset T_\Sigma$ und insbesondere auch $\sigma(\mathfrak{V}) \subset T_\Sigma$, d.h. $\sigma x \in T_\Sigma$ für alle $x \in \mathfrak{V}$.

Angenommen, es gälte $[\sigma x_o] \not\leq [x_o]$ für irgendein $x_o \in \mathfrak{V}$. Sei $f \in \mathfrak{F}_{[x_o],s}$ für ein beliebiges $s \in \mathfrak{S}$. Dann gilt zwar $f(x_o) \in T_\Sigma$, aber $\sigma f(x_o) = f(\sigma x_o) \notin T_\Sigma$ nach Lemma 3.3 (2), denn $[\sigma x_o] \not\leq [x_o] = [f]_1$. Also gilt $\sigma(T_\Sigma) \not\subset T_\Sigma$ und damit $\sigma \notin SUB_\Sigma$.$\nabla\emptyset$

"$\Leftarrow$" Durch strukturelle Induktion über t wird gezeigt, daß $\sigma t \in T_\Sigma$ für jedes $t \in T_\Sigma$, falls $\sigma x \in T_\Sigma$ und $[\sigma x] \leq [x]$ für jedes $x \in \mathfrak{V}$ gilt:

<u>*Induktionsanfang*</u> $t \in \mathfrak{C}$: Dann gilt $\sigma t = t \in T_\Sigma$ nach Lemma 3.3 (1).$\emptyset$

<u>*Induktionsanfang*</u> $t \in \mathfrak{V}$: Nach Voraussetzung gilt $\sigma t \in T_\Sigma$.$\emptyset$

<u>*Induktionsschritt*</u> $t = f(t_1 \ldots t_n)$: Mit $t \in T_\Sigma$ gilt nach

Lemma 3.3 (2)

(1) $[t_i] \leq [f]_i$, $1 \leq i \leq n$,

und

(2) $t_i \in T_\Sigma$, $1 \leq i \leq n$.

Als Induktionsvoraussetzung wird

(3) $\sigma t_i \in T_\Sigma$, $1 \leq i \leq n$

angenommen. Für $t_i \in \mathfrak{V}$ gilt nach Voraussetzung $[\sigma t_i] \leq [t_i]$ und für $t_i \notin \mathfrak{V}$ erhält man mit Lemma 3.1 (2) $[\sigma t_i] = [t_i]$, d.h. in jedem Falle gilt

(4) $[\sigma t_i] \leq [t_i]$, $1 \leq i \leq n$.

Mit (1) und (4) erhält man

(5) $[\sigma t_i] \leq [f]_i$, $1 \leq i \leq n$,

und (3) und (5) ergeben dann mit Lemma 3.3 (2) $f(\sigma t_1 \ldots \sigma t_n) = \sigma t \in T_\Sigma$.⊠

Das folgende Korollar wird im weiteren häufig verwendet:

Korollar 7.2 Sei $\sigma \in SUB_\Sigma$ und $t \in T$. Dann gilt $[\sigma t] \leq [t]$.

Beweis Für $t \in \mathfrak{V}$ erhält man nach Lemma 7.1 $[\sigma t] \leq [t]$ und für $t \notin \mathfrak{V}$ ergibt sich mit Lemma 3.1 (2) $[\sigma t] = [t]$.⊠

Folgendes Beispiel zeigt, daß der Unifikationssatz nicht ohne weiteres auf die Unifikation unter Sorten übertragen werden kann, da es Σ-unifizierbare Termmengen gibt, deren sämtliche allgemeinste Unifikatoren keine Σ-Substitutionen sind:

Beispiel 7.1 Sei $\mathcal{S} = \{A,B,C,D\}$ mit $D \ll B \ll A$ und $D \ll C \ll A$. Sei weiter $u \in \mathfrak{V}_B$, $v \in \mathfrak{V}_C$, $d \in \mathcal{F}_{e,D}$, $M = \{u,v\}$, $\Theta = \{u{\leftarrow}d, v{\leftarrow}d\}$, $\sigma_1 = \{u{\leftarrow}v\}$ und $\sigma_2 = \{v{\leftarrow}u\}$.

Offenbar ist Θ eine Σ-Substitution, die M unifiziert, aber beide allgemeinsten Unifikatoren von M, nämlich σ_1 und σ_2, sind keine Σ-Substitutionen, d.h. M besitzt keinen allgemeinsten Σ-Unifikator.⊠

Damit ist der ΣRP-Kalkül zunächst einmal unvollständig. Um die Vollständigkeit doch noch zu erreichen, muß der ΣRP-Kalkül in geeigneter Weise eingeschränkt bzw. der Unifikationsbegriff entsprechend erweitert werden. Diese Überlegung motiviert folgendes Vorgehen:

Zunächst kann gezeigt werden, daß das Unifikationstheorem auch für die Unifikation unter Sorten gilt, vorausgesetzt, die zu unifizierenden Termmengen besitzen die Eigenschaft der sogenannten *Sortenverträglichkeit* (oder *Σ-Verträglichkeit*). Weiter kann nachgewiesen werden, daß alle Σ-unifizierbaren Termmengen Σ-verträglich sind, wenn $\langle \mathcal{S}, \leq \rangle$ eine *Baumstruktur* hat.

Verbietet man also im ΣRP-Kalkül, daß ein Paar von Sortensymbolen eine gemeinsame Untersorte besitzt, so ist die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls wiederhergestellt.

Will man jedoch diese Einschränkung nicht in Kauf nehmen, so ist der Begriff des allgemeinsten Unifikators (unter Sorten) in geeigneter Weise zu modifizieren:

Beispiel 7.2 Seien alle Größen wie im Beispiel 7.1 gegeben und gelte außerdem $w \in \mathfrak{V}_D$, $\tau = \{u{\leftarrow}w, v{\leftarrow}w\}$ und $\lambda = \{w{\leftarrow}d\}$. Offenbar ist τ ein Σ-Unifikator von M und es gilt $\Theta = \lambda \circ \tau[\mathrm{vars}(M)]$.

τ ist zwar kein allgemeinster Unifikator, denn z.B. gilt $\sigma_1 \neq \sigma_1 \circ \tau$, aber jeder Σ-Unifikator Θ von M kann wie in Beispiel 7.2 mit Hilfe von τ dargestellt werden, d.h. man findet immer eine Σ-Substitution λ mit $\Theta = \lambda \circ \tau[\mathrm{vars}(M)]$.⊠

Der Σ-Unifikator τ kann also im ΣRP-Kalkül die Rolle eines allgemeinsten Σ-Unifikators übernehmen. Dieses Vorgehen, das die Einführung neuer Variablen (wie etwa $w \in \mathfrak{V}_D$ in Beispiel 7.2) voraussetzt, ist aus der Unifikation unter Gleichheitstheorien [SS82] bekannt. Die Unifikation unter Sorten, die diesem Ansatz folgt, wird in [Wal84b] untersucht.

Das Unifikationsproblem für den ΣRP-Kalkül läßt sich aber auch auf eine andere Weise lösen:

Beispiel 7.3 Seien alle Größen wie in Beispiel 7.1 gegeben und gälte außerdem $\{w,z\} \subset \mathfrak{V}_D$, $\mu = \{u \leftarrow w, v \leftarrow z\}$, $\lambda_1 = \{w \leftarrow d\}$, $\lambda_2 = \{z \leftarrow d\}$, $\tau_1 = \{z \leftarrow w\}$ und $\tau_2 = \{w \leftarrow z\}$. Dann ist μ eine Abschwächungssubstitution, d.h. $\mu \in \mathrm{ASUB}(M)$, und sowohl τ_1 als auch τ_2 ist ein allgemeinster Σ-Unifikator von μM. Außerdem gilt $\Theta = \lambda_i \circ \tau_i \circ \mu[\mathrm{vars}(M)]$ für $i \in \{1,2\}$.⊠

In diesem Beispiel wird also ein Σ-Unifikator Θ für eine Termmenge M mittels einer Abschwächungssubstitution μ und eines allgemeinsten Σ-Unifikators τ_i für die durch μ abgeschwächte Termmenge μM dargestellt. Daß dieses Vorgehen immer möglich ist, wird nachfolgend im Σ-*Unifikationssatz* bewiesen. Es unterscheidet sich von dem ersten Ansatz dadurch, daß die Einführung neuer Variablen und die eigentliche Unifikation getrennt behandelt werden. Von Vorteil ist dabei, daß im ΣRP-Kalkül der gleiche Unifikationsbegriff wie im RP-Kalkül verwendet wird: Die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls wird jetzt mit Hilfe der Abschwächungssubstitution (bzw. der Abschwächungsregel) erzwungen.

Eine zusätzliche Motivation für das gewählte Vorgehen liegt darin, daß Abschwächungssubstitutionen bzw. die Abschwächungsregel zusätzlich zur Unifikationsproblematik für die Vollständigkeit der Paramodulation im ΣRP-Kalkül notwendig sind (vergl. Kapitel 8).

Mit Hilfe der Abschwächungssubstitutionen läßt sich also ein vollständiger ΣRP-Kalkül theoretisch einfach definieren. Für die praktische Realisierung auf einem Rechner ist jedoch der erste Ansatz, also die Einführung neuer Variablen während der Unifikation, vorteilhafter (vergl. Kapitel 11).

° ° °

Zunächst wird nun gezeigt, daß für die Klasse der sogenannten *sortenverträglichen* Termmengen der Unifikationssatz für die Unifikation unter Sorten noch gilt:

Definition 7.1 Sei $D \subset T_\Sigma$ unifizierbar. D ist *sorten-* oder *Σ-verträglich* gdw. für alle $x,y \in vars(D)$ mit $\tau x = \tau y$ $[x] \leq [y]$ oder $[x] \geq [y]$ gilt, wobei τ irgendein allgemeinster Unifikator von D ist.⊠

Es ist offensichtlich, daß diese Definition unabhängig von der Wahl des allgemeinsten Unifikators τ von D ist.

Lemma 7.3 Sei $D \subset T_\Sigma$ Σ-unifizierbar. Wenn D Σ-verträglich ist, dann gibt es einen allgemeinsten Σ-Unifikator von D.

Beweis Sei $\Theta \in SUB_\Sigma$ ein Unifikator und $\tau \in SUB$ ein allgemeinster Unifikator von D. Dann gibt es eine Folge von Substitutionen $\tau_1,\ldots,\tau_n \in SUB$, $n \geq 1$, für die gilt:

(1) $\tau = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_n$,

(2) $COD(\tau_i) = \{y_i\}$, für jedes i mit $1 \leq i < n$ und irgendein $y_i \in \mathfrak{V}$

(3) $COD(\tau_n) \cap \mathfrak{V} = \emptyset$,

(4) $COD(\tau_i) \cap COD(\tau_j) = \emptyset$, für alle i,j mit $1 \leq i,j < n$ und $i \neq j$,

und

(5) $DOM(\tau_k) \cap DOM(\tau_l) = \emptyset$, für alle k,l mit $1 \leq k$, $l \leq n$ und $k \neq l$.

Für jeden Index i mit $1 \leq i < n$ wird jetzt eine Ordnungsrelation $\leq_i$ auf $DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$ definiert durch

(6) $u \leq_i v$ gdw. $[u] \leq [v]$, für alle $u,v \in DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$.

Jede Relation $\leq_i$ ist konnex, d.h. $u \leq_i v$ oder $u \geq_i v$ für alle $u,v \in DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$, denn es gilt $\tau u = \tau_i u = y_i = \tau_i v = \tau v$ und damit $[u] \leq [v]$ oder $[u] \geq [v]$, da D nach Voraussetzung Σ-verträglich ist und $DOM(\tau_i) \cup \{y_i\} \subset vars(D)$ gilt.

Da $\leq_i$ konnex ist, gibt es mindestens ein minimales Element x_i bezüglich $\leq_i$ in $DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$, d.h. $x_i \leq_i x$ für alle $x \in DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$. Man definiert nun die Substitutionen $\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1},\sigma$ durch

(7) $\sigma_i = \{y_i \leftarrow x_i\} \circ \tau_i$, für jedes i mit $1 \leq i < n$, und

(8) $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_{n-1}$.

Da jedes σ_i durch eine Variablenumbenennung aus τ_i entsteht, sind $\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1},\sigma$ tatsächlich Substitutionen. Aus der Unifikationstheorie weiß man außerdem:

(9) $\sigma \circ \tau_n$ ist ein allgemeinster Unifikator von D.

Als nächstes wird gezeigt, daß gilt:

(10) $[\sigma_i x] \leq [x]$, für jedes $x \in \mathfrak{V}$ und für alle i mit $1 \leq i < n$.

Fall (i) $x \notin DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$: Dann ist $\tau_i x = x \neq y_i$, also $\sigma_i x = x$ und damit insbesondere $[\sigma_i x] = [x]$.$\emptyset$

Fall (ii) $x \in DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$: Mit (2) erhält man $\tau_i x = y_i$ und wegen (7) dann $\sigma_i x = x_i$. Da x_i minimal bezüglich $\leq_i$ in $DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$ ist, gilt $x_i \leq_i x$ und damit $[\sigma_i x] = [x_i] \leq [x]$.$\emptyset$

Mit (2) und (7) erhält man $COD(\sigma_i) = \{x_i\}$, d.h. $\sigma_i x \in \mathfrak{V} \subset T_\Sigma$ für jedes $x \in \mathfrak{V}$. Wegen (10) ergibt sich dann mit Lemma 7.1

(11) $\sigma_i \in SUB_\Sigma$, für alle i mit $1 \leq i < n$,

und wegen (8) erhält man mit Lemma 3.4 (1)

(12) $\sigma \in SUB_\Sigma$.

Angenommen, es gälte $\tau_n x \in \mathfrak{V}$ für irgendein $x \in \mathfrak{V}$. Mit (3) hat man dann $\tau_n x = x$ und damit

$$[\sigma\tau_n x] = [\sigma x] \leq [x]$$

wegen (12) und Lemma 7.1.

Mit $\tau_n x \notin \mathfrak{V}$ für irgendein $x \in \mathfrak{V}$ erhält man $\sigma\tau_n x \notin \mathfrak{V}$ und somit

$$[\sigma\tau_n x] = [\theta\sigma\tau_n x] = [\theta x] \leq [x]$$

wegen Lemma 3.1 (2), Lemma 7.1 und (9). Also gilt in jedem Fall:

(13) $[\sigma\tau_n x] \leq [x]$ für alle $x \in \mathfrak{V}$.

Als nächstes wird gezeigt, daß

(14) $\sigma\tau_n x \in T_\Sigma$ für alle $x \in \mathfrak{V}$

gilt, d.h. es wird $[\alpha(\sigma\tau_n x)] \leq [\sigma\tau_n x]_\alpha$, für jedes $\alpha \in SEL^+$

mit $\alpha(\sigma\tau_n x)\downarrow$, bewiesen:

Fall (i) $\alpha(\sigma\tau_n x) \notin \mathfrak{V}$: Dann gilt $\sigma\tau_n x \notin \mathfrak{V}$, und mit Lemma 3.1 (2) und Lemma 2.2 (5) erhält man $[\alpha(\sigma\tau_n x)] = [\theta\alpha(\sigma\tau_n x)] = [\alpha(\theta\sigma\tau_n x)]$ und $[\sigma\tau_n x]_\alpha = [\theta\sigma\tau_n x]_\alpha$. Wegen (9) gilt $\theta = \theta\circ\sigma\circ\tau_n$ und daher $[\alpha(\sigma\tau_n x)] = [\alpha(\theta x)] \leq [\theta x]_\alpha = [\sigma\tau_n x]_\alpha$, denn $\theta x \in T_\Sigma$ und $\alpha(\theta x)\downarrow$.$\emptyset$

Fall (ii) $\alpha(\sigma\tau_n x) \in \mathfrak{V}$: Dann gilt

(15) $\alpha(\tau_n x) \in \mathfrak{V}$, und

(16) $\alpha = \delta\circ\beta$ für irgendwelche $\delta \in$ SEL, $\beta \in$ SEL*.

Da $\beta(\tau_n x)$ ein Unterterm eines Terms aus COD(τ) ist und τ allgemeinster Unifikator von D ist, muß es einen Unterterm q eines Terms in D geben, für den gilt:

(17) $\tau q = \beta(\tau_n x)$, und

(18) $\delta(q)\downarrow$.

Mit (16), (17) und (18) erhält man $\alpha(\tau_n x) = \delta(\beta(\tau_n x)) = \delta(\tau q) = \tau\delta(q)$, d.h.

(19) $\alpha(\tau_n x) = \tau\ \delta(q)$.

Wegen COD(σ) $\subset \mathfrak{V}$ und (19) gilt $\alpha(\sigma\tau_n x) = \sigma\alpha(\tau_n x) = \sigma\tau\delta(q)$ und insbesondere

(20) $[\alpha(\sigma\tau_n x)] = [\sigma\tau\delta(q)]$.

Mit (15) und (19) erhält man $\delta(q) \in \mathfrak{V}$. Angenommen, es gälte $\delta(q) \in$ DOM(τ_n). Nach (3) hat man dann $\tau\delta(q) \notin \mathfrak{V}$, was (19) und (15) widerspricht. Also gilt $\delta(q) \in \mathfrak{V}\setminus$DOM($\tau_n$).

Durch Fallunterscheidung wird nun

(21) $[\sigma\tau\delta(q)] \leq [\delta(q)]$

bewiesen:

Fall (ii.1) $\delta(q) \notin DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$ für alle i mit $1 \leq i < n$:
Dann gilt $\sigma\tau\delta(q) = \sigma\delta(q) = \delta(q)$ und insbesondere
$[\sigma\tau\delta(q)] = [\delta(q)]$.$\not\!\!\:\mathsf{D}$

Fall (ii.2) $\delta(q) \in DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$ für irgendein i mit
$1 \leq i < n$: Damit erhält man $\sigma\tau\delta(q) = \sigma\tau_i\delta(q) = \sigma y_i = x_i$ mit
$[x_i] \leq [\delta(q)]$, da x_i bezüglich $\leq_i$ minimal in $DOM(\tau_i) \cup \{y_i\}$
ist. Also hat man $[\sigma\tau\delta(q)] \leq [\delta(q)]$.$\not\!\!\:\mathsf{D}$

Da q ein Unterterm aus $D \subset T_\Sigma$ ist, gilt mit (18)
$[\delta(q)] \leq [q]_\delta$. Mit $\delta \in SEL$ und (18) erhält man $q \notin \mathfrak{V}$ und
nach Lemma 3.1 (2) dann $[q]_\delta = [\tau q]_\delta$. Mit (17) erhält man
$[\tau q]_\delta = [\beta(\tau_n x)]_\delta = [\tau_n x]_{\delta\circ\beta} = [\tau_n x]_\alpha$, also $[\delta(q)] \leq [\tau_n x]_\alpha$.
Wegen $\alpha \in SEL^+$ gilt $\tau_n x \notin \mathfrak{V}$ und damit nach Lemma 3.1 (2)

(22) $[\delta(q)] \leq [\sigma\tau_n x]_\alpha$.

Mit (20), (21) und (22) erhält man abschließend $[\alpha(\sigma\tau_n x)] \leq [\sigma\tau_n x]_\alpha$
und (14) ist bewiesen.

Wegen (13) und (14) gilt mit Lemma 7.1 $\sigma\circ\tau_n \in SUB_\Sigma$ und mit
(9) ist $\sigma\circ\tau_n$ ein allgemeinster Σ-Unifikator von D.$\boxtimes$

Mit Hilfe von Lemma 7.3 werden nun die beiden Hauptresultate
für die Unifikation unter Sorten bewiesen, nämlich

- der Unifikationssatz für den Fall, daß $<\mathcal{S},\leq>$ eine Baumstruktur hat, und

- für den allgemeinen Fall der Σ-Unifikationssatz.

Satz 7.4 Sei $D \subset T_\Sigma$ Σ-unifizierbar. Wenn $<\mathcal{S},\leq>$ eine Baumstruktur hat, dann gibt es einen allgemeinsten Σ-Unifikator von D.

Beweis Sei $\Theta \in SUB_\Sigma$ ein Unifikator von D und seien $x,y \in vars(D)$ mit $\tau x = \tau y$, wobei τ ein allgemeinster Unifikator von D ist. Dann gilt $\Theta\tau x = \Theta\tau y$ und da τ allgemeinster Unifikator ist, erhält man $\Theta x = \Theta y$. Wegen $\Theta \in SUB_\Sigma$ gilt mit Lemma 7.1 $[x] \geq [\Theta x] = [\Theta y] \leq [y]$ und damit dann $[x] \leq [y]$ oder $[x] \geq [y]$, denn $<\mathcal{S},\leq>$ hat eine Baumstruktur. Also ist D Σ-verträglich und besitzt damit nach Lemma 7.3 einen allgemeinsten Σ-Unifikator. ⊠

Für geordnete Mengen von Sortensymbolen $<\mathcal{S},\leq>$, die keine Baumstruktur besitzen, wird die Existenz eines allgemeinsten Σ-Unifikators für eine Σ-unifizierbare Termmenge mit Hilfe einer Abschwächungssubstitution erzwungen:

Satz 7.5 (Σ-Unifikationssatz). Sei $D \subset T_\Sigma$, $V \subset \mathfrak{V}$ und $\Theta \in SUB_\Sigma$ mit $vars(D) \subset V$ und Θ unifiziert D. Dann gibt es Σ-Substitutionen μ,σ und λ mit

(1) $\mu \in ASUB(V)$,

(2) σ ist allgemeinster Unifikator von μD, und

(3) $\Theta = \lambda \circ \sigma \circ \mu [V]$.

Beweis Sei $\{x_1,\ldots,x_n\} = \{x \in vars(D) \mid [\Theta x] < [x]\}$, $\{z_1,\ldots,z_n\} \subset \mathfrak{V}\setminus V$ mit $z_i \in \mathfrak{V}_{[\Theta x_i]}$, $1 \leq i \leq n$, und μ, $\bar{\mu}$ ein Paar von Substitutionen mit

(4) $\mu = \{x_1 \leftarrow z_1,\ldots,x_n \leftarrow z_n\}$, und

(5) $\bar{\mu} = \{z_1 \leftarrow \Theta x_1,\ldots,z_n \leftarrow \Theta x_n\}$.

Offenbar gilt μ, $\bar{\mu} \in SUB_{\Sigma}$ und $\mu \in ASUB(V)$, d.h. Bedingung (1) ist erfüllt. Es wird nun bewiesen, daß

(6) $\Theta \circ \bar{\mu} \circ \mu = \Theta[V]$

gilt, d.h. es ist $\Theta\bar{\mu}\mu x = \Theta x$ für alle $x \in V$ zu zeigen:

Fall (i) $x \in DOM(\mu)$: Es gilt $x = x_i$ für irgendein i mit $1 \le i \le n$, und mit (4) und (5) erhält man $\Theta\bar{\mu}\mu x_i = \Theta\bar{\mu}z_i = \Theta\Theta x_i = \Theta x_i$.∅

Fall (ii) $x \notin DOM(\mu)$: Da $x \in V$ und $\mu \in ASUB(V)$, gilt $x \in COD(\mu) = DOM(\bar{\mu})$ und damit dann $\Theta\bar{\mu}\mu x = \Theta\bar{\mu}x = \Theta x$.∅

Da Θ ein Unifikator von D ist, ist mit (6) $\Theta \circ \bar{\mu} \circ \mu$ auch ein Unifikator von D, d.h. $\Theta \circ \bar{\mu}$ unifiziert μD.

Folgende Fallunterscheidung zeigt, daß

(7) $[\Theta\bar{\mu}x] = [x]$ für alle $x \in \mathfrak{V} \setminus DOM(\mu)$ gilt:

Fall (i) $x \in DOM(\bar{\mu})$: Es gilt $x = z_i$ für irgendein i mit $1 \le i \le n$, und mit (5) erhält man $[\Theta\bar{\mu}z_i] = [\Theta\Theta x_i] = [\Theta x_i] = [z_i]$.∅

Fall (ii) $x \notin DOM(\bar{\mu})$: Dann gilt $[\Theta\bar{\mu}x] = [\Theta x] = [x]$, da $x \notin DOM(\mu)$.∅

Es wird nun gezeigt, daß μD Σ-verträglich ist: Seien $x,y \in vars(\mu D)$ mit $\tau x = \tau y$ für irgendeinen allgemeinsten Unifikator τ von μD. Dann gilt $\Theta\bar{\mu}\tau x = \Theta\bar{\mu}\tau y$, und da $\Theta \circ \bar{\mu}$ Unifikator und τ allgemeinster Unifikator von μD ist, ergibt sich $\Theta\bar{\mu}x = \Theta\bar{\mu}y$. Wegen $vars(\mu D) \cap DOM(\mu) = \emptyset$ erhält man dann mit (7) $[x] = [\Theta\bar{\mu}x] = [\Theta\bar{\mu}y] = [y]$, d.h. μD ist Σ-verträglich.

Offenbar gilt $\Theta \circ \bar{\mu} \in SUB_{\Sigma}$, d.h. μD ist Σ-unifizierbar und mit Lemma 7.3 gibt es daher einen allgemeinsten Σ-Unifikator σ von μD, womit Bedingung (2) erfüllt ist.

Da $\Theta\circ\bar{\mu}$ ein Unifikator und σ ein allgemeinster Unifikator von μD ist, gilt $\Theta\circ\bar{\mu}\circ\sigma = \Theta\circ\bar{\mu}$, also auch $\Theta\circ\bar{\mu}\circ\sigma\circ\mu = \Theta\circ\bar{\mu}\circ\mu$ und mit (6) schließlich $\Theta\circ\bar{\mu}\circ\sigma\circ\mu = \Theta[V]$. Mit $\lambda = \Theta\circ\bar{\mu} \in SUB_{\Sigma}$ ist dann auch Bedingung (3) erfüllt.■

Offensichtlich gelten sowohl Satz 7.4 als auch der Σ-Unifikationssatz ebenso für Σ-unifizierbare Mengen von Σ-Atomen.

8. Die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls im allgemeinen Fall

In diesem Abschnitt wird der

> *Vollständigkeitssatz für den ΣRP-Kalkül* Wenn S ΣE-unerfüllbar ist, so gilt $S^E \vdash_{\Sigma} \square$

bewiesen. Dabei wird genauso vorgegangen, wie beim Beweis des Vollständigkeitssatzes für den RP-Kalkül [Lov78]:

Zunächst werden die *Lifting-Lemmata* für Σ-Resolution und Σ-Paramodulation bewiesen, mit deren Hilfe das *Lifting-Theorem* für den ΣRP-Kalkül gezeigt werden kann. Der Vollständigkeitssatz wird dann leicht (wie im RP-Kalkül) aus dem Lifting-Theorem gewonnen.

Im Unterschied zum Vorgehen für den RP-Kalkül müssen aufgrund der Resultate über die Unifikation im ΣRP-Kalkül die Lifting-Lemmata bezüglich der Abschwächungssubstitutionen (bzw. der abgeschwächten Varianten) entsprechend modifiziert werden. Die Probleme bezüglich der Paramodulation im ΣRP-Kalkül (siehe Abschnitt 4) erzwingen eine zusätzliche Anpassung des Lifting-Lemma für die Σ-Paramodulation. Diese Änderungen bewirken dann auch eine entsprechende Anpassung des Lifting-Theorems für Deduktionen im ΣRP-Kalkül.

Um die Lesbarkeit der Beweise nicht unnötig zu erschweren, wird im folgenden auf die explizite Angabe von Σ-Umbenennungssubstitutionen verzichtet. Statt dessen wird angenommen, daß alle Klauseln in einer Σ-Deduktion variablenfremd sind.

Lemma 8.1 (Lifting-Lemma für Σ-Resolution) Seien A und B variablenfremde Σ-Klauseln, $L_A \in A$ und $L_B \in B$ komplementäre Literale und Θ ein Σ-Unifikator von $\{|L_A|, |L_B|\}$. Dann gibt es einen Σ-Faktor A^* einer abgeschwächten Variante von A, einen Σ-Faktor B^* einer abgeschwächten Variante von B, ein Paar komplementärer Literale $L_A^* \in A^*$ und $L_B^* \in B^*$, abgeschwächte Varianten ρA^* und ρB^* und Σ-Substitutionen λ und σ mit

$$\mathrm{Res}(\Theta A, \Theta L_A, \Theta B, \Theta L_B, \varepsilon) = \lambda \mathrm{Res}(\rho A^*, \rho L_A^*, \rho B^*, \rho L_B^*, \sigma).$$

Die Aussage dieses Lemmas läßt sich in folgendem Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{tikzcd}
A,B \arrow[r, "W+F+W+R"] \arrow[dd, "\Sigma\text{-Instanz}"'] & \mathrm{Res}(\rho A^*, \rho L_A^*, \rho B^*, \rho L_B^*, \sigma) \arrow[d, "\Sigma\text{-Instanz}"] \\
& \lambda\, \mathrm{Res}(\rho A^*, \rho L_A^*, \rho B^*, \rho L_B^*, \sigma) \arrow[d, equal] \\
\theta A, \theta B \arrow[r, "R"] & \mathrm{Res}(\theta A, \theta L_A, \theta B, \theta L_B, \varepsilon)
\end{tikzcd}$$

Bild 8.1 Das Lifting-Lemma für die Σ-Resolution

Beweis Mit $V = \mathrm{vars}(A \cup B)$ gibt es nach dem Σ-Unifikationssatz (7.5) Σ-Substitutionen μ, γ und λ_A derart, daß

(1) $\mu \in \mathrm{ASUB}(V)$,

(2) γ faktorisiert μA ,

(3) $\Theta = \lambda_A \circ \gamma \circ \mu[V]$, und

(4) $\gamma\mu L = \gamma\mu K$ für alle $L, K \in A$ mit $\Theta L = \Theta K$.

Wegen (1) ist μA eine abgeschwächte Variante von A und $\gamma\mu A$ ist wegen (2) ein Σ-Faktor von μA. Genauso erhält man Σ-Substitutionen ν, δ und λ_B, so daß νB eine abgeschwächte Variante von B ist, $\delta\nu B$ ein Σ-Faktor von νB ist und außerdem gilt:

(5) $\Theta = \lambda_B \circ \delta \circ \nu[V]$.

Da man davon ausgehen darf, daß $\gamma\mu A$ und $\delta\nu B$ variablenfremd sind, gibt es wegen (3) und (5) eine Σ-Substitution λ^* mit

(6) $\lambda^* = \lambda_A[\text{vars}(\gamma\mu A)]$, und

(7) $\lambda^* = \lambda_B[\text{vars}(\delta\nu B)]$.

Sei nun $A^* = \gamma\mu A$, $B^* = \delta\nu B$, $V^* = \text{vars}(A^* \cup B^*)$ und $L^* = \gamma\mu L$, falls $L \in A$, oder $L^* = \delta\nu L$, falls $L \in B$. Dann gilt für jedes $L \in A$ $\lambda^* L^* = \lambda^*\gamma\mu L = \lambda_A\gamma\mu L = \Theta L$ wegen (6) und (3). Genauso zeigt man $\lambda^* L^* = \Theta L$ für alle $L \in B$ und man erhält:

(8) $\lambda^* L^* = \Theta L$, für alle $L \in (A \cup B)$.

Insbesondere gilt also $\lambda^*|L_A^*| = \Theta|L_A| = \Theta|L_B| = \lambda^*|L_B^*|$, d.h. λ^* unifiziert $\{|L_A^*|,|L_B^*|\}$, und nach dem Σ-Unifikationssatz (7.5) gibt es Σ-Substitutionen ρ,σ und λ mit

(9) $\rho \in \text{ASUB}(V^*)$,

(10) σ ist allgemeinster Unifikator
von $\{\rho|L_A^*|, \rho|L_B^*|\}$, und

(11) $\lambda^* = \lambda \circ \sigma \circ \rho[V^*]$.

Wegen (9) sind ρA^* und ρB^* abgeschwächte Varianten, und wegen (10) ist die Σ-Resolvente von ρA^* und ρB^* bezüglich ρL_A^* und ρL_B^* definiert.

Angenommen nun, es gälte $\lambda^*(A^* - L_A^*) \neq \lambda^* A^* - \lambda^* L_A^*$: Dann gibt

es irgendein $L^* \in A^*$ mit $L^* \neq L_A^*$ und $\lambda^* L^* = \lambda^* L_A^*$. Mit (8) erhält man $\Theta L = \Theta L_A$ und mit (4) dann $L^* = \gamma\mu L = \gamma\mu L_A = L_A^*$.∇
Damit ist

$$(12)\quad \lambda^*(A^* - L_A^*) = \lambda^* A^* - \lambda^* L_A^*$$

bewiesen und genauso ergibt sich

$$(13)\quad \lambda^*(B^* - L_B^*) = \lambda^* B^* - \lambda^* L_B^* \quad .$$

Damit erhält man dann abschließend

$$\begin{aligned}
&\lambda\ \mathrm{Res}(\rho A^*, \rho L_A^*, \rho B^*, \rho L_B^*, \sigma) \\
&\quad = \lambda\sigma(\rho A^* - \rho L_A^*) \cup \lambda\sigma(\rho B^* - \rho L_B^*) \quad , \\
&\quad = \lambda\sigma\rho(A^* - L_A^*) \cup \lambda\sigma\rho(B^* - L_B^*) \quad , \text{ denn } \rho_{|V^*} \text{ ist injektiv wegen (9)} \\
&\quad = \lambda^*(A^* - L_A^*) \cup \lambda^*(B^* - L_B^*) \quad , \text{ mit (11)} \\
&\quad = (\lambda^* A^* - \lambda^* L_A^*) \cup (\lambda^* B^* - \lambda^* L_B^*) \quad , \text{ mit (12) und (13)} \\
&\quad = (\theta A - \theta L_A) \cup (\theta B - \theta L_B) \quad , \text{ mit (8)} \\
&\quad = \mathrm{Res}(\theta A, \theta L_A, \theta B, \theta L_B, \varepsilon) \quad . \ \boxtimes
\end{aligned}$$

Lemma 8.2 (Lifting-Lemma für Σ-Paramodulation) Seien A und B variablenfremde Σ-Klauseln, $L_A \in A$ und $L_B = E(q\ r) \in B$ Literale, $\alpha \in SEL^+$ ein Selektor mit $\alpha(L_A)\downarrow$ und Θ ein Σ-Unifikator von $\{\alpha(L_A), q\}$ mit $[\Theta r] \leq [\Theta L_A]_\alpha$. Dann gibt es einen Σ-Faktor A^* einer abgeschwächten Variante von A, einen Σ-Faktor B^* einer abgeschwächten Variante von B, Literale $L_A^* \in A^*$ und $L_B^* = E(q^*\ r^*) \in B^*$, abgeschwächte Varianten ρA^* und ρB^* und Σ-Substitutionen λ und σ mit

$$\mathrm{Par}(\Theta A, \Theta L_A, \Theta B, \Theta L_B, \alpha, \varepsilon) = \lambda \mathrm{Par}(\rho A^*, \rho L_A^*, \rho B^*, \rho L_B^*, \alpha, \sigma)$$

und $[\sigma\rho r^*] \leq [\sigma\rho L_A^*]_\alpha$.

Die Aussage dieses Lemmas läßt sich in folgendem Diagramm zusammenfassen:

$$
\begin{tikzcd}
A,B \arrow[r, "W+F+W+P"] \arrow[dd, "\Sigma\text{-Instanz}"'] & \mathrm{Par}(\rho A^*,\rho L_A^*,\rho B^*,\rho L_B^*,\alpha,\sigma) \arrow[d, "\Sigma\text{-Instanz}"] \\
 & \lambda\, \mathrm{Par}(\rho A^*,\rho L_A^*,\rho B^*,\rho L_B^*,\alpha,\sigma) \arrow[d, phantom, "="] \\
\theta A,\theta B \arrow[r, "P"] & \mathrm{Par}(\theta A,\theta L_A,\theta B,\theta L_B,\alpha,\varepsilon)
\end{tikzcd}
$$

Bild 8.2 Das Lifting-Lemma für die Σ-Paramodulation

Beweis Angenommen, es gälte $r \in \mathfrak{V}$ und $[r] \nleq [\theta L_A]_\alpha$. Sei $\tilde{V} = \mathrm{vars}(A \cup B)$, $r' \in \mathfrak{V}_{[\theta r]} \setminus \tilde{V}$ und τ, $\bar{\tau}$ und $\tilde{\theta} \in SUB_\Sigma$ mit $\tau = \{r \leftarrow r'\}$, $\bar{\tau} = \{r' \leftarrow \theta r\}$ und $\tilde{\theta} = \theta \circ \bar{\tau}$. Mit $\theta \in SUB_\Sigma$ gilt $[\theta r] \leq [r]$ und wegen $[r] \nleq [\theta L_A]_\alpha \geq [\theta r]$ dann $[\theta r] < [r]$. Damit erhält man $[\tau r] = [r'] = [\theta r] < [r]$, d.h.

(1) $\tau \in ASUB(\tilde{V})$.

Man überzeugt sich leicht, daß außerdem gilt:

(2) $\tilde{\theta} = \theta[\tilde{V}]$, und

(3) $\tilde{\theta} \circ \tau = \theta[\tilde{V}]$.

Für $r \notin \mathfrak{V}$ oder $[r] \leq [\theta L_A]_\alpha$ definiert man $\tau = \bar{\tau} = \varepsilon$ und $\theta = \tilde{\theta}$. Auch dann gilt (1), (2), (3) und τB ist in jedem Fall eine abgeschwächte Variante von B.

Mit (2) und (3) zeigt man, daß $\tilde{\theta}$ ein Σ-Unifikator von $\{\alpha(L_A), \tau q\}$ ist. Genauso wie im Beweis des Lifting-Lemmas für Σ-Resolution (8.1) findet man Σ-Substitutionen $\mu, \gamma, \nu, \delta, \rho, \lambda$ und λ^* derart, daß μA und $\nu\tau B$ abgeschwächte Varianten von A bzw. τB sind, $A^* = \gamma\mu A$ ein Σ-Faktor von μA ist, $B^* = \delta\nu\tau B$ ein Σ-Faktor von $\nu\tau B$ ist und daß außerdem gilt:

(4) $\rho \in \mathrm{ASUB}(V^*)$,

(5) σ ist ein allgemeinster Unifikator von $\{\rho\alpha(L_A^*), \rho q^*\}$,

(6) $\lambda^* = \lambda \circ \sigma \circ \rho[V^*]$,

(7) $\lambda^* L^* = \tilde{\Theta} L$, für jedes $L \in (A \cup \tau B)$,

(8) $\lambda^*(A^* - L_A^*) = \lambda^* A^* - \lambda^* L_A^*$, und

(9) $\lambda^*(B^* - L_B^*) = \lambda^* B^* - \lambda^* L_B^*$,

wobei $V^* = \mathrm{vars}(A^* \cup B^*)$, $q^* = \delta\nu\tau q$ und L^* eine Abkürzung ist für $\gamma\mu L$, falls $L \in A$ oder für $\delta\nu L$, falls $L \in \tau B$.

Seien K und K' Literale mit $L_A \underset{\alpha}{\sim} K$, $\alpha(K) = r$, $L_A^* \underset{\alpha}{\sim} K'$ und $\alpha(K') = r^*$, wobei $r^* = \delta\nu\tau r$. Dann gilt mit Lemma 2.2 (4,5)

(10) $\Theta L_A \underset{\alpha}{\sim} \Theta K$ und $\alpha(\Theta K) = \Theta r$,

(11) $\sigma\rho L_A^* \underset{\alpha}{\sim} \sigma\rho K'$ und $\alpha(\sigma\rho K') = \sigma\rho r^*$, sowie

(12) $\lambda^* L_A^* \underset{\alpha}{\sim} \lambda^* K'$ und $\alpha(\lambda^* K') = \lambda^* r^*$.

Aus (12) ergibt sich mit (7) $\tilde{\Theta} L_A \underset{\alpha}{\sim} \lambda^* K'$ und $\alpha(\lambda^* K') = \tilde{\Theta}\tau r$ und daraus mit (2) und (3) $\Theta L_A \underset{\alpha}{\sim} \lambda^* K'$ und $\alpha(\lambda^* K') = \Theta r$. Mit (10) erhält man dann $\lambda^* K' \underset{\alpha}{\sim} \Theta K$ und $\alpha(\lambda^* K') = \alpha(\Theta K)$, woraus mit Lemma 2.2 (1) schließlich folgt:

(13) $\lambda^* K' = \Theta K$.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\lambda\ \mathrm{Par}(\rho A^*,\rho L_A^*,\rho B^*,\rho L_B^*,\alpha,\sigma) \\
&\quad = \lambda\sigma(\rho A^* - \rho L_A^*) \cup \lambda\sigma(\rho B^* - \rho L_B^*) \cup \lambda\{\sigma\rho K'\} && \text{, wegen (11)} \\
&\quad = \lambda\sigma\rho(A^* - L_A^*) \cup \lambda\sigma\rho(B^* - L_B^*) \cup \{\lambda\sigma\rho K'\} && \text{, denn } \rho_{|V^*} \text{ ist injektiv wegen (4)} \\
&\quad = \lambda^*(A^* - L_A^*) \cup \lambda^*(B^* - L_B^*) \cup \{\lambda^* K'\} && \text{, mit (6)} \\
&\quad = (\lambda^* A^* - \lambda^* L_A^*) \cup (\lambda^* B^* - \lambda^* L_B^*) \cup \{\lambda^* K'\} && \text{, mit (8) und (9)} \\
&\quad = (\theta A - \theta L_A) \cup (\theta B - \theta L_B) \cup \{\theta K\} && \text{, mit (7), (2), (3) und (13)} \\
&\quad = \mathrm{Par}(\theta A,\theta L_A,\theta B,\theta L_B,\alpha,\varepsilon) && \text{, mit (10).}
\end{aligned}$$

Weiter erhält man

$$\begin{aligned}
&[\sigma\rho r^*] = [\sigma\rho\delta\nu\tau r] \le [\tau r] && \text{, mit Korollar 7.2,} \\
&[\tau r] \le [\theta L_A]_\alpha && \text{, nach Definition von } \tau, \\
&[\theta L_A]_\alpha = [\sigma\rho\gamma\mu L_A]_\alpha = [\sigma\rho L_A^*]_\alpha && \text{, mit Lemma 3.1 (2),} \\
&\text{d.h. } [\sigma\rho r^*] \le [\sigma\rho L_A^*]_\alpha && . \ \boxtimes
\end{aligned}$$

Als nächstes wird nun das Lifting-Theorem für den ΣRP-Kalkül formuliert und bewiesen:

> *Satz 8.3* (Lifting-Theorem für den ΣRP-Kalkül) Sei $<B_1,\dots,B_n>$ eine Σ-Deduktion aus $S^E_{\Sigma gr}$. Dann gibt es eine Σ-Deduktion $<C_1,\dots,C_m>$ aus S^E, so daß es zu jeder Klausel B_i, $1\le i\le n$, eine Klausel C_k und eine Substitution $\lambda_k \in SUB_\Sigma$, $1\le k\le m$, gibt, für die $B_i = \lambda_k C_k$ gilt.

Beweis Der Satz wird durch Induktion über die Länge n der Σ-Deduktion $<B_1,\dots,B_n>$ bewiesen:

Induktionsanfang n = 1: Es gilt $B_1 \in S^E_{\Sigma gr}$, d.h. $B_1 = \lambda C$ für irgendein $C \in S^E$ und irgendein $\lambda \in SUB_\Sigma$. Damit ist $\langle C\rangle$ eine Σ-Deduktion aus S^E mit der erwünschten Eigenschaft.∅

Induktionsschritt n > 1: Als Induktionsvoraussetzung wird angenommen, daß der Satz für jede Σ-Deduktion aus $S^E_{\Sigma gr}$ mit einer Länge $\leq$ n gilt:

Fall (i) $B_{n+1} \in S^E_{\Sigma gr}$: Wie beim Induktionsanfang findet man eine Klausel $C \in S^E$ und eine Σ-Substitution λ mit $B_{n+1} = \lambda C$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist dann $\langle C_1,\dots,C_m,C\rangle$ eine Σ-Deduktion aus S^E mit der gewünschten Eigenschaft.∅

Fall (ii) $B_{n+1} = Res(B_i,L_i,B_j,L_j,\varepsilon)$ mit $i,j\leq n$: Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es Klauseln C_k und C_l sowie Σ-Substitutionen λ_k und λ_l, $1\leq k,l\leq m$ mit $B_i = \lambda_k C_k$ und $B_j = \lambda_l C_l$. Da C_k und C_l als variablenfremd angenommen werden, gibt es auch eine Σ-Substitution Θ mit $\Theta C_k = \lambda_k C_k = B_i$ und $\Theta C_l = \lambda_l C_l = B_j$.

Mit dem Lifting-Lemma für Σ-Resolution (8.1) erhält man dann abgeschwächte Varianten C_{m+1} und C_{m+2} von C_k bzw. C_l, Σ-Faktoren C_{m+3} und C_{m+4} von C_{m+1} bzw. C_{m+2}, abgeschwächte Varianten C_{m+5} und C_{m+6} von C_{m+3} bzw. C_{m+4} und eine Σ-Resolvente C_{m+7} von C_{m+5} und C_{m+6} sowie eine Σ-Substitution λ mit $B_{n+1} = \lambda C_{m+7}$.

Nach der Induktionsvoraussetzung ist dann $\langle C_1,\dots,C_m, C_{m+1},\dots,C_{m+7}\rangle$ eine Σ-Deduktion aus S^E mit der gewünschten Eigenschaft.∅

Fall (iii) $B_{n+1} = Par(B_i,L_i,B_j,L_j,\alpha,\varepsilon)$ mit $i,j\leq n$, $L_j = E(q\ r)$ und $[r] \leq [L_i]_\alpha$: Wie in Fall (ii) gibt es Klauseln C_k und C_l sowie eine Σ-Substitution Θ mit $\Theta C_k = B_i$ und $\Theta C_l = B_j$.

Da S^E ein funktional-reflexives Axiom für jedes Funktionssymbol enthält, darf man annehmen, daß für irgendein $L_k \in C_k$ mit $\Theta L_k = L_i \ \alpha(L_k)\downarrow$ gilt.

Sei $L_l = E(q'r') \in C_l$ mit $\Theta L_l = L_j$. Dann gilt $[\Theta r'] = [r] \leq [L_i]_\alpha = [\Theta L_k]_\alpha$ und nach dem Lifting-Lemma für Σ-Paramodulation (8.2) gibt es abgeschwächte Varianten C_{m+1} und C_{m+2} von C_k bzw. C_l, Σ-Faktoren C_{m+3} und C_{m+4} von C_{m+1} bzw. C_{m+2}, abgeschwächte Varianten C_{m+5} und C_{m+6} von C_{m+3} bzw. C_{m+4}, einen Σ-Paramodulanten C_{m+7} von C_{m+5} und C_{m+6} und eine Σ-Substitution λ mit $B_{n+1} = \lambda C_{m+7}$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist dann $\langle C_1,\ldots,C_m,C_{m+1},\ldots,C_{m+7}\rangle$ eine Σ-Deduktion aus S^E mit der gewünschten Eigenschaft.$\not\emptyset$ ⊠

Die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls kann nun mit Hilfe des Lifting-Theorems leicht gezeigt werden:

> *Satz 8.4* (Vollständigkeitssatz für den ΣRP-Kalkül) Wenn S ΣE-unerfüllbar ist, so gilt $S^E \vdash_{\Sigma} \square$.

Beweis Wenn S ΣE-unerfüllbar ist, so ist $S_{\Sigma gr}$ E-unerfüllbar und nach dem Vollständigkeitssatz für den ΣRP-Kalkül im Basisfall (Satz 6.6) gilt $S^E_{\Sigma gr} \vdash_{\Sigma} \square$, d.h. es gibt eine Σ-Deduktion $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$ aus $S^E_{\Sigma gr}$ mit $B_n = \square$.

Mit dem Lifting-Theorem für den ΣRP-Kalkül (Satz 8.3) erhält man dann eine Σ-Deduktion $\langle C_1,\ldots,C_k,\ldots,C_m\rangle$ aus S^E und eine Σ-Substitution λ_k mit $B_n = \lambda_k C_k$. Wegen $B_n = \square$ gilt auch $C_k = \square$. Also ist $\langle C_1,\ldots,C_k\rangle$ eine Σ-Widerlegung von S^E, d.h. $S^E \vdash_{\Sigma} \square$. ⊠

Anmerkungen

Funktional-reflexive Axiome Die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls wurde nur für Klauselmengen bewiesen, die alle funktional-reflexiven Axiome enthalten. *Brand* hat gezeigt, daß diese Voraussetzung für den RP-Kalkül nicht notwendig ist [Bra75]. Es ist zu vermuten, daß dieses Ergebnis auch auf den ΣRP-Kalkül übertragen werden kann.

Die Abschwächungsregel In Abschnitt 4 wurde gezeigt, daß der ΣRP-Kalkül ohne Abschwächungsregel unvollständig ist. Ohne die Abschwächungsregel läßt sich die Vollständigkeit durch einige zusätzliche Forderungen dennoch erreichen:

Ein mehrsortiger Resolutionskalkül (d.h. ohne Paramodulation) ist vollständig, falls $<\mathfrak{S},\leq>$ eine Baumstruktur hat. Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 7.4.

Der ΣRP-Kalkül ohne Abschwächungsregel ist vollständig, wenn $<\mathfrak{S},\leq>$ eine Baumstruktur hat und die zu widerlegende Klauselmenge S alle funktional-reflexiven Axiome und alle *Konstanten-Reflexivitäten*, d.h. Klauseln der Form $\{E(c\ c)\}$, für jedes $c \in \mathfrak{C}$ enthält, falls eine Klausel in S ein Literal der Form $E(xt)$ oder $E(tx)$ (mit $x \in \mathfrak{V}$ und $t \in T$) enthält:

Wegen Satz 7.4 ist die Abschwächungsregel nicht notwendig, um die Existenz der allgemeinsten Σ-Unifikatoren zu sichern. Wie im Beweis des Lifting-Lemmas für die Σ-Paramodulation (Lemma 8.2) zu sehen war, ist jedoch im allgemeinen eine zusätzliche Anwendung der Abschwächungsregel notwendig, wenn in einem Paramodulationsschritt ein Term durch eine Variable ersetzt wird. Wie man sich leicht überzeugt, kann auch hier auf die abgeschwächte Variante verzichtet werden, falls alle funktional-reflexiven Axiome und alle Konstanten-Reflexivitäten gegeben sind.

Wird die Vollständigkeit auf diese Weise erzwungen, so geht ein wesentlicher Vorteil des RP-Kalküls verloren: Mit den funktional-reflexiven Axiomen und den Konstanten-Reflexivitäten können jetzt alle Σ-Grundinstanzen der vorgegebenen Klauseln erzeugt werden.

Verfeinerungen Die Σ-Paramodulationsregel ist so stark, daß eine wichtige Verfeinerung (engl. *refinement*) unvollständig wird: Der RP-Kalkül bleibt vollständig, wenn die Paramodulation in positive Gleichheitsliterale verboten wird [Lov78]. Als Konsequenz muß im RP-Kalkül die transitive Hülle des Prädikates E nicht berechnet werden, d.h. Herleitungen der Form $E(q,r),E(r,s) \vdash E(q\,s)$ sind nicht erforderlich. Leider sind gerade diese Herleitungen unabdingbar für die Vollständigkeit des ΣRP-Kalküls:

Beispiel 8.1 Sei $S = \{\{P(b_1)\},\{\bar{P}(b_2)\},\{E(b_1a)\},\{E(ab_2)\}\}$ eine Σ-Klauselmenge mit $\mathcal{S} = \{A,B\}$, $B \ll A$, $P \in \mathcal{P}_B$, $\{b_1,b_2\} \subset \mathcal{F}_{e,B}$ und $a \in \mathcal{F}_{e,A}$. Offenbar sind weder $\{P(a)\}$ noch $\{\bar{P}(a)\}$ Σ-Klauseln, d.h. diese Klauseln können nicht durch Σ-Paramodulation aus S hergeleitet werden. Aber mit dem Σ-Paramodulanten $\{E(b_1b_2)\}$ von $\{E(b_1a)\}$ und $\{E(ab_2)\}$ sind die Σ-Klauseln $\{P(b_2)\}$ und $\{\bar{P}(b_1)\}$ durch Σ-Paramodulation herleitbar und jede dieser Σ-Klauseln führt zu einer Σ-Widerlegung von S.⊠

Das Problem besteht hier in der Berechnung der transitiven Hülle von E. Dabei ist zu vermuten, daß Σ-Paramodulation vollständig bleibt, wenn nie in Unterterme von positiven Gleichheitsliteralen paramoduliert wird, ausgenommen Unterterme, die sich an einer Argumentstelle des Prädikatensymbols E befinden.

9. Die Korrektheit des ΣRP-Kalküls

In diesem Abschnitt wird der

Korrektheitssatz für den ΣRP-Kalkül Wenn $S \vdash_{\Sigma} \square$ gilt, so ist S ΣE-unerfüllbar

bewiesen. Dabei wird genauso vorgegangen wie beim Beweis des Korrektheitssatzes für den RP-Kalkül [Lov78]:

Man beweist mit dem *Korrektheitslemma*, daß jedes Modell einer Σ-Klauselmenge alle daraus abgeleiteten Σ-Klauseln erfüllt. Damit ist dann der Korrektheitssatz einfach zu zeigen. Beim Beweis des Korrektheitslemmas wird folgendes Lemma häufig verwendet:

Lemma 9.1 Seien $A,B \in \mathcal{L}_{\Sigma}$ und $\Theta \in SUB_{\Sigma}$ mit $A \subset B$ und $\Theta A \in \mathcal{L}_{\Sigma gr}$. Dann gibt es ein $\lambda \in SUB_{\Sigma}$ mit

(1) $\Theta = \lambda[vars(A)]$, und

(2) $\lambda B \in \mathcal{L}_{\Sigma gr}$.

Beweis Sei $\{x_1,...,x_n\} = vars(B)\setminus vars(A)$, $\{t_1,...,t_n\} \subset T_{\Sigma gr}$ mit $[t_i] \leq [x_i]$, $1 \leq i \leq n$, und sei $\delta,\lambda \in SUB_{\Sigma}$ mit $\delta = \{x_1 \leftarrow t_1,...,x_n \leftarrow t_n\}$ und $\lambda = \Theta \circ \delta$. Offenbar erfüllt λ die Bedingungen (1) und (2).$\boxtimes$

Obwohl die Aussage dieses Lemmas trivial ist, veranschaulicht es einen wesentlichen Umstand bezüglich der Korrektheit des ΣRP-Kalküls: Die Existenz der im Beweis verwendeten Terme t_i ist nur deshalb garantiert, weil für jedes in $\langle \mathcal{S}, \leq \rangle$ minimale Sortensymbol s $\mathcal{F}_{e,s} \neq \emptyset$ vorausgesetzt wird (vgl. Abschnitt 3). Wird diese Forderung aufgegeben, wobei man dann "leere" Sorten erhält, so gelten weder Lemma 9.1 noch die restlichen Sätze dieses Abschnitts. Der ΣRP-Kalkül ist dann inkorrekt, da man eine Σ-widerlegbare Σ-Klauselmenge S angeben kann, für die $S_{\Sigma gr} = \emptyset$ gilt, die also Σ-erfüllbar ist.

Tatsächlich handelt es sich hierbei um die Verallgemeinerung einer Bedingung, die die Korrektheit des RP-Kalküls sichert: Man fordert $\mathfrak{C} \neq \emptyset$, falls eine Klauselmenge S kein Konstantensymbol enthält (vergl. Abschnitt 2). Damit wird die Korrekhtheit des RP-Kalküls erzwungen, da für jede nicht-leere Klauselmenge S dann $S_{gr} \neq \emptyset$ gilt.

Lemma 9.2 (Korrektheitslemma für den ΣRP-Kalkül)
Sei M ein ΣE-Modell von S und sei $C \in \mathfrak{L}_\Sigma$ mit $S \vdash_\Sigma C$. Dann wird C durch M Σ-erfüllt.

Beweis Der Beweis wird durch Induktion über die Länge n der Σ-Deduktion von C aus S geführt.

Um die Lesbarkeit der Beweise nicht unnötig zu erschweren, wird auch hier auf die explizite Angabe von Σ-Umbenennungssubstitution verzichtet. Statt dessen wird angenommen, daß alle Klauseln einer Σ-Deduktion variablenfremd sind.

Induktionsanfang n = 1: Es gilt $C \in S$ und damit, daß M C Σ-erfüllt, denn M ist ein ΣE-Modell von S.$\not\emptyset$

Induktionsschritt $n \geq 1$: Sei $C_{n+1} \in \mathfrak{L}_\Sigma$ mit $S \vdash_\Sigma C_{n+1}$, wobei n+1 die Länge der Σ-Deduktion von C_{n+1} ist. Als Induktionshypothese wird angenommen, daß M jede Σ-Klausel C_i mit $S \vdash_\Sigma C_i$ Σ-erfüllt, vorausgesetzt, für die Länge i der Σ-Deduktion von C_i gilt $i \leq n$.

Sei $\Theta \in SUB_\Sigma$ mit $\Theta C_{n+1} \in \mathfrak{L}_{\Sigma gr}$. Es wird gezeigt, daß dann $\Theta C_{n+1} \cap M \neq \emptyset$ gilt:

Fall (i) $C_{n+1} \in S$: Wie beim Induktionsanfang wird C durch M Σ-erfüllt. Also gilt $\Theta C_{n+1} \cap M \neq \emptyset$.$\not\emptyset$

Fall (ii) Abgeschwächte Varianten und Faktorisation: Sei $C_{n+1} = \sigma C_i$, $i \leq n$, mit $S \vdash_{\Sigma} C_i$, wobei C_{n+1} eine abgeschwächte Variante oder ein Σ-Faktor von C_i ist. Mit der Induktionshypothese erhält man $M \cap \Theta C_{n+1} = M \cap \Theta\sigma C_i \neq \emptyset$.$\not{\emptyset}$

Fall (iii) Resolution: Sei $C_{n+1} = \mathrm{Res}(C_i, L_i, C_j, L_j, \sigma)$, $i,j \leq n$, mit $S \vdash_{\Sigma} C_i$, $S \vdash_{\Sigma} C_j$ und $\sigma \in SUB_{\Sigma}$.

Es gilt $C_{n+1} \subset \sigma(C_i \cup C_j)$ und nach Lemma 9.1 gibt es eine Σ-Substitution λ mit $\Theta C_{n+1} = \lambda C_{n+1}$ und $\lambda\sigma(C_i \cup C_j) \in \mathcal{L}_{\Sigma gr}$.

Mit der Induktionshypothese erhält man dann $M \cap \lambda\sigma C_i \neq \emptyset$ und $M \cap \lambda\sigma C_j \neq \emptyset$.

Fall (iii.1) $\lambda\sigma L_i \notin M$ oder $\lambda\sigma L_j \notin M$: Mit $\lambda\sigma L_i \notin M$ erhält man $M \cap (\lambda\sigma C_i - \lambda\sigma L_i) \neq \emptyset$ und wegen $(\lambda\sigma C_i - \lambda\sigma L_i) \subset \lambda\sigma(C_i - L_i) \subset \Theta C_{n+1}$ dann $M \cap \Theta C_{n+1} \neq \emptyset$. Mit $\lambda\sigma L_j \notin M$ kommt man zum gleichen Ergebnis.$\not{\emptyset}$

Fall (iii.2) $\lambda\sigma L_i \in M$ und $\lambda\sigma L_j \in M$: Es gilt $\sigma L_i = \sigma L_j^c$, also auch $\lambda\sigma L_i = \lambda\sigma L_j^c$. Damit erhält man $\{\lambda\sigma L_j^c, \lambda\sigma L_j\} \subset M$, d.h. M ist keine Interpretation.$\nabla\not{\emptyset}\not{\emptyset}$

Fall (iv) Paramodulation: Sei $C_{n+1} = \mathrm{Par}(C_i, L, C_j, E(q\,r), \alpha, \sigma)$ mit $i,j \leq n$, $S \vdash_{\Sigma} C_i$, $S \vdash_{\Sigma} C_j$ und $\sigma \in SUB_{\Sigma}$. Sei weiter $K \in LIT_{\Sigma}$ mit $\sigma L \underset{\alpha}{\sim} \sigma K$ und $\alpha(\sigma K) = \sigma r$.

Es gilt $C_{n+1} \subset \sigma(C_i \cup C_j \cup \{K\})$ und nach Lemma 9.1 gibt es eine Σ-Substitution λ mit $\Theta C_{n+1} = \lambda C_{n+1}$ und $\lambda\sigma(C_i \cup C_j \cup \{K\}) \in \mathcal{L}_{\Sigma gr}$.

Mit der Induktionshypothese erhält man dann $M \cap \lambda\sigma C_i \neq \emptyset$ und $M \cap \lambda\sigma C_j \neq \emptyset$.

Fall (iv.1) $\lambda\sigma L \notin M$ oder $\lambda\sigma E(q\,r) \notin M$: Wie in Fall (iii.1) erhält man $M \cap \Theta C_{n+1} \neq \emptyset$.$\not{\emptyset}$

Fall (iv.2) $\lambda\sigma L \in M$ und $\lambda\sigma E(q\ r) \in M$: Mit Lemma 2.2 (4) erhält man $\lambda\sigma L \underset{\alpha}{\sim} \lambda\sigma K$ und mit Lemma 2.2 (5) $\alpha(\lambda\sigma L) = \lambda\sigma q$ und $\alpha(\lambda\sigma K) = \lambda\sigma r$. Damit gilt $\lambda\sigma L \underset{\alpha}{\longrightarrow}_M \lambda\sigma K$, d.h. $\lambda\sigma L \rightarrow_{\mathfrak{R}(M)} \lambda\sigma K$, und wegen der E-Abgeschlossenheit von M dann $\lambda\sigma K \in M$. Also gilt $M \cap \{\lambda\sigma K\} \neq \emptyset$, und mit $\{\lambda\sigma K\} \subset \Theta C_{n+1}$ ergibt sich abschließend $M \cap \Theta C_{n+1} \neq \emptyset$.$\not\Box\not\Box\boxtimes$

Die Korrektheit des ΣRP-Kalküls ist jetzt einfach zu zeigen:

Korollar 9.3 (Korrektheitssatz für den ΣRP-Kalkül)
Wenn $S \vdash_{\Sigma} \Box$ gilt, so ist S ΣE-unerfüllbar.

Beweis Mit $S \vdash_{\Sigma} \Box$ und $M \cap \Box = \emptyset$ ergibt sich mit dem Korrektheitslemma (9.2), daß keine E-Interpretation M S Σ-erfüllt, d.h. S ist ΣE-unerfüllbar.$\boxtimes$

10. Der Sortensatz

Soweit wurde der ΣRP-Kalkül eingeführt, und die Vollständigkeit und Korrektheit des neuen Kalküls wurden bewiesen. Es soll nun der Zusammenhang zwischen dem neuen Kalkül und dem bekannten RP-Kalkül hergestellt werden. Dies geschieht durch den

Sortensatz für den ΣRP-Kalkül

(i) S ist ΣE-unerfüllbar gdw. $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ E-unerfüllbar ist;

(ii) $S^{E} \vdash_{\Sigma} \square$ gdw. $(\hat{S}^{E} \cup A^{\Sigma}) \vdash \square$.

Der *modelltheoretische* Teil (i) des Sortensatzes verbindet die semantischen Begriffe des RP- und des ΣRP-Kalküls, der *beweistheoretische* Teil (ii) setzt die Ableitungsrelationen beider Kalküle in einen Zusammenhang.

Natürlich muß nur ein Teil des Sortensatzes (also (i) oder (ii)) direkt bewiesen werden. Der jeweils andere Teil ergibt sich dann mit Hilfe der Vollständigkeit und der Korrektheit des RP- und des ΣRP-Kalküls.

In diesem Abschnitt wird ein direkter Beweis für den modelltheoretischen Teil des Sortensatzes gegeben. Beide Richtungen der Äquivalenz in Teil (i) werden getrennt bewiesen. Zunächst wird gezeigt, daß aus der ΣE-Unerfüllbarkeit von S die E-Unerfüllbarkeit von $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ folgt: Man beweist, daß jedes E-Modell von $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ auch ein ΣE-Modell von S ist (Lemma 10.3). Zum Beweis dieses Lemmas werden zuvor einige Eigenschaften von Modellen der Menge der Sortenaxiome A^{Σ} untersucht:

Lemma 10.1 Sei M ein Modell von A^{Σ}, $t \in T_{gr}$ und $s_1, s \in \mathcal{S}$ mit $s_1 \leq s$ und $s_1(t) \in M$. Dann gilt $s(t) \in M$.

Beweis Durch Induktion in $<\mathcal{S},<>$ wird $s(t) \in M$ bewiesen:

Induktionsanfang s ist minimal in $<\mathcal{S},<>$: Dann gilt $s_1 = s$ und nach Voraussetzung $s(t) \in M$.∅

Induktionsschritt s ist nicht minimal in $<\mathcal{S},<>$: Als Induktionsvoraussetzung wird angenommen, daß das Lemma für alle $s_i \in \mathcal{S}$ mit $s_i \ll s$ gilt. Für $s_1 = s$ gilt $s(t)$ nach Voraussetzung. Sei daher $s_1 < s$ angenommen: Dann gibt es ein $s_i \in \mathcal{S}$ mit $s_1 \leq s_i$ und $s_i \ll s$. Nach Definition von A^Σ gilt $\{\bar{s}_i(x), s(x)\} \in A^\Sigma$ mit $x \in \mathcal{V}_{s_i}$ und damit auch

$$\{\bar{s}_i(t), s(t)\} \in A^\Sigma_{gr} .$$

Mit der Induktionsvoraussetzung erhält man $s_i(t) \in M$ und damit $\bar{s}_i(t) \notin M$. Da M aber A^Σ erfüllt, gilt $M \cap \{\bar{s}_i(t), s(t)\} \neq \emptyset$, d.h. $s(t) \in M$.∅⊠

Definition 10.1 Der *Kern* M^Σ für die Menge der Sortenaxiome A^Σ ist gegeben durch

$$M^\Sigma = \{s(q) \in LIT^{\mathcal{S}}_{\Sigma gr} \mid s \in \mathcal{S}\}. \quad ⊠$$

Der Kern M^Σ ist offenbar eine Interpretation, denn er enthält ausschließlich positive Grundliterale. Im folgenden wird gezeigt, daß M^Σ in jedem Modell von A^Σ enthalten ist:

Lemma 10.2 Für jedes Modell M von A^Σ gilt $M^\Sigma \subset M$.

Beweis Sei M ein Modell von A^Σ, $q \in T_{\Sigma gr}$ und $s \in \mathcal{S}$ mit $[q] \leq s$, d.h. es gilt $s(q) \in M^\Sigma$. Durch strukturelle Induktion über q wird $s(q) \in M$ bewiesen:

Induktionsanfang $q \in \mathcal{F}_{e,s_1}$ mit $s_1 \leq s$: Nach Definition von A^Σ erhält man $\{s_1(q)\} \in A^\Sigma$. Da M A^Σ erfüllt, gilt $s_1(q) \in M$ und mit Lemma 10.1 $s(q) \in M$, denn $s_1 \leq s$.∅

<u>*Induktionsschritt*</u> $q = f(q_1 \dots q_k)$ mit $f \in \mathcal{F}_{s_1 \dots s_k, s_{k+1}}$, $s_{k+1} \leq s$, $q_i \in T_{\Sigma gr}$ und $[q_i] \leq s_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq k$: Dann gilt $s_i(q_i) \in M^{\Sigma}$. Als Induktionsvoraussetzung wird $s_i(q_i) \in M$ für alle i mit $1 \leq i \leq k$ angenommen.

Nach Definition von A^{Σ} gilt $\{\bar{s}_1(x_1), \dots, \bar{s}_k(x_k), s_{k+1}(f(x_1 \dots x_k))\} \in A_{\Sigma}$ mit $x_i \in \mathfrak{V}_{s_i}$ und damit auch

$$\{\bar{s}_1(q_1), \dots, \bar{s}_k(q_k), s_{k+1}(f(q_1 \dots q_k))\} \in A^{\Sigma}_{gr} .$$

Mit der Induktionsvoraussetzung erhält man $\bar{s}_i(q_i) \notin M$ und damit $M \cap \{\bar{s}_1(q_1), \dots, \bar{s}_k(q_k), s_{k+1}(f(q_1 \dots q_k))\} = M \cap \{s_{k+1}(f(q_1 \dots q_k))\} \neq \emptyset$, da M A^{Σ} erfüllt. Also gilt $s_{k+1}(f(q_1 \dots q_k)) = s_{k+1}(q) \in M$ und mit Lemma 10.1 dann $s(q) \in M$, denn $s_{k+1} \leq s$.∅⊠

Mit diesem Ergebnis kann nun die eine Richtung des modelltheoretischen Teils des Sortensatzes bewiesen werden:

<u>*Lemma 10.3*</u> Sei M ein E-Modell von $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$. Dann wird S durch M ΣE-erfüllt.

Beweis Sei $C \in S$ und $\Theta \in SUB_{\Sigma}$ mit $\Theta C \in S_{\Sigma gr}$. Dann gilt

$$\Theta\hat{C} = (\{s_1(q_1), \dots, \bar{s}_n(q_n)\} \cup \Theta C) \in \hat{S}_{gr} ,$$

wobei $q_i \in T_{\Sigma gr}$, $s_i \in \mathcal{S}$ und $[q_i] \leq s_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$. Da M ein E-Modell von $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ ist, erfüllt M natürlich auch A^{Σ}, und wegen Lemma 10.2 gilt $M^{\Sigma} \subset M$. Mit Definition 10.1 erhält man $s_i(q_i) \in M$ und damit $\bar{s}_i(q_i) \notin M$ für jedes i mit $1 \leq i \leq n$. Also gilt $M \cap \Theta\hat{C} = M \cap \Theta C \neq \emptyset$, denn M erfüllt mit $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ auch jede Klausel $\Theta\hat{C} \in \hat{S}_{gr}$. Also wird ΘC durch M erfüllt. Da C und Θ beliebig gewählt waren, ist M ein E-Modell von $S_{\Sigma gr}$ und damit ein ΣE-Modell von S.⊠

Um die andere Richtung des modelltheoretischen Teils des Sortensatzes zu zeigen, wird bewiesen, daß aus der ΣE-Erfüllbarkeit von S immer die E-Erfüllbarkeit von $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ geschlossen werden kann. Dies ist jedoch nicht so leicht zu zeigen wie im vorherigen Fall: Wie man sich leicht überlegt, erfüllt nicht jedes ΣE-Modell M von S auch $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$, denn M enthält im allgemeinen keine Sortenliterale. M muß also zu einer Grundliteralmenge M^* erweitert werden, so daß

(1) M^* alle Sortenliterale interpretiert,

(2) M^* E-abgeschlossen ist , und

(3) M^* ein Modell von $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ ist .

Dies geschieht, indem M zunächst durch den sogenannten M-*Kern* zu einer E-Interpretation M' erweitert wird, die $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ Σ-erfüllt. In einem zweiten Schritt wird M' dann mittels des sogenannten $-*Komplements* zu einer E-Interpretation M^* erweitert, in der jedes Sortenatom L *falsch* ist, d.h. $L^c \in M^*$, falls L in M' *nicht wahr* ist, d.h. $L \notin M'$. Diese E-Interpretation M^* deutet also jedes Sortenliteral, und es wird dann mit Lemma 10.6 gezeigt, daß M^* ein Modell von $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ ist.

Es werden nun die erforderlichen Modellerweiterungen definiert und daran anschließend wird gezeigt, daß mittels dieser Erweiterungen aus E-Interpretationen wieder E-Interpretationen gewonnen werden.

Definition 10.2 Der I-*Kern* $\lceil I \rceil$ für die Menge der Sortenaxiome A^{Σ} bezüglich einer E-Interpretation I ist definiert als

$$\lceil I \rceil = \{s(t) \in LIT^{\$}_{gr} \mid s(q) \in M^{\Sigma} \text{ und } E(qt) \in I \text{ für ein } q \in T_{\Sigma gr}\}. \boxtimes$$

Definition 10.3 Das *$-Komplement* I^c einer E-Interpretation I ist gegeben durch

$I^c = \{\bar{s}(t) \in LIT^{\$}_{gr} | s(t) \notin I \text{ und } s \in \$\}$.⊠

In den beiden folgenden Lemmata wird nun gezeigt, daß die Erweiterung einer E-Interpretation um den I-Kern (vorausgesetzt $I \subset LIT_{gr}$) oder das $-Komplement wiederum eine E-Interpretation ist.

Lemma 10.4 Sei $I \subset LIT_{gr}$ eine E-Interpretation. Dann ist $(I \cup \lceil I \rceil)$ ebenfalls eine E-Interpretation.

Beweis $(I \cup \lceil I \rceil)$ ist eine Interpretation: Es wird gezeigt, daß für jedes $L \in (I \cup \lceil I \rceil)$ gilt $L^c \notin (I \cup \lceil I \rceil)$.

Fall (i) $L \in I$: Es gilt $L^c \notin I$, denn I ist eine Interpretation, und $L^c \notin \lceil I \rceil$, denn $\lceil I \rceil$ enthält ausschließlich Sortenatome, aber L^c ist kein Sortenatom, da nach Voraussetzung $L \in LIT_{gr}$. Also gilt $L^c \notin (I \cup \lceil I \rceil)$.∅

Fall (ii) $L \in \lceil I \rceil$: Da $\lceil I \rceil$ nach Definition 10.2 nur positive Literale enthält, ist L^c ein negatives Literal und mithin $L^c \notin \lceil I \rceil$. Weiter gilt $L^c \notin I$, denn L^c ist ein Sortenliteral, und nach Voraussetzung gilt $I \subset LIT_{gr}$. Damit erhält man $L^c \notin (I \cup \lceil I \rceil)$.∅∅

$(I \cup \lceil I \rceil)$ ist reflexiv: Offensichtlich, denn I ist reflexiv.∅

$(I \cup \lceil I \rceil)$ ist E-abgeschlossen: Sei $L \in (I \cup \lceil I \rceil)$, $K \in LIT^{\$}_{gr}$ und $\alpha \in SEL^+$ mit $L \xrightarrow[\alpha]{}_{(I \cup \lceil I \rceil)} K$. Es wird gezeigt, daß $K \in (I \cup \lceil I \rceil)$ gilt. Da $E(\alpha(L)\alpha(K)) \in (I \cup \lceil I \rceil)$, aber $\lceil I \rceil$ nur Sortenatome enthält, gilt $E(\alpha(L)\alpha(K)) \in I$ und damit

(1) $L \xrightarrow[\alpha]{}_{I} K$.

Für $L \in I$ erhält man $K \in I \subset (I \cup \lceil I \rceil)$, denn I ist E-abgeschlossen. Für $L \in \lceil I \rceil$ gibt es nach Definition 10.2 irgendwelche $s \in \$$, $t \in T_{gr}$ und $q \in T_{\Sigma gr}$ mit

(2) $L = s(t)$,

(3) $s(q) \in M^{\Sigma}$, und

(4) $E(q\,t) \in I$.

Mit (1) erhält man $L \underset{\alpha}{\sim} K$ und mit (2) dann

(5) $K = s(r)$, für ein $r \in T_{gr}$.

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in SEL$ mit $\alpha_1(s(t)) = t$ und $\alpha_2(E(q\,t)) = t$. Dann gibt es ein $\beta \in SEL^*$ mit $\alpha = \beta \circ \alpha_1$ und aus (1) erhält man mit Lemma 2.2 (3) $t \xrightarrow[\beta]{} {}_I\, r$. Damit gilt $\alpha_2(E(q\,t)) \xrightarrow[\beta]{} {}_I\, \alpha_2(E(q\,r))$ sowie $E(q\,t) \underset{\alpha_2}{\sim} E(q\,r)$ und mit Lemma 2.2 (3) dann

(6) $E(q\,t) \xrightarrow[\beta \circ \alpha_2]{} {}_I\, E(q\,r)$.

Mit (4) und der E-Abgeschlossenheit von I erhält man jetzt $E(q\,r) \in I$ und zusammen mit (3) nach Definition 10.2 $s(r) \in \lceil I \rceil$. Mit (5) gilt schließlich $K \in \lceil I \rceil \subset (I \cup \lceil I \rceil)$.∅⊠

<u>*Lemma 10.5*</u> Sei I eine E-Interpretation. Dann ist $(I \cup I^c)$ ebenfalls eine E-Interpretation.

Beweis <u>$(I \cup I^c)$ ist eine Interpretation:</u> Sei $L \in (I \cup I^c)$. Es wird $L^c \notin (I \cup I^c)$ gezeigt: Für $L \in I$ erhält man $L^c \notin I$, denn I ist eine Interpretation und $L^c \notin I^c$ nach Definition 10.3. Für $L \in I^c$ erhält man $L^c \notin I$ nach Definition 10.3 und $L^c \notin I^c$, denn I^c enthält ausschließlich negative Literale. In jedem Fall gilt also $L^c \notin (I \cup I^c)$.∅

<u>$(I \cup I^c)$ ist reflexiv:</u> Offensichtlich, denn I ist reflexiv. ∅

<u>$(I \cup I^c)$ ist E-abgeschlossen:</u> Sei $L \in (I \cup I^c)$, $K \in LIT^{\$}_{gr}$ und $\alpha \in SEL^+$ mit $L \xrightarrow[\alpha]{}_{(I \cup I^c)} K$. Es wird gezeigt, daß $K \in (I \cup I^c)$ gilt: Da $E(\alpha(L)\alpha(K)) \in (I \cup I^c)$, aber I^c nur negative Sortenliterale enthält, gilt $E(\alpha(L)\alpha(K)) \in I$ und damit

(1) $L \xrightarrow[\alpha]{}_I K$.

Für $L \in I$ erhält man $K \in I \subset (I \cup I^c)$, denn I ist E-abgeschlossen. Für $L \in I^c$ schließt man mit (1) $L^c \xrightarrow[\alpha]{}_I K^c$ und mit Lemma 2.3 (1) dann $K^c \xrightarrow[\alpha]{}_I L^c$. Angenommen, es gälte $K^c \in I$: Dann ist $L^c \in I$, da I E-abgeschlossen ist, und mit Definition 10.3 erhält man $L \notin I^c$.∇ Also gilt $K^c \notin I$ und nach Definition 10.3 dann $K \in I^c \subset (I \cup I^c)$. ∅ ⊠

Wie man sich leicht überzeugt, erhält man zu jeder E-Interpretation I mit $(I \cup I^c)$ eine E-Interpretation, die jedes Sortenliteral L deutet, d.h. für die $L \in (I \cup I^c)$ oder $L^c \in (I \cup I^c)$ gilt.

Es wird nun gezeigt, daß für jede ΣE-erfüllbare Σ-Klauselmenge S mit Hilfe des I-Kerns und des \$-Komplements ein E-Modell für $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ gefunden werden kann:

<u>*Lemma 10.6*</u> Wenn S ΣE-erfüllbar ist, so ist $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ E-erfüllbar.

Beweis Sei M ein minimales ΣE-Modell von S. Dann ist M ein E-Modell von $S_{\Sigma gr} \subset \mathcal{L}_{\Sigma gr}$, und wegen der Minimalität von M gilt $M \subset LIT_{gr}$. Nach Lemma 10.4 ist dann $(M \cup \lceil M \rceil)$ eine E-Interpretation und mit Lemma 10.5 ist

$$M^* = (M \cup \lceil M \rceil) \cup (M \cup \lceil M \rceil)^c$$

ebenfalls eine E-Interpretation. Sei jetzt $C \in (\hat{S} \cup A^{\Sigma})$, d.h.

$$C = \{\bar{s}_1(x_1),\dots,\bar{s}_n(x_n)\} \cup D$$

mit $D \in \mathcal{L}^{\$}_{\Sigma}$, wobei D kein negatives Sortenliteral enthält. Dann gilt $vars(D) = \{x_1,\dots,x_n\}$ und $[x_i] = s_i$ für jedes i mit $1 \le i \le n$. Sei weiter $\Theta \in SUB$ mit $\Theta = \{x_1 \leftarrow t_1,\dots,x_n \leftarrow t_n\}$ und $COD(\Theta) \subset T_{gr}$, d.h.

$$\Theta C = (\{\bar{s}_1(t_1),\dots,\bar{s}_n(t_n)\} \cup \Theta D) \in (\hat{S} \cup A^{\Sigma})_{gr} \ .$$

Es wird gezeigt, daß M^* ΘC erfüllt.

Fall (i) $s_i(t_i) \notin \lceil M \rceil$ für ein i mit $1 \le i \le n$: Es gilt $s_i(t_i) \notin (M \cup \lceil M \rceil)$, denn M enthält keine Sortenliterale, und mit Definition 10.3 erhält man $\bar{s}_i(t_i) \in (M \cup \lceil M \rceil)^C$. Damit gilt $\bar{s}_i(t_i) \in M^* \cap \Theta C$, d.h. M^* erfüllt ΘC.ø

Fall (ii) $s_i(t_i) \in \lceil M \rceil$ für jedes i mit $1 \le i \le n$: Nach Definition 10.2 gibt es dann Terme $q_1,\dots,q_n \in T_{\Sigma gr}$ mit

$$s_i(q_i) \in M^{\Sigma} \text{ und } E(q_i\ t_i) \in M$$

für jedes i mit $1 \le i \le n$. Sei $\lambda \in SUB$ mit $\lambda = \{x_1 \leftarrow q_1,\dots,x_n \leftarrow q_n\}$. Wegen $s_i(q_i) \in M^{\Sigma}$ gilt $\lambda \in SUB_{\Sigma}$. Es wird gezeigt, daß gilt

$$(M \cup \lceil M \rceil) \cap \lambda D \neq \emptyset \quad .$$

Fall (ii.1) $s(r) \in D$ für ein $s \in \$$ und ein $r \in T$: Mit $D \in \mathcal{L}^{\$}_{\Sigma}$ gilt $s(\lambda r) \in LIT^{\$}_{\Sigma gr}$ und mit Definition 10.1 dann $s(\lambda r) \in M^{\Sigma}$. Da $E(\lambda r\ \lambda r) \in M$ erhält man mit Definition 10.2 $s(\lambda r) \in \lceil M \rceil$ und wegen $s(\lambda r) \in \lambda D$ schließlich $s(\lambda r) \in (M \cup \lceil M \rceil) \cap \lambda D$.ø

Fall (ii.2) $s(r) \notin D$ für alle $s \in \$$ und alle $r \in T$: Dann gilt $C = \hat{D}$, d.h. $D \in S$ und damit $\lambda D \in S_{\Sigma gr}$. Da M $S_{\Sigma gr}$ erfüllt, erhält man $M \cap \lambda D \neq \emptyset$ und damit auch $(M \cup \lceil M \rceil) \cap \lambda D \neq \emptyset$.ø

Also gibt es ein Literal $L \in D$ mit $\lambda L \in (M \cup \lceil M \rceil)$. Seien nun

$\alpha_1,\ldots,\alpha_h \in SEL^+$ und $K_1,\ldots,K_{h+1} \in LIT^{\$}_{gr}$ mit

$$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_h\} = \{\alpha \in SEL^+ \mid \alpha(L) \in vars(D)\} ,$$
$$K_1 = \lambda L ,$$
$$K_j \underset{\alpha_j}{\sim} K_{j+1} ,$$
$$\alpha_j(K_j) = \lambda\alpha_j(L) , \text{ und}$$
$$\alpha_j(K_{j+1}) = \Theta\alpha_j(L)$$

für alle j mit $1 \le j \le h$. Dann gilt $K_{h+1} = \Theta L$ und

$K_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} (M \cup \lceil M \rceil)\ K_2 \ldots K_h \xrightarrow[\alpha_h]{} (M \cup \lceil M \rceil)\ K_{h+1}$ und damit

$$K_1 \overset{*}{\longrightarrow}_{\mathfrak{R}(M \cup \lceil M \rceil)} K_{h+1} ,$$

denn $\alpha_j(K_j) = \lambda x_i = q_i$, $\alpha_j(K_{j+1}) = \Theta x_i = t_i$ und $E(q_i\ t_i) \in M$, wobei $x_i \in vars(D)$.

Mit $K_1 = \lambda L \in (M \cup \lceil M \rceil)$ ergibt sich dann nach Lemma 2.3 (2) $K_{h+1} = \Theta L \in (M \cup \lceil M \rceil)$. Damit gilt $\Theta L \in (M \cup \lceil M \rceil) \cap \Theta D$, d.h. M^* erfüllt ΘC.$\not{o}$

Da C und Θ beliebig gewählt waren, ist M^* ein E-Modell von $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})_{gr}$ und damit ein E-Modell von $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$.$\boxtimes$

Abschließend kann nun der Sortensatz bewiesen werden:

Satz 10.7 (Sortensatz für den ΣRP-Kalkül)

(i) S ist ΣE-unerfüllbar gdw. $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ E-unerfüllbar ist;

(ii) $S^E \vdash_{\Sigma} \square$ gdw. $(\hat{S}^E \cup A^{\Sigma}) \vdash \square$.

Beweis (i) Wenn S ΣE-unerfüllbar ist, so ist wegen Lemma 10.3 $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ E-unerfüllbar. Ist $(\hat{S} \cup A^{\Sigma})$ E-unerfüllbar, so ist wegen Lemma 10.6 S ΣE-unerfüllbar.$\not{o}$

(ii) Mit $S^E \vdash_{\Sigma} \square$ erhält man nach dem Korrektheitssatz für den ΣRP-Kalkül (Korollar 9.3), daß S^E ΣE-unerfüllbar ist. Damit ist nach Teil (i) des Sortensatzes $(\hat{S}^E \cup A^{\Sigma})$ E-unerfüllbar. Also gilt $(\hat{S}^E \cup A^{\Sigma}) \vdash \square$, denn der RP-Kalkül ist vollständig [Lov78].

Mit $(\hat{S}^E \cup A^{\Sigma}) \vdash \square$ gilt nach dem Korrektheitssatz für den RP-Kalkül, daß $(\hat{S}^E \cup A^{\Sigma})$ E-unerfüllbar ist [Lov78]. Damit ist nach Teil (i) des Sortensatzes S^E ΣE-unerfüllbar, und mit dem Vollständigkeitssatz für den ΣRP-Kalkül (Satz 8.4) gilt dann $S^E \vdash_{\Sigma} \square$.$\not{o}\boxtimes$

11. Ein automatischer Beweiser für den ΣRP-Kalkül

In diesem Abschnitt wird die Realisierung des ΣRP-Kalküls durch einen automatischen Beweiser beschrieben. Dabei werden ausgehend von einem Beweiser für den RP-Kalkül diejenigen Änderungen angegeben, die erforderlich sind, um einen Σ-Beweiser, d.h. einen Beweiser für den ΣRP-Kalkül zu erhalten. Diese Änderungen betreffen

- den Übersetzer für die Eingabesprache,
- das Skolemisierungsverfahren ,
- den Unifikationsalgorithmus und
- die Berechnung der Faktoren, Resolventen und Paramodulanten.

Der Übersetzer Der Übersetzer überprüft, ob eine Eingabe den syntaktischen Regeln und denen der statischen Semantik einer Sprache erster Stufe $\mathcal{K}$ (mit den üblichen Junktoren und Quantoren) genügt. Als 'Code' wird eine Formel erster Stufe in einer für die weitere Verarbeitung geeigneten Repräsentation erzeugt. Die Regeln der statischen Semantik müssen so geändert werden, daß ausschließlich Formeln aus der Menge der *sortenrechten* Formeln erster Stufe $\mathcal{K}_\Sigma \subset \mathcal{K}$ akzeptiert werden: Für jede atomare Teilformel A einer Eingabeformel hat der Übersetzer zu überprüfen, ob A sortenrecht ist, d.h. ob

$$A \in \mathcal{P}_e \text{ oder } [\alpha(A)] \leq [A]_\alpha \text{ für alle } \alpha \in \mathrm{SEL}^+ \text{ mit } \alpha(A)\downarrow$$

gilt. Dieses Problem tritt auch bei Programmiersprachen mit Sorten (bzw. Typen) auf, wie z.B. PASCAL oder ADA, und kann daher mit den bekannten Techniken des Übersetzerbaus gelöst werden.

Um eine Menge von Sortensymbolen $\mathcal{S}$, eine Untersortenordnung $\leq_\mathcal{S}$ und eine $\mathcal{S}$-Signatur Σ zu definieren, muß die Sprache $\mathcal{K}_\Sigma$ entsprechend erweitert werden (vergl. [Wal82b]). Diese Erweiterung zieht dann zusätzliche "semantische" Tests nach sich, in denen z.B. überprüft wird, ob $\leq_\mathcal{S}$ tatsächlich eine Ordnungsrelation ist.

Das Skolemisierungsverfahren Bei der Skolemisierung einer Formel erster Stufe, die in einer bestimmten Normalform vorliegt, wird jedes Auftreten einer existenzquantifizierten Variablen y in einer atomaren Teilformel durch einen *Skolemterm* t ersetzt, und alle Existenzquantoren werden eliminiert.

Der Skolemterm t besteht aus einem neuen Funktionssymbol f, angewandt auf eine (möglicherweise leere) Liste von Variablensymbolen $(x_1 \ldots x_n)$, wobei jedes Variablensymbol x_i allquantifiziert ist und das Variablensymbol y, das durch t ersetzt wurde, im Gültigkeitsbereich genau der Allquantoren für die Variablensymbole $x_1, \ldots, x_n$ liegt.

Die Σ-Skolemisierung, d.h. die Skolemisierung für den ΣRP-Kalkül, wird für Formeln aus K_Σ genauso durchgeführt. Dabei muß jedoch die Signatur Σ für die neuen Funktionssymbole zu einer Signatur Σ^* erweitert werden. Man setzt

$$f \in \mathcal{F}_{s_1 \ldots s_n, s} \text{ gdw. } [x_i] = s_i \text{ und } [y] = s \quad ,$$

wobei f, x_i und y wie oben definiert sind. Es ist offensichtlich, daß die Σ-Skolemisierung sortenrechte Formeln (aus K_Σ) in sortenrechte Formeln (aus K_{Σ^*}) überführt.

Folgende Überlegung zeigt, daß die Σ-Skolemisierung von Formeln aus K_Σ deren Σ-(Un)Erfüllbarkeit erhält: Aus [Obe62] erhält man die semantischen Begriffe für K_Σ und insbesondere eine Definition für die Σ-Unerfüllbarkeit von Formeln aus K_Σ. Sei nun K^S die erweiterte Sprache von K, in der Sortensymbole als einstellige Prädikatensymbole verwendet werden. Dann gilt nach dem Sortensatz aus [Obe62]:

> $\phi \in K^\Sigma$ ist Σ-unerfüllbar gdw. $(\{\hat{\phi}\} \cup A^\Sigma) \subset K^S$ unerfüllbar ist.

Folgendes Diagramm veranschaulicht die Umformung von Formeln erster Stufe durch Skolemisierung und Σ-Skolemisierung:

$$\begin{tikzcd}
\langle \phi \in K_{\Sigma}, \Sigma \rangle \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(5)"'] & (\{\hat{\phi}\} \cup A^{\Sigma}) \subset K^{S} \arrow[d, "(2)"] \\
\langle \tilde{\phi} \in K_{\Sigma *}, \Sigma * \rangle \arrow[r, "(4)"'] & (\{\hat{\tilde{\phi}}\} \cup A^{\Sigma *}) \underset{(3)}{\equiv} (\{\tilde{\hat{\phi}}\} \cup A^{\Sigma}) \subset K^{S}
\end{tikzcd}$$

Bild 11.1 Skolemisierung und Σ-Skolemisierung

Hier bezeichnet $\tilde{\phi}$ die Formel, die durch (Σ-)Skolemisierung aus einer Formel ϕ bei den Übergängen (2) und (5) entsteht. Bei den Übergängen (1) und (4) wird eine Formel durch die Vereinigung ihrer Relativierung mit der Menge der Sortenaxiome ersetzt.

Unter der Voraussetzung, daß bei der (Σ-)Skolemisierung in (2) und (5) jeweils gleiche Variablensymbole durch gleiche Skolemterme ersetzt werden, kann die Äquivalenz (3) bewiesen werden. Damit hat man gezeigt, daß jede Σ-skolemisierte Formel $\tilde{\phi} \in K_{\Sigma *}$ Σ^{*}-unerfüllbar ist gdw. $\phi \in K_{\Sigma}$ Σ-unerfüllbar ist, denn die Übergänge (1) und (4) erhalten die Unerfüllbarkeit nach dem Sortensatz aus [Obe62], und der Übergang (2), der die Skolemisierung im einsortigen Kalkül bezeichnet, läßt die Unerfüllbarkeit ebenso unverändert [Lov78].

Der Unifikationsalgorithmus Im Kern eines jeden (Robinson-) Unifikationsalgorithmus werden Variablensymbole x mit Termen t unifiziert. Die Ergebnissubstitution, dargestellt durch $\{x \leftarrow t\}$, wird mit weiteren Substitutionen dieser Art durch Funktionalkomposition verknüpft, wodurch ein allgemeinster Unifikator für die Menge der Terme (oder Atome) entsteht, die dem Unifikationsalgorithmus als Eingabe vorgelegt wurde (vorausgesetzt diese Menge ist überhaupt unifizierbar). Jeder Unifikationsalgorithmus enthält daher eine Folge von Anweisungen der Form:

(1) *if* $x = t$ *then return* $(\{\})$
(2) *if* $x \in vars(\{t\})$ *then* stop/failure
(3) *return* $(\{x \leftarrow t\})$

Bild 11.2 Unifikation von Variablen und Termen

Bei der Unifikation im ΣRP-Kalkül gibt es nach dem Σ-Unifikationssatz (Satz 7.5) einen allgemeinsten Σ-Unifikator für eine Menge Σ-unifizierbarer Terme im allgemeinen nur nach Anwendung einer Abschwächungssubstitution. Der Unifikationsalgorithmus wird daher zu einem Σ-*Unifikationsalgorithmus* abgeändert, indem Anweisung (3) in Bild 11.2 durch eine neue Folge von Anweisungen ersetzt wird:

(3.1) *if* $[t] \leq_s [x]$ *then return* $(\{\{x \leftarrow t\}\})$
(3.2) *if* $t \notin \mathfrak{V}$ *or* $[t] \sqcap_s [x] = \emptyset$ *then* stop/failure
(3.3) *if* $[x] <_s [t]$ *then return* $(\{\{t \leftarrow x\}\})$
(3.4) *let* $\{s_1, \ldots, s_k\} = \max([t] \sqcap_s [x])$
(3.5) *let* $\{z_1, \ldots, z_k\} \subset \mathfrak{V}$, so daß z_i bisher nicht verwendet wurde und $[z_i] = s_i$
(3.6) *return* $(\{\{x \leftarrow z_1, t \leftarrow z_1\}, \ldots, \{x \leftarrow z_k, t \leftarrow z_k\}\})$

Bild 11.3 Σ-Unifikation von Variablen und Termen

Der Σ-Unifikationsalgorithmus liefert als Ergebnis eine Menge von Σ-Unifikatoren und nicht, wie im einsortigen Fall, einen einzigen Unifikator, da im allgemeinen ein Unifikationsproblem im ΣRP-Kalkül mehrere allgemeinste Lösungen besitzt.

Man kann zeigen (vergl. [Wal84b]), daß der Σ-Unifikationsalgorithmus, angesetzt auf eine Menge von Σ-Termen D mit einer Fehlermeldung terminiert, falls D nicht Σ-unifizierbar ist und andernfalls mit einer Menge von Σ-Substitutionen $U(D) = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ als Ergebnis anhält. Dabei ist U(D) eine kleinste Teilmenge von SUB_Σ mit folgender Eigenschaft: Für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ gilt

(1) $\mu_i \in \mathrm{ASUB}(\mathrm{vars}(D))$,

(2) σ_i ist ein allgemeinster Σ-Unifikator von $\mu_i D$,

(3) $\tau_i = \sigma_i \circ \mu_i\ [\mathrm{vars}(D)]$, und

(4) für jeden Σ-Unifikator θ von D gibt es ein $\lambda \in \mathrm{SUB}_\Sigma$ und ein $\tau_j \in U(D)$ mit $\Theta = \lambda \circ \tau_j [\mathrm{vars}(D)]$.

Falls D sowohl Σ-unifizierbar als auch Σ-verträglich ist (vergl. Abschnitt 7), so gilt $U(D) = \{\tau\}$, wobei τ ein allgemeinster Σ-Unifikator von D ist, denn wegen der Σ-Verträglichkeit ist immer genau eine der Bedingungen in den Anweisungen (3.1) und (3.3) von Bild 11.3 erfüllt.

Berechnung der Faktoren, Resolventen und Paramodulanten Wie schon in den Abschnitten 4 und 7 angedeutet, kann bei einer Realisierung des ΣRP-Kalküls durch einen automatischen Beweiser die explizite Berechnung von abgeschwächten Varianten vermieden werden. Im folgenden wird eine Implementierung vorgestellt, bei der abgeschwächte Varianten gleichzeitig mit den Faktoren, Resolventen und Paramodulanten berechnet werden:

Faktorisation Sei A eine Klausel in einer Σ-Deduktion, und sei $B \subset A$ mit $|B| \geq 2$ und

$$U(B) = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\} \quad .$$

Um die Vollständigkeit zu garantieren, muß der Σ-Beweiser jede Σ-Klausel

$$\tau_i\ A$$

mit $1 \leq i \leq n$ berechnen. Jede dieser Σ-Klauseln ist nach dem Σ-Unifikationssatz (Satz 7.5) ein Σ-Faktor einer abgeschwächten Variante von A. Die Vollständigkeit ergibt sich dann aus dem Lifting-Theorem für den ΣRP-Kalkül (Satz 8.3).

Resolution Seien A,B Klauseln in einer Σ-Deduktion, und seien $L_A \in A$ und $L_B \in B$ komplementäre Literale mit

$$U(\{|L_A|,|L_B|\}) = \{\tau_1,\dots,\tau_n\} \quad .$$

Um die Vollständigkeit zu garantieren, muß der Σ-Beweiser jede Σ-Klausel

$$\tau_i(A-L_A) \cup \tau_i(B-L_B)$$

mit $1 \leq i \leq n$ berechnen. Jede dieser Σ-Klauseln ist nach dem Σ-Unifikationssatz (Satz 7.5) eine Σ-Resolvente von abgeschwächten Varianten von A und B. Die Vollständigkeit ergibt sich dann aus dem Lifting-Theorem für den ΣRP-Kalkül (Satz 8.3).

Paramodulation Seien A,B Klauseln in einer Σ-Deduktion, und seien $L \in A$, $E(q\,r) \in B$ und $\alpha \in SEL^+$, so daß $\{\alpha(L),q\}$ Σ-unifizierbar ist. Falls $r \in \mathfrak{V}$ und $[r] \sqcap_{\mathfrak{s}} [L]_\alpha = \emptyset$ oder $r \notin \mathfrak{V}$ und $[r] \not\leq_{\mathfrak{s}} [L]_\alpha$ gilt, so gibt es keinen Σ-Paramodulanten von A und (einer abgeschwächten Variante von) B, denn es gilt dann $[\theta r] \not\leq_{\mathfrak{s}} [\theta L]_\alpha$ für alle $\theta \in SUB_\Sigma$.

Einen Σ-Paramodulanten erhält man also nur, falls mit $r \in \mathfrak{V}$ auch $[r] \sqcap [L]_\alpha \neq \emptyset$ gilt und falls mit $r \notin \mathfrak{V}$ auch $[r] \leq_{\mathfrak{s}} [L]_\alpha$ gilt. Sei $\{s_1,\dots,s_k\} = max_{\mathfrak{s}}([r] \sqcap_{\mathfrak{s}} [L]_\alpha)$, und sei $\{z_1,\dots,z_k\}$ eine Menge von Variablensymbolen mit $[z_i] = s_i$, die in der Σ-Deduktion bisher nicht verwendet wurden. Für $[r] \not\leq_{\mathfrak{s}} [L]_\alpha$ definiert man $\mu_1,\dots,\mu_k \in SUB_\Sigma$ durch $\mu_j = \{r \leftarrow z_j\}$, $1 \leq j \leq k$. Andernfalls definiert man $k = 1$ und $\mu_1 = \varepsilon$. Offenbar ist jede Klausel $\mu_j B$ eine abgeschwächte Variante von B und es gilt $[\mu_j r] \leq_{\mathfrak{s}} [L]_\alpha$ für alle j mit $1 \leq j \leq k$.

Aus dem Beweis des Lifting-Lemmas für die Σ-Paramodulation (Lemma 8.2) ist bekannt, daß $\{\alpha(L),\mu_j q\}$ Σ-unifizierbar ist.

Also gilt

$$U(\{\alpha(L),\mu_j q\}) = \{\tau_1^j,\ldots,\tau_{n_j}^j\} \neq \emptyset \quad .$$

Um die Vollständigkeit zu garantieren, muß der Σ-Beweiser jede Σ-Klausel

$$\tau_i^j(A-L) \cup \tau_i^j(B-E(q\ r)) \cup \{\tau_i^j K\}$$

mit $1 \leq j \leq k$ und $1 \leq i \leq n_j$ berechnen (wobei $\tau_i^j K$ ein Modulantliteral ist). Jede dieser Klauseln ist nach dem Σ-Unifikationssatz (Satz 7.5) ein Σ-Paramodulant von abgeschwächten Varianten von A und B. Die Vollständigkeit ergibt sich dann aus dem Lifting-Theorem für den ΣRP-Kalkül (Satz 8.3).

Nach jeder Berechnung eines Σ-Faktors, einer Σ-Resolvente und eines Σ-Paramodulanten müssen dann alle Variablensymbole der jeweiligen neuen Σ-Klauseln mittels geeigneter Σ-Umbenennungssubstitutionen ersetzt werden.

12. AUTOMATISCHES BEWEISEN IM ΣRP-KALKÜL

In diesem Abschnitt sollen die praktischen Vorteile des ΣRP-Kalküls diskutiert werden. Anhand ausgewählter Beispiele werden Lösungen von Problemen, die in der einsortigen Prädikatenlogik formuliert sind, mit den Lösungen der mehrsortigen Formulierungen dieser Probleme verglichen. Als Beweissystem wird dabei die *Markgraf Karl Refutation Procedure* (MKRP) verwendet [ESS80, BES81], ein an der Universität Karlsruhe entwickelter automatischer Beweiser, der auf der erweiterten "Connection-graph"-Methode basiert [Kow75, ESW78, SW80, Eis81, Wal81]. Dieser Beweiser wurde, wie in Abschnitt 11 beschrieben, für den ΣRP-Kalkül ausgebaut.

Einen ersten Ansatzpunkt für den Vergleich beider Kalküle liefert der Sortensatz (Satz 10.7). Man erhält

- eine kleinere Menge von
- kleineren Klauseln

und damit

- kürzere Widerlegungen

wenn $S^E \vdash_{\Sigma} \square$ anstatt $(\hat{S}^E \cup A^\Sigma) \vdash \square$ gezeigt wird. Jedoch stellt ein Vergleich zwischen (Σ-)Widerlegungen von S^E und $\hat{S}^E \cup A^\Sigma$ die Unterschiede zwischen beiden Kalkülen verzerrt dar, da Klauselmengen i.a. nicht in der Form $\hat{S}^E \cup A^\Sigma$ vorliegen. Beispielsweise kann die Klauselmenge $S = \{\{P(x)\}, \{\bar{P}(y)\}\}$ sowohl im RP-Kalkül als auch im ΣRP-Kalkül mit $\mathcal{S} = \{s_o\}$ in einem Resolutionsschritt widerlegt werden. Dagegen liefern Relativierung und Sortenaxiome die Klauselmenge $\hat{S} \cup A^\Sigma = \{\{\bar{s}_o(x), P(x)\},\{\bar{s}_o(y),\bar{P}(y)\}\} \cup \{\{s_o(c)\}\}$, deren Widerlegung mindestens zwei Resolutionsschritte erfordert.

Einen objektiveren Vergleich erhält man daher, wenn durch Axiomatisierung erster Stufe gegebene Probleme mit ihrer "sortierten Version" verglichen werden, die man erhält, indem (einige) einstellige Prädikate durch Sortensymbole und (einige) Axiome durch die Untersortenbeziehung und die Signatur kodiert werden. Dies soll anhand eines im automatischen Beweisen wohlbekannten Problems vorgeführt werden: Das nachfolgende Beweisprotokoll zeigt die Lösung des MKRP-Systems für das sogenannte "monkey-banana"-Problem, wobei die (einsortige) Axiomatisierung aus [Lov78] verwendet wird:

```
*****************************************************************************
*                                                                           *
*    MARKGRAF KARL REFUTATION PROCEDURE, UNI KARLSRUHE, VERSION 12-OCT-83   *
*                                                                           *
*    DATE:    2-NOV-83 16:40:31                                             *
*                                                                           *
*****************************************************************************


FORMULAE GIVEN TO THE THEOREM PROVER:

AXIOMS:
     ALL X,Y ANIMAL(X) AND CLOSE.TO(X Y) IMPL CAN.REACH(X Y)
     ALL X,Y ON(X Y) AND UNDER(Y BANANA) AND TALL(Y) IMPL CLOSE.TO(X BANANA)
     ALL X,Y,Z IN.ROOM(X) AND IN.ROOM(Y) AND IN.ROOM(Z) AND
        CAN.MOVE.NEAR(X Y Z) IMPL (CLOSE.TO(Z FLOOR) OR UNDER(Y Z))
     ALL X,Y CAN.CLIMB(X Y) IMPL ON(X Y)
     ANIMAL(MONKEY)
     TALL(CHAIR)
     IN.ROOM(MONKEY)
     IN.ROOM(BANANA)
     IN.ROOM(CHAIR)
     CAN.MOVE.NEAR(MONKEY CHAIR BANANA)
     NOT CLOSE.TO(BANANA FLOOR)
     CAN.CLIMB(MONKEY CHAIR)

THEOREM:
     CAN.REACH(MONKEY BANANA)


CLAUSES:
     AXM1  :  ALL X:ANY Y:ANY NOT ANIMAL(X)  OR  NOT CLOSE.TO(X Y)
                 OR  CAN.REACH(X Y)
     AXM2  :  ALL X:ANY Y:ANY NOT ON(X Y)  OR  NOT UNDER(Y BANANA)
                 OR  NOT TALL(Y)  OR  CLOSE.TO(X BANANA)
     AXM3  :  ALL X:ANY Y:ANY Z:ANY NOT IN.ROOM(X)  OR  NOT IN.ROOM(Y)  OR
                 NOT IN.ROOM(Z) OR NOT CAN.MOVE.NEAR(X Y Z) OR CLOSE.TO(Z FLOOR)
                 OR  UNDER(Y Z)
     AXM4  :  ALL X:ANY Y:ANY NOT CAN.CLIMB(X Y)  OR  ON(X Y)
     AXM5  :  ANIMAL(MONKEY)
     AXM6  :  TALL(CHAIR)
     AXM7  :  IN.ROOM(MONKEY)
     AXM8  :  IN.ROOM(BANANA)
     AXM9  :  IN.ROOM(CHAIR)
     AXM10  :  CAN.MOVE.NEAR(MONKEY CHAIR BANANA)
     AXM11  :  NOT CLOSE.TO(BANANA FLOOR)
     AXM12  :  CAN.CLIMB(MONKEY CHAIR)
     THM13  :  NOT CAN.REACH(MONKEY BANANA)
```

```
AXM3          --> AXM3.FAC1 :  ALL X:ANY UNDER(X X)  OR  CLOSE.TO(X FLOOR)
                                  OR  NOT CAN.MOVE.NEAR(X X X)
                                  OR  NOT IN.ROOM(X)

AXM3          --> AXM3.FAC2 :  ALL X:ANY Y:ANY UNDER(X Y)  OR  CLOSE.TO(Y FLOOR)
                                  OR  NOT CAN.MOVE.NEAR(Y X Y)
                                  OR  NOT IN.ROOM(Y)  OR  NOT IN.ROOM(X)

AXM3          --> AXM3.FAC3 :  ALL X:ANY Y:ANY UNDER(X X)  OR  CLOSE.TO(X FLOOR)
                                  OR  NOT CAN.MOVE.NEAR(Y X X)  OR  NOT IN.ROOM
                                  OR  NOT IN.ROOM(X)  OR  NOT IN.ROOM(Y)

AXM3          --> AXM3.FAC4 :  ALL X:ANY Y:ANY UNDER(X Y)  OR  CLOSE.TO(Y FLOOR)
                                  OR  NOT CAN.MOVE.NEAR(X X Y)
                                  OR  NOT IN.ROOM(Y)  OR  NOT IN.ROOM(X)

AXM1  + AXM5  -->       RES1 :  ALL X:ANY CAN.REACH(MONKEY X)
                                  OR  NOT CLOSE.TO(MONKEY X)

THM13 + RES1  -->       RES2 :  NOT CLOSE.TO(MONKEY BANANA)

RES2  + AXM2  -->       RES3 :  ALL X:ANY NOT TALL(X)  OR  NOT ON(MONKEY X)
                                  OR  NOT UNDER(X BANANA)

RES3  + AXM4  -->       RES4 :  ALL X:ANY NOT UNDER(X BANANA)  OR  NOT TALL(X)
                                  OR  NOT CAN.CLIMB(MONKEY X)

RES4  + AXM12 -->       RES5 :  NOT TALL(CHAIR)  OR  NOT UNDER(CHAIR BANANA)

RES5  + AXM3  -->       RES6 :  ALL X:ANY NOT TALL(CHAIR)
                                  OR  CLOSE.TO(BANANA FLOOR)
                                  OR  NOT CAN.MOVE.NEAR(X CHAIR BANANA)
                                  OR  NOT IN.ROOM(BANANA)
                                  OR  NOT IN.ROOM(CHAIR)  OR  NOT IN.ROOM(X)

RES6  + AXM9  -->       RES7 :  ALL X:ANY NOT IN.ROOM(X)  OR  NOT IN.ROOM(BANANA)
                                  OR  NOT CAN.MOVE.NEAR(X CHAIR BANANA)
                                  OR  CLOSE.TO(BANANA FLOOR)
                                  OR  NOT TALL(CHAIR)

RES7  + AXM6  -->       RES8 :  ALL X:ANY CLOSE.TO(BANANA FLOOR)
                                  OR  NOT CAN.MOVE.NEAR(X CHAIR BANANA)
                                  OR  NOT IN.ROOM(BANANA)  OR  NOT IN.ROOM(X)

RES8  + AXM8  -->       RES9 :  ALL X:ANY NOT IN.ROOM(X)
                                  OR  NOT CAN.MOVE.NEAR(X CHAIR BANANA)
                                  OR  CLOSE.TO(BANANA FLOOR)

AXM11 + RES9  -->       RES1Ø :  ALL X:ANY NOT CAN.MOVE.NEAR(X CHAIR BANANA)
                                   OR  NOT IN.ROOM(X)

RES1Ø + AXM1Ø -->       RES11 :  NOT IN.ROOM(MONKEY)

RES11 + AXM7  -->       RES12 :  EMPTY


THE FOLLOWING CLAUSES WERE USED IN THE PROOF:

AXM7 AXM1Ø AXM8 AXM6 AXM9 AXM3 AXM12 AXM4 AXM2 AXM5 AXM1 RES1 THM13 RES2 RES3
RES4 RES5 RES6 RES7 RES8 RES9 AXM11 RES1Ø RES11 RES12 .


THE THEOREM IS PROVED. END OF PROOF  2-NOV-83 16:42:18.
```

Bild 12.1 Die Lösung des einsortigen "monkey-banana"-Problems

Eine mehrsortige Formulierung des "monkey-banana"-Problems und dessen Lösung im ΣRP-Kalkül durch das MKRP-System zeigt nachfolgendes Protokoll. Dabei steht (vergl. [Wal82b]):

SORT $s_1,\ldots,s_n$:s für $s_i \ll_S s_n$, $1\le i\le n$,

TYPE $c_1,\ldots,c_n$:s für $c_i \in \mathcal{F}_{e,s}$, $1\le i\le n$,

TYPE $P(s_1\ldots s_n)$ für $P \in \mathcal{P}_{s_1\ldots s_n}$, und

ALL $x_1,\ldots,x_n$:s für die Allquantifizierung der $x_i \in \mathcal{V}_s$, $1\le i\le n$.

```
******************************************************************************
*                                                                            *
*   MARKGRAF KARL REFUTATION PROCEDURE, UNI KARLSRUHE, VERSION  12-OCT-83    *
*                                                                            *
*      DATE:    2-NOV-83 16:46:27                                            *
*                                                                            *
******************************************************************************


FORMULAE GIVEN TO THE THEOREM PROVER:

AXIOMS:
     SORT ANIMAL,TALL:IN.ROOM
     TYPE BANANA,FLOOR:IN.ROOM
     TYPE CHAIR:TALL
     TYPE MONKEY:ANIMAL
     TYPE CAN.REACH(ANIMAL IN.ROOM)
     TYPE CLOSE.TO(IN.ROOM IN.ROOM)
     TYPE ON(IN.ROOM IN.ROOM)
     TYPE UNDER(IN.ROOM IN.ROOM)
     TYPE CAN.MOVE.NEAR(ANIMAL IN.ROOM IN.ROOM)
     TYPE CAN.CLIMB(ANIMAL TALL)
     ALL X:ANIMAL ALL Y:IN.ROOM CLOSE.TO(X Y) IMPL CAN.REACH(X Y)
     ALL X:ANIMAL ALL Y:TALL ON(X Y) AND UNDER(Y BANANA) IMPL CLOSE.TO(X BANANA)
     ALL X:ANIMAL ALL Y,Z:IN.ROOM CAN.MOVE.NEAR(X Y Z)
        IMPL (CLOSE.TO(Z FLOOR) OR UNDER(Y Z)) .
     ALL X:ANIMAL ALL Y:TALL CAN.CLIMB(X Y) IMPL ON(X Y)
     CAN.MOVE.NEAR(MONKEY CHAIR BANANA)
     NOT CLOSE.TO(BANANA FLOOR)
     CAN.CLIMB(MONKEY CHAIR)

THEOREM:
     CAN.REACH(MONKEY BANANA)


CLAUSES:
     AXM1  :  ALL X:ANIMAL Y:IN.ROOM NOT CLOSE.TO(X Y) OR CAN.REACH(X Y)
     AXM2  :  ALL X:ANIMAL Y:TALL NOT ON(X Y) OR NOT UNDER(Y BANANA)
                 OR CLOSE.TO(X BANANA)
     AXM3  :  ALL X:ANIMAL Y:IN.ROOM Z:IN.ROOM NOT CAN.MOVE.NEAR(X Y Z)
                 OR CLOSE.TO(Z FLOOR) OR UNDER(Y Z)
     AXM4  :  ALL X:ANIMAL Y:TALL NOT CAN.CLIMB(X Y) OR ON(X Y)
     AXM5  :  CAN.MOVE.NEAR(MONKEY CHAIR BANANA)
     AXM6  :  NOT CLOSE.TO(BANANA FLOOR)
     AXM7  :  CAN.CLIMB(MONKEY CHAIR)
     THM8  :  NOT CAN.REACH(MONKEY BANANA)
```

```
AXM2 + AXM3 --> RES1 :  ALL X:ANIMAL Y:TALL Z:ANIMAL CLOSE.TO(X BANANA)
                           OR  NOT ON(X Y)  OR  CLOSE.TO(BANANA FLOOR)
                           OR  NOT CAN.MOVE.NEAR(Z Y BANANA)

RES1 + AXM5 --> RES2 :  ALL X:ANIMAL CLOSE.TO(BANANA FLOOR)  OR  NOT ON(X CHAIR)
                           OR  CLOSE.TO(X BANANA)

AXM1 + RES2 --> RES3 :  ALL X:ANIMAL CAN.REACH(X BANANA)  OR  NOT ON(X CHAIR)
                           OR  CLOSE.TO(BANANA FLOOR)

AXM6 + RES3 --> RES4 :  ALL X:ANIMAL NOT ON(X CHAIR)  OR  CAN.REACH(X BANANA)

THM8 + RES4 --> RES5 :  NOT ON(MONKEY CHAIR)

RES5 + AXM4 --> RES6 :  NOT CAN.CLIMB(MONKEY CHAIR)

RES6 + AXM7 --> RES7 :  EMPTY



THE FOLLOWING CLAUSES WERE USED IN THE PROOF:

AXM7 AXM4 AXM5 AXM3 AXM2 RES1 RES2 AXM1 RES3 AXM6 RES4 THM8 RES5 RES6 RES7 .

THE THEOREM IS PROVED. END OF PROOF  2-NOV-83 16:47:22.
```

Bild 12.2 Die Lösung des mehrsortigen "monkey-banana"-Problems

Folgende Tabelle vergleicht die Statistik beider Beweisläufe. Dabei ist der Wert für *initial links* ein Maß für den Umfang des initialen Suchraumes und der Wert für *links generated* ein Maß für den Umfang des gesamten Suchraumes, der während eines Beweislaufs erzeugt wurde. Der Wert für *steps executed* ist proportional zum tatsächlichen Suchaufwand und *level of proof* gibt die Suchtiefe an. Die Werte für *R-links*, *P-links* und *F-links* bezeichnen die Anzahl der potentiellen Resolventen, Paramodulanten oder Faktoren, also der Klauseln, die während des Beweislaufs hätten erzeugt werden können. Die Werte für das mehrsortige Problem sind in der ersten, die für das einsortige Problem in der zweiten Spalte der Tabelle wiedergegeben. In der dritten Spalte wird der Aufwand für die mehrsortige Lösung in Prozenten der einsortigen Lösung angegeben. Die vierte Spalte schließlich stellt die Prozentwerte graphisch dar, d.h. je kleiner die schwarze Fläche in einem Rechteck ist, desto größer ist der Vorteil des ΣRP-Kalküls für den entsprechenden Eintrag.

	ΣRP	RP	$\Sigma RP/_{RP}$ *100
CPU seconds	3.3	11.4	29
steps executed	7	16	44
links generated	22	99	22
R-links	22	95	23
P-links	0	0	100
F-links	0	4	0
initial links	8	23	35
R-links	8	19	42
P-links	0	0	100
F-links	0	4	0
clauses generated	15	29	52
initial	8	13	62
deduced	7	16	44
resolvents	7	12	58
paramodulants	0	0	100
factors	0	4	0
literals generated	28	75	37
initial	14	24	58
deduced	14	51	28
level of proof	7	12	58
clauses in proof	15	25	60

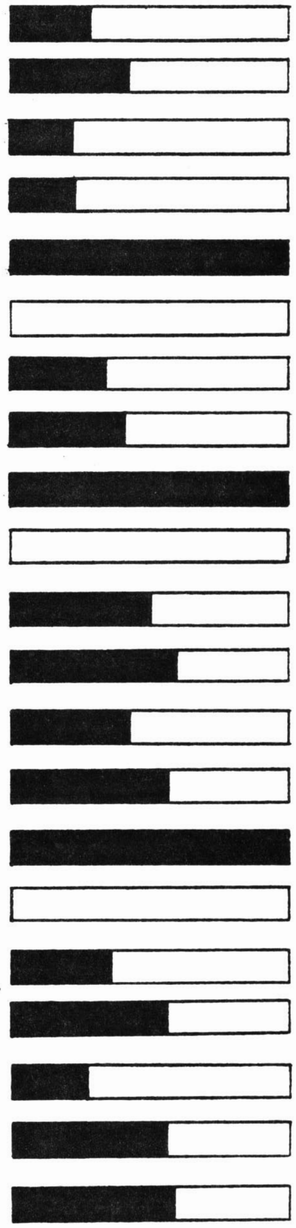


Bild 12.3 Beweisstatistik für das "monkey-banana"-Problem

Ein Vergleich der statistischen Werte beider Beweisläufe zeigt die typischen Vorteile des ΣRP-Kalküls im automatischen Beweisen, nämlich eine

- drastische Reduzierung des Suchraumes bei gleichzeitiger
- Verringerung der Suchtiefe, womit dann eine
- Verminderung des Suchaufwandes

für das Auffinden einer Widerlegung verbunden ist.

Es ist offensichtlich, daß dabei der Grad der Verbesserung proportional zum Grad der "Sortiertheit" des betrachteten Problems ist. Man wird beispielsweise nicht erwarten, daß automatisches Beweisen im ΣRP-Kalkül mit einelementiger Sortensymbolmenge vorteilhafter ist als im RP-Kalkül. Damit erscheint der Vorteil des ΣRP-Kalküls noch bemerkenswerter, da die im "monkey-banana"-Problem verwendete Sortenstruktur, d.h. $\langle \mathfrak{S}, \leq_{\mathfrak{S}} \rangle$, sehr einfach ist.

Genauer betrachtet ergibt sich für Deduktionen im ΣRP-Kalkül ohne Paramodulation, daß der Grad der Verbesserung (relativ zum RP-Kalkül) direkt abhängig von der Komplexität der Untersortenbeziehung ist. Gilt beispielsweise für eine Sortensymbolmenge $\mathfrak{S}$, daß $<_{\mathfrak{S}}$ leer ist, so ist jeder allgemeinste Unifikator eines Paares komplementärer Σ-Literale trivialerweise auch ein allgemeinster Σ-Unifikator. Damit ist dann jede Deduktion $\vdash_{\overline{R}}$ gleichzeitig eine Σ-Deduktion $\vdash_{\overline{\Sigma R}}$, und man kann aus der Sortierheit einer Formelmenge keinen beweistechnischen Nutzen ziehen. Dies gilt allerdings nicht, sobald paramoduliert werden muß, da dann auch Termpaare zu unifizieren sind: Enthält nämlich eine Klauselmenge mindestens eine Klausel mit einem Literal der Form E(xq) (oder E(qx)) mit $x \in \mathfrak{V}$ und $q \in T$, so kann im RP-Kalkül jeder Unterterm $t \notin \mathfrak{V}$ aus einer Klausel der betreffenden Klauselmenge in einem Paramodulationsschritt durch q ersetzt werden, da $\{x,t\}$ immer unifizierbar ist. Im ΣRP-Kalkül dagegen können nur noch Unterterme $t \notin \mathfrak{V}$ mit $[t] \leq_{\mathfrak{S}} [x]$ durch q ersetzt werden, da für $[t] \nleq_{\mathfrak{S}} [x]$, $\{x,t\}$ nicht Σ-unifizierbar ist. Damit ergibt sich im allgemeinen eine bemerkenswerte Reduzierung des Suchraumes, die umso größer ist, je *kleiner* die Kardinalität der Untersortenrelation $<_s$ ist.

Dieser Sachverhalt soll anhand eines Beispiels veranschaulicht werden: Gegeben seien zwei Mengen A und B mit je einer Verknüpfungsoperation $f:A \times A \to A$ und $g:B \times B \to B$ sowie einem Homomorphismus $h:A \to B$. Zu zeigen ist, daß g auf Bild(h) × Bild(h) idempotent ist, falls f idempotent ist. Folgendes Protokoll zeigt eine Axiomatisierung des Sachverhalts und einen Beweis des Satzes im ΣRP-Kalkül. Dabei steht (vergl. [Wal82b]):

TYPE $f(s_1 \ldots s_n):s$ für $f \in \mathcal{F}_{s_1 \ldots s_n, s}$,

$q = r$ für $E(q\ r)$ und ANY für s_o.

```
*********************************************************************************
*                                                                               *
*   MARKGRAF KARL REFUTATION PROCEDURE, UNI KARLSRUHE, VERSION  12-OCT-83       *
*                                                                               *
*   DATE:  14-NOV-83 15:47:11                                                   *
*                                                                               *
*********************************************************************************


FORMULAE GIVEN TO THE THEOREM PROVER:

AXIOMS:
     TYPE F(A A):A
     TYPE G(B B):B
     TYPE H(A):B
     ALL X,Y:A H(F(X Y)) = G(H(X) H(Y))

THEOREM:
     (ALL X:A F(X X) = X) IMPL (ALL Y:A G(H(Y) H(Y)) = H(Y))


SKOLEM SYMBOLS:
     TYPE C_1:A

CLAUSES:
     AXM1 :  ALL X:A Y:A H(F(X Y))=G(H(X) H(Y))
     THM2 :  ALL X:A F(X X)=X
     THM3 :  NOT G(H(C_1) H(C_1))=H(C_1)


THM3  + AXM1  -->     PAR1 :  NOT H(F(C_1 C_1))=H(C_1)

PAR1  + THM2  -->     PAR2 :  NOT H(C_1)=H(C_1)

                      AXMØ :  ALL X:ANY X=X

PAR2  + AXMØ  -->     RES1 :  EMPTY


THE FOLLOWING CLAUSES WERE USED IN THE PROOF:

AXMØ THM2 AXM1 THM3 PAR1 PAR2 RES1 .


THE THEOREM IS PROVED. END OF PROOF  14-NOV-83 15:48:18.
```

Bild 12.4 Die Lösung des mehrsortigen "Idempotenz"-Problems

Verzichtet man in diesem Beispiel auf die Signatur, so erhält man denselben Beweis im RP-Kalkül:

```
********************************************************************************
*                                                                              *
*    MARKGRAF KARL REFUTATION PROCEDURE, UNI KARLSRUHE, VERSION 31-OCT-83      *
*                                                                              *
*    DATE:  14-NOV-83 15:50:02                                                 *
*                                                                              *
********************************************************************************


FORMULAE GIVEN TO THE THEOREM PROVER:

AXIOMS:
     ALL X,Y H(F(X Y)) = G(H(X) H(Y))

THEOREM:
     (ALL X F(X X) = X) IMPL (ALL Y G(H(Y) H(Y)) = H(Y))


CLAUSES:
     AXM1 :  ALL X:ANY Y:ANY H(F(X Y))=G(H(X) H(Y))
     THM2 :  ALL X:ANY F(X X)=X
     THM3 :  NOT G(H(C_1) H(C_1))=H(C_1)


THM3  + AXM1  -->       PAR1 :  NOT H(F(C_1 C_1))=H(C_1)

PAR1  + THM2  -->       PAR2 :  NOT H(C_1)=H(C_1)

                        AXM0 :  ALL X:ANY X=X

PAR2  + AXM0  -->       RES1 :  EMPTY


THE FOLLOWING CLAUSES WERE USED IN THE PROOF:

AXM0 THM2 AXM1 THM3 PAR1 PAR2 RES1 .

THE THEOREM IS PROVED. END OF PROOF  14-NOV-83 15:53:15.
```

Bild 12.5 Die Lösung des "Idempotenz"-Problems ohne Sorten

Folgende Tabelle vergleicht die Statistiken beider Beweisläufe:

	ΣRP	RP	$\Sigma RP/_{RP}$ *100
CPU seconds	1	1.4	74
steps executed	3	3	100
links generated	21	36	58
R-links	1	1	100
P-links	20	35	57
F-links	0	0	100
initial links	14	26	54
R-links	0	0	100
P-links	14	26	54
F-links	0	0	100
clauses generated	6	6	100
initial	3	3	100
deduced	3	3	100
resolvents	1	1	100
paramodulants	2	2	100
factors	0	0	100
literals generated	6	6	100
initial	3	3	100
deduced	3	3	100
level of proof	3	3	100
clauses in proof	7	7	100

Bild 12.6 Beweisstatistik für das "Idempotenz"-Problem im ΣRP-Kalkül und ohne Sorten

Hier sieht man deutlich, daß der Wegfall der Sorten, wie erwartet, keine Vergößerung des Suchraumes bzgl. möglicher Resolutionsschritte bewirkt (der Wert für R-links bleibt unverändert), aber die Anzahl der möglichen Paramodulationsschritte stark ansteigt. Ursache dafür ist, daß alle Terme der Form G(...) und

H(...) im ΣRP-Kalkül mit x, also der rechten Seite der Gleichung F(xx) = x, nicht Σ-unifizierbar sind, diese Terme jedoch im RP-Kalkül mit x unifiziert werden können.

Dabei wurde im RP-Kalkül noch nicht einmal der zu zeigende Satz bewiesen, da durch den Wegfall der Signatur die Mengen A und B identifiziert werden. Um eine äquivalente einsortige Formulierung zu erhalten, müssen die Formeln des "Idempotenz"-Problems relativiert werden. Damit erhält man dann folgende Lösung im RP-Kalkül:

```
******************************************************************************
*                                                                            *
*    MARKGRAF KARL REFUTATION PROCEDURE, UNI KARLSRUHE, VERSION 31-OCT-83    *
*                                                                            *
*    DATE:  14-NOV-83 15:54:54                                               *
*                                                                            *
******************************************************************************

FORMULAE GIVEN TO THE THEOREM PROVER:

AXIOMS:
     ALL X,Y A(X) AND A(Y) IMPL H(F(X Y)) = G(H(X) H(Y))

THEOREM:
     (ALL X A(X) IMPL F(X X) = X) IMPL (ALL Y A(Y) IMPL G(H(Y) H(Y)) = H(Y))


CLAUSES:
     AXM1  :   ALL X:ANY Y:ANY NOT A(X)  OR  NOT A(Y)  OR  H(F(X Y))=G(H(X) H(Y))
     THM2  :   ALL X:ANY NOT A(X)  OR  F(X X)=X
     THM3  :   A(C_1)
     THM4  :   NOT G(H(C_1) H(C_1))=H(C_1)


THM2  + THM3  -->       RES1  :  F(C_1 C_1)=C_1

THM4  + RES1  -->       PAR1  :  NOT G(H(C_1) H(C_1))=H(F(C_1 C_1))

AXM1  + THM3  -->       RES2  :  H(F(C_1 C_1))=G(H(C_1) H(C_1))  OR  NOT A(C_1)

RES2  + THM3  -->       RES3  :  H(F(C_1 C_1))=G(H(C_1) H(C_1))

PAR1  + RES3  -->       RES4  :  EMPTY


THE FOLLOWING CLAUSES WERE USED IN THE PROOF:

THM3 AXM1 RES2 RES3 THM2 RES1 THM4 PAR1 RES4 .


THE THEOREM IS PROVED. END OF PROOF  14-NOV-83 15:56:01.
```

Bild 12.7 Die Lösung des "Idempotenz"-Problems im RP-Kalkül

Daß die Lösung des "Idempotenz"-Problems im RP-Kalkül einen stark vergrößerten Suchraum bedingt, zeigt nachfolgende Tabelle, in der zum Vergleich die Beweisstatistik für die Lösung im ΣRP-Kalkül noch einmal aufgeführt ist:

	ΣRP	RP	$\Sigma RP/_{RP}$ *100
CPU seconds	1	3.7	28
steps executed	3	5	60
links generated	21	119	18
R-links	1	7	14
P-links	20	112	18
F-links	0	1	0
initial links	14	37	38
R-links	0	3	0
P-links	14	33	42
F-links	0	1	0
clauses generated	6	9	67
initial	3	4	75
deduced	3	5	60
resolvents	1	4	25
paramodulants	2	1	200
factors	0	0	100
literals generated	6	12	50
initial	3	7	43
deduced	3	5	60
level of proof	3	3	100
clauses in proof	7	9	78

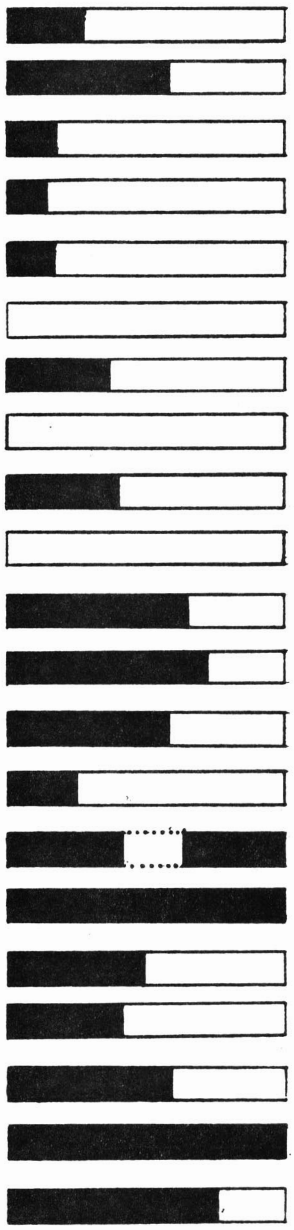


Bild 12.8 Beweisstatistik für das "Idempotenz"-Problem im ΣRP-Kalkül und im RP-Kalkül

Abschließend soll ein Beweisproblem diskutiert werden, das einige Zeit eine Herausforderung für das MKRP-System (und natürlich auch für andere Beweissysteme) darstellte. *L. Schubert* von der University of Alberta präsentierte 1978 folgendes Problem, um die Leistungsfähigkeit automatischer Beweiser zu prüfen:

> Wolves, foxes, birds, caterpillars, and snails are animals, and there are some of each of them. Also there are some grains, and grains are plants. Every animal either likes to eat all plants or all animals much smaller than itself that like to eat some plants. Caterpillars and snails are much smaller than birds, which are much smaller than foxes, which in turn are much smaller than wolves. Wolves do not like to eat foxes or grains, while birds like to eat caterpillars but not snails. Caterpillars and snails like to eat some plants. Therefore there is an animal that likes to eat a grain-eating animal.

Folgendes Protokoll zeigt eine mehrsortige Axiomatisierung des Schubert-Problems und dessen Lösung durch das MKRP-System. Dabei steht (vergl. [Wal82b]):

EX x:s für die existentielle Quantifizierung des Variablensymbols $x \in \mathfrak{V}_s$.

```
*******************************************************************************
*                                                                             *
*    MARKGRAF KARL REFUTATION PROCEDURE, UNI KARLSRUHE, VERSION 31-OCT-83     *
*                                                                             *
*    DATE:  20-DEC-83 12:52:23                                                *
*                                                                             *
*******************************************************************************


FORMULAE GIVEN TO THE THEOREM PROVER:

AXIOMS:
     TYPE W:WOLF
     TYPE F:FOX
     TYPE B:BIRD
     TYPE C:CATERPILLAR
     TYPE S:SNAIL
     TYPE G:GRAIN
     SORT WOLF,FOX,BIRD,CATERPILLAR,SNAIL:ANIMAL
     SORT GRAIN:PLANT
     ALL W:ANIMAL (ALL X:PLANT EATS(W X)) OR (ALL Y:ANIMAL SMALLER(Y W) AND
        (EX Z:PLANT EATS(Y Z)) IMPL EATS(W Y))
     ALL X:CATERPILLAR ALL Y:BIRD SMALLER(X Y)
     ALL X:SNAIL ALL Y:BIRD SMALLER(X Y)
     ALL X:BIRD ALL Y:FOX SMALLER(X Y)
     ALL X:FOX ALL Y:WOLF SMALLER(X Y)
     ALL X:WOLF ALL Y:FOX NOT EATS(X Y)
     ALL X:WOLF ALL Y:GRAIN NOT EATS(X Y)
     ALL X:BIRD ALL Y:CATERPILLAR EATS(X Y)
     ALL X:BIRD ALL Y:SNAIL NOT EATS(X Y)
     ALL X:CATERPILLAR EX Y:PLANT EATS(X Y)
     ALL X:SNAIL EX Y:PLANT EATS(X Y)

THEOREM:
     EX X,Y:ANIMAL (ALL Z:GRAIN EATS(X Y) AND EATS(Y Z))


SKOLEM SYMBOLS:
     TYPE F_1(CATERPILLAR):PLANT
     TYPE F_2(SNAIL):PLANT
     TYPE F_3(ANIMAL ANIMAL):GRAIN

CLAUSES:
     AXM1  :  ALL W:ANIMAL X:PLANT Y:ANIMAL Z:PLANT EATS(W X)  OR
                 NOT SMALLER(Y W)  OR  NOT EATS(Y Z)  OR  EATS(W Y)
     AXM2  :  ALL X:CATERPILLAR Y:BIRD SMALLER(X Y)
     AXM3  :  ALL X:SNAIL Y:BIRD SMALLER(X Y)
     AXM4  :  ALL X:BIRD Y:FOX SMALLER(X Y)
     AXM5  :  ALL X:FOX Y:WOLF SMALLER(X Y)
     AXM6  :  ALL X:WOLF Y:FOX NOT EATS(X Y)
     AXM7  :  ALL X:WOLF Y:GRAIN NOT EATS(X Y)
     AXM8  :  ALL X:BIRD Y:CATERPILLAR EATS(X Y)
     AXM9  :  ALL X:BIRD Y:SNAIL NOT EATS(X Y)
     AXM10  :  ALL X:CATERPILLAR EATS(X F_1(X))
     AXM11  :  ALL X:SNAIL EATS(X F_2(X))
     THM12  :  ALL X:ANIMAL Y:ANIMAL NOT EATS(X Y)   OR   NOT EATS(Y F_3(X Y))


THM12 + AXM8   -->       RES1  :  ALL X:BIRD Y:CATERPILLAR NOT EATS(Y F_3(X Y))

THM12 + AXM1   -->       RES2  :  ALL X:ANIMAL Y:PLANT Z:ANIMAL EATS(X Y)
                                     OR NOT SMALLER(Z X)  OR  NOT EATS(Z F_3(X Z))

RES2  + AXM5   -->       RES3  :  ALL X:WOLF Y:PLANT Z:FOX EATS(X Y)   OR
                                     NOT EATS(Z F_3(X Z))

AXM7  + RES3   -->       RES4  :  ALL X:FOX Y:WOLF NOT EATS(X F_3(Y X))
```

```
RES2  + AXM4  -->      RES5 :  ALL X:FOX Y:PLANT Z:BIRD EATS(X Y)  OR
                                  NOT EATS(Z F_3(X Z))

RES4  + RES5  -->      RES6 :  ALL X:BIRD Y:FOX NOT EATS(X F_3(Y X))

AXM9  + AXM1  -->      RES7 :  ALL X:BIRD Y:PLANT Z:SNAIL W:PLANT EATS(X Y)
                                  OR  NOT EATS(Z W)  OR  NOT SMALLER(Z X)

RES7  + RES6  -->      RES8 :  ALL X:SNAIL Y:BIRD Z:PLANT NOT EATS(X Z)
                                  OR  NOT SMALLER(X Y)

RES8  + AXM3  -->      RES9 :  ALL X:SNAIL Y:PLANT NOT EATS(X Y)

AXM11 + RES9  -->      RES10 :  EMPTY


THE FOLLOWING CLAUSES WERE USED IN THE PROOF:

AXM11 AXM3 AXM1 AXM4 THM12 RES2 RES5 AXM5 RES3 AXM7 RES4 RES6 RES7 RES8 RES9
AXM9 RES10 .


THE THEOREM IS PROVED. END OF PROOF  20-DEC-83 12:53:08.
```

Bild 12.9 Die Lösung des Schubert-Problems im ΣRP-Kalkül

Bislang wurde (soweit bekannt) das Schubert-Problem noch von keinem anderen automatischen Beweiser gelöst. Auch das MKRP-System ist bis heute nicht in der Lage, die einsortige Originalversion des Problems [Wal84a] zu beweisen. (Ein Beweislauf wurde nach 100 CPU-Sekunden abgebrochen. Das System hatte bis dahin 151 Resolventen berechnet und einen Suchraum von ca. 2.500 R-links erzeugt.) Dies ist umso bemerkenswerter, wenn man bedenkt, daß der Karlsruher Beweiser gegenwärtig eines der leistungsfähigsten Beweissysteme ist.

Die Ursache für diesen Mißerfolg erkennt man leicht, wenn man die Beweisstatistik für die Lösung im ΣRP-Kalkül mit den Werten von Schuberts handgerechnetem Resolutionsbeweis [Sch78, Wal84a] vergleicht (wobei die Werte unter der Rubrik *initial links* aus dem erfolglosen Beweislauf des MKRP-Systems stammen):

	ΣRP	RP	$\Sigma RP/_{RP}$ *100
CPU seconds	7.1	-	-
steps executed	10	-	-
links generated	46	-	-
R-links	46	-	-
P-links	0	-	-
F-links	0	-	-
initial links	12	102	12
R-links	12	94	13
P-links	0	0	100
F-links	0	8	0
clauses generated	22	60	37
initial	12	27	44
deduced	10	33	30
resolvents	10	33	30
paramodulants	0	0	100
factors	0	0	100
literals generated	32	221	15
initial	16	65	25
deduced	16	156	10
level of proof	8	20	40
clauses in proof	17	54	32

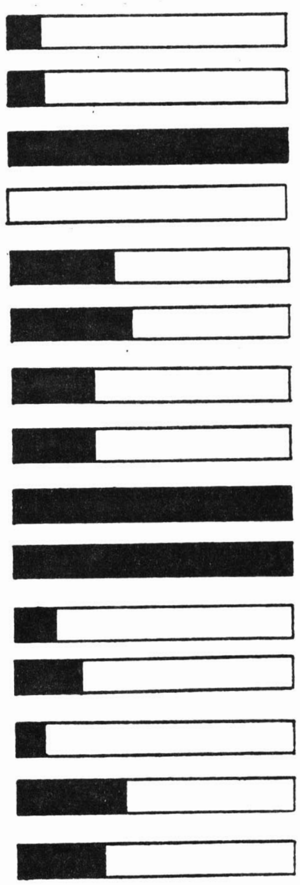


Bild 12.10 Beweisstatistik für das Schubert-Problem

Bedenkt man, daß der Umfang des Suchraumes exponentiell mit der Suchtiefe wächst, so ist nicht weiter verwunderlich, daß bei einem Verhältnis der Suchtiefen von 8 zu 20 und einem verachtfachten initialen Suchraum die Situation für einen Resolutionsbeweiser im RP-Kalkül hoffnungslos ist.

Die Verwendung des ΣRP-Kalküls im automatischen Beweisen vermindert also nicht nur den Aufwand bei der Beweissuche (im Vergleich zum RP-Kalkül), sondern vermag darüberhinaus die Leistungsstärke eines automatischen Beweisers deutlich zu steigern.

13. Mehrsortige Kalküle und die Automatisierung von Induktionsbeweisen

Ein für mehrsortige Kalküle besonders geeignetes Teilgebiet des automatischen Beweisens ist die Automatisierung von Induktionsbeweisen. Hier werden Aussagen über Strukturen bewiesen, die durch *mehrsortige Wortalgebren* bzw. *abstrakte Datentypen* (im Sinne von [GTW77] beschrieben werden können. (Die Arbeiten zur Entwicklung einer Induktionskomponente für die Markgraf Karl Refutation Procedure [BES81] gaben auch ursprünglich die Motivation für die hier vorliegende Arbeit.)

Die automatische Durchführung von Induktionsbeweisen läßt sich wie folgt skizzieren: Die *Induktionskomponente* übernimmt alle induktionsspezifischen Aufgaben, wie etwa die Auswahl der allquantifizierten Variablensymbole, über die bei einer vorgelegten Formel die Induktion geführt werden soll und die Auswahl eines adäquaten Induktionsschemas, mit dessen Hilfe die vorgelegte Formel bewiesen werden kann. Ergebnis ist eine Menge von Formeln, die mittels des Induktionsschemas aus der vorgelegten Formel gewonnen wurden und deren Konjunktion (unter einem Induktionsaxiom) hinreichend für die vorgelegte Formel ist.

Diese Formeln werden dann einem "konventionellen" Beweiser zum Beweis vorgelegt. Dieser Beweiser verfügt über spezielle Strategien, die auf Schlußweisen, wie sie typischerweise bei Induktionsbeweisen anfallen, zugeschnitten sind [Aub76, BM79, Hut83].

Kennzeichnend für das Gebiet der Induktionsbeweise ist die Mehrsortigkeit der untersuchten Strukturen. Beispielsweise treten schon bei der Formalisierung von Sachverhalten aus der Arithmetik zwei Klassen unterschiedlicher Objekte auf, die durch eine Sorte *nat* für natürliche Zahlen und eine Sorte *list* für endliche Listen (oder Folgen) natürlicher Zahlen dargestellt werden können. Da natürliche Zahlen und Listen von natürlichen Zahlen disjunkt sind, besitzen die zugeordneten Sortensymbole auch keine gemeinsame Untersorte. Sollen nun beispielsweise in einem, auf einem mehrsortigen Kalkül basierenden, Induktionsbeweissystem die Addition natürlicher Zahlen und die Konkatenation von Listen natürlicher Zahlen formalisiert werden, so enthält die Axiomenmenge unter anderem Formeln wie etwa

$\forall n{:}nat.plus(o\ n) \equiv n$, und

$\forall l{:}list.concat(empty\ l) \equiv l.$

In einem einsortigen System dagegen muß etwa

$\forall n.nat(n) \supset plus(o\ n) \equiv n$, und

$\forall l.list(l) \supset concat(empty\ l) \equiv l$

geschrieben werden, woraus sich beispielsweise die "sinnlose" Formel

$\forall x.nat(x) \wedge list(x) \supset plus(o\ x) \equiv concat(empty\ x)$

ableiten läßt. Im mehrsortigen Kalkül dagegen ist der Suchraum durch die Signatur und die Untersortenordnung so eingeschränkt, daß die Herleitung solcher "sinnlosen" Formeln vermieden wird.

Gerade dieser Vorteil eines mehrsortigen Kalküls wird von den bisher bekannten Induktionssystemen, die eine Art Sortenkonzept besitzen, nicht ausgenutzt:

Das System von *Aubin* [Aub76, Aub79a, Aub79b] verwendet Sorten (genannt *type constants*), um die Formelmenge auf sortenrechte Formeln einzuschränken. Weiter wird die Sorte von Variablensymbolen verwendet, um die Induktionsvariablen zu bestimmen und für vorgelegte Formeln adäquate Induktionsschemata zu erzeugen. Die Schlußregeln des Aubin'schen Systems, soweit sie nicht mit Rekursion, den zu axiomatisierenden Strukturen oder Induktion befaßt sind - also der "konventionelle" Beweiser - nehmen auf die Sortierung der betreffenden Formeln keinerlei Rücksicht. Beispielsweise kann mit der Regel *specialization* (vergl. [Aub79a]) aus $plus(o\ n) \equiv n$ die Formel $plus(o\ empty) \equiv empty$ gefolgert werden. Außerdem gibt es im Aubin'schen System kein Konzept für

Untersortenbeziehungen.

Das System von *Boyer* und *Moore* [BM79] verwendet Relativierungen und Sortenaxiome. Dafür sind bestimmte einstellige Prädikatensymbole als Sortenprädikate (genannt *recognizer*) gekennzeichnet. Um die Redundanz zu mildern, die in diesem System durch fehlende Einschränkungen der Herleitungen durch Sorten entsteht, werden Sortenatome speziell behandelt (vergl. [BM79]: "Using Type Information to Simplify Formulas"): Für jedes neu eingeführte Funktionssymbol f wird berechnet, welche Sortenprädikate auf einen Term $f(t_1 \ldots t_n)$ in Abhängigkeit von $t_1, \ldots, t_n$ zutreffen können. Diese Information (genannt *type prescription*) wird dann dazu verwendet, Sortenatome (falls möglich) aus einer Formel zu eliminieren. Beispielsweise wird im Boyer/Moore-System berechnet, daß nur das Sortenprädikat *listp* auf einen Term der Form *flatten(t)*, $t \in T$, zutrifft. In einer Herleitung des Systems kann daher ein Sortenatom der Form *listp(flatten(t))* durch *true* und ein Sortenatom der Form *litatom(flatten(t))* durch *false* ersetzt werden (wobei *litatom* ein weiteres Sortenprädikat ist). Gegenüber der Verwendung eines mehrsortigen Kalküls hat dieses Vorgehen aber zwei Nachteile:

(1) Die durch die *type prescriptions* gegebene Information ist oft zu gering, um einen Beweis voranzutreiben. Ursache dafür ist, daß - wie in jedem einsortigen Kalkül - jeder Term als Argument jedes Funktionssymbols auftreten kann. Beispielsweise werden natürliche Zahlen im Boyer/Moore-System mit dem Sortenprädikat *numberp* und die Addition natürlicher Zahlen mit dem Funktionssymbol *sum* gekennzeichnet. Von einem Term der Form *sum(xy)*, $x,y \in \mathfrak{V}$, kann jedoch nur ermittelt werden, daß das Sortenprädikat *universe* auf *sum(xy)* zutrifft. Diese Information ist jedoch nutzlos, da *universe* für alle Terme gilt. Es ist daher im Boyer/Moore-System erforderlich, unerwünschte Argumente mit Hilfe von Sortenprädikaten auszugrenzen, d.h. Relativierungen zu verwenden. Im vorliegenden Beispiel hätte man *sum* so zu definieren, daß für Argumente *t* und *q*, auf die *numberp* nicht zutrifft, *numberp(sum(t q))* trotzdem gilt - etwa

durch die Festlegung $sum(t\ q) \equiv o$, falls $\neg(number(t) \wedge number(q))$.

(2) Faßt man den Teil des Boyer/Moore-Systems, der nicht direkt mit induktionsspezifischen Aufgaben befaßt ist, als Kalkül erster Stufe auf, so erhält man einen einsortigen Kalkül. Mit der Sonderbehandlung der Sortenatome wird dabei lediglich die Auswahl der Herleitungsschritte beeinflußt. Schlüsse über Sortenbeziehungen müssen explizit gezogen werden, d.h. durch die Berechnung und Verwertung der *type prescriptions*. Damit weist diese Komponente des Boyer/Moore-Systems alle Nachteile auf, die ein auf einem einsortigen Kalkül basierendes Beweissystem im Unterschied zu einem auf einem mehrsortigen Kalkül aufgebauten automatischen Beweiser hat.

14. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Für den RP-Kalkül wurden zahlreiche Verfeinerungen, wie etwa *Set-of-Support*, *Linear Resolution*, *Hyperresolution* usw. vorgeschlagen und auf Vollständigkeit hin untersucht. Um nun diese Ergebnisse für den ΣRP-Kalkül nachzuvollziehen, erscheint es vorteilhaft, wenn der beweistheoretische Teil des Sortensatzes, d.h.

$$(\hat{S}^E \cup A^\Sigma) \vdash \square \quad \text{gdw.} \quad S^E \vdash_{\Sigma} \square$$

(für jede Signatur Σ und jede Σ-Klauselmenge S) direkt bewiesen wird. Solch ein direkter Beweis würde ein konstruktives Verfahren beinhalten, Widerlegungen von $\hat{S} \cup A^\Sigma$ in Σ-Widerlegungen von S^E zu übersetzen. Es ist zu vermuten, daß in den meisten Fällen anhand dieses Übersetzungsmechanismus geprüft werden kann, ob die Vollständigkeit einer Verfeinerung auch im ΣRP-Kalkül gilt.

In seiner Ausdrucksstärke entspricht der ΣRP-Kalkül der *S-Logik* von *Oberschelp* [Obe62], allerdings mit einer Ausnahme: Die S-Logik kennt *polymorphe* Funktionssymbole, d.h. Funktionssymbole, deren Ergebnissorten in Abhängigkeit von den Argumentsorten bestimmt werden. Definiert man beispielsweise (in der S-Logik)

$$\text{plus} \in \mathcal{F}_{zz,z} \cap \mathcal{F}_{nn,n} \quad \text{mit} \quad n <_{\mathcal{S}} z \quad ,$$

so gilt $[\text{plus}(q\ r)] = z$, falls $[q] = z$ oder $[r] = z$ und $[\text{plus}(q\ r)] = n$, falls $[q] = [r] = n$. Mit der Verwendung polymorpher Funktionssymbole wird es notwendig, die Sorten aller Unterterme eines Terms t zu berechnen, wenn die Sorte von t bestimmt werden soll.

Im ΣRP-Kalkül lassen sich polymorphe Funktionssymbole nur durch zusätzliche Axiome (mit zusätzlichen Funktionssymbolen) beschreiben. Für das oben angegebene Beispiel schreibt man etwa

$$\text{plus} \in \mathcal{F}_{zz,z} \quad ,$$

$$\text{add} \in \mathcal{F}_{nn,n} \quad , \text{ und}$$

$$\forall x,y{:}\ n.\ \text{plus}(xy) \equiv \text{add}(xy)\ ,\ \text{mit}\quad n <_S z$$

als eine äquivalente Formulierung. Die S-Logik ist dabei dem ΣRP-Kalkül überlegen, da alle Σ-Deduktionen, die die im Beispiel angegebene Gleichung verwenden, in der S-Logik entfallen, da sie über die polymorphen Funktionssymbole in den Ableitungsmechanismus eingebaut sind.

Die Erweiterung des ΣRP-Kalküls um polymorphe Funktionssymbole setzt eine entsprechende Erweiterung des Σ-Reduktionssatzes und des Σ-Unifikationssatzes voraus (die nicht trivial erscheint), um die Vollständigkeit des so erweiterten Kalküls zu beweisen.

Natürlich kann die Ausdrucksstärke eines mehrsortigen Kalküls noch weiter gesteigert werden, etwa indem Beziehungen zwischen Sortensymbolen nicht allein durch eine Ordnungsrelation ausgedrückt werden dürfen (vergl. [Hai57, Coh83]). Dies ist aber für das automatische Beweisen nur dann von Nutzen, wenn Folgerungen aus den jetzt formulierbaren Sortenbeziehungen nicht wieder explizit hergeleitet werden müssen, sondern wie im ΣRP-Kalkül in den Ableitungsmechanismus verlagert sind, da nur so eine Reduzierung des Suchraumes ermöglicht wird.

Literatur

[Aub76] *Aubin, R.* Mechanizing Structural Induction. Ph.D. Thesis, University of Edinburgh, Edinburgh (1976)

[Aub79a] *Aubin, R.* Mechanizing Structural Induction - Part 1: Formal System. Theoretical Computer Science, vol 9 (1979)

[Aub79b] *Aubin, R.* Mechanizing Structural Induction - Part 2: Strategies. Theoretical Computer Science, vol 9 (1979)

[BCL73] *Boone, W.W., Cannonito, F.B. und R.C. Lyndon (eds.)* Wordproblems. North-Holland Publishing Company (1973)

[BES81] *Bläsius, K., Eisinger, N., Siekmann, J., Smolka, G., Herold, A. und C. Walther* The Markgraf Karl Refutation Procedure. Proc. of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-81), Vancouver (1981)

[BM79] *Boyer, R.S. und J S. Moore* A Computational Logic. Academic Press (1979)

[Boo80] *Book, R. (ed.)* Formal Language Theory: Perspectives and open Problems. Academic Press (1980)

[Bra75] *Brand, D.* Proving Theorems with the Modification Method. SIAM J. Computing 4 (1975)

[Cha78] *Champeaux, D. de* A Theorem Prover Dating a Semantic Network. Proc. of AISB/GI Conference, Hamburg (1978)

[Coh83] *Cohn, A.G.* Improving the Expressiveness of Many-Sorted Logic. Proc. of the 3rd National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-83), Washington (1983)

[EFT78] *Ebbinghaus, H.-D., Flum, J. und W. Thomas* Einführung in die mathematische Logik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (1978)

[Eis81] *Eisinger, N.* Subsumption for Connectiongraphs. Proc. der GI-Fachtagung für Künstliche Intelligenz (GWAI-81), Bad Honnef, Springer FBI, vol 47 (1981), ebenso in: Proc. of the 7^{th} International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-81), Vancouver (1981)

[ESS80] *Eisinger, N., Siekmann, J., Smolka, G., Unvericht, E. und C. Walther* The Markgraf Karl Refutation Procedure. Proc. of the AISB Conference on Artificial Intelligence, Amsterdam (1980)

[ESW78] *Eisinger, N., Siekmann, J. und G. Wrightson* Paramodulated Connectiongraphs. Proc. of AISB/GI Conference on Artificial Intelligence, Hamburg (1978)

[Gen34] *Gentzen, G.* Untersuchungen über das logische Schließen. Mathematische Zeitschrift 39 (1934)

[Gil58] *Gilmore, P.C.* An Addition to "Logic of Many-Sorted Theories". Compositio Mathematica 13 (1958)

[Gol71] *Goldfarb, W.D. (ed.)* Jacques Herbrand-Logical Writings. D. Reidel Publishing Company (1971)

[GTW77] *Goguen, J.A., Thatcher, J.W. und E.G. Wagner* An Initial Algebra Approach to the Specification, Correctness and Implementation of Abstract Data Types. IBM Research Report RC 6487 (1977), ebenso in [Yeh78]

[Hai57] *Hailperin, T.* A Theory of Restricted Quantification I. The Journal of Symbolic Logic 22 (1957)

[Hay71] *Hayes, P.* A Logic of Actions. Machine Intelligence 6, Metamathematics Unit, University of Edinburgh (1971)

[Hen72] *Henschen, L.J.* N-Sorted Logic for Automatic Theorem Proving in Higher-Order Logic. Proc. ACM Conference, Boston (1972)

[Her30] *Herbrand, J.* Recherches sur la théorie de la démonstration (Thèse Paris), Warsaw (1930), chapter 3, ebenso in [Gol71]

[HO80] *Huet, G. und D.C. Oppen* Equations and Rewrite Rules: A Survey. Technical Report CSL-111, SRI International (1980), ebenso in [Boo80]

[Hut83] *Hutter, D.* Symbolisches Auswerten von Formeln mit Hilfe eines Connectiongraphbeweisers. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, Institut für Informatik I (1983)

[Ide64] *Idel'son, A.V.* Calculi of Constructive Logic with Subordinate Variables. American Mathematical Society Translations (2) 99 (1972) - translation of Trudy Mat. Inst. Steklov 72 (1964)

[Kow75] *Kowalski, R.* A Proof Procedure Using Connection Graphs. JACM vol 22, no. 4 (1975)

[Lov78] *Loveland, D.W.* Automated Theorem Proving: A Logical Basis. North-Holland Publishing Company (1978)

[Men64] *Mendelson, E.* Introduction to Mathematical Logic. D. Van Nostrand Company (1964)

[MH56] *Montague, R. und L. Henkin* On the Definition of Formal Deduction. The Journal of Symbolic Logic 21 (1956)

[Obe62] *Oberschelp, A.* Untersuchungen zur mehrsortigen Quantorenlogik. Mathematische Annalen 145 (1962)

[Ohl82] *Ohlbach, H.J.* The Markgraf Karl Refutation Procedure: The Logic Engine. Interner Bericht 24/82, Institut für Informatik I, Universität Karlsruhe (1982)

[Rob65] *Robinson, J.A.* A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle. JACM 12 (1965), ebenso in [SW83]

[Ros73] *Rosen, B.K.* Tree-Manipulating Systems and Church-Rosser Theorems. JACM 20 (1973)

[Sch38] *Schmidt, A.* Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen. Mathematische Annalen 115 (1938)

[Sch51] *Schmidt, A.* Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik. Mathematische Annalen 123 (1951)

[Sch78] *Schubert, L.* Private Mitteilung

[SS82] *Siekmann, J. und P. Szabó* Universal Unification. Proc. of the 6th German Workshop on Artificial Intelligence (GWAI-82), Bad Honnef, Springer FBI, vol 58 (1982)

[SW80] *Siekmann, J. und G. Wrightson* Paramodulated Connectiongraphs. Acta Informatica 13 (1980)

[SW83] *Siekmann, J. und G. Wrightson (eds.)* Automation of Reasoning - Classical Papers on Computational Logic. Vol 1 + 2, Springer-Verlag (1983)

[Wal81] *Walther, C.* Elimination of Redundant Links in Extended Connection Graphs. Proc. der GI-Fachtagung für Künstliche Intelligenz (GWAI-81), Bad Honnef, Springer FBI, vol 47 (1981)

[Wal82a] *Walther, C.* A Many-Sorted Calculus Based on Resolution and Paramodulation. Interner Bericht 34/82, Institut für Informatik I, Universität Karlsruhe (1982)

[Wal82b] *Walther, C.* The Markgraf Karl Refutation Procedure: PLL - A First-Order Language for an Automated Theorem Prover. Interner Bericht 35/82, Institut für Informatik I, Universität Karlsruhe (1982)

[Wal83] *Walther, C.* A Many-Sorted Calculus based on Resolution and Paramodulation. Proc. of the 8th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-83), Karlsruhe (1983)

[Wal84a] *Walther, C.* Schubert's Steamroller - A Case Study in Many-Sorted Resolution. Interner Bericht 5/84, Institut für Informatik I, Universität Karlsruhe (1984)

[Wal84b] *Walther, C.* Unification in Many-Sorted Theories. Interner Bericht 9/84, Institut für Informatik I, Universität Karlsruhe (1984), in Vorbereitung

[Wan52] *Wang, H.* Logic of Many-Sorted Theories. The Journal of Symbolic Logic 17 (1952)

[Wey77] *Weyhrauch, R.W.* FOL: A Proof Checker for First-Order Logic. MEMO AIM-235.1, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Stanford University (1977)

[WR73] *Wos, L. and G. Robinson* Maximal Models and Refutation Completeness: Semidecision Procedures in Automatic Theorem Proving. In [BCL73] und [SW83]

[Yeh78] *Yeh, R.T. (ed.)* Current Trends in Programming Methodology. Vol 4, Data Structuring, Prentice Hall (1978)