



计算机科学

COMPUTER SCIENCE

一种基于切比雪夫距离的隐式偏好多目标进化算法

孙刚, 伍江江, 陈浩, 李军, 徐仕远

引用本文

孙刚, 伍江江, 陈浩, 李军, 徐仕远. 一种基于切比雪夫距离的隐式偏好多目标进化算法[J]. 计算机科学, 2022, 49(6): 297-304.

SUN Gang, WU Jiang-jiang, CHEN Hao, LI Jun, XU Shi-yuan. [Hidden Preference-based Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Chebyshev Distance](#)[J]. Computer Science, 2022, 49(6): 297-304.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[融合用户偏好的图神经网络推荐模型](#)

Graph Neural Network Recommendation Model Integrating User Preferences

计算机科学, 2022, 49(6): 165-171. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210400276>

[基于并行分区搜索的多模态多目标优化及其应用](#)

Multimodal Multi-objective Optimization Based on Parallel Zoning Search and Its Application

计算机科学, 2022, 49(5): 212-220. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210300019>

[视频缓存策略中 QoE 和能量效率的公平联合优化](#)

Fair Joint Optimization of QoE and Energy Efficiency in Caching Strategy for Videos

计算机科学, 2022, 49(4): 312-320. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210800027>

[基于节点相似性和网络嵌入的复杂网络社区发现算法](#)

Complex Network Community Detection Algorithm Based on Node Similarity and Network Embedding

计算机科学, 2022, 49(3): 121-128. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210200009>

[基于用户偏好和位置分布的假位置生成方法](#)

Dummy Location Generation Method Based on User Preference and Location Distribution

计算机科学, 2021, 48(7): 164-171. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.200800069>

一种基于切比雪夫距离的隐式偏好多目标进化算法

孙刚¹ 伍江江¹ 陈浩¹ 李军¹ 徐仕远²

1 国防科技大学电子科学学院 长沙 410073

2 北方工业大学信息学院 北京 100144

(sungang19@nudt.edu.cn)

摘要 偏好多目标进化算法作为多目标优化方法的重要分支,被广泛应用于科学研究和工程实践,具有重要的研究意义。为了求得多目标优化问题中的极点解及在各优化目标上性能最折衷的膝点解,提出了用切比雪夫距离来定义膝点的方法并给出了几何解释,基于此构建了一种求解极点解和膝点解的多目标进化算法 HP-NSGA-II。该算法通过区域动态更新策略使得目标区域随迭代过程动态更新,最终收敛于目标区域;通过区域间平衡性保持策略确保各区域间个体数量的平衡性,使得个体较为均匀地分布在各区域内部。基于广泛采用的测试函数开展了充分的实验验证,结果表明,HP-NSGA-II 算法在二维测试问题及三维测试问题上具有较好的收敛性、区域间平衡性以及区域可控性,可以准确求得测试问题的极点解及膝点解。

关键词: 进化算法;多目标优化;偏好;切比雪夫距离;膝点解;极点解

中图分类号 TP301.6

Hidden Preference-based Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Chebyshev Distance

SUN Gang¹, WU Jiang-jiang¹, CHEN Hao¹, LI Jun¹ and XU Shi-yuan²

1 College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China

2 School of Information Science and Technology, North China University of Technology, Beijing 100144, China

Abstract As an important branch of multi-objective optimization, preference-based multi-objective evolutionary algorithms have been widely used in scientific researches and engineering practices, which have important research significance. In order to obtain the extreme solutions and the knee solution with the most compromised performance over each optimization objective in multi-objective optimization problems, a definition of knee solution based on Chebyshev distance and its geometric interpretation is presented. Based on the definition, a multi-objective evolutionary algorithm HP-NSGA-II aiming to search for the extreme solutions and the knee solution is proposed. The regional dynamic updating strategy of the proposed algorithm updates the target regions dynamically in each iteration, and finally converges to the target regions. The strategy of maintaining the balance between regions ensures the balance of the number of individuals in each region, so that the individuals could be distributed evenly in each region. Based on widely used test functions, sufficient experimental verification is carried out, and the experimental results indicate that HP-NSGA-II algorithm can achieve better performance in terms of convergence, regional balance and regional controllability in two-dimensional and three-dimensional test problems, and can accurately obtain the extreme solutions and knee solution.

Keywords Evolutionary algorithm, Multi-objective optimization, Preference, Chebyshev distance, Knee solution, Extreme solution

1 引言

多目标优化问题 (Multi-Objective Optimization Problems, MOPs) 普遍存在于科学研究及工程实践的优化阶段,其解是由一系列在优化目标上相折衷的解构成,称为 Pareto 最优解集^[1]。多目标进化算法^[2-3] (Multi-Objective Evolutionary Algorithms, MOEAs) 是求解多目标优化问题的主流算法之一,可一次性求得所有 Pareto 最优解供决策者 (Decision

Maker, DM) 参考。NSGA-II^[4], NSGA-III^[5] 以及 MOEA/D^[6] 等算法在收敛性和分布性指标上具有优异性能,受到了进化计算领域的广泛关注。

诚然,MOEAs 解决了 MOPs 的求解难题,但是其客观上也导致了优化过程与决策过程的分离,即先优化后决策,称为后验式方法。后验方法主要存在以下不足:1) 高维情况下,MOEAs 的选择压力骤降,导致算法不收敛或者求得的 Pareto 前沿 (Pareto Front, PF) 较差,进而使得后验式选择的结果

到稿日期:2021-05-13 返修日期:2021-09-04

基金项目:国家自然科学基金(61806211, U19A2058);湖南省自然科学基金(2020JJ4103)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61806211, U19A2058) and Natural Science Foundation of Hunan Province(2020JJ4103).

通信作者:陈浩(hchen@nudt.edu.cn)

优化性较差;2)PF中存在大量DM不感兴趣的解,DM在执行决策时相对复杂。针对MOEAs的不足,相关研究人员提出了先验式方法以及交互式方法,即在MOEAs的优化过程中考虑DM的偏好信息,相关的算法被称为偏好多目标进化算法^[1,7](Preference-based Multi-objective Evolutionary Algorithms, PMOEAs)。多数PMOEAs要求DM给出具备一定形式的偏好信息,如偏好点^[8]、偏好区域^[9]、偏好方向^[10]等,然而在多数情况下,DM缺乏足够的先验知识,无法给出明确的偏好信息,此时可通过构建隐式偏好来引导算法收敛于这些隐式偏好部分。具体而言,隐式偏好指PF的膝区域(Knee Region)或者极区域(Extreme Region)。膝区域的解在所有优化目标上具有较好的折衷特性,极区域的解在某一优化目标上具有较差的优化性能。相对于PF上其他区域的解,DM往往更青睐膝区域或者极区域的解。Deb等^[11]通过对一系列回归、排序、聚类以及工程设计问题进行论证得出:常用的问题求解方法产生的解往往位于膝区域。对于极区域而言,DM可通过该区域获知PF的范围,从而有助于更准确地构建偏好^[12]。

Branke等^[13]通过分别以基于角度(Reflex Angle)的测度以及基于边际效用函数(Marginal Utility Function)的测度替代NSGA-II算法中的拥挤距离策略,提出了两种算法,但提出的算法不具备全局意义。Das^[14]提出了基于法向边界相交方法(Normal Boundary Intersection)的膝点定义方法。Bechikh等^[15]将文献[14]关于膝点的定义与R-NSGA-II^[16]算法相结合,提出了KR-NSGA-II(Knee-based R-NSGA-II)算法,该算法通过不断迭代移动参考点使得算法收敛至膝区域,但无法求得PF为非标准凸集情况下的全局膝点。Rachmawati等^[17]提出了一种基于加权和函数变换的膝区域求解算法,其本质与边际效用函数方法是一致的。Chiu等^[18]以PF与理想点(Ideal Point)之间的曼哈顿距离(Manhattan Distance)为准则来定义膝点,但是对于PF为非凸集的情况,该方法求得的膝点为极区域解,甚至在某些测试函数上整个PF均是膝点。

综上所述,当前对膝点的定义以及以此构建的算法主要存在以下几个方面的不足:1)部分定义以及算法不具备全局意义;2)PF为非凸集时的求解效果不理想;3)对于膝区域以及极区域的分布性与可控性研究不足。针对以上不足,本文提出了一种基于切比雪夫距离(Chebyshev Distance)的隐式偏好多目标进化算法,该算法可有效弥补以上不足,本文的主要贡献在于:

(1)提出了以切比雪夫距离定义膝点的方法,并给出了几何解释;

(2)基于切比雪夫距离定义的膝点,构建了一种求解隐式偏好的多目标进化算法,该算法不仅适用于PF为凸集的情况,也适用于非凸集的PF,且具备全局意义;

(3)基于广泛采用的测试函数开展了充分的实验论证,实验结果表明,所提算法可收敛于膝区域以及极区域,可准确求得测试问题的极点解及膝点解,具有相对较好的区域内多样性和区域间均衡性,且区域尺度可控。

2 相关工作

2.1 多目标优化问题

MOPs一般可表示为:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \min (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T \\ g_i(x) &\geq 0, i=1, 2, \dots, p \\ h_j(x) &= 0, j=1, 2, \dots, q \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in Set_k, 1 \leq k \leq n \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $f(x)$ 表示优化目标构成的函数向量; $g_i(x)$ 表示优化问题中的不等式约束条件; $h_j(x)$ 表示等式约束条件; x 表示决策向量,其中每个分量表示决策变量。

可行解域:满足约束条件及定义域的决策向量构成的集合称为可行解域,记为 Ω 。

Pareto支配关系: α, β 满足式(2),则称 α 支配 β ,记为 $\alpha \succ \beta$ 。

$$\begin{cases} f_i(\alpha) \leq f_i(\beta), 1 \leq i \leq m \\ f(\alpha) \neq f(\beta) \end{cases}, \forall \alpha, \beta \in \Omega \quad (2)$$

Pareto最优解集:可行域 Ω 中,所有非支配解构成的子集称为Pareto最优解集,记为 PS 。

Pareto前沿:Pareto最优解集 PS 在目标空间的象构成的集合称为Pareto前沿,记为 PF ,即:

$$PF = \{f(x) \mid \forall x \in PS\} \quad (3)$$

理想点与最低点:PF在目标空间中,每个优化目标上的最优值构成的向量称为理想点(Ideal Point),记为 s^I ;同理,每个优化目标上的最差值构成的向量称为最低点(Nadir Point),记为 s^N ,如图1所示。

$$s^I = (f_1, f_2, \dots, f_m) \quad (4)$$

$$s^N = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m) \quad (5)$$

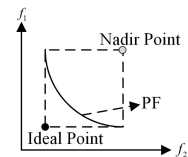


图1 二维优化问题的PF, Nadir Point及Ideal Point
Fig.1 PF, Nadir Point and Ideal Point of two-dimensional optimization problem

2.2 基于切比雪夫距离的Knee Point

2.2.1 基本定义

定义1(切比雪夫距离) 任意给定 m 维向量 θ 和 λ ,二者之间的切比雪夫距离定义为 θ 和 λ 之间的无穷范数,如式(6)所示:

$$Cheb_dis(\theta, \lambda) = \max_{i=1, 2, \dots, m} |\theta_i - \lambda_i| \quad (6)$$

定义2(基于切比雪夫距离的Knee Point) s^I 表示PF的理想点,比较PF中所有解向量与 s^I 在各优化目标上的归一化性能提升,定义能够最小化性能提升最大值的解向量 s 为基于切比雪夫距离的Knee Point,记为 s^* 。与 s^I 相比, $s^* \rightarrow s^I$ 的性能提升不偏向于任一优化目标,具有最佳的性能折衷,如式(7)、式(8)所示:

$$s^* = \arg \min_{s \in PF} \max_{i=1, 2, \dots, m} \left| \frac{s_i - f_i}{L_i} \right|$$

$$= \arg \min_{s \in PF} \text{Cheb_dis}(\tilde{s}, \tilde{s}^l) \quad (7)$$

$$L_i = \tilde{f}_i - \underline{f}_i \quad (8)$$

其中, \tilde{s} 和 \tilde{s}^l 分别表示 s 和 s^l 在归一化目标空间中的向量。

定义 3(极点 Extreme Point) PF 中在任一优化目标上具有最差值的解向量被定义为极点, 记为 s^{extr} , 如式(9)所示:

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, m\}, s_i^{\text{extr}} = s_i^N \quad (9)$$

2.2.2 基于切比雪夫距离的 Knee Point 的几何解释

定理 1 当 PF 呈连续、平滑时, 在归一化目标空间中, 基于切比雪夫距离定义的 Knee Point 与原点之间的直线垂直于基于曼哈顿距离定义的 Knee Point^[18] 的切平面 Γ , 即:

$$\ell \perp \Gamma \quad (10)$$

证明: 假设 s^* 是已知 PF 的基于切比雪夫距离定义的 Knee Point, s^l 为理想点; \tilde{s}^* 和 \tilde{s}^l 分别表示 s^* 和 s^l 在归一化目标空间中对应的解向量, 则:

$$\tilde{s}^* = \left\{ \frac{s_1^* - \underline{f}_1}{L_1}, \frac{s_2^* - \underline{f}_2}{L_2}, \dots, \frac{s_m^* - \underline{f}_m}{L_m} \right\} \quad (11)$$

$$\tilde{s}^l = (0, 0, \dots, 0) \quad (12)$$

连接 \tilde{s}^* 和 \tilde{s}^l 的直线 ℓ 可表示为:

$$\frac{y_1}{\frac{s_1^* - \underline{f}_1}{L_1}} = \frac{y_2}{\frac{s_2^* - \underline{f}_2}{L_2}} = \dots = \frac{y_m}{\frac{s_m^* - \underline{f}_m}{L_m}} \Leftrightarrow \frac{L_1 y_1}{s_1^* - \underline{f}_1} = \frac{L_2 y_2}{s_2^* - \underline{f}_2} = \dots = \frac{L_m y_m}{s_m^* - \underline{f}_m} \quad (13)$$

根据定义 2, 当 PF 呈连续、平滑时, s^* 在各优化目标上具有一致的归一化折衷, 即:

$$\frac{s_1^* - \underline{f}_1}{L_1} = \frac{s_2^* - \underline{f}_2}{L_2} = \dots = \frac{s_m^* - \underline{f}_m}{L_m} \quad (14)$$

由式(13)、式(14)可知, 可表示为:

$$y_1 = y_2 = \dots = y_m \quad (15)$$

由文献[18]可知, 基于曼哈顿距离定义的 Knee Point 等价于式(16):

$$u^* = \arg \min_{u \in PF} \sum_{i=1}^m \frac{u_i - s_i^l}{L_i} = \arg \min_{u \in PF} \sum_{i=1}^m y_i \quad (16)$$

记式(16)确定的超平面为 Γ , 比较 ℓ 的方向向量与 Γ 的法向量可知二者垂直。证毕。

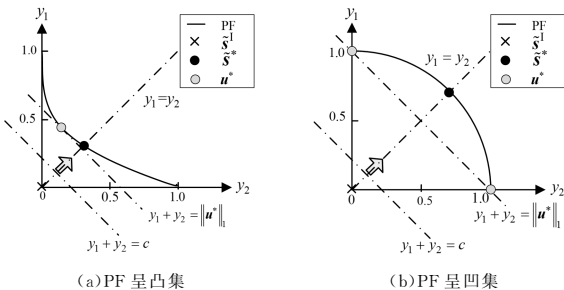


图 2 基于切比雪夫距离定义的 Knee Point 的几何解释
Fig. 2 Geometric interpretation of Knee Point based on Chebyshev distance

记平面簇 Λ 如式(17)所示:

$$\sum_{i=1}^m y_i = c (c \in R^+) \quad (17)$$

令式(17)中 $c \rightarrow +\infty$, 那么当 Λ 与 PF 恰好相交时对应的

点即为基于曼哈顿距离定义的 Knee Point。PF 与 ℓ 的交点即为基于切比雪夫距离定义的 Knee Point。如图 2(a) 所示, PF 呈连续、平滑的凸集, $c \rightarrow +\infty$ 的过程中, $y_1 + y_2 = c$ 与 PF 恰好相交时的交点即为基于曼哈顿距离定义的 Knee Point (灰色), $y_1 = y_2$ 与 PF 的交点即为基于切比雪夫距离定义的 Knee Point (黑色); 图 2(b) 给出了 PF 呈连续、平滑凹集的情况。比较图 2(a) 和图 2(b) 可知, 基于曼哈顿距离定义的 Knee Point 不具备唯一性, 且当 PF 为凹集时 Knee Point 位于极点处; 基于切比雪夫距离定义的 Knee Point 具有唯一性, 在各优化目标上具有最佳的性能折衷, 不偏向于任一优化目标。

3 算法设计

本文提出的基于切比雪夫距离的隐式偏好多目标进化算法 (Hidden Preference NSGA-II, HP-NSGA-II) 是基于 T-NSGA-II^[1] 算法设计的。本节将首先介绍 T-NSGA-II 算法; 然后介绍 HP-NSGA-II 算法的设计思路并辅以算法框图予以说明, 详细说明算法的关键策略。

3.1 T-NSGA-II 算法

T-NSGA-II 算法是一种基于目标区域的偏好多目标进化算法, 该算法在二维及三维优化问题上性能优异, 其中目标区域由 DM 指定, 可支持“中心点+半径”以及“区域下限+区域上限”的区域表达方式, 具备多目标区域支持能力。以 m 维优化问题为例, “中心点+半径”的目标区域可表示为式(18), 其中 r 表示半径; “区域下限+区域上限”的目标区域可表示为式(19)。

$$[(f_1, f_2, \dots, f_m), r] \quad (18)$$

$$[\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_m, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m] \quad (19)$$

T-NSGA-II 基于 NSGA-II 算法设计, 其与 NSGA-II 的主要差异在于种群更新时的排序准则。T-NSGA-II 在种群更新时, 针对 Pareto 非支配排序确定的临界层, 首先以基于目标区域的拥挤距离等级排序准则选择个体进入下一代种群, 其次以个体与区域中心之间的切比雪夫距离等级排序准则确定进入下一代种群的个体, 通过以上 3 层排序准则引导算法收敛于目标区域内部的 PF, 如图 3 所示。

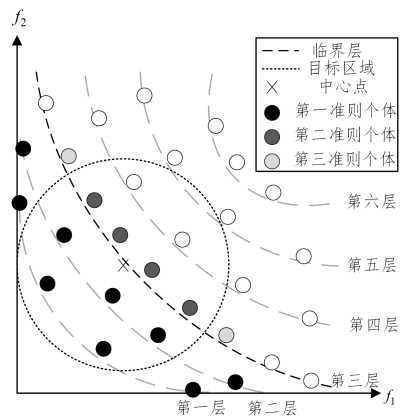


图 3 T-NSGA-II 种群更新排序准则

Fig. 3 Ranking criteria of T-NSGA-II population update

图 3 为 T-NSGA-II 在某次迭代过程中种群更新的示意

图,算法的种群规模为 15,图示种群为父代种群与子代种群合并后的种群,共计 30 个个体。种群更新过程如下:首先,根据 Pareto 非支配排序准则(第一准则)执行分层操作,黑色个体被选择进入下一代种群;然后,在临界层中依据拥挤距离等级排序准则(第二准则)选择深灰色个体;最后,在临界层的剩余个体中依据解个体与区域中心之间的切比雪夫距离等级排序准则(第三准则)选择浅灰色个体,丢弃剩余个体。

3.2 HP-NSGA-II 算法

HP-NSGA-II 算法以 T-NSGA-II 算法为基础,设计进化策略,以使得算法收敛于 PF 的膝区域以及极区域,具体包括区域动态更新新策略以及区域间平衡性保持策略,算法框图如图 4 所示。

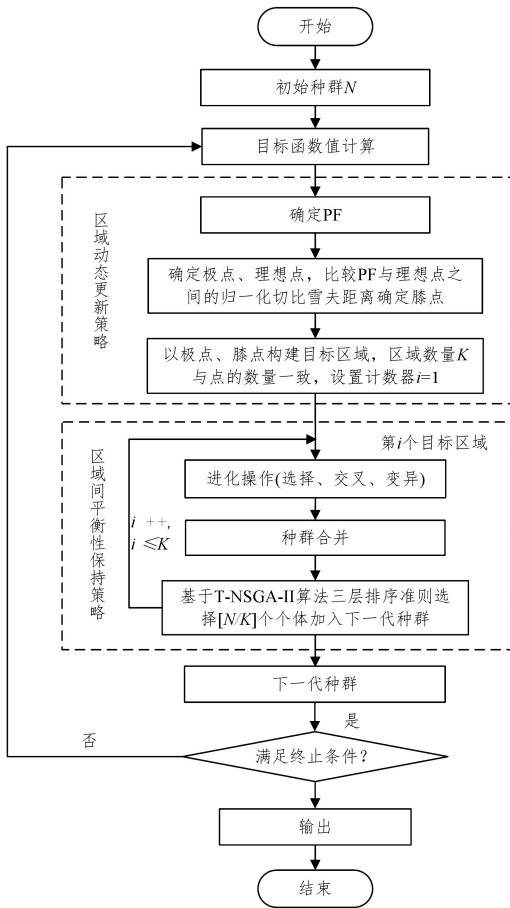


图 4 HP-NSGA-II 算法框图

Fig. 4 Framework of HP-NSGA-II

3.2.1 区域动态更新策略

区域动态更新策略以每次迭代过程中 PF 的 Knee Point 和 Extreme Point 为中心点,根据指定的半径设置目标区域,使得目标区域随迭代过程动态更新,最终算法收敛于目标区域。该策略具体包括以下过程:1)根据 Pareto 支配关系确定当前种群的 PF;2)针对 PF 执行归一化操作,确定 Knee Point 以及 Extreme Point;3)构建目标区域。区域动态更新策略的具体过程如算法 1 所示。

算法 1 区域动态更新策略

输入:种群 P_t , 半径 r

输出:目标区域集合 $\{T_i | 1 \leq i \leq K\}$

1. $PF_t \leftarrow P_t / * PF_t$ 为当前 Pareto 前沿 $*/$;

2. $s^l = (f_1, f_2, \dots, f_m) \leftarrow P_t / * s^l$ 为理想点 $*/$;

3. $s^N = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m) \leftarrow P_t / * s^N$ 为最低点 $*/$;

4. $s^{extr} \leftarrow P_t / * s^{extr}$ 为极点 $*/$;

5. FOR $\forall s = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in PF_t$ DO

6. $\tilde{s} = \left(\frac{f_1 - f_1}{\bar{f}_1 - f_1}, \frac{f_2 - f_2}{\bar{f}_2 - f_2}, \dots, \frac{f_m - f_m}{\bar{f}_m - f_m} \right) / * \text{归一化} */$;

7. $\text{Cheb_dis}(\tilde{s}, 0) \leftarrow \tilde{s} / * \text{切比雪夫距离} */$;

8. END

9. 确定 $s^* / * \text{Knee Point} */$;

10. $\{T_i\} \leftarrow \{s^{extr}, s^*, r\} / * \text{构建目标区域} */$.

3.2.2 区域间平衡性保持策略

区域间平衡性保持策略是在区域动态更新策略构建的目标区域的基础上,分别针对每个目标区域独立执行进化操作,并以 3 层排序准则选择 $[N/K]$ 个个体填充至下一代种群,其中 N 表示种群规模, K 表示目标区域数量;值得注意的是,对于 N/K 无法整除的情况,算法将向下取整并设置最后一个目标区域的个体数量为 $N - (K - 1) * [N/K]$,以确保种群规模的稳定性。区域间平衡性保持策略与 Sort_select 函数分别如算法 2、算法 3 所示。

算法 2 区域间平衡性保持策略

输入:种群 P_t , 目标区域 $\{T_i\}$

输出:种群 P_{t+1}

1. $K = |\{T_i\}| / * K$ 为目标区域数量 $*/$;

2. $N = |P_t| / * N$ 为种群规模 $*/$;

3. $P_{t+1} = \emptyset / * \text{初始化下一代种群} */$;

4. FOR $i \leftarrow 1$ to K DO

5. $Q_i = \text{Evolve}(P_t) / * \text{进化产生} N \text{ 个子个体} */$;

6. $\Theta_i = Q_i \cup P_t / * \text{合并种群} */$;

7. $R = \text{Sort_select}(\Theta_i, [N/K], T_i) / * \text{排序选择} */$;

8. $P_{t+1} = P_{t+1} \cup R$;

9. END

算法 3 Sort_select 函数

输入:种群 Θ_i , 数量 $[N/K]$, 目标区域 T_i

输出:种群 R

1. 初始化: $R \leftarrow \emptyset, i \leftarrow 1$;

2. $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots) \leftarrow \Theta_i / * \text{Pareto 非支配排序} */$;

3. WHILE $|R| + |F_i| \leq [N/K]$ DO

4. $R \leftarrow R \cup \mathcal{F}_i$;

5. $i \leftarrow i + 1$;

6. END

7. $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_i / * \text{临界层} */$;

8. IF $|R| = [N/K]$ THEN

9. RETURN R ;

10. ELSE $\gamma \leftarrow (\mathcal{F}_j, T_i) / * \gamma$ 为目标区域内部的临界层个体 $*/$;

11. IF $|\gamma| + |R| = [N/K]$ THEN

12. RETURN $R = R \cup \gamma$;

13. ELSE IF $|\gamma| + |R| > [N/K]$ THEN

14. $\text{Crowding_dis}(\gamma) / * \text{拥挤距离等级排序} */$;

15. γ 中选择 $[N/K] - |R|$ 个个体填充至 R ;

16. RETURN R ;

17. ELSE $R = R \cup \gamma$

- 18. $\Psi = F_j/\gamma / * \Psi$ 为临界层位于区域外部的个体 * /;
- 19. $\text{Cheb_dis}(\Psi, T_i) / * \text{切比雪夫距离排序} * /;$
- 20. Ψ 中选择 $[N/K] - |R|$ 个个体填充至 R;
- 21. RETURN R.

4 实验与分析

4.1 实验环境及测试函数

HP-NSGA-II 算法基于开源 Java 库 MOEAFramework^[19]实现,硬件配置为: Intel(R) Core(TM) i5-2430M 处理器, 4 GB RAM, Windows 8(64 位)操作系统。

为了更全面地测试算法性能,选择形状各异的 PF 的测试函数进行实验,具体包括 Belegundu^[20], ZDT1-4^[21], DTLZ1-2^[22] 和 Viennet3-4^[23],其中 Belegundu 和 ZDT1-4 为二维测试函数,DTLZ1-2 和 Viennet3-4 为三维测试函数。在二维测试函数中,Belegundu 的 PF 为直线,ZDT1 为连续凸曲线,ZDT2 为连续凹曲线,ZDT3 为分段连续曲线,ZDT4 为连续凸曲线且具有多模态特征。在三维测试函数中,DTLZ1 的标准 PF 为空间平面,DTLZ2 的标准 PF 为空间凹曲面,Viennet3

net3 具有一定的空间曲线特性,Viennet4 具有一定的空间凸曲面特性。

HP-NSGA-II 算法的参数设置如下:编码方式为实值编码;交叉算子为模拟二进制交叉,概率为 1,分布因子设为 20;变异算子为多项式变异,概率为 $1/V$ (V 为变量数量),分布因子为 20;由于 ZDT4 是一个多模态的问题,易陷入局部最优,因此其种群规模设为 500,变异概率设为 0.5;其他测试问题的种群规模设为 100。

4.2 HP-NSGA-II 算法有效性分析

为了验证 HP-NSGA-II 算法的有效性,本节以 KGEA^[24] 算法为对比开展实验分析。KGEA 算法是一种求解 Knee Point 以及 Extreme Point 的多目标进化算法,其 Knee Point 的定义以最小曼哈顿距离为准则,该算法针对 Pareto 临界层定义了基于向量角度的排序准则。

KGEA 算法的设置与 HP-NSGA-II 算法一致,HP-NSGA-II 算法的区域半径 r 设置为 0.05,以 1000 次进化代数作为算法的终止条件,针对每个测试问题,分别独立运行 30 次,随机选择实验结果绘图,如图 5 所示。

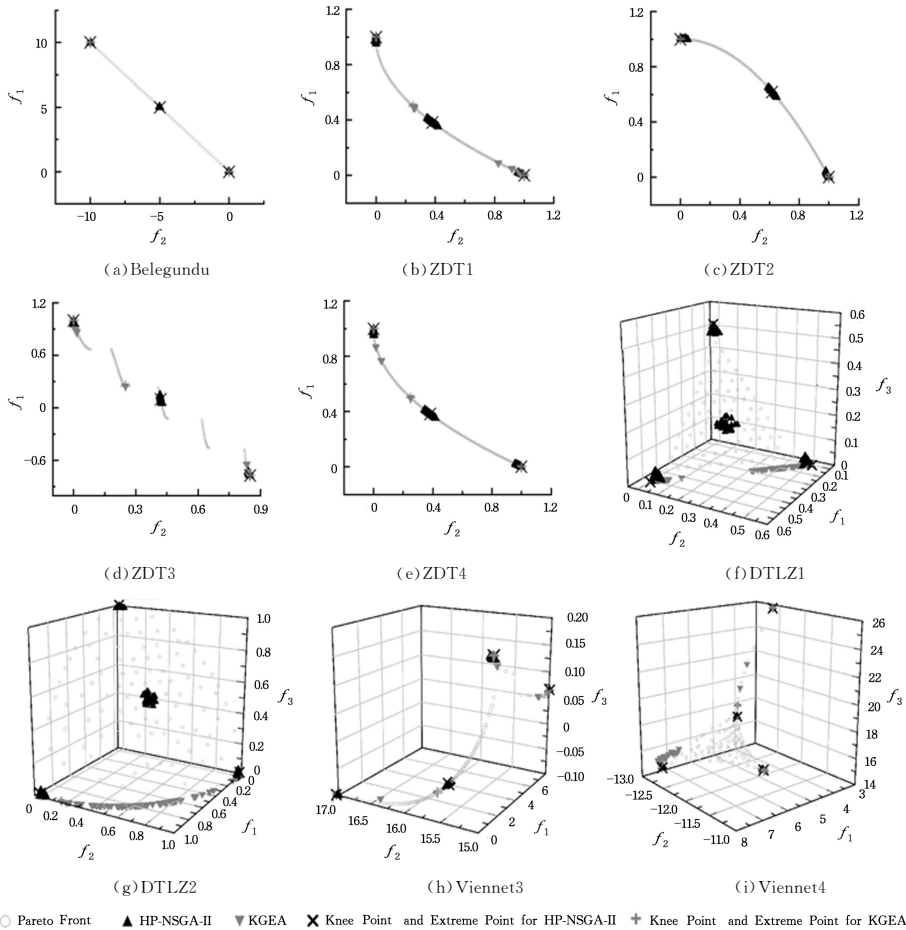


图 5 HP-NSGA-II 与 KGEA 算法实验分析

Fig. 5 Experimental analysis of HP-NSGA-II and KGEA

图 5 中,黑色上三角表示 HP-NSGA-II 算法在二维测试问题及三维测试问题上的运行结果,与测试问题的参考 PF 相比,该算法能够较好地收敛于以 Knee Point 及 Extreme Point 为中心, $r=0.05$ 为半径的区域内部。灰色下三角表示 KGEA 算法的运行结果,分析运行结果可知,在 Belegundu 和

ZDT2 测试问题上,其收敛于 PF 的极点区域,这是由于其 PF 为非凸所致,从而验证了 2.2.2 节的理论分析;在 ZDT1, ZDT3 及 ZDT4 测试问题上,此算法可精确找到 Extreme Point 以及以最小曼哈顿距离为准则定义的 Knee Point,但是在 Extreme Point 区域的解较为分散;在 DTLZ1 和 DTLZ2

测试问题上,此算法无法收敛到预期区域,只能收敛到 PF 的某一边界,这可能是由于 KGEA 算法基于向量角度的排序准则,在非凸 PF 情况下,其 Knee Point 处于某个极区域内部,导致该区域的选择压力高于其他区域,且在每次迭代过程中, Knee Point 在各极区域之间变换,使得算法无法稳定进化;在 Viennet3 和 Viennet4 测试问题上, KGEA 算法的运行结果表现出了较大的不稳定性。由以上分析可知, HP-NSGA-II 算法无论在二维测试问题还是在三维测试问题上均具有优良的收敛性,且不受测试问题 PF 形状的影响; KGEA 算法在二维凸测试问题上可以收敛到预期区域部分,但是在三维测试问题上表现出了较大的不稳定性。

为了验证所提算法运行结果的精确性,基于各测试问题

的 PF,人工求解对应的 Extreme Point、基于曼哈顿距离的 Knee Point 以及基于切比雪夫距离的 Knee Point,将其与所提算法运行得出的 Knee Point 及 Extreme Point 进行对比分析,分析结果如表 1 所列。由表 1 可知, HP-NSGA-II 算法能够较精确地求解出相应的 Extreme Point 和 Knee Point,误差部分是由测试问题 PF 采样精度不够导致的。 KGEA 算法在 ZDT1, ZDT3, ZDT4 和 Viennet4 上可精确求得 Extreme Point 和 Knee Point;但对于 PF 非凸的 Belegundu 和 ZDT2 测试问题,该算法的可精确求得 Extreme Point,而无法求得全部 Knee Point;对于 DTLZ1 和 DTLZ2 三维测试问题,该算法的运行结果与理论值偏差较大,效果较差,这表明 KGEA 算法的运行效果对 PF 形状有较强的依赖性。

表 1 Extreme Point 和 Knee Point 的理论值与实验值

Table 1 Theoretical and experimental values of Extreme Point and Knee Point

测试问题	理论值	实验值	
		HP-NSGA-II	KGEA
Belegundu	extreme point: (0,0), (-10,10)	(0.000,0.000), (-10.000,10.000)	(0.000,0.000), (-10.000,10.000)
	knee point (Manhattan): 全部 PF	—	(0.000,0.000)
	knee point (Chebyshev): (-4.95,4.95)	(-4.999,4.999)	—
ZDT1	extreme point: (0,1), (1,0)	(1.000,0.000), (0.000,1.000)	(1.000,0.000), (0.000,1.000)
	knee point (Manhattan): (0.25,0.5)	—	(0.250,0.500)
	knee point (Chebyshev): (0.382,0.382)	(0.381,0.382)	—
ZDT2	extreme point: (1,0), (0,1)	(1.000,0.000), (0.000,1.000)	(1.000,0.000), (0.000,1.000)
	knee point (Manhattan): (1,0), (0,1)	—	(1.000,0.000)
	knee point (Chebyshev): (0.618,0.618)	(0.617,0.618)	—
ZDT3	extreme point: (0,1), (0.852, -0.773)	(0.852, -0.773), (0.000,1.000)	(0.852, -0.773), (0.000,1.000)
	knee point (Manhattan): (0.249,0.252)	—	(0.250,0.251)
	knee point (Chebyshev): (0.421,0.093)	(0.420,0.100)	—
ZDT4	extreme point: (1,0), (0,1)	(1.000,0.000), (0.000,1.000)	(1.000,0.000), (0.000,1.000)
	knee point (Manhattan): (0.25,0.5)	—	(0.250,0.500)
	knee point (Chebyshev): (0.382,0.382)	(0.382,0.382)	—
DTLZ1	extreme point: (0.5,0,0), (0,0.5,0), (0,0,0.5)	(0.500,0.000,0.000), (0.000,0.500,0.000), (0.000,0.000,0.506)	(0.497,0.004,0.0), (0.006,0.495,0.0), (0.000,0.484,0.016)
	knee point (Manhattan): 全部 PF	—	(0.497,0.004,0.0)
	knee point (Chebyshev): (0.169,0.163,0.168)	(0.169,0.165,0.172)	—
DTLZ2	extreme point: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)	(1.000,0.000,0.000), (0.000,1.020,0.000), (0.000,0.000,1.013)	(1.000,0.0,0.004), (0.455,0.134,0.881), (0.286,0.0,0.958)
	knee point (Manhattan): 与 extreme point 一致	—	(1.000,0.0,0.004)
	knee point (Chebyshev): (0.597,0.595,0.538)	(0.577,0.590,0.566)	—
Viennet3	extreme point: (7.925,15.014,0.060), (0.011,16.733, -0.099), (1.228,15.000,0.176)	(8.196,15.008,0.064), (0.000,17.037, -0.100), (1.228,15.000,0.176)	(8.147,15.154,0.053), (0.000,17.037, -0.100), (1.228,15.000,0.176)
	knee point (Manhattan): (0.435,15.527, -0.047)	—	(0.381,15.596, -0.055)
	knee point (Chebyshev): (0.492,15.463, -0.038)	(0.496,15.460, -0.038)	—
Viennet4	extreme point: (7.444, -12.837,15.113), (5.343, -11.927,15.045), (3.399, -12.696,24.080)	(7.664, -12.709,15.009), (5.241, -11.771,15.049), (3.325, -12.500,25.905)	(7.664, -12.709,15.009), (5.236, -11.777,15.049), (3.324, -12.500,25.911)
	knee point (Manhattan): (3.993, -12.942,17.781)	—	(3.981, -12.947,17.849)
	knee point (Chebyshev): (4.242, -12.838,16.739)	(4.141, -12.873,17.050)	—

4.3 HP-NSGA-II 算法收敛性、多样性及区域间平衡性分析

为了验证 HP-NSGA-II 算法的收敛性、多样性以及区域间平衡性,将其与 KGEA 算法进行对比分析。选择 ZDT1, ZDT3, ZDT4 和 Viennet3-4 为测试用例,以测试函数 PF 的 Knee Point 及 Extreme Point 为中心点,将区域半径 r 设置为测试函数取值范围最小的维度的 $1/10$ 。为了定量分析算法的收敛性、多样性以及区域间平衡性,以各目标区域平均超体积指标 T-HV 及各区域解个体数量标准差 T-NUM-STD 为

衡量标准。其中, T-HV 指标用于算法收敛性、多样性的分析, T-NUM-STD 指标用于区域间平衡性分析, 计算方式如式(20)一式(22)所示。针对每个测试问题, 独立开展 30 次实验, 实验结果如表 2 和表 3 所列。

$$T-HV = \sum_{T_i} \text{Leb} \left(\bigcup_{x \in T_i, k=1}^m [f_k(x), p_k^{T_i}] \right) / K \quad (20)$$

其中, T_i 表示第 i 个目标区域, $p_k^{T_i}$ 表示目标区域 T_i 最低点 p^{T_i} 的第 k 个分量, Leb 表示勒贝格测度, K 表示目标区域数量。

$$T\text{-NUM}\text{-STD} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K (|T_i| - \bar{T})^2}{K}} \quad (21)$$

$$\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^K |T_i|}{K} \quad (22)$$

其中, $|T_i|$ 表示第 i 个目标区域中解个体的数量, \bar{T} 表示目标区域解个体数量的均值, K 表示目标区域数量。

表 2、表 3 为 KGEA 算法和 HP-NSGA-II 算法独立运行 30 次的 T-HV 及 T-NUM-STD 指标统计结果,其格式为 $a(b)$, a 表示均值, b 表示标准差。可以看出, T-NSGA-II 算法在 T-HV 及 T-NUM-STD 指标上明显优于 KGEA 算法, 这是由 KGEA 算法无法稳定收敛到目标区域内部所致。

表 2 T-HV 指标性能分析

Table 2 Performance analysis of T-HV

测试问题	KGEA	HP-NSGA-II
ZDT1	0.26057 (0.01260)	0.34919 (0.00704)
ZDT3	0.28863 (0.02576)	0.40566 (0.00225)
ZDT4	0.23679 (0.06339)	0.29291 (0.13099)
Viennet3	0.04957 (0.02087)	0.20997 (0.01855)
Viennet4	0.14224 (0.00743)	0.20344 (0.00605)

表 3 T-NUM-STD 指标性能分析

Table 3 Performance analysis of T-NUM-STD

测试问题	KGEA	HP-NSGA-II
ZDT1	2.88371 (2.07340)	0.56936 (0.27535)
ZDT3	4.00440 (2.97674)	0.27021 (0.28730)
ZDT4	2.06231 (1.16053)	0.70154 (0.37077)
Viennet3	10.4102 (1.02664)	9.05457 (0.38751)
Viennet4	11.6076 (0.33995)	1.38739 (0.56653)

4.4 HP-NSGA-II 算法区域可控性分析

在种群规模确定的条件下, HP-NSGA-II 算法在求解具体问题, 每个目标区域内解的数量变化较小, 因此可通过控制区域半径 r 实现对区域内解个体密度的控制。为了验证 HP-NSGA-II 算法的区域可控性, 选择 ZDT2, DTLZ2 以及 Viennet4 分别在 r 取值 0.05, 0.1 以及 0.2 时开展实验分析, 实验结果如图 6 所示。由图 6 可知, 随着区域半径 r 的增大, 区域内解个体的分散度逐步增大, 多样性增强, 解个体密度降低; 当 r 值较小时, 解个体集中于较小的区域内部, 密度较大, 分辨率较高, 从而验证了 HP-NSGA-II 算法的区域可控性。

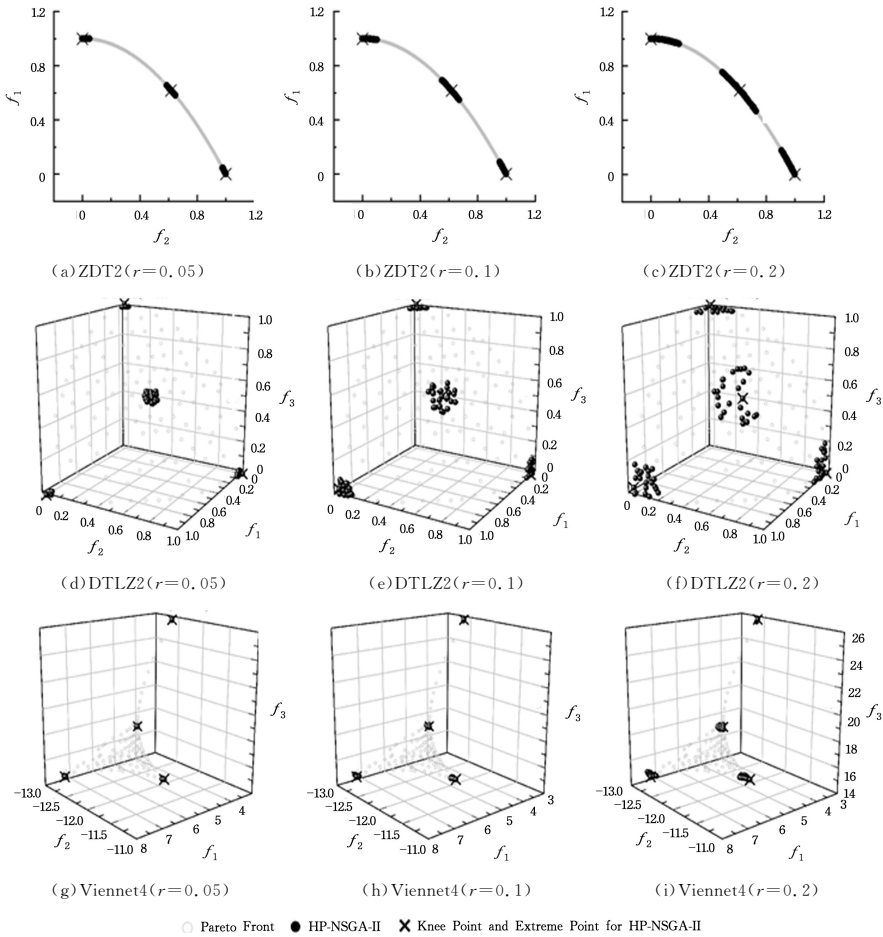


图 6 HP-NSGA-II 区域可控性分析

Fig. 6 Analysis of regional controllability of HP-NSGA-II

结束语 本文针对多目标优化问题, 定义了一种基于切比雪夫距离的 Knee Point, 并给出了该定义方式的几何解释, 分析了其与基于曼哈顿距离定义的 Knee Point 之间的关系; 在此基础上, 结合 T-NSGA-II 算法构建了一种用于求解 Knee Point 以及 Extreme Point 的隐式偏好多目标进化算法

HP-NSGA-II, 该算法通过区域动态更新策略使得目标区域随迭代过程动态更新, 最终收敛于目标区域, 通过区域间平衡性保持策略确保各区域间个体数量的平衡性, 使得个体较为均匀地分布在各区域内部。最后, 通过实验分析验证了算法的有效性。

参 考 文 献

- [1] LI L M, WANG Y L, TRAUTMANN H, et al. Multiobjective evolutionary algorithms based on target region preferences[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2018, 40: 196-215.
- [2] ZHENG J H, ZOU J. Multi-objective evolutionary optimization [M]. Science Press, 2017: 1-9.
- [3] BRANKE J. MCDA and multi-objective evolutionary algorithms [M]. Springer, 2016: 977-1008.
- [4] DEB K, PRATAP A, AGARWAL S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.
- [5] DEB K, JAIN H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: solving problems with box constraints[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577-601.
- [6] ZHANG Q, LI H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 712-731.
- [7] WANG L P, FENG M L, QIU Q C, et al. Survey on preference-based multi-objective evolutionary algorithms[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2019, 42(6): 1289-1315.
- [8] SAID L B, BECHIKH S, GHEDIRA K. The r -dominance: a new dominance relation for interactive evolutionary multicriteria decision making[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2010, 14(5): 801-818.
- [9] SATO H, TOMITA K, MIYAKAWA M. Preferred region based evolutionary multi-objective optimization using parallel coordinates interface[C]// *Proceedings of the International Symposium on Computational and Business Intelligence*. IEEE, 2016: 33-38.
- [10] ZHENG J H, LAI N, GUO G Q. ϵ -Pareto dominance strategy based on angle preference in MOEA[J]. *Pattern Recognition & Artificial Intelligence*, 2014, 27(6): 569-576.
- [11] DEB K, GUPTA S. Understanding knee points in bicriteria problems and their implications as preferred solution principles [J]. *Engineering Optimization*, 2011, 43(11): 1175-1204.
- [12] WANG H, HE S, YAO X. Nadir point estimation for many-objective optimization problems based on emphasized critical regions[J]. *Soft Computing*, 2017, 21(9): 2283-2295.
- [13] BRANKE J, DEB K, DIEROLF H, et al. Finding knees in multi-objective optimization[C]// *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature*. Springer, 2004: 722-731.
- [14] DAS I. On characterizing the “knee” of the Pareto curve based on normal-boundary intersection[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1999, 18(2): 107-115.
- [15] BECHIKH S, BEN S L, GHÉDIRA K. Searching for knee regions in multi-objective optimization using mobile reference points[C]// *Proceedings of the 2010 ACM Symposium on Applied Computing*. ACM, 2010: 1118-1125.
- [16] DEB K, SUNDAR J, BHASKARA U, et al. Reference point based multi-objective optimization using evolutionary algorithms [J]. *Journal of Computational Intelligence Research*, 2006, 2(3): 635-642.
- [17] RACHMAWATI L, SRINIVASAN D. A multi-objective genetic algorithm with controllable convergence on knee regions[C]// *IEEE Congress on Evolutionary Computation*. IEEE, 2006: 1916-1923.
- [18] CHIU W Y, YEN G G, JUAN T K. Minimum manhattan distance approach to multiple criteria decision making in multiobjective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(6): 972-985.
- [19] DAVID H. MOEAFramework[EB/OL]. (2019-12-30) [2020-11-12]. <http://moeaframework.org/>.
- [20] BELEGUNDU A, CONSTANS E, SALAGAME R, et al. Multi-objective optimization of laminated ceramic composites using genetic algorithms [C] // *5th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. AIAA, 1994: 1015-1022.
- [21] ZITZLER E, DEB K, THIELE L. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms: Empirical result[J]. *Evolutionary Computation*, 2000, 8(2): 173-195.
- [22] ZITZLER E, THIELE L, LAUMANN S M, et al. Performance assessment of multi-objective optimizers: An analysis and review [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2003, 7(2): 117-132.
- [23] VLENNET R, FONTEIX C, MARC I. Multicriteria optimization using a genetic algorithm for determining a Pareto set[J]. *International Journal of Systems Science*, 1996, 27(2): 255-260.
- [24] ZHOU Y, YEN G G, ZHANG Y. A knee-guided evolutionary algorithm for compressing deep neural networks [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 30(7): 1926-1938.



SUN Gang, born in 1988, postgraduate. His main research interests include multi-objective evolutionary algorithms and satellite range scheduling problems.



CHEN Hao, born in 1982, Ph.D, professor. His main research interests include data mining, machine learning and evolutionary computation.

(责任编辑:李亚辉)