TECHNICAL RESEARCH REPORT

On the Converse to Pompeiu's Problem

by C.A. Berenstein

TR 1997-22

INSTITUTE FOR SYSTEMS RESEARCH

ISR develops, applies and teaches advanced methodologies of design and analysis to solve complex, hierarchical, heterogeneous and dynamic problems of engineering technology and systems for industry and government.

ISR is a permanent institute of the University of Maryland, within the Glenn L. Martin Institute of Technology/A. James Clark School of Engineering. It is a National Science Foundation Engineering Research Center.

Web site http://www.isr.umd.edu

Atas do Nono Colóquio Brasileiro de Matemática,
Poços de Caldas, julho de 1973, vol 1.
12

El Problema de Pompeiu

CARLOS ALBERTO BERENSTEIN

Vamos a hablar aquí de tres trabajos sobre el tema, uno de L. Zalcman (Arch. for Rat. Mech. and Anal. vol. **47**, 1972) y otros dos que aún no han aparecido: uno de Brown, Schreiber y Taylor, y el otro de Taylor y el autor. El trabajo de L. Zalcman contiene una abundante bibliografia, a la cual me remito.

El problema original que el matemático rumano D. Pompeiu consideró en 1929 es el siguiente:

Supongamos que D sea un conjunto compacto en el plano xy, Σ el grupo de los movimentos euclídeos (rotaciones y translaciones), f una función continua tal que

$$\iint_{\sigma(D)} f(x, y)\, dx\, dy = 0, \qquad \forall \sigma \in \Sigma,$$

¿ésto implica que $f \equiv 0$?

Pompeiu dijo que si D era un disco entonces la conclusión era correcta, lamentablemente la función $f(x, y) =$ sen $a\cancel{x}r$ da un contraejemplo con una elección $r = \sqrt{x^2+y^2}$ conveniente del valor a. Más tarde él probó que si D es un cuadrado y f tenía límite en el infinito entonces la conclusión valía. (Este resultado es correcto aún sin esta condición adicional sobre la función f.)

Definición — Una família $\mathscr{D} = \{D\}$ de conjuntos compactos en $\mathbb{R}^2$ tiene la propiedade (P) si para toda función continua f,

$$(1) \qquad \iint_{D} f(x, y)\, dx\, dy \qquad \forall D \in \mathscr{D}$$

implica $f \equiv 0$.

Un problema parecido, que naturalmente se llamaría problema de Morera es el siguiente: sea $\mathscr{C} = \{C\}$ uma família de curvas cerradas y rectificables en el plano xy, $z = x + iy$, f contínua, y supongamos que

$$\int_C f(z)\, dz = 0 \qquad \forall C \in \mathscr{C},$$

¿ se deduce que f es una función analítica en todo el plano complejo? Si eso sucede, *$\mathscr{C}$ tiene la propiedad (M)*. Veamos que ellas están relacionadas. Primero, suponemos de ahora en adelante que *$\mathscr{D}$ es una familia invariante por translaciones.* Como siempre ∂D denota la frontera del conjunto D.

Lema. *Si todos los conjuntos de la familia $\mathscr{D}$ tienen frontera rectificable y $\mathscr{C} = \{\partial D : D \in \mathscr{D}\}$ entonces, $\mathscr{D}$ tiene la propiedad (P) si y solo si $\mathscr{C}$ tiene la propiedad (M).*

Demonstración. Primero observemos que podemos suponer que f es una función de clase C^∞. Dado que si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy = 1$, definimos como de costumbre $\varphi_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-2}\, \varphi(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$. Entonces, $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$ satisface (1) (respectivamente (2)) si f lo hace pues la familia $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{C}$) es invariante bajo translaciones. Por otro lado, $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ sobre conjuntos acotados y por lo tanto si $f_\varepsilon \equiv 0$ (resp. analítica) se deduce que f lo es también.

Ahora bien, como f es C^∞ podemos usar la formula de Green, y tenemos

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dx\; dy = \iint_D \frac{1}{2}\,(f_x + i f_y)\; dx\; dy = \frac{1}{2i}\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} \wedge dz =$$

$$= \frac{1}{2i}\iint_D d(f\,dz) = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} f(z)\; dz.$$

Por lo tanto se vé immediatamente que la propiedad (P) para $\mathscr{D}$ implica (M) para $\mathscr{C}$, porque si f satisface (2) entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ satisface (1) y por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv$ $\equiv 0$, es decir f es analítica entera. Para probar la conversa basta usar el hecho que existe $g \in C^\infty$ tal que $f = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ y entonces utilizar la formula (3) con g en lugar de f. Q.E.D.

Relación con el problema de la síntesis espectral

Como hemos visto en el lema, podemos limitarmos a considerar funciones indefinidamente diferenciables. Si llamamos μ_D la medida de Lebesgue restringida a D (o la medida dz restringida a ∂D) cuando consideramos el problema de Pompeiu (resp. de Morera), entonces tenemos que las μ_D, $D \in \mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{C}$), generan un sub espacio lineal cerrado $V \subseteq \mathscr{E}'(\mathbb{R}^2)$, las hipótesis implican que V es invariante por translaciones. Si f satisface (1) (resp. (2)) tenemos que

$$T(f) = 0 \qquad \forall T \in V$$

(y también $T * f \equiv 0$, $\forall T \in V$). Es decir, $f \in V^\perp \subseteq \mathscr{E}'(\mathbb{R}^2)$.

Es claro que $V^\perp$ también es un subespacio cerrado, e invariante por translaciones, más aún $(V^\perp)^\perp = V$. Con esta notación, la propiedad (P) (resp. (M)) es equivalente a cualquiera de estas dos cosas:

a) $V^\perp = \{0\}$;
b) $V = \mathscr{E}'(\mathbb{R}^2)$.

Ahora bien, asociado a un subespacio V como el de arriba, en análisis harmónico se acostumbra a considerar el *espectro de V*, es decir, el subespacio lineal cerrado de $\mathscr{E}(\mathbb{R}^2)$ generado por las funciones $p(x)\, e^{iz.x} \in V^\perp$, donde $x = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2)$, $z.x = z_1x_1 + z_2x_2$, y por $p(x)$ es un polinomio. A este subespacio lo designaremos por $V_0^\perp$. Se acostumbra considerar el espectro numérico, $sp(V)$, formado por los $z \in \mathbb{C}^2$ tales que $e^{iz.x} \in V^\perp$. En ese caso, el polinomio p de más arriba le asigna una "multiplicidad" al punto z, en el sentido seguiente:

Si $T \in V$, $z_0 \in sp(V)$ entonces $\hat{T}(z_0) = \langle e^{iz_0.x}, T(x)\rangle = 0$, más aún, si $p(x)\, e^{iz_0.x} \in V^\perp$ entonces $p(D)\;\; \hat{T}(z)\,\big|_{z = z_0} = 0$. Se puede ver facilmente que $V_0^\perp$ es un subespacio invariante por translaciones y por lo tanto $V_0 = (V_0^\perp)^\perp$ también lo es. Claramente $V_0 \supseteq V$, en realidad,

$V_0 = \{T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^2) : \hat{T}(z) = 0$ si $z \in sp(V)$ con la multiplicidad correcta$\}$.

Entonces, el problema de la síntesis espectral es fácil de enunciar, ¿es $V = V_0$? (Es decir, el espectro de V determina V completamente.) Es claro que podemos reemplazar 2 por n en todos lados y este problema sigue teniendo sentido. El resultado más importante que se conoce es el siguiente,

TEOREMA (L. Schwartz, 1947). *Si $n = 1$ entonces $V = V_0$.* Para $n > 1$ aún no se sabe que sucede; veremos más abajo que los problemas de Pompeiu y Morera son casos particulares del problema de la síntesis espectral para $n = 2$.

Antes de seguir recordemos que $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ es un algebra sin divisores de cero para el producto de convolución. Es un resultado bien conocido que del hecho que V y V_0 son invariantes por translaciones y cerrados se deduce que son ideales de este algebra. Otro hecho bien conocido es que la transformada de Fourier

$$T \longrightarrow \hat{T}, \quad \hat{T}(z) = \langle e^{ix.z},\ T(x)\rangle$$

es un isomorfismo algebraico entre el algebra $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ y una subálgebra del espacio de funciones enteras en $\mathbb{C}^n$ que denotamos $\hat{\mathscr{E}}'(\mathbb{R}^n)$. A este espacio $\hat{\mathscr{E}}'(\mathbb{R}^n)$ le asignamos la topología que hace que el isomorfismo $T \longrightarrow \hat{T}$ se vuelva también un homeomorfismo. Llamamos I (resp. I_0) el ideal cerrado de $\hat{\mathscr{E}}'(\mathbb{R}^n)$ formado por $\{\hat{T} : T \in V$ (resp. $V_0)\}$. Claramente $I = I_0$, si y sólo si $V = V_0$ ¿cuál es la ventaja de toda esta notación? La siguiente, se hace entrar en juego un tercer ideal I_{loc},

$$I_{loc} = \{\hat{T} \in \hat{\mathscr{E}}'(\mathbb{R}^n) : \hat{T} \text{ está en } I \text{ localmente}\}$$

es decir, si $\hat{T} \in I_{loc}$, entonces para todo $z_0 \in \mathbb{C}^n$ existe un entorno U de z_0, funciones $\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_m \in I$ y funciones $G_1, \ldots, G_m$ analíticas en U tales que

$$\hat{T}(z) = \sum_{j=1}^{m} G_j(z)\ \hat{T}_j(z), \quad \forall z \in U.$$

Observemos que es fácil saber si $I_{loc} = \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ o no, basta que las funciones de I no tengan ceros comunes.

Ahora bien, después de todo esto, tenemos el siguiente lema folklórico.

LEMA. $I_0 = I_{loc}$.

Por lo tanto, el teorema de Schwartz se reduce a: "para todo ideal cerrado I de $\hat{\mathscr{E}}'(R')$, tenemos $I = I_{loc}$". Facilmente se puede deducir de aquí el siguiente corolario.

COROLARIO. *Sean σ, τ dos números positivos de cociente irracional. Si para todo par de números $a < b$ tales que o bien $b - a = \sigma$ o bien $b - a = \tau$, tenemos que $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ entonces $f(x) \equiv 0$.*

Si ρ es una rotación en $\mathbb{R}^2$ y $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^2)$ definimos T_ρ mediante la fórmula

$$T_\rho(f) = T(f \circ \rho^{-1}) \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Decimos que V es *invariante por rotaciones* si $T \in V$ implica $T_\rho \in V$ para toda rotación ρ.

Teremos ahora el seguiente teorema,

TEOREMA. *Si $V \subseteq \mathscr{E}'(\mathbb{R}^2)$ es invariante por rotaciones, entonces $I = I_{loc}$ (y por lo tanto $V = V_0$)*

De aquí se ve que en este caso las propriedades a) y b) de más arriba son equivalentes a

c) $I_{loc} = \hat{\mathscr{E}}'(\mathbb{R}^2)$

o

d) las funciones de I no tienen ceros comunes.

Por lo tanto tenemos como corolarios las siguientes dos respuestas afirmativas al problema de Pompeiu.

EJEMPLO 1. La familia $\mathscr{D} = \{\sigma(D_0) : \sigma \in \Sigma,\ D_0$ es un rectángulo fijo$\}$ tiene la propiedad (P). Más aún, basta tomar por D_0 un conjunto convexo cuya frontera contenga por lo menos un punto anguloso.

EJEMPLO 2. Llamemos $Q = \{s_1/s_2 : s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0$ tales que la función J_1 de Bessel satisface $J_1(s_1) = J_1(s_2) = 0\}$. Entonces la familia $\mathscr{D}$ generada (mediante translaciones) por dos discos fijos de radios r_1 y r_2, tiene la propiedad (P) si y solo si $r_1/r_2 \notin Q$.

En el mismo espíritu se puede probar

TEOREMA. *Si $I \subseteq \hat{\mathscr{E}}'(\mathbb{R}^2)$ contiene una funcion cuyo conjunto de ceros es una union de rectas conplejas, entonces $I = I_{loc}$.*
Como aplicación tenemos
EJEMPLO 3. Sea D el cuadrado $\{x : |x_1| \leq a,\ |x_2| \leq a\}$, $a > 0$. Entonces $\hat{\mu}_D(z_1, z_2) = 4\ \dfrac{sen\ az_1}{z_1} \cdot \dfrac{sen\ az_2}{z_2}$, y por lo tanto

$$\{z : \hat{\mu}_D(z) = 0\} = \bigcup_{\substack{m \neq 0 \\ m \text{ entero}}} \left\{z : z_1 = \frac{\pi m}{a}\right\} \cup \left\{z : z_2 = \frac{\pi m}{a}\right\}.$$

De aquí se deduce facilmente que si $\mathscr{D}$ es la familia generada (por translaciones únicamente) por tres cuadrados como el de arriba de lados $2a$, $2b$ y $2c$ respectivamente, entonces $\mathscr{D}$ tiene la propiedad (P) si y solo si a/b, b/c y c/a son irracionales.

Si tomamos D como arriba, pareceria ser que siempre se necesitan por lo menos dos otros conjuntos D' y D'' para que la familia $\mathscr{D}$ generada por ellos (mediante translaciones solamente) tenga la propiedad (P).

Finalizamos con un resultado curioso de L. Zalcman, que no se obtiene por los métodos esbozados más arriba. Llamemos D el cuadrado unidad, es decir $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$. A cada punto $x \in D$ le podemos asociar un cuadradito D_x de centro x tal que D_x sea el cuadrado más grande posible contenido en D y de lados paralelos a los ejes. Supongamos que f sea continua en D y que

$$\iint_{Dx} f(x_1, x_2)\ dx_1\ dx_2 = 0 \qquad \forall x \in D$$

entonces se puede ver que $f \equiv 0$ de la manera siguiente. Sea m un número natural arbitrario ($m > 1$), dividimos D de la manera obvia en m^2 cuadraditos iguales de lados paralelos a los ejes coordenados. Llamemos D_1 al cuadradito que está en el vértice superior izquierdo, y D_2, D_3, D_4 los tres únicos cuadraditos adjacentes yendo en el sentido de los agujas de un reloj. Se deduce de las hipótesis que si $D_5 = \bigcup_{j=1}^{4} D_j$ entonces

$$\iint_{D_j} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 0. \text{ para } j = 1, 2, 4, 5$$

y por lo tanto (4) también vale con $j = 3$. De esta manera se sigue, y se ve fácilmente que la integral sobre cualquier cuadradito es cero. Por lo tanto f es identicamente nula.

Modifiquemos levemente el problema, llamemos $\frac{1}{2} D_x$ al cuadradito similar a D_x pero de lado mitad y asumamos solamente

$$\iint_{\frac{1}{2} Dx} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 0 \qquad \forall x \in D$$

¿ es que $f \equiv 0$? No sé, es fácil ver que $f \equiv 0$ sobre ∂D.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Rio de Janeiro — Brasil

University of Maryland
Maryland — USA