

## Групно изравнање тригонометријских тачака

У »Геодетском листу« бр. 8—12 од 1949 г. Др. Инж. Чубранић дао је пример групног изравнања триг. тачака виших редова, где је и наведено у којим случајевима се мора применити групно изравнање.

У Правилнику за триангулацију, такође је дат прилог групног изравнања.

Пример Др. Инж. Чубранића и прилог у Правилнику, приказује случајеве изравнања са применом Шпрајберових тежина.

У Правилнику, чл. 121. 2 каже се:

»Једначине грешака сведене помоћу Шпрајберових фиктивних тежина састављају се из разлога уштеде у броју рачунских операција при даљем рачунању.

Испитивањем је утврђено да се ова уштеда односи само на случај истовременог изравнања координата групе од четири и више тачака . . .«

Даље у истом члану се наводе правила примене Шпрајберових тежина. Следеће објашњење у истом члану гласи:

»Као што се из предњих правила види узима се за тежину спољњег правца  $\frac{1}{2}$  а за тежину унутрашњег 1, док је код обичног начина изравнања тежина спољњег и унутарњег правца иста односно 1. Примењујући час један, час други начин изравнања за разне групе тачака једне исте мреже, теориски тачност рачунања није иста. Ако бисмо тежине спољних правца теориски одређивали, морали бисмо сем средње грешке оријентационог угла узети у обзир и средњу грешку мереног правца јер се спољни правац добија из збира оријентационог угла станице и опажаног правца. Ово би превише компликовало само рачунање а практично у смислу тачности готово ништа се не би добило, јер је путем испитивања рачунајући једну исту групу тачака на један и на други начин, утврђено да је разлика координата толико мала (3—4 см) да се практично може занемарити. Сем тога за оријентациони угао предвиђено је да се мора одредити из најмање три податка а пожељно је што више; према томе тежина оријентисаног (спољњег) правца приближно је једнака 1 (0,75 за три тачке, 0,80 за четири тачке и тд.). Узевши напред наведено у обзир, има се код обичног начина изравнања, а у циљу упрошћавања рачунања, узимати иста тежина и за спољне и за унутрашње правце, пошто се практично координате тачака добијају скоро исте«.

Уз предње цитате из Правилника, прилажем резултате испитивања рачунања на два начина, из којих се виде разлике у поправкама координата и правца (Прилог 1). До ових разлика је дошло, као што је напред наведено због тога што је при обичном начину изравнања тежина спољног правца једнака 1, а код начина са применом Шпрајберових тежина мања од јединице. Овим испитивањем је утврђено, да ће уштеда у броју рачунских операција са применом Шпрајберових тежина постићи тек ако се изравнава група са бројем тачака већим од 4.





b) за тачку Tb:

$$v_5 = \text{red } a_5 \Delta \bar{x}_a + \text{red } b_5 \Delta \bar{y}_a + \text{red } c_5 \Delta \bar{x}_b + \text{red } d_5 \Delta \bar{y}_b + \text{red } e_5 \Delta \bar{x}_c + \\ + \text{red } g_5 \Delta \bar{y}_c + \text{red } f_5$$

итд. за  $v_6, v_7$  и  $v_8$ .

c) за тачку Tc:

$$v_9 = \text{red } c_9 \Delta \bar{x}_b + \text{red } d_9 \Delta \bar{y}_b + \text{red } e_9 \Delta \bar{y}_c + \text{red } g_9 \Delta \bar{y}_c + \text{red } f_9$$

итд. за  $v_{10}$  и  $v_{11}$ .

Да су редуковане вредности добро срачунате служи збир редукованих коефицијената  $a, b, \dots$  и збир редукованих апсолунних чланова  $f$  који треба да буде једнак 0 (Прилог 2).

За контролу образовања и решавања нормалних једначина, у једначине грешака се уводи контролни члан  $S$ , који је једнак алгебарском збиру коефицијената и апсолутног члана  $f$  за сваку једначину.

По општем правилу образовања нормалних једначина а за пример од 3 тачке имамо следеће једначине:

$$[aa] \Delta \bar{x}_a + [ab] \Delta \bar{y}_a + [ac] \Delta \bar{x}_b + [ad] \Delta \bar{y}_b + [ae] \Delta \bar{x}_c + [ag] \Delta \bar{y}_c + [af] = 0$$

$$[ab] \Delta \bar{x}_a + [bb] \Delta \bar{y}_a + [bc] \Delta \bar{x}_b + [bd] \Delta \bar{y}_b + [be] \Delta \bar{x}_c + [bg] \Delta \bar{y}_c + [bf] = 0$$

.....

$$[ag] \Delta \bar{x}_a + [bg] \Delta \bar{y}_a + [cg] \Delta \bar{x}_b + [dg] \Delta \bar{y}_b + [eg] \Delta \bar{x}_c + [gg] \Delta \bar{y}_c + [gf] = 0$$

Образовање нормалних једначине контролише се збировима:  $[as], [bs], \dots, [gs]$ . (Члан 112 Правилника за триангулацију).

Решењем нормалних једначина, добијамо поправке координата:  $\Delta \bar{x}_a, \Delta \bar{y}_a, \dots, \Delta \bar{y}_c$ . (Прилог 3).

Рачунање поправака праваца врши се према напред наведеним једначинама грешака, тј.

a) за спољне правце тачке Ta

$$v_{12} = a_{12} \Delta \bar{x}_a + b_{12} \Delta \bar{y}_a + f_{12}$$

и тд. за све спољне правце тачака Ta, Tb и Tc.

b) за унутрашње правце тачке Ta:

$$v_1 = \text{red } a_1 \Delta \bar{x}_a + \text{red } b_1 \Delta \bar{y}_a + \text{red } c_1 \Delta \bar{x}_b + \text{red } d_1 \Delta \bar{y}_b + \text{red } f_1$$

и тд. за све унутрашње правце тачака Ta, Tb и Tc (прилог 4).

(Види напред наведене једначине грешака).

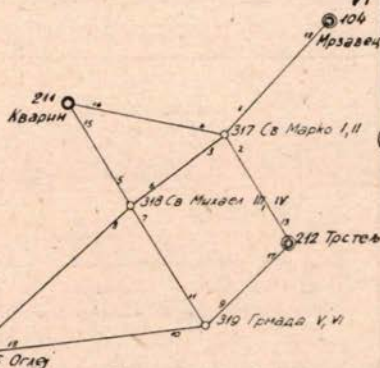
Да су поправке  $v$  добро срачунате служи проба:

$$[vv] = [FF \cdot 6] \quad (\text{Прилог 3}).$$

Кад нам се ова проба слаже, рачунамо дефинитивне координате и дефинитивне дирекционе углове.

Упоређујући утрошено време потребно за изравнање по наведеном начину и по Шрајберовом поступку, долазимо до закључка да је, како је то испитивањем утврђено однос 1 : 2, тј. за наведени случај потребан је 1 радни дан а за Шрајберов поступак 2 радна дана. За одређивање

A	B	C	D	E	G	F	S	контр-стубац	поправка координата
1603,08	+ 56,95	- 631,42	+ 352,45	- 4451	- 79,96	+ 896,37	+ 2265,20	+ 2265,20	
- 1,0000	- 0,0355	+ 0,3937	- 0,2199	+ 0,0259	+ 0,0443	- 0,6215	- 0,4130	- 0,4130	
$\Delta \bar{X}_a = I$	- 0,0144	+ 0,3760	+ 0,0723	+ 0,0122	+ 0,0235	- 0,6542			- 0,1519
$\Delta \bar{Y}_a = I$	- 0,0241	+ 0,0177	- 0,0922	+ 0,0137	+ 0,0208		+ 1,4130		+ 1,1519
1102,51	+ 273,65	- 153,06	+ 23,05	+ 39,40	- 792,52	+ 559,99	+ 559,98		
- 2,02	+ 22,42	- 12,52	+ 1,48	+ 2,52	- 35,39	- 80,47			
+ 1100,49	+ 296,07	- 165,58	+ 24,53	+ 41,92	- 817,94	+ 479,52	+ 479,52		
- 1,0000	- 0,2690	+ 0,1505	- 0,0223	- 0,0380	+ 0,7432	- 0,4356	- 0,4356		
$\Delta \bar{X}_b = II$	- 0,2569	- 0,0495	- 0,0405	- 0,0202	+ 0,7432				+ 0,4061
$\Delta \bar{Y}_b = II$	- 0,0421	+ 0,2000	- 0,0418	- 0,0478		+ 0,4356			+ 0,5939
1053,38	+ 94,60	- 120,48	- 137,64	- 1051,97	- 519,59	- 519,58			
- 248,47	+ 138,78	- 16,35	- 27,96	+ 392,24	+ 891,77				
- 79,64	+ 44,54	- 6,60	- 11,28	+ 220,02	- 128,99				
+ 725,27	+ 277,92	- 143,43	- 176,88	- 439,71	+ 243,18	+ 243,17			
- 1,0000	- 0,3832	+ 0,1978	+ 0,2439	+ 0,6063	- 0,3352	- 0,3352			
$\Delta \bar{X}_c = III$	+ 0,1260	+ 0,0932	+ 0,1295	+ 0,6063					+ 0,9530
$\Delta \bar{Y}_c = III$	- 0,5092	+ 0,1046	+ 0,1144		+ 0,3352				+ 0,0450
1240,35	- 253,71	- 310,45	+ 721,02	+ 1684,70	+ 1684,70				
- 77,50	+ 9,13	+ 15,61	- 219,05	- 498,01					
- 24,92	+ 3,69	+ 6,20	- 123,06	+ 72,43					
- 106,50	+ 54,97	+ 67,78	+ 168,50	- 93,16					
+ 1031,43	- 185,92	- 227,27	+ 567,41	+ 1165,66	+ 1165,65				
- 1,0000	+ 0,1801	+ 0,2203	- 0,5307	- 1,1301	- 1,1301				
$\Delta \bar{X}_d = IV$	+ 0,0850	+ 0,1170	- 0,5307						- 0,3287
$\Delta \bar{Y}_d = IV$	- 0,0053	- 0,1033		+ 1,1301					+ 1,3287
775,87	- 330,67	- 174,17	- 121,63	+ 121,62					
- 1,08	- 1,84	+ 25,80	- 58,65						
- 0,55	- 0,93	+ 18,23	- 10,69						
- 28,38	- 34,98	+ 86,96	+ 48,08						
- 33,54	- 40,96	+ 98,87	- 210,11						
+ 742,35	- 409,38	- 118,43	+ 184,52	+ 184,54					
- 1,0000	+ 0,5747	+ 0,1663	- 0,2590	- 0,2590					
$\Delta \bar{X}_e = V$	+ 0,3051	+ 0,1663							+ 0,4714
$\Delta \bar{Y}_e = V$	+ 0,2680		+ 0,2590						+ 0,3286
644,21	- 185,64	- 358,26	- 358,25						
- 3,14	+ 44,10	+ 100,27							
- 7,59	+ 31,15	- 18,26							
- 43,14	- 107,24	+ 59,29							
- 50,07	+ 120,61	+ 256,84							
- 235,27	- 68,08	+ 106,03							
+ 344,00	- 165,10	+ 145,91	+ 145,90						
- 1,0000	+ 0,5309	- 0,4691	- 0,4691						
$\Delta \bar{X}_f = VI$	+ 0,5309								+ 0,5309
$\Delta \bar{Y}_f = VI$		+ 0,4691							+ 0,4691
1907,21	+ 1430,31	+ 1430,30							
- 619,21	+ 1407,79								
- 607,87	+ 356,28								
- 266,60	+ 147,39								
- 290,51	- 618,63								
- 19,69	+ 30,69								
- 87,65	+ 77,46								
[VV] = [FF]	+ 45,68	+ 45,71							



\*) Цифре, унутар заграда, исписују се у формичару црвеним.

односа су узете следеће операције: постављање једначина грешака, обрадовање нормалних једначина и рачунање поправка праваца, јер је разлика у поступку само код ових операција. Овакав однос у утрошку времена појављује се углавном при образовању нормалних једначина.

Образовање нормалних једначина, при изравњању обичним начином врши се у пракси помоћу машине, без уписивања појединачних производа, при чему се не губи у времену. Међутим при образовању нормалних једначина по Шрајберовом поступку, сваки производ се мора уписати. Затим се образују збирови производа, који имају исту тежину, па се ови множе одговарајућом тежином да би се на крају образовали дефинитивни збирови.

Као што се види само за исписивање ових вредности узалудно се губи у времену у односу на обичан начин, те се долази до закључка да је велико временско преимућство обичног поступка над Шрајберовим.

Према претходно изложеном, наведени обични начин групног изравњања је рационалнији те би га увек требало примењивати код изравњања групе од 3—4 тачке.

Резултати испитивања изравњања на два начина.

Прилог 1

3 ТАЧКЕ		4 ТАЧКЕ									
Број Правца	$V_0$	$V_S$	$V_0 - V_S$	$V_0^2$	$V_S^2$	$\Delta \bar{X}_0$	$\Delta \bar{X}_S$	Вели- ка	Број Правца:		
1	-0,84	-0,61	-0,25			-0,15	-0,13	-0,02			
2	-1,00	-0,86	-0,14								
3	+0,67	+0,60	+0,07			+0,41	+0,41	0,00			
4	+1,19	+0,86	+0,33								
5	+0,40	+0,01	+0,39			+0,96	+0,99	-0,03			
6	-1,35	-1,10	-0,25								
7	+0,92	+0,91	+0,01			-0,33	-0,31	-0,02			
8	+0,03	+0,18	-0,15								
9	+0,60	+0,87	-0,27			+0,47	+0,51	-0,04			
10	+0,35	+0,15	+0,20								
11	-0,95	-1,03	+0,08			+0,53	+0,56	-0,03			
12	-0,46	-0,16	-0,30								
13	+1,15	+1,35	-0,20								
14	-1,52	-1,69	+0,17								
15	-0,79	-1,36	+0,57								
16	-1,83	-1,93	+0,10								
17	-0,52	-0,43	-0,09								
18	-0,07	-0,45	+0,38								
				15,87	16,78						
Број рачунских операција											
а) по обичном начину										1373	
б) по Шрајберовим тежинама										1525	
										<p>Највећа разлика:</p> <p><math>[V_0^2] = 64,74</math></p> <p><math>[V_S^2] = 67,69</math></p> <p><math>V_0 - V_S = 0,88</math></p> <p>координата: 0,05 м</p> <p>Број рачунских операција:</p> <p>а) по обичном начину: 3199</p> <p>б) по Шрајберовим тежинама: 2863</p>	
										<p>5 ТАЧКА</p> <p>Број правца: 35</p> <p><math>[V_0^2] = 90,95</math></p> <p><math>[V_S^2] = 96,84</math></p> <p>Највећа разлика: <math>V_0 - V_S = 1,02</math></p> <p>координата: 0,09 м</p> <p>Број рачунских операција:</p> <p>а) по обичном начину: 4419</p> <p>б) по Шрајберовим тежинама: 3969</p>	

**Примедба** У ознакама  $V_0, V_S, \Delta \bar{X}_0, \Delta \bar{X}_S, \dots$  индекс 0 значи: обичан начин изравњања;  $S$  — начин примене Шрајберових тежина. За групе од 4 и 5 тачака, ради уштеде у простору узете су само карактеристичне величине из резултата упоређивања.

COMPENSATION SIMULTANÉ DES PLUSIEURS POINTS  
TRIGONOMETRIQUES

En comparaisant les résultats de la compensation simultanée des plusieurs points trigonométriques par la méthode d'observations indirectes sur base de méthode de compensation ordinaire ainsi que sur la base des règles mécaniques Schreiber, on arrive jusqu'aux conclusions intéressantes. Le temps nécessaire pour la compensation simultanée des trois ou quatre points par la méthode Schreiber est plus long que le temps nécessaire pour le procédé de compensation ordinaire, tandis que pour cinq et plusieurs point la méthode Schreiber est beaucoup plus économique.

Les exemples sont cités dans les appendices. Ainsi dans l'appendice no 1 les résultats de l'examen de compensation de toutes les deux manières sont données. Dans l'appendice no 2 les équations des erreurs sont données, tandis que dans l'appendice no 4 le calcul de correction des directions. Appendice no 3 nous montre la résolution des équations normales.