

KOLEBANJE KOEFICIJENTA TERESTRIČKE REFRAKCIJE NA KRATKIM DUŽINAMA I NJEGOV UTJECAJ NA TAČNOST TRIGONOMETRIJSKOG NIVELMANA

Doc. ing. VELJKO PETKOVIĆ, G. F. — Zagreb*

U V O D

Korištenje trigonometrijskog nivelmana za određivanje visinskih razlika, datira već od početka prošlog stoljeća. Tada je pater Giovanni Inghirami prvi put primjenio metodu mjerenja visinskih razlika u triangulaciji Toscanne. U Njemačkoj se uvodi kao obavezna tek od 1936 god. Sigurno, da je praktičnom primjenom ove metode bilo lako uočiti mnoge prednosti nasuprot geometrijskog nivelmana, izuzev same tačnosti. Tre-tiran je kroz literaturu kao posebni oblik geometrijskog nivelmana ili obratno.

Kada je razvijanje triangulacionih mreža postalo stalna služba go-tovo u svim razvijenim državama i sistematski rad i briga vojnih insti-tucija gotovo većine nacija, onda je i ova metoda, određivanja apsolutnih visina, dobila široke mogućnosti razvoja. Poznavanje udaljenosti krajnih tačaka sa odgovarajućom tačnosti, koje se dobiju iz triangulacionih ra-dova, uklonilo je poteškoću koja se mogla pojaviti u izvjesnim uvjetima primjene ove metode.

Ograničena tačnost u određivanju visinskih razlika trigonometrijskim nivelmanom, ostala je kao glavni elemenat njegove uske upotrebe. Praktičnom primjenom ove metode započeo je opsežan rad na ispitivanju svih onih utjecaja koji je čine nepouzdanom. Od tada, pa do najnovijih vremena, gotovo nema zemlje u kojoj geodetski stručnjaci sa više ili manje uspjeha nisu poduzimali razna ispitivanja u tu svrhu, a naročito u cilju ispitivanja glavnog uzročnika nesigurnosti, ovakvog načina mje-renja visinskih razlika — koeficijenta terestričke refrakcije.

Taj problem je kroz literaturu svestrano osvjetljen sa teoretskog gledišta. Njime su se bavili, a bave se još i danas stručnjaci raznih grana

* G. F. — Geodetski Fakultet — Zagreb, Kačićeva 26.

nauke. Gotovo su jednodušne konstatacije, da je ovako praktična metoda određivanja visina, inače potrebna i praksi i nauci, u nekim redovima veličina, paralizirana nestalnim uvjetima koji vladaju u zračnim slojevima bez kojih ne možemo ni zamisliti ovaj rad.

Prostudirani su utjecaji i izvori pogrešaka. Određene su njihove veličine u odnosima sa dužinom strane. Podređeni su potrebama tačnosti: konstrukcije instrumenta i način signalizacije tačaka, metode mjerenja, vrijeme mjerenja i samo izjednačenje, ali smo se zaustavili na vanjskim uvjetima, atmosferi — zraku — kroz koji naša zraka mora proći od našeg oka do cilja. Na tom putu dolazi do promjena u smjeru same vizure, do loma zrake koji je odraz momentalne situacije: temperature, vlage, pritiska i drugih uvjeta koji vladaju u zraku.

Do danas u tom pogledu, stručnjaci su ostali gotovo bespomoćni, iako su na osnovu samih mjerenja date mnoge formule za računanje koeficijenta k kao funkcije temperature, pritiska i vlage, a i geografske širine. (Fearnley, Bauernfeind, Levallois, Reina, Bonifacino i dr.). Gotovo je nemoguće odrediti i matematski izraziti u vidu formule za praktičnu upotrebu sve one faktore i način, njihovog utjecaja koji na ovom putu prate vizuru.

Bilo je raznih pokušaja i opsežnih ispitivanja koja su vršena u raznim uvjetima ne bili se dobio izraz koji bi povećavao tačnost mjerenja visinskih razlika trigonometrijskim putem, uklanjanjem utjecaja terestričke refrakcije ili tačnog određivanja njenog korekcionog člana.

Ne može se reći, da su ovi radovi ostali bez uspjeha. Najbolje o tome govore rezultati koji su u najnovije vrijeme objavljeni kod nas i vani.

Tačnost ove metode, ocjenjivanja je uglavnom na osnovu radova redovne geodetske službe na triangulaciji. Iz tih ocjena izlazi da je, promatrajući rezultate ovih radova hronološkim redom, tačnost trigonometrijskog određivanja visinskih razlika u prosjeku:

$$m_0 = \pm 10 \text{ cm/km}$$

$$m_0 = \pm 6-7 \text{ cm/km}$$

poslije se tačnost povećava [8] [9] [4]

$$m_0 = \pm 4-5 \text{ cm/km}$$

$$m_0 = \pm 3.7 \text{ cm/km}$$

Tačnost koja je postignuta u radovima povezivanja Dalmatinskih otoka sa kopnom [8] penje se pak na približno

$$m_0 = \pm 1.0 \text{ cm/km}$$

Prilikom mjerenja u cilju ispitivanja koeficijenta refrakcije u C. G. [6] dobijena tačnost iznosi:

$$M_0 = \pm 0.7 \text{ cm/km (iz dva mjerenja)}$$

$$m_0 = \pm 1.3 \text{ cm/km}$$

na dužinama od 4—12 km.

U ovom slučaju mora se istaknuti da su posljednji rezultati dobijeni iz opažanja koja su vršena posebnom pažnjom uz specijalne pripreme i uz naprijed postavljen uvjet velike tačnosti. Međutim bez obzira na to, u samoj metodi rada i vanjskim uvjetima nije moglo biti nikakvih bitnih promjena, pa su stoga postignuti rezultati, svakako veliki doprinos povećanju tačnosti i primjeni ove metode. Ovi su rezultati dobijeni na dužinama strana triangulacija nižih redova tj. od 2—5 km uz manje izuzetke.

Iako je u rezultatima mjerenja mnogo povećana tačnost, ne znači da je time nešto bitno napravljeno u poznavanju terestričke refrakcije, za koju još uvijek vrijedi Bouguer-Biotova hipoteza.

Povećanje tačnosti ide na račun poboljšanja uvjeta rada, upotrebe tačnijih instrumenata, načina signalizacije i sl.

Dosadnja ispitivanja terestričke refrakcije, njenog koeficijenta — uglavnom su se odnosila na veće dužine i bio im je cilj naći veličinu, koja bi u prosjeku zadovoljila praktične potrebe u triangulaciji. Ovdje bi se zaustavili na konstataciji, da su ta ispitivanja pokazala velike razlike u koeficijentu refrakcije, koliko unutar jedne serije ispitivanja, toliko i među rezultatima ispitivanja raznih stručnjaka u raznim vremenima. Kao rezultat za praktičnu primjenu usvojena je, makar za Evropu i naše prilike, vrijednost

$$k = 0.13$$

$$m_k = \pm 0,03 — \pm 0,07$$

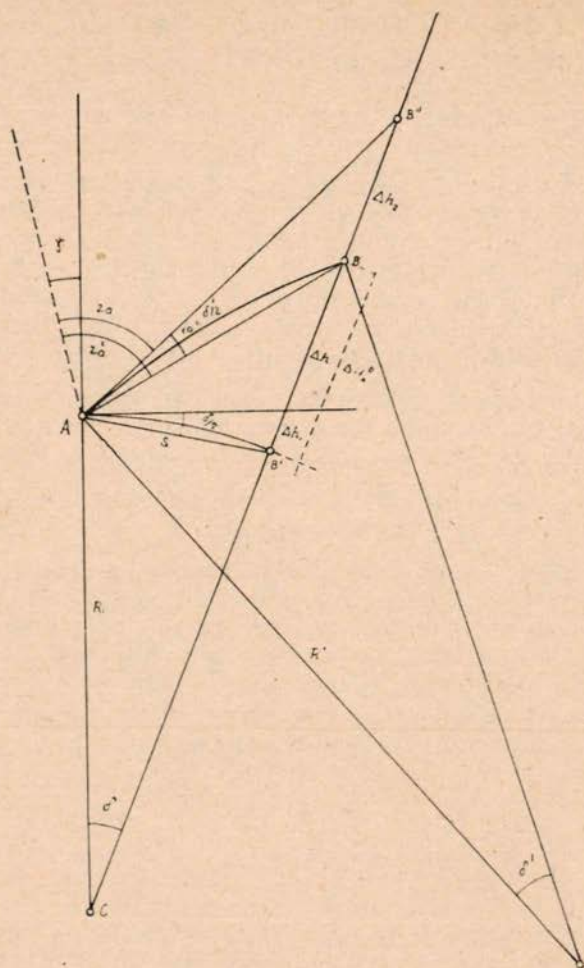
U današnjim geodetskim praktičnim radovima, a i u radovima u cilju raznih naučnih ispitivanja, primjenjuje se sve više mikrotriangulacija. Triangulacije visoke tačnosti, ali kratkih strana, ispod 1 km.

Ovakvi radovi pružaju mogućnost ispitivanja tačnosti veličine koeficijenta terestričke refrakcije na kratkim dužinama.

OSNOVNE FORMULE

Formule za računanje visinskih razlika mjerenih trigonometrijskim nivelmanom izvedene su uz pretpostavku, da je Zemlja kugla sa polumjerom R . Utjecaj terestričke refrakcije na opažanje visinskih kuteva ili zenitnih udaljenosti, izveden je uz pretpostavku da je njena trajektorija dio kružnog luka sa polumjerom R' . Vertikalna udaljenost niveau-

ploha dviju tačaka jest njihova visinska razlika. Na slici 1. prikazana je situacija koja nastaje prilikom opažanja vertikalnih kuteva uz gornje pretpostavke.



Sl. 1

A. i B položaj tačaka na fizičkoj površini zemlje

$\widehat{AB'}$ niveau ploha u tački A

B'' prividni položaj tačke B uslijed djelovanja terestričke refrakcije

δ kut što ga čine radiusi sfere koji polaze krajnim tačkama dužine u tački C. To su ujedno i normale na sferu.

$\frac{\delta}{2}$ kut što ga čine radiusi sfere koji prolaze krajnim tačkama dužine S na određenoj dužini S.

δ' kut što ga čine polumjeri, normale usvojenog kružnog luka terestričke refrakcije u tački c'

γ kut odklona težišnice

$r_a = \frac{\delta'}{2}$ kut između tangente i tetive koje pripadaju luku terestričke refrakcije i centralnom kutu δ' .

Taj kut na određenoj dužini dat će pomak tačke od njenog stvarnog položaja na fizičkoj površini zemlje do fiktivnog položaja u kojem se vidi tačka uslijed djelovanja terestričke efkcije.

Prema tome visinska razlika tačaka A i B dobija se izrazima

$$\Delta H_A^B = \Delta h + \Delta h_1 - \Delta h_2 \quad (1)$$

Ako se uvrste u formulu (1) odgovarajuće vrijednosti za Δh , Δh_1 i Δh_2 dobiju se već poznati izrazi za računanje visinskih razlika za slučaj jednostranog opažanja visinskih kuteva.

$$\Delta H_A^B = S \operatorname{ctg} Z_a + \left(\frac{1-k_a}{2}\right) \frac{S^2}{R} + i_a - l_b \quad (2)$$

analognim izvodom dobija se

$$\Delta H_B^A = S \operatorname{ctg} Z_b + \left(\frac{1-k_b}{2}\right) \frac{S^2}{R} + i_b - l_a \quad (3)$$

Međutim, ako se računaju visinske razlike iz obostrano opažanih kuteva na krajevima jedne strane dobija se

$$\Delta H = \frac{H_A^B - H_B^A}{2} = S \operatorname{tg} \frac{Z_a - Z_b}{2} + \frac{i_a - i_b}{2} + \frac{l_a - l_b}{2} \quad (4)$$

U ovoj formuli su eliminirani utjecaji zemljine zakrivljenosti i terestričke refrakcije. To uz pretpostavku, da je refrakcioni kut na jednom i drugom kraju jednak tj.

$$r_a = r_b \text{ ili } k_a \frac{S}{2R} = k_b \frac{S}{2R}$$

Međutim to nije gotovo ni u jednom slučaju isto. Ako se formula (2) diferencira dobija se izraz za računanje srednje pogreške visinske razlike.

$$dH = \frac{\delta H}{\delta z_a} da + \frac{\delta H}{\delta k} dk + \frac{\delta H}{\delta i} di + \frac{\delta H}{\delta l} ml_1 \quad (5)$$

pa će na osnovu toga biti:

$$m_H^2 = \frac{m_z^2}{\rho'^2} S^2 + m^2 \left(\frac{S^2}{R}\right)^2 + m_i^2 + m_l^2 \quad (6)$$

Iz formule (6) izlazi da utjecaj pogreške u mjerenju kuta i određivanje koeficijenta refrakcije raste sa dužinom strane. Pogreške u mjerenju visine instrumenta i signala ulaze u cjelini u visinsku razliku. Tač-

nost mjerenja svih ovih elemenata moći će se lako odrediti, kao i njihov utjecaj na tačnost mjerenih visinskih razlika, osim u slučaju koeficijenta terestričke refrakcije.

Veličina koeficijenta terestričke refrakcije može se odrediti na dva načina i to:

1. ako su poznate visinske razlike krajnjih tačaka određene geometrijskim nivelmanom, prema formuli:

$$k = 1 + \frac{2R}{S^2} \left[S \operatorname{ctg} Z_a - (H_B - H_A) + i - 1 \right] \quad (7)$$

2. ili iz obostrano mjerenih visinskih kuteva

$$k = 1 + \frac{R}{S} (\operatorname{ctg} Z_a - \operatorname{ctg} Z_b) + \frac{R}{S^2} \left[(i_a + i_b) - (i_a + i_b) \right] \quad (8)$$

Kako se vidi iz ovog kratkog prikaza, osnovne formule izvedene su na osnovu niza pretpostavki:

- a) da je zemlja kugla
- b) da je raspodjela slojeva zraka jednaka i u obliku koncentričnih lukova
- c) da je oblik krivulje terestričke refrakcije dio kružnog luka
- d) da su isti uvjeti na jednom i drugom kraju vizure, pa prema tome i kutevi refrakcije r_a i r_b
- e) da se utjecaj skretanja težišnice mijenja sa dužinom strane.

Sve ove pretpostavke imaju većeg ili manjeg utjecaja na tačnost određivanja visinskih razlika trigonometrijskim nivelmanom.

OPIS RADOVA NA KOJIMA JE VRŠENO ISPITIVANJE

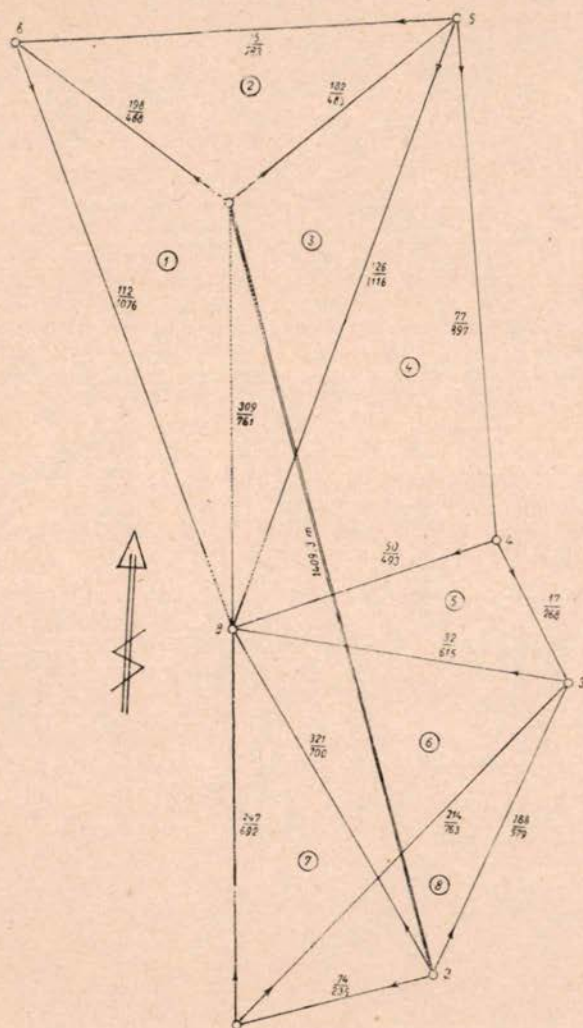
Uz pretpostavku da se mogu dobiti dobri rezultati pri mjerenju visinskih razlika samo u slučaju, ako su svi optimalni uvjeti prilikom rada usklađeni, izvedena su na dva zadatka posebno mjerenja visinskih kuteva. Pri tome je primjenjeno sve ono što je bilo moguće da bi se postigla tačnost mjerenja koja bi omogućila što tačniji uvid u bit promjene koeficijenta refrakcije na kratkim dužinama. Uz pretpostavku da će pogreške koje se mogu javiti pri mjerenju visinskih razlika u ovom slučaju, biti minimalne, postoji mogućnost da se tretiraju kao slučajne pogreške.

Na zadatku iskolčenja tunela za grupni vodovod Hvar i ispitivanja pomaka brane HE Peruča korištena je stabilizacija i podaci mikrotriangulacije koja je razvijena za tu svrhu. Dužine stranica jedne i druge triangulacije zadovoljavale su postavljenim uvjetima a priori.

U oba slučaja; mikrotriangulacija Hvar (sl. 2) i HE Peruča (sl. 3) prilikom mjerenja visinskih kuteva u IV mj 1960. g. te VI i XI mj. 1961. g. izvršena je signalizacija svih tačaka odjednom. Signali su ostajali na svojim mjestima dok nije bilo završeno cjelokupno opažanje. Skidani su jedino u slučaju zamjene sa instrumentom. Mjerenje je vršeno teo-

dolitom Wild T3 br. 8623. Opažać je u svim serijama bio isti. Za signale upotrebljene su značke tipa Zeiss.

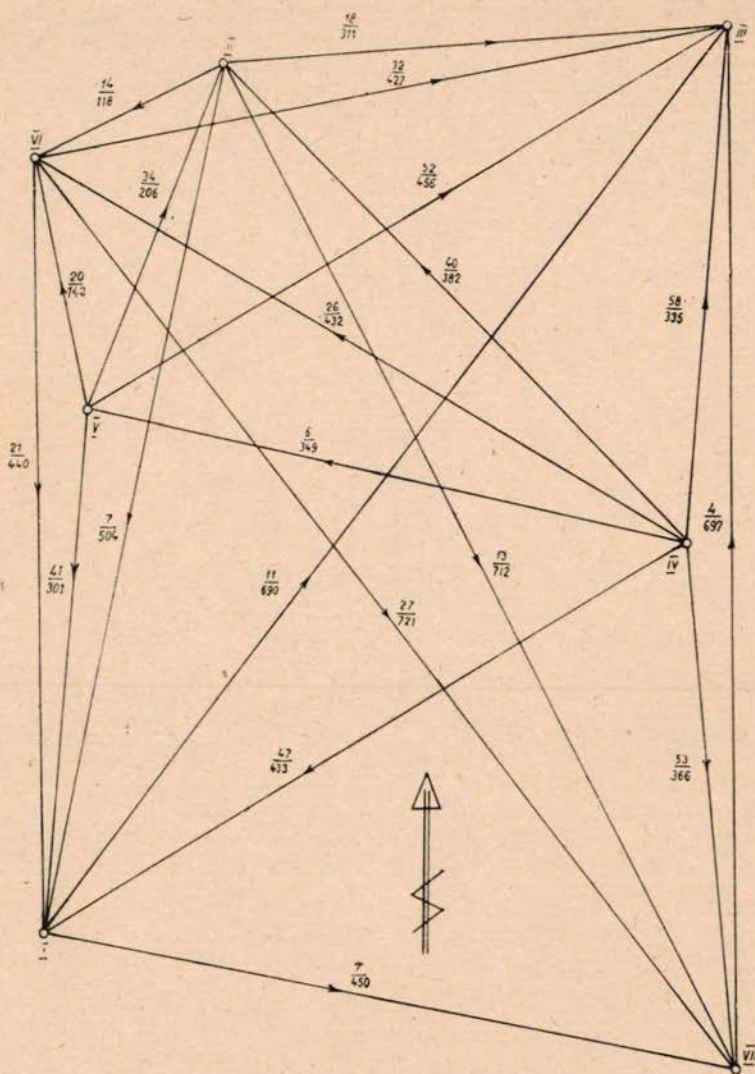
Pošto ovaj instrument nema nitni križ sa tri konca, opažanje je vršeno na tri različita mjesta značke.



Sl. 2.

Mjerenje visine instrumenta »i« i visine signala, u ovom slučaju l_1, l_2, l_3 vršeno je direktno kompariranim čeličnim metrom do na ± 1 mm. Mjerenja su izvršena u razna doba godine i pod bitno različitim uvjetima. Na svakoj stanici mjerena je temperatura zraka i temperatura terena na suncu i u hladu. Pri tome se rukovalo činjenicom, da na

temperaturu zraka u neposrednoj okolini instrumenta najviše utječe temperatura zemlje odnosno onaj sloj zraka koji je u neposrednom do-
diru sa terenom.



Sl. 3

Jedan i drugi objekat nalazi se u izrazito krševitom terenu, pa su promjene temperature česte i relativno velike. Frekvencija titranja je iznosila cca 15—20 titraja u sekundi. S obzirom na uvjete koji su postojali nije bilo ni u jednom slučaju »plivanja« vizure što predstavlja pojavu za sebe i o njoj se može govoriti samo u posebnim uvjetima.

Prilikom opažanja primjećeno je da titranje postaje brže u momentu kada nadolazi vjetar. Svakako bi bilo interesantno snimiti titranje cilja uz mjerenje temperature, brzine i pravca vjetra, i onda u kancelariji mjeriti interval maximum i minimum.

U oba slučaja mjerenje je vršeno preko cijelog dana. Prilikom opažanja na zadatku Hvar uočeno je da je titranje nezavisno o visini prolaza vizure nad terenom. Svakako je interesantna pojava, koja je primjećena prilikom opažanja, da i ako su sve dužine relativno kratke i može se pretpostaviti da na cijelom području vladaju isti klimatski uvjeti, titranje ciljeva nije bilo isto, ono se bitno razlikovalo od tačke do tačke.

OCJENA TAČNOSTI MJERENJA I DOBIJENIH REZULTATA

Mreža Hvar oslonjena je na jednu zadanu stranu $\triangle_0 6 - \triangle_0 8$, čije su kokordinate krajnjih tačaka date državnom triangulacijom IV reda. Izvršena je kontrola zadane dužine preopažanjem jednog trokuta. Dužine dobijene iz koordinata nakon izjednačenja kuteva reducirane su na elipsoid, i s njima su računane visinske razlike. Za definitivnu visinsku razliku uzeta je srednja vrijednost visinskih razlika dobijenih iz opažanja na l_1, l_2, l_3 .

Da se dobije ocjena tačnosti najvjerojatnije vrijednosti visinske razlike, izračunata je za svaku stanicu posebno, srednja pogreška pojedinog mjerenja i srednja pogreška aritmetičke sredine. Tako dobijenim podacima, a prema izrazu

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[M^2]}{n}} \quad (9)$$

sračunata je srednja vrijednost pogreške za sve visinske razlike i dobijeno je

$$\mu = \pm 2,8 \text{ mm}$$

Srednja slučajna pogreška a priori, dvostrukog nivelanja na jedinicu dužine prema formuli

$$M_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{D} \right]} \quad (10)$$

jednaka je

$$M_0 = \pm 2,2 \text{ cm/km}$$

Srednje pogreške visinskih razlika sračunate su prema formuli (6) i dobijeno je za

$$m_{\Delta h} = \pm 0,005 \text{ m}$$

$$M_{\Delta h} = \pm m_{\Delta h} \sqrt{2} = \pm 0,007 \text{ m}$$

Za izjednačenje formirano je 8 nezavisnih uvjeta. Nesuglasice su date u Tabeli I, a za usporedbu sa geometrijskim nivelmanom dodat je stupac φ_{\max} gdje je

$$\varphi_{\max} = 2\tau \sqrt{F}$$

tj. dozvoljeno odstupanje u zatvorenom poligonu preciznog geometrijskog nivelmana II reda.

Tabela I

$W_1 = + 2$ mm	2,3 km	$\varphi_{\max} = 3,8$ mm
$W_2 = - 4$ „	1,7	3,2 „
$W_3 = + 2$ „	2,4	3,9 „
$W_4 = \pm 0$ „	2,5	3,9 „
$W_5 = - 1$ „	1,4	3,0 „
$W_6 = + 4$ „	1,9	3,4 „
$W_7 = - 7$ „	1,6	3,1 „
$W_8 = + 6$ „	1,6	3,1 „

Srednja pogreška nakon izjednačenja računata prema formuli

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{k}}$$

jednaka je

$$m_0 = \pm 8,4 \text{ mm/km}$$

Dužina strana u prosjeku su 0,65 km međutim, najmanja strana jednaka je 235 m, a najduža 1116,3 m.

Da se dobije bolji uvid u tačnost, sračunate su nesuglasice za još 6 figura, pa smo dobili

$W_9 = \pm 0$ mm	3,2 km	$\varphi_{\max} = 4,4$ mm
$W_{10} = - 2$ „	3,1	4,4 „
$W_{11} = + 2$ „	2,6	4,0 „
$W_{12} = + 2$ „	2,2	3,7 „
$W_{13} = - 1$ „	2,1	3,6 „
$W_{14} = - 4$ „	4,5	5,3 „

Srednja pogreška na osnovu nesuglasica u zatvorenim figurama

$$m = \pm \sqrt{\frac{[WW]}{n}} = \pm 3,2 \text{ mm}$$

Srednja pogreška mjerenog kuta nakon reduciranja na jednu visinu iznosi

$$M = \pm 1,0$$

što se dobro slaže sa veličinom dobijenom kao srednjom pogreškom iz sva tri mjerenja.

Nakon izjednačenja ovako dobijenih visinskih razlika određena je visinska razlika stupova 2 i 7 tj. ulazne i izlazne tačke tunela

$$\Delta h = 11,695 \text{ m.}$$

Međutim, visinska razlika dobijena geometrijskim nivelmanom iznosi

$$\Delta h = 11,698 \text{ m.}$$

Kako se vidi njihova razlika je svega 3 mm na dužini od cca 2 km odnosno u pravcu i na ravnini 1.409 m. Ako se u ovom slučaju poslužimo formulom za dozvoljenu razliku preciznog nivelmana II reda prema pravilniku

$$\Delta = 8 \tau \sqrt{L}$$

gdje je $\tau = 1.5$ dobijemo za ovu dužinu dozvoljeno odstupanje nivelanja napred-natrag

$$\Delta = 8 \times 1.5 \sqrt{2.0} = 16,8 \text{ mm}$$

Mikrotrigonometrijska mreža za potrebe opažanja pomaka brane HE Peruča (sl. 3) računata je u proizvoljnom koordinatnom sistemu čija jedna os prolazi stranom III—VII. Da bi dobili dužinu početne strane, na kruni brane izmjerena je jedna osnovica ivarnom vrpcom.

Analiza tačnosti i opis radova za mrežu HE Peruča dat je u članku »Prilog povećanja tačnosti trigonometrijskog određivanja visinskih razlika«. (G. L. 1962—10—12).

KOEFICIJENT REFRAKCIJE I VELIČINA REFRAKSIONOG KUTA

Koeficijenti refrakcije i refrakcioni kutevi računati su na svakom stajalištu za svaku visinu l_1, l_2, l_3 . Jednom su računati za slučaj jednostranog opažanja, po formuli (7), pa su dobijeni k_a i k_b , koji predstavljaju sredinu iz tri vrijednosti dobijenih za l_1, l_2, l_3 na krajnim tačkama strana. Drugi put je računato prema formuli (8) uz pretpostavku, da su opažanja vršena jednovremeno sa obe stanice.

U tabelama II i III dat je pregled vrijednosti koeficijenata refrakcije i reakcionarnog puta za prvu i drugu seriju opažanja na Peruči. Na krajevima stupaca date su srednje vrijednosti za k kao i srednje pogreške dobijenih veličina. Pri ovim računanjima nije uzeta u obzir težina, pošto su sve stranice kratke, a i relativno se međusobno malo razlikuju.

U tabeli IV dat je pregled dobijenih vrijednosti koeficijenata refrakcije za mikrotriangulaciju na Hvaru. U ovom slučaju se vidi da je kolebanje mnogo jače, ne samo po apsolutnim vrijednostima već i po predznaku.

Pošto su stupovi I, III, IV i VI u mreži mikrotriangulacije Peruča nivelirani i geometrijskim nivelmanom, izvršeno je računanje koeficijenata refrakcije i refrakcionog kuta kao i naknadno računanje visinskih razlika i na osnovu ovih podataka.

U tabeli V dat je pregled rezultata za I i II seriju.

S obzirom da su kratke dužine, a član $\frac{2R}{4^2}$ je velik, onda i manja promjena koja nastaje u zagradama formule (7) mnogo mijenja vrijednost k ili r .

Očite su velike razlike u vrijednostima za koeficijente refrakcije k kao i za pripadajuće refrakcione kuteve r .

Prema tome i ako smo imali dobro slaganje rezultata trigonometrijskog i geometrijskog nivelmana, odraz makar i manjih razlika na veličinu k i r bio je velik.

Ovdje je potrebno napomenuti da su vrijednosti u tabelama II, III, IV i V dobijene kao proste aritmetičke sredine iz tri veličine za k i r dobijene za svaku visinu l_1, l_2, l_3 posebno. Bilo je za očekivati da će se ovako dobijene vrijednosti za k i r na jednoj stanici razlikovati veoma malo. U granicama pogrešaka mjerenja. Međutim, ove razlike su relativno velike. Za tabelu V one se kreću u granicama, za k do 1,2 za r do 10" dok u srednjem za k 0,4 a za r 4".

Za tabelu II i III razlike su u srednjem za k 0,03 a za r 0"4.

Tabela II

	k_a	r''_a	k_b	r''_b	$\frac{k_a+k_b}{2}$	k_a-k_b
I—VII	+0.126	0.92	+0.112	0.82	+0.119	+0.014
I—VI	+0.150	1.07	+0.137	0.97	+0.143	+0.013
I—II	+0.154	1.25	+0.139	1.14	+0.147	+0.015
I—V	+0.165	0.81	+0.131	0.64	+0.148	+0.034
I—IV	+0.157	1.10	+0.138	0.97	+0.148	+0.019
III—II	+0.092	0.47	+0.059	0.30	+0.075	+0.033
VII—IV	+0.144	0.85	+0.115	0.68	+0.129	+0.029
VII—III	+0.129	1.46	+0.141	1.59	+0.134	-0.012
IV—II	+0.139	0.86	+0.116	0.72	+0.127	+0.023
IV—III	+0.125	0.68	+0.072	0.39	+0.099	+0.053
II—VI	+0.159	0.30	(-0.258)	(-0.57)	-0.049	+0.417
II—V	+0.121	0.28	+0.043	0.23	+0.082	+0.078
V—VI	(-0.315)	(-0.161)	(-0.211)	(-0.058)	(-0.263)	-0.104
III—V	+0.053	0.53	+0.124	1.22	+0.086	-0.071
II—VII	+0.135	1.57	+0.149	1.73	+0.142	-0.014
VI—VII	+0.156	1.77	+0.136	1.55	+0.147	+0.020
I—III	+0.112	0.96	+0.158	1.32	+0.135	-0.046
III—VI	+0.144	1.00	+0.165	1.15	+0.154	-0.021
IV—VI	+0.099	0.93	+0.107	0.62	+0.103	-0.008
IV—V	-0.169	0.92	+0.155	0.84	+0.162	+0.014
	+0.110		+0.087		+0.117	
M	± 0.055		± 0.044		± 0.011	

Tabela III

	k_a	r''_a	k_b	r''_b	$\frac{k_a - k_b}{2}$	$k_a + k_b$
I—VII	+0.138	1.01	+0.069	0.50	+0.102	+0.069
I—VI	+0.151	1.07	+0.154	1.09	+0.153	-0.003
I—II	+0.149	1.22	+0.133	1.09	+0.141	+0.016
I—V	+0.432	2.10	+0.107	0.52	+0.269	+0.325
I—IV	+0.103	0.72	+0.083	0.58	+0.093	+0.020
III—II	+0.109	0.39	+0.116	0.59	+0.112	-0.007
VII—IV	+0.156	0.92	+0.163	0.97	+0.159	-0.007
VII—III	+0.214	2.28	+0.141	1.59	+0.178	+0.073
IV—II	+0.123	0.76	+0.136	0.85	+0.129	-0.013
IV—III	+0.125	0.68	+0.138	0.75	+0.132	-0.013
II—VI	+0.387	0.74	+0.122	0.27	+0.254	+0.265
II—V	+0.156	0.55	+0.165	0.43	+0.160	-0.009
V—VI	(-0.143)	0.98	(-0.337)	1.88	(-0.240)	-0.194
II—V	+0.048	0.45	+0.121	1.25	+0.084	-0.073
II—VI	-0.025	0.30	+0.146	1.69	+0.060	-0.121
VI—VII	+0.167	1.89	+0.130	1.48	+0.148	+0.037
I—III	+0.153	1.28	+0.122	1.41	+0.138	+0.031
III—VI	+0.139	0.97	+0.179	0.92	+0.159	-0.040
IV—VI	+0.114	0.70	+0.123	0.75	+0.118	-0.009
IV—V	+0.176	0.95	+0.222	1.20	+0.199	-0.046
	± 0.144		± 0.112		± 0.147	
					± 0.011	

Tabela IV

	k_a	k_b	$k_a - k_b$
6—5	+0.206	+0.362	-0.156
6—7	+0.257	+0.206	+0.051
6—8	-0.057	-0.657	+0.600
7—5	-0.487	-0.326	-0.161
7—8	+0.003	-0.122	-0.125
5—4	-0.193	-0.104	-0.089
5—8	+0.073	-0.271	+0.344
4—3	-1.073	-1.191	+0.118
4—8	-0.214	-0.644	-0.430
2—8	-0.491	-0.743	+0.352
2—3	+0.215	-0.343	+0.558
2—9	-1.771	-1.001	-0.770
9—8	-0.569	-0.188	-0.381
9—3	-0.239	+0.016	-0.255
3—8	+0.427	+0.359	+0.068

U tabeli IV ove razlike su mnogo veće i po apolutnim vrijednostima i po predznaku. Dok su razlike vrijednosti na pojedinim stanicama za k u srednjem 0.70. Ovo se može opravdat u slučaju mikrotriangulacije Hvar s obzirom na veoma strme i kratke vizure gdje mnogo utječe tačnost dužine stranice, a naročito nagle promjene u slojevima zraka kroz koje prođe vizura s obzirom na njen strmi hod, odnosno na kut upada među slojeve različite gustoće.

Tabela V

I serija				
	k_a	r''_a	k_b	r''_b
I—VI	+0.126	+0.90	+0.535	+3.80
I—III	+0.462	+5.16	+0.183	+2.05
I—IV	-0.590	-4.14	-0.435	-3.14
III—VI	-0.418	-2.89	-0.252	-1.75
IV—VI	+0.079	+0.56	+0.038	+0.26
IV—III	+0.694	+3.77	-0.479	-2.06
II serija				
I—VI	+0.326	+2.32	+0.262	+1.87
I—III	+0.599	+6.70	+0.329	+3.68
I—IV	-0.013	-0.09	+0.153	+1.08
III—VI	-0.573	-3.96	+0.583	+4.03
IV—VI	+0.729	+5.09	-0.150	-1.05
IV—III	+0.737	+4.01	-0.058	-0.31

ANALIZA

Postignuti rezultati u usporedbi sa geometrijskim nivelmanom omogućuju, da se sa većom sigurnošću analizira trigonometrijsko određivanje visinskih razlika kao i kolebanje koeficijenta refrakcije na dužinama manjim od 1 km.

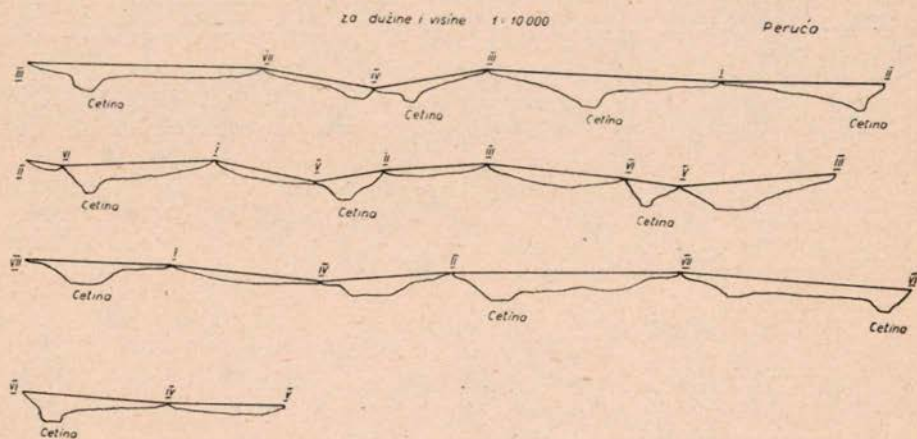
Potrebno je ovdje napomenuti, da ova mjerenja nisu vršena isključivo u cilju što tačnijeg određivanja koeficijenta refrakcije i njegovog ispitivanja ili posebno visinske razlike. Nisu vršena brojna mjerenja preko cijelog dana ili u nizu dana na jednoj ili na par izabranih strana, pa da bi se dobila srednja vrijednost, od koje se zaista s pravom mogu očekivati dobri rezultati za određene uvjete.

Iskorištena su opažanja na praktičnim zadacima, koja su izvršena u posebnim uvjetima i posebnom pažnjom, ali uz uobičajen plan i metodu mjerenja.

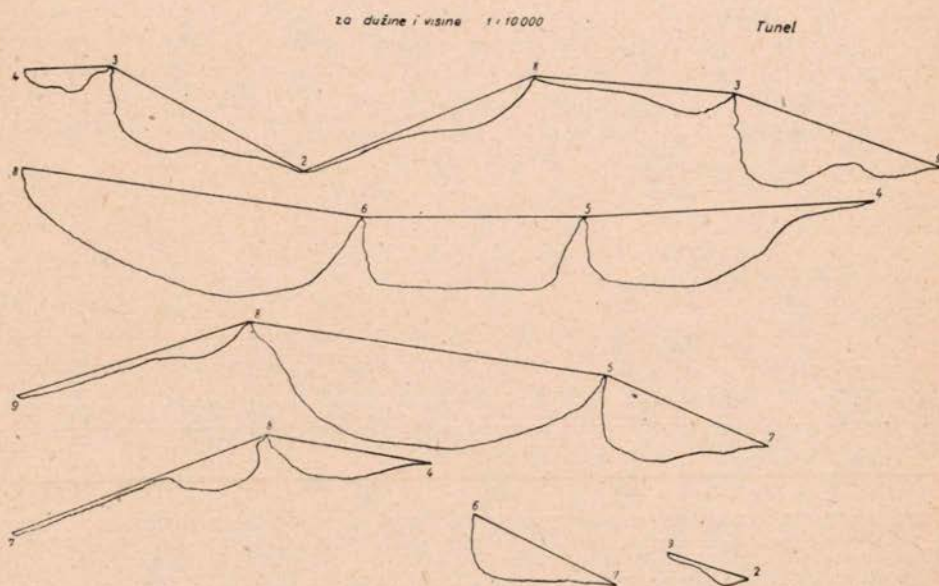
Vidi se da mimo relativno velikih razlika u vrijednosti samog koeficijenta, a i razlika od onog usvojenog, dobijene visinske razlike mogu zadovoljiti kriterij geometrijskog nivelmana.

Iako je prilikom mjerenja bilježena na svakoj stanici temperatura i insolacija, nakon sračunatih vrijednosti za k nije bilo moguće uspostaviti neku uzročnu vezu između ove dvije veličine. Makar je promjena u temperaturi bila relativno velika. Utjecaj blizine terena odnosno konfiguracija uzdužnog presjeka samo je u nekim slučajevima opravdalo do sada poznate pretposavke.

Da bi se bolje uočili ovi utjecaji, dati su na sl. 4 uzdužni profili za svaku stranu za triangulaciju Hvar, a na sl. 5 za triangulaciju Peruče.



Sl. 4



Sl. 5

Može se lako vidjeti da promjene koeficijenta refrakcije nisu u skladu sa već poznatim zakonima i da se ne može odrediti neko pravilo po kome se te promjenedešavaju.

Analizirajući uzroke tih promjena moglo se doći do zaključka da svi vanjski utjecaji ostaju u granicama tačnosti koja bi za ove slučajeve bila granična vrijednost prema dozvoljenim odstupanjima za geometrijski nivelman. Relativno velike promjene među vrijednostima za koeficijente na pojedinim stanicama ne može se tražiti u promjeni vanjskih uvjeta: temperaturi, vlazi, pritisku, vjetru, položaju sunca i sl., jer su mjerenja trajala svega do max 3 min. Iako pod utjecajem vjetra, zrak naglo mijenja svoje karakteristike, što se može i pratiti prilikom opažanja, a što se odražava u vidljivosti, treperenju, smirivanju lika cilja, i u naglom bježanju u viziranog cilja sa konca durbina, ipak te promjene nisu mogle izazvati takve razlike korespondentnih koeficijenata i refrakcionih kuteva.

Analizirajući mjerene podatke u formularu br. 1. V., tj. samo mjerenje kuteva, može se doći do zaključka o promjeni horizonta u toku opažanja. Iz razlika

$$2 \text{ (H. V.)} = \text{KL} + \text{KD}$$

koje u prosjeku iznose za opažanja na Perući 3" a za Hvar i do 5", može se u očit, da i mimo ovako sigurnih stajališta postoji mogućnost pomicanja libele u samom intervalu opažanja, na koje redovito ne obraćamo pažnju. Zato se u literaturi preporuča ako je instrument snabdjeven cjevastom libelom, da se čitaju krajevi libele.

Ove promjene u horizontu izazvale su i adekvatne promjene u visinskim razlikama, koje dosižu i po nekoliko mm. S obzirom na kratke dužine ove promjene su izazvale i neminovno povećanje kolebanja terestričke refrakcije. Na vrijednost računate visinske razlike kao sredine nivelanja iz dva pravca, ova pojava nema utjecaja, jer se poništava ukoliko je ta promjena na jednom i drugom ista. Na većim dužinama, ovaj utjecaj je manji ili ga gotovo i ne osjećamo, ukoliko promjena horizonta ili zenita ostaje u ovako malim granicama.

Ovo se može uzeti u obzir samo u slučaju ako ocjena tačnosti mjerenja a priori daje zadovoljavajući rezultat.

Postavlja se pitanje koliko je onda opravdana pretpostavka da se jednovremena opažanja na raznim stanicama vrše pod istim vanjskim uvjetima. Koliko je to moglo naći izvjesnog opravdana kod kratkih to ni u kom slučaju nije održivo na duljim stranama.

Ako se uzme u obzir sve ono što utječe na veličinu, odnosno promjenljivost koeficijenata refrakcije, onda ima malo izgleda da na dva mjesta koja su udaljena po nekoliko kilometara jedno od drugog u isto vrijeme vladaju isti uvjeti.

Jedino što se od toga može očekivati jest da u određenim uvjetima razlika

$$k_a - k_b$$

bude što manja. Mjerenja pokazuju da će te razlike biti manje ukoliko su mjerenja kuteva tačnija.

Koeficijent refrakcije se dobija kao najvjerojatnija vrijednost iz određenog broja mjerenja, pa je jasno da će njegova veličina dobijena iz većeg broja mjerenja biti i sigurnija, a onda će i ove razlike biti manje. Za veličine ovih razlika nemogu se odrediti granice, jer su funkcije raznih i nepoznatih uvjeta.

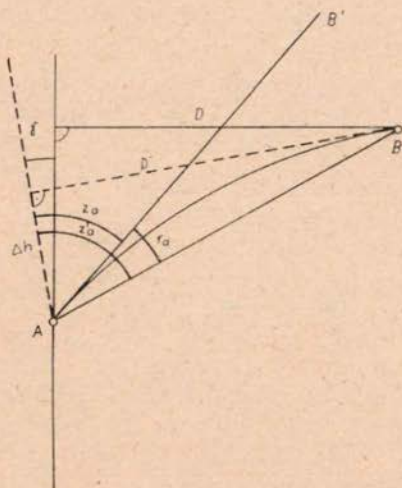
U formulama za računanje visinskih razlika nema člana za utjecaj skretanja težišnice ili razlika između geoida i elipsoida odnosno referenc elipsoida. Kolikogod su ti utjecaji mali oni ipak postoje i zavise od vidljive i nevidljive konfiguracije terena.

Moglo bi se očekivati da će do stanovite mjere doći do izražaja skretanje vertikalna u računanje visinskih razlika, nakon popravljenih visinskih kuteva sa odgovarajućim refrakcionim kutem.

Ako se sa sračunatim refrakcionim kutevima uz odgovarajući koeficijent k_a i k_b prema formuli

$$r_a = k_a \frac{S}{R^2} \quad \text{i} \quad r_b = k_b \frac{S}{2R}$$

popravi opažana zenitna udaljenost z_a (α) odnosno z_b (β) dobit će se prava zenitna udaljenost (sl. 6).



Sl. 6

Sračunate visinske razlike tamo i natrag morale bi dati iste vrijednosti, odnosno razlike

$$d = u + p$$

u = visinska razlika u usponu

p = visinska razlika u padu

morale bi ostati u granicama tačnosti mjerenja, a nesuglasice u zatvaranju figura kretale bi se u okviru zakona slučajnih pogrešaka.

Međutim, nakon ovako popravljenih opažanih kuteva u I seriji mjerenja i sračunatih visinskih razlika, te formiranja figura, nesuglasice su u nekim slučajevima prešle veličine koje su se mogle očekivati s obzirom na gornju analizu. Ovu pojavu se može pripisati otklonu težišnice kako to prikazuje slika 6.

Prema formuli za visinsku razliku nakon popravljenog kuta dobija se

$$\Delta h = S \operatorname{ctg} z'_a = S \operatorname{ctg} (z_a + r_a)$$

Iz slike je očito da će otklon vertikalna mijenjati i visinsku razliku. O veličini i smjeru otklona težišnice može se zaključivati iz razlika nivelanja napred-natrag i iz nesuglasica u zatvaranju figura. Međutim, poznavanje vrijednosti γ samo na jednoj tački mreže olakšalo bi određivanje iste veličine na svim drugim vrhovima trokuta odnosno krajevima strana.

Prema dosadašnjim iskustvima očekivalo se da će pozitivne vrijednosti razlika nivelanja napred-natrag biti u većini. Međutim, u slučaju Hvar od 45 razlika 37 je negativnih, a u slučaju Peruča u 120 slučajeva ukupno za obe serije mjerenja, negativnih je 73. Svakako da je ovo relativno malen broj mjerenja za neko pouzdano zaključivanje, ali s obzirom da je rad vršen posebnom pažnjom i u posebnim uvjetima može im se dati određena težina.

Ako bi ova pojava bila izazvana nereálnim usvojenim $k = 0.13$ onda bi prema dosadanjem iskustvu, a pošto naša opažanja vršimo kroz cijeli dan, mogli upravo očekivati koliko pozitivnih toliko i negativnih razlika.

Na veličinu visinske razlike u usponu utječe i činjenica da u tom slučaju zraka prelazi iz gušćih slojeva u kojima je i lom same zrake veći nego u obratnom slučaju. Tim prije, što se došlo do zaključka da temperaturni gradijent zavisi o temperaturi zemlje; a najmanja vrijednost za k jest kod maksimalne i minimalne temperature zemlje.

U ocjeni ovih razlika, potrebno je voditi računa i o mjestu do kojega se mjeri visina instrumenta. U praksi se to mjesto obično mehanički uzima do vijka koji makar na izgled određuje mjesto stjecišta vizurne osi i obrtne osi durbina. Kako ta veličina nema utjecaja na visinsku razliku dobijenu kao srednju vrijednost opažanja u oba smjera, to se obično i njeno ispitivanje zanemaruje.

Međutim, moglo bi se lako pretpostaviti da je i to jedan od uzroka sistematske pogreške u ocjeni iz dvostrukih mjerenja. Ispitivanjem kod Wilda T3 ustanovilo se je, da se pravo mjesto stjecišta vizurne osi i obrtne osi durbina nalazi za 4 mm iznad vijka do kojega se obično mjerila visina instrumenta.

Srednje pogreške za koeficijent refrakcije koje su dane na krajevima stupaca u tabelama II i III dobijene su na osnovu odstupanja od srednje vrijednosti, prema već poznatim formulama. Ta bi vrijednost

više predstavljala kolebanje samog koeficijenta nego njegovu pravu srednju pogrešku koju se može sračunati po formuli za obostrana opažanja

$$m_k = \pm \sqrt{\left[\frac{R}{\rho'' S} m (Z_a + Z_b) \right]^2 + \left(\frac{R}{S^2} m_{i,1} \right)^2} \quad (11)$$

Ako se uzme za

$$m_{za} = m_{zb} = 0''.78 \quad a$$

$$m_i = m_l = 1 \text{ mm}$$

Za srednju dužinu 424 m u mikrotriangulaciji Peruča dobije se da je

$$m_k = \pm 0,082$$

Dok po formuli za računanje k iz jednostranog opažanja

$$m_k = \pm \sqrt{\left(\frac{2R}{S \rho''} m_{za} \right)^2 + \left(\frac{2R}{S^2} m_{i,1} \right)^2} \quad (12)$$

dobije se

$$m_k = \pm 0,150$$

Ocjena pogreške koeficijenta refrakcije na osnovu formule (12) svakako je nepovoljnija od one prema formuli (11) radi kratkih strana i brojnika koji se odnose u omjeru 1 : 2.

ZAKLJUČAK

Iz obrade mjerenih podataka kao i analize cjelokupnog rada vidi se, da koeficijent refrakcije nije stalna veličina. Rezultati ispitivanja mogu samo odrediti njegovu promjenljivost u okviru, dana, dužine, sezone, u uvjetima mikrokline, konfiguracije i slično. S obzirom da kod trigonometrijskog nivelanja u iole tačnijim radovima od kojih se očekuju pouzdaniji rezultati, obavezno se računaju visinske razlike iz obostranog opažanja, veličina samog koeficijenta nije niti potrebna. U ovom slučaju važno je naći mogućnost ocjene pogreške koja se pojavljuje kada uzimamo da je

$$k_a = k_b$$

Inače je realna tačnost veličine koeficijenta važna samo u slučaju jednostranog opažanja.

Promjenom veličine koeficijenta može se samo mijenjati odnos pozitivne i negativne visinske razlike. Prema tome njegova nesigurnost dolazi do punog izražaja u ocjeni tačnosti a priori prema formuli (10) i poprima karakter sistematske pogreške, koja se onda u izvjesnim uvjetima može i odrediti.

Povećanje tačnosti određivanja visinskih razlika ovom metodom, kako pokazuju i druga ispitivanja, zavisi o tačnosti mjerenja visinskih kuteva, visine instrumenta i signala, a sigurno da bi povećanju tačnosti doprinijelo i poznavanje skretanja težišnice.

Unutarnja tačnost koja je dobijena u ocjeni ovih radova ukazuje da samo kolebanje koeficijenta refrakcije i razlika njegove realne vrijednosti od one usvojene nema bitnog utjecaja na određivanje visinskih razlika.

Međutim, pošto je poznavanje veličine koeficijenta refrakcije potrebno i u druge praktične i naučne svrhe najbolje je i najsigurnije, da se za određeni teren ili zadatak nađe karakteristična baza za koju bi se odredila njegova veličina koja bi vrijedila za određeni teren, zadatak i određene uvjete. Slično su napravili italijanski stručnjaci i odredili koeficijente refrakcije za pojedine provincije u Italiji i dobili: npr.: za provinciju Lazio $k = 0.155$ a za Campaniu $k = 0.118$. Ta veličina je za Chiemgauer Alpe $= 0.1304$, Shwezer $k = 0,105$, Isartal $k = 0.204$. [11] Bauernfeind je u svojim radovima dokazao, da se sa povećanjem apsolutne visine veličina k smanjuje, a kod računanja refrakcionog kuta na krajevima strana dobiju se razlike ($125'' - 92''$, $39'' - 95''$... na dužinama 10—20 km. [11]. Slični postupak kao i kod barometrijskog mjerenja visina.

Danas, kada je triangulacija IV reda gotovo završena, problem trigonometrijskog nivelanja na kratkim dužinama svakako je interesantan.

U ovakvom slučaju postavlja se pitanje do koje mjere može utjecati mikroklima na rezultate opažanja.

Pretpostavlja se, da se slojevi zraka prilagođavaju konfiguraciji terena, po obliku, a s tim u vezi i temperaturom, a onda i svojom gustoćom. Ako se uoči činjenica, da lom zrake počne neposredno pri izlazu iz durbiņa, a cilj se vidi u smjeru tangente na luk, čiji smo oblik pretpostavili prema Bouguer-Biotovoj teoriji, onda možemo utjecaj slojeva dalje od stajališta zanemariti. Najidealniji slučaj bio bi prolaz vizure kroz zrak istih uvjeta. Na ovo nas djelomično upućuje poznata činjenica, da je u podnevnim satima kolebanje refrakcije najmanje, tj. onda kada je već došlo do ravnoteže između zraka i zemlje. Sličan je zaključak V. Boccara-e, da je za oblačnih dana promjena koeficijenta manja.

Pomicanje vizure u najniže slojeve koliko u ravninama, toliko u vodi i moru izbjegava se. Međutim, samo u tim uvjetima je moguće na cijeloj dužini mjeriti temperaturni gradijent i ispitati sve uvjete mikroklimе, a onda i tačno odrediti zavisnost refrakcione krivulje od temperature, pritiska i sl. Koliko mi je poznato kod nas je napravljen prvi put sličan pokušaj u IX mj. 1955 g. na potezu Punta Marjana—Trogir i na još par pravaca u Kaštelanskom zaljevu, u suradnji sa Hidrografskim institutom JRM i Hidrometeorološkim zavodom Hrvatske u Splitu. Za ova mjerenja bile su izrađene i posebne letve u radionici »Geomehnika« Zagreb.

Sadržaj

U prvom dijelu članka dat je kratak pregled tačnosti trigonometrijskog nivelmana. Bez izvoda, date su glavne formule, koje su već poznate, za računanje visinskih razlika, kao i za ocjenu tačnosti.

U kratkim crtama opisani su radovi na kojima se vršilo mjerenje vertikalnih puteva u cilju razmatranja kolebanja koeficijenta terestričke refrakcije na kratkim dužinama. Kod ocjene tačnosti dobijenih rezultata, A. se poslužio usporedbom sa geometrijskim nivelmanom, uz uobičajene formule za računanje srodnih pogrešaka kod trigonometrijskog nivelmana.

Za sve opažane pravce u oba zadatka sračunate su vrijednosti za koeficijent refrakcije kao i refrakcioni kut. Rezultati su dati u tabelama. Analizom je utvrđeno, da mimo relativno velikog kolebanja samog koeficijenta, unutarnja tačnost je zadovoljavajuća. Analizirani su uzroci koji utječu na ocjenu tačnosti a priori.

LITERATURA:

- [1] Bonifacino: Uno sguardo alle teorie ed ai lavori sulla rifrazione terrestre in Italia in mezzo secolo R. C. 57/3.
- [2] Bonifacino: Studio meteorologico del coefficiente di rifrazione marino a Bari-Palese.
- [3] Bonifacino: Sul coefficiente di rifrazione terrestre L' universo 1943/7.
- [4] Bošković: Srednje odstupanje pri trigonometrijskom određivanju visina G. L. 53/9—10.
- [5] Braum: Die Gewichtsverteilung bei der Ausgleichung eines trigonometrischen höhennetzes A. V. N. 56/5.
- [6] Činklović: O ispitivnju koeficijenta refrakcije u Crnoj Gori G. L. 54/5—8.
- [7] Čubranić: Trigonometrijsko mjerenje visina i njegova praktična upotreba. (GL. 194).
- [8] Čubranić: Tačnost visinskog povezivanja otoka trigonometrijskim nivelmanom G. L. 56/3—4, 5—6.
- [9] Horvat: Razmatranja o izjednačenju trigonometrijskih određenih visina HD. Izmjera 42/10—11.
- [10] Hartl Über mittlere refractions-koefizienten Mitteilungen M. G. I. 1884.
- [11] Hofmann: Studien zur trigonometrischen höhenmessung im Gebirge »A. der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Heft 70«
- [12] Jordan-Eggert: Handbuch der vermessungskunde 11/2.
- [13] Finsterwalder: Über Art und genauigkeit von trigonometrisch bestimmten Höhen Z. f. V. 51/5.
- [14] Klak-Petković: Ispitivanje pomaka brane HE Peruča. (G. L. 1961/1-3).
- [15] Köhr: Über den Einfluss körperlicher ziele auf die Ergebnisse der trigonometrischen Höhenmessung A. V. N. 56/4.
- [16] Kobold: Höhenwinkelmessung, Lotabweichungen und Meereshöhen Z. F. V. 55/8.
- [17] Koppe: Trigonometrische Höhenmessung zur Tunneltriangulation Z. F. V. 1876/4.
- [18] Woicke: Trigonometrische Höhenmessung A. V. N. 39/7.