PRAKTIČNA ISKUSTVA U RADU S WILD DISTOMAT DI 10

Eduard KRIŽAJ — Zagreb

(Nastavak)

IZJEDNAČENJE CENTRALNOG SISTEMA SA SVIM MJERENIM VELIČINAMA — U dosadašnjim razmatranjima oslanjali smo se na rezultate dobivene u ravnini projekcije računajući s reduciranim koordinatama, što nas može zadovoljiti samo u zahtjevima ograničene točnosti. Treba, naime, imati na umu, da se samo ograničeni dio zemljine površine može preslikati s unaprijed određenom točnošću. U skladu sa zakonima preslikavanja elipsoida na ravninu u Gauss-Krügerovoj projekciji, koja je kod nas usvojena, moramo sve dužine popraviti za iznos redukcije na ravninu projekcije.

U našem se primjeru ova korekcija mogla zanemariti, jer joj vrijednost ne prelazi 2 mm za bilo koju dužinu. Ovo slijedi odatle, što se naš čitav centralni sistem nalazi oko 11 km zapadno od srednjeg meridijana 5. zone.

Bez obzira, što je redukcija dužina uslijed preslikavanja s elipsoida na ravninu zanemariva, ostaje činjenica, da se ne mogu uspoređivati mjerene dužine s onima dobivenim iz reduciranih koordinata.

Zbog toga je potrebno za radove gdje se traži veća točnost izvršiti računanja s nereduciranim koordinatama. U našem slučaju to se odnosi na usporedbu rezultata dobivenih iz presjecanja pravaca i presjeka lukova. Izračunat ćemo radi toga koordinate točke »A« još jednom iz nereduciranih koordinata trigonometara i mjerenih dužina popravljenih za iznos korekcije uslijed deformacije preslikavanja (što je u našem slučaju radi prednjeg obrazloženja zanemareno).

	Nereducirane koordinate		Dužine
	Y	X	
213	—11 971,12	4 997 338,21	a = 884,037
219	—11 866,07	4 996 252,38	d = 1140,678
214	—12 688,72	4 996 576,06	f = 1083,761
A_0	—12 196,89	4 997 064,34	
dy; dx	—0,08	+ 0,11	
A	—12 196,97	4 997 064,45	

U cjelokupnom računu mjenjat će se samo slobodni članovi, pa će jednadžbe popravaka glasiti:

$v_e = -0{,}820\,dx - 0{,}572\,dy + 0{,}075 = -0{,}032$ m

$v_b = +0{,}926\,dx - 0{,}377\,dy - 0{,}128 = +0{,}007$ m

$v_c = +0{,}705\,dx + 0{,}710\,dy + 0{,}011 = +0{,}029$ m

Adresa: Eduard Križaj, dipl. inž. — Zagreb, Cvetkovićeva 10/II

Nakon uobičajenog računanja dobiju se popravci koordinata točke »A«

$dy = -0{,}084$ m $\qquad dx = +0{,}111$ m

Na poznati način iz jednadžbi popravaka dobivaju se konačne dužine:

$e = 394{,}721 + 0{,}032 = 394{,}753$ m
$b = 876{,}895 + 0{,}007 = 876{,}902$ m
$c = 693{,}936 + 0{,}029 = 693{,}065$ m

Reducirane koordinate točke »A« nakon ovoga računanja glase:

»A« $y = 5\,487\,804{,}25 \qquad x = 4\,996\,564{,}74$

Na osnovi ovih podataka mogli bi analognim postupkom izvršiti usporedbu rezultata, pri čemu bi konačne ocjene bile oslobođene utjecaja smanjenja mjerila i deformacija dužina pri preslikavanju s elipsoida na ravninu projekcije. Ovo se također odnosi i na međusobni položaj zadanih trigonometara. Kako je već rečeno, o ovim ćemo činjenicama voditi računa onda, kada to razlozi u pogledu točnosti zahtijevaju. Osvrnimo se sada ponovno na naš centralni sistem.

Kako u naprijed izjednačenom slobodnom sistemu imamo mjerene sve dužine (mi smo usvojili pretpostavku, da je zadana samo dužina a), to nikako ne možemo smatrati zadanom, apsolutnom niti jednu od njih. Moramo dozvoliti mogućnost, da se čitav sistem, tj. i pravci idužine istovremeno izjednače. U takvom će izjednačenju i pravci i dužine pretrpjeti izvjesne popravke, a rezultat tog izjednačenja najviše će se približiti stvarnoj vrijednosti mjerenih veličina. Ovaj ćemo zadatak riješiti metodom uvjetnih opažanja. Kako svako prekobrojno mjerenje daje jedan novi uvjet, to ćemo u ovom slučaju imati ukupno 9 uvjetnih jednanžbi: 3 figurne i 6 uvjeta strana isinusa (nazovim oih tako). Figurne uvjete možemo preuzeti iz prethodnog računanja.

Uvjeti sinusa i strana proistječu iz poznatog odnosa strana i sinusa nasuprotnih kutova. Tako za naš trokut, kojega čine strane a, b i c možemo postaviti:

1. $\dfrac{b \text{ isn } (12-11)}{a \sin (6-5)} = 1 \qquad$ 2. $\dfrac{c \sin (12-11)}{a \sin (8-7)} = 1 \qquad$ 3. $\dfrac{b \sin (8-7)}{c \sin (6-5)} = 1.$

Za svaki trokut možemo postaviti tri ovakva izraza, tj. za naš slučaj ukupno devet. No pogledamo li tri gornja izraza može se uočiti, da je izraz 3. sadržan u prva dva. Podijelimo li izraz 1. s izrazom 2., dobit ćemo izraz 3.

Ako tako postupimo sa svim trokutima preostat će samo šest ovih uvjeta. Uvjet sinusa također ne možemo postaviti kao nezavisni uvjet, jer kad bi međusobno izmnožili uvjete sinusa i strana za strane b, c, e (strane, koje se sutiču u polu, tj. točki »A«), dobili bi izraz identičan sinusnom uvjetu.

Na temelju uvjetnih jednadžbi strana i tri uvjetne jednadžbe figura, koje su se preuzele iz prethodnih izjednačenja, sastavljene su normalne jednadžbe. Sastavljanje uvjetnih i normalnih jednadžbi, kao i cjelokupao računski postupak oko rješavanja devet normalnih jednadžbi ovdje je izostavljen zbog uštede u prostoru. To inače i nije tema ovog razmatranja. U slijedećoj tabeli date su vrijednosti korelata:

Vrijednosti korelata:

$K_1 = -2{,}307$	$K_4 = +0{,}202$	$K_7 = -0{,}052$
$(K_1) = +3{,}309$	$(K_4) = +0{,}798$	$(K_7) = +1{,}051$
$K_2 = -0{,}389$	$K_5 = -0{,}529$	$K_8 = +0{,}067$
$(K_2) = +1{,}390$	$(K_5) = +1{,}529$	$(K_8) = +0{,}933$
$K_3 = -0{,}970$	$K_6 = +0{,}203$	$K_9 = +0{,}230$
$(K_3) = +1{,}970$	$(K_6) = +0{,}796$	$(K_9) = +0{,}770$

Kontrole računanja iz normalnih jednadžbi te iz korelata i nesuglasica jesu

$[vv] = 96{,}783$

$[Kw] = 96{,}790$

Nakon ovoga računamo popravke po izrazima:

$v_n = K_1 \cdot A + K_2 \cdot B + K_3 \cdot C + K_4 \cdot D + K_5 \cdot E + K_6 \cdot F + K_7 \cdot G + K_8 \cdot H + K_9 \cdot I$

Popravke ćemo pregledno iskazati uz mjerene pravce, a $\Sigma v^2 = 96{,}798$.

Ova suma kvadrata popravaka ne može nam poslužiti za ocjenu točnosti. Za tu svrhu, jer su popravci dužina u centimetrima, a popravci pravaca u sekundama, množimo ove potonje s $\dfrac{1}{\varrho''}$, te ponovno izračunamo sumu kvadrata popravaka. Tako ćemo dobiti:

$$[vv] = 32{,}014 \qquad m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{32{,}014}{9}} = \pm 1{,}88 \text{ cm}$$

Množeći ovaj iznos sa ϱ'', dobivamo srednju pogrešku mjerene veličine i u kutnoj mjeri:

$m = \pm 1{,}88 \cdot \varrho'' = \pm 3'',88$

Mjereni i popravljeni pravci:

stanica	br. pr.	opažani popravci	popravak v	definit. pravci
	1	0 00 00,0	+ 1,8	0 00 01,8
213	2	40 10 21,3	— 5,0	40 10 16,3
	3	46 45 09,0	+ 3,2	46,45 12,2
	10	0 00 00,0	+ 4,6	0 00 04,6
»A«	11	122 57 03,3	— 2,0	122 57 01,3
	12	190 19 38,7	— 2,6	190 19 36,1
	7	0 00 00,0	+ 1,4	0 00 01,4
219	8	46 20 59,3	+ 1,2	46 21 00,5
	9	63 13 52,0	— 2,7	63 13 49,3
	4	108 16 52,0	— 1,2	108 16 50,8
214	5	112 01 25,0	+ 1,4	112 01 26,4
	6	178 17 52,7	— 0,2	178 17 52,5

Konačna kontrola zatvaranja figura:

(2—1)	40 10 14,5	(6—5)	66 16 26,1	(5—5)	3 44 35,6
(9—8)	16 52 48,8	(12—11)	67 22 34,8	(10—12)	169 40 28,5
(11—10)	122 56 56,7	(8—7)	46 20 59,1	(3—2)	6 34 55,9
	180 00 00,0		180 00 00,0		180 00 00,0

mjerene i popravljene dužine:

	mjerena dužina	popravak	definit. dužina
a	884,143 m	— 0,016 m	884,127 m
b	876,895 „	— 0,020 „	876,875 „
c	693,036 „	+ 0,019 „	693,055 „
d	1140,703 „	+ 0,006 „	1140,709 „
e	394,721 „	— 0,002 „	394,719 „
f	1083,683 „	+ 0,012 „	1083,695 „

IZJEDNAČENJE CENTRALNOG SISTEMA NA OSNOVI MATEMATSKOG ODNOSA POVRŠINA — Izjednačenje ovog najmanjeg centralnog sistema već je u ovom slučaju zahtijevalo razmjerno velika računanja. Morali smo riješiti čak devet normalnih jednadžbi. S povećanjem broja točaka njihov bi broj brzo rastao. Obzirom na veliki utrošak vremena pri terenskom radu, a još većem kod računske obrade, ovaj način bio bi teže prihvatljiv za praksu.

Tim više, što je razlika ovog izjednačenja u usporedbi s onim, gdje smo izjednačenje proveli samo po pravcima, u konačnom ishodu vrlo mala. To se lako može uočiti uspoređivanjem popravljenih pravaca.

Pokušajmo sad, konačno isključiti iz računanja sva mjerenja pravaca, pa uz ovu predpostavku potražiti najvjerojatnije vrijednosti mjerenih dužina. Na temelju izjednačenih veličina postojat će tada mogućnost da se iz ovih izračunaju svi preostali elementi u ovom sistemu i usporede sa mjerenjima. Za ovaj slučaj moguće je ovo postići na temelju razmatranja odnosa površina prema kojem za naš sistem mora postojati:

$$P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 0$$

P_1 je površina trokuta 214; 219; »A«
P_2 je površina trokuta 219; 213; »A«
P_3 je površina trokuta 214; »A«; 213
P_4 je površina trokuta 214; 219; 213

Površinu trokuta možemo predstaviti kao funkciju strana:

$$P = \sqrt{s(-a)(s-b)(s-c)}$$

s je polovina opsega ili, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

U našem konkretnom slučaju imamo šest mjerenih dužina. Promotrimo radi predodžbe problem potpuno geometrijski. Iz mjerenih dužina a, b, c možemo konstruirati trokut, kojim je relativan odnos točaka 214, 219 i »A« određen.

Lukovi nad dužinom e sa središtem u »A« i dužine d sa središtem u 219 svojim presjekom definiraju položaj točke 213. Mi, međutim, imamo mjerenu i dužinu f, koja nam u ovom slučaju predstavlja prekobrojno mjerenje i daje mogućnost izjednačenja mjerenih veličina.

Primjenivši metodu izjednačenja uvjetnim opažanjima, ovo nam prekobrojno mjerenje nalaže postavljanje jedne uvjetne jednadžbe:

$$P_1' + dP_1 + P_2' + dP_2 + P_3' + dP_3 - P_4' - dP_4 = 0 \qquad (1)$$

Tu su P_1', P_2' itd. funkcije mjerenih dužina a', b' itd., a izraz

$$P_1' + P_2' + P_3' - P_4' = w \qquad (2)$$

predstavlja nesuglasicu, pa možemo pisati:

$$dP_1 + dP_2 + dP_3 - dP_4 + w = 0 \qquad (3)$$

Za trokut 214; 219; »A« možemo pisati:

$$P_1' = \sqrt{s_1'(s_1' - a')(s_1' - b')(s_1' - c')} = F(a',b',c')$$

Ako mjerenim veličinama dodamo male popravke pišući:

$$a = a' + (a) \qquad b = b' + (b) \qquad c = c' + (c)$$

onda će prednja funkcija razvijena u Taylorov red glasiti:

$$F(a,b,c) = F(a',b',c') + \frac{\delta F}{\delta a}(a) + \frac{\delta F}{\delta b}(b) + \frac{\delta F}{\delta c}(c) + \ldots$$

Da bi mogli izračunati parcijalne derivacije funkcije, izmnožimo polinom pod korijenom u izrazu za površinu:

$$P = \sqrt{\frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2}{16}}$$

Računamo izraze parcijalnih derivacija:

$$\frac{\delta P'_1}{\delta a} = \frac{\frac{1}{16}(4ab^2 + 4ac^2 - 4a^3)}{2\sqrt{\frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2}{16}}}$$

$$= \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{8 P_1'} = \frac{abc \cos\alpha}{} = A_1 = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\frac{\delta P_1'}{\delta b} = \ldots\ldots = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{8 P_1'} = \frac{abc \cos\beta}{4 P_1'} = A_2 = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

$$\frac{\delta P_1'}{\delta c} = \ldots\ldots = \frac{c(a^2 + b^2 - c_2)}{8 P_1'} = \frac{abc \cos\gamma}{4 P_1'} = A_3 = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg}\gamma$$

Za naš slučaj moramo izračunati dvanaest ovakvih izraza, pa će posljednji, prema usvojenim oznakama glasiti:

$$\frac{\delta P_4'}{\delta f} = \ldots\ldots = \frac{f(a^2 + d^2 - f^2)}{8 P_4'} = \frac{adf \cos\Theta}{4 P_4'} = A_{12} = \frac{f}{2} \cdot \operatorname{ctg}\Theta$$

$$\alpha = (12 - 11) \qquad \beta = (6-5) \qquad \gamma = (8 - 7) \quad \ldots\ldots \quad \Theta = (9 - 7)$$

Ako ove izraze uvedemo u izraz (3), vodeći računa o izrazima (1) i (2), dobivamo uvjetnu jednadžbu u konačnom obliku:

$$A_1(a) + A_2(b) + A_3(c) + A_4(d) + A_5(e) + A_6(b) + A_7(f) + A_8(c) + A_9(e) -$$
$$- A_{10}(a) - A_{11}(d) - A_{12}(f) + w = 0$$

ili nakon sređenja:

$$(A_1 - A_{10})(a) + (A_2 + A_6)(b) + (A_3 + A_8)(c) + (A_4 - A_{11})(d) + (A_5 +$$
$$+ A_9)(e) + (A_7 - A_{12})(f) + w = 0$$

Struktura izraza parcijalnih derivacija ukazuje, da će račun koeficijenata biti razmjerno (i za proizvoljni trokut) jednostavan.

Prijeđimo sada na naš zadatak!

	mjerena dužina	popravak mm	definit. dužina
a	884,143 m	± 0,0	884,1430 m
b	876,895 m	+ 0,1	876,8951 m
c	693,036 m	+ 0,7	693,0367 m
d	1140,703 m	— 0,1	1140,7029 m
e	394,721 m	+ 0,7	394,7217 m
f	1083,683 m	— 0,7	1083,6823 m

račun približnih površina i koeficijenata uvjetne jednadžbe:

1. $P_1' = 280\ 480{,}0082\ m^2$	$A_1 = 0{,}184$ $A_2 = 0{,}193$ $A_3 = 0{,}330$
2. $P_2' = 145\ 237{,}5854\ m^2$	$A_4 = -0{,}369$ $A_5 = 0{,}650$ $A_6 = 0{,}519$
3. $\Sigma P_{1,2,3} = 450\ 214{,}6976$ $P_3' = 24\ 497{,}1040\ m^2$	$A_8 = 3{,}005$ $A_7 = -2{,}976$ $A_9 = 3{,}019$
4. $P_4' = 450\ 222{,}0028\ m^2$ $w = -7{,}3052\ m^2$	$A_{10} = 0{,}416$ $A_{14} = 0{,}207$ $A_{12} = 0{,}273$

Za računanje uzimamo dužine u kilometrima, tako da ćemo dobiti popravke u milimetrima. Račun ovdje nije detaljno izložen, jer to radi jednostavnosti nije niti potrebno. Ipak, napominjemo, da računanje površina predstavlja problem, radi vrlo velikih cifara.

Nakon prednjih računanja pišemo uvjetnu jednadžbu:

$$-0{,}231(a) + 0{,}712(b) + 3{,}335(c) - 0{,}577(d) + 3{,}669(e) - 3{,}250(f) -$$
$$-7{,}305 = 0$$

Ovoj jednadžbi odgovara normalna jednadžba:

$[AA]\,K + W = 0$ ili $36{,}0395\,K - 7{,}305 = 0$

$K = +\,0{,}2026$

sada možemo izračunati popravke dužina:

$$v_n' = K \cdot A_n$$

$$\begin{array}{lll}
(a) = & -\,0{,}0468 & = \pm\,0{,}0 \\
(b) = & \pm\,0{,}1442 & = +\,0{,}1 \\
(c) = & +\,0{,}6757 & = +\,0{,}7 \\
(d) = & -\,0{,}1169 & = -\,0{,}1 \\
(e) = & +\,0{,}7433 & = +\,0{,}7 \\
(f) = & -\,0{,}6585 & = -\,0{,}7 \\
\hline
 & \Sigma v^2 & = 1{,}479
\end{array}$$

$$[vv] = -\,[Kw] = 1{,}480$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1{,}480}} = \pm\,1{,}22\ \text{mm}$$

Vidimo da mjerene veličine nisu pretrpjele praktično nikakove popravke, a i srednja pogreška pojedinog mjerenja je daleko iznad točnosti mjerenja. Kada smo popravili strane u našem sistemu, računamo za kontrolu definitivnepovršine trokuta, pa dobivamo:

$$\begin{array}{rl}
P_1 = & 280\ 480{,}259\ m^2 \\
P_2 = & 145\ 238{,}129\ m^2 \\
P_3 = & 24\ 503{,}403\ m^2 \\
\hline
\Sigma P_{1,2,3} = & 450\ 221{,}791\ m^2 \\
P_4 = & 450\ 221{,}791\ m^2 \\
\hline
 & \pm\ 0{,}000\ m^2
\end{array}$$

Iz izraza, koje smo ranije izveli, za kontrolu mora još vrijediti:

$$\begin{array}{rlll}
dP_1 = & A_1(a) + A_2(b) + A_3(c) & = P_1 - P_1' & = 0{,}251 \\
dP_2 = & A_4(d) + A_5(e) + A_6(b) & = P_2 - P_2' & = 0{,}544 \\
dP_3 = & A_7(f) + A_8(c) + A_9(e) & = P_3 - P_3' & = 6{,}299 \\
-dP_4 = & -[A_{10}(a) + A_{11}(d) + A_{12}(f)] & = -(P_4 - P_4') & = 0{,}212 \\
 & & \Sigma = -w & = 7{,}306
\end{array}$$

Konačno možemo na temelju popravljenih dužina izračunati sve kutove. Za to koristimo slijedeće izraze:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{bc}} \qquad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Sve vrijednosti u ovim izrazima koristili smo kod računanja definitivnih površina, pa nakon potrebnih računanja dobivamo vrijednosti kutova na temelju popravljenih dužina. Sada ćemo radi preglednosti iznijeti konačne rezultate svih izjednačenja. U tabeli su pod I. navedeni podaci dobiveni mjerjenjem, pod II. rezultati iz izjednačenja dužina, pod III. rezultati iz izjednačenja pravaca, te pod IV. rezultati zajedničkog izjednačenja pravaca i dužina.

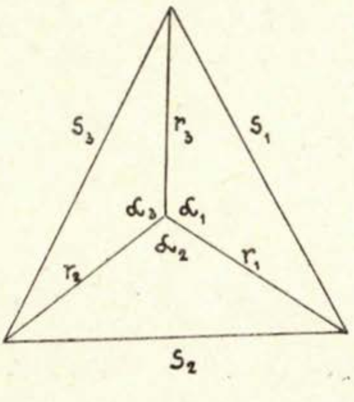
	I.	II.	III.	IV.
(12—11)	67 22 35,4	67 22 37,6	67 22 34,3	67 22 34,8
(6—5)	66 16 27,7	66 16 31,2	66 16 25,6	66 16 26,1
(8—7)	46 20 59,3	46 20 51,2	46 21 00,1	46 20 59,1
(11—10)	122 57 03,3	122 56 34,6	122 56 57,1	122 56 56,7
(2—1)	40 10 21,3	40 10 31,4	40 10 13,7	40 10 14,5
(9—8)	16 52 52,7	16 52 54,0	16 52 49,2	16 52 48,8
(10—12)	169 40 21,3	169 40 47,6	169 40 28,6	169 40 28,5
(3—2)	6 34 47,7	6 34 43,4	6 34 55,8	6 34 55,9
(5—4)	3 44 33,0	3 44 29,0	3 44 35,6	3 44 35,6
(3—1)	46 45 09,0	46 45 14,8	46 45 10,4	46 45 09,5
(6—4)	70 01 00,7	70 01 00,2	70 01 01,6	70 01 01,2
(9—7)	63 13 52,0	63 13 45,2	63 13 47,9	63 13 49,3
a	884,143 m	,143	,143	,127
b	876,895 m	,895	,895	,875
c	693,036 m	,038	,071	0,55
d	1140,703 m	,703	,735	,709
e	394,721 m	,722	,729	,719
f	1083,683 m	,682	,717	,695

Prije nego što pristupimo analizi podataka i rezultata iz gornje tabele, osvrnimo se na još jednu mogućnost izjednačenja slobodnog sistema u kojem su izmjerene sve dužine. Način, koji će biti ukratko izložen mnogo je pogodniji za obradu, pa se redovito ili takav, ili u modificiranom obliku i koristi.

Za centralni sistem, kojega tvori n obodnih strana i n radijalnih strana može se postaviti uvjet horizonta u središnjoj točki, tj.:

$$[\alpha_i]_{i=1}^{i=n} - 2\pi = 0$$

Kutovi u centralnoj točki mogu se kosinusnim poučkom izraziti kao funkcije mjerenih strana:



$$\alpha_i = \text{arc cos} \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2\, r_{i-1} \cdot r_i}$$

Uvjetna jednadžba može se sada pisati:

$$F = \left[\text{arc cos} \frac{2\, r_{i-1} \cdot r_i}{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2} \right]_{i=1}^{i=n} - 2\pi = 0$$

Prelaskom iz ovog oblika na linearni, računamo koeficijente uz nepoznanice (popravke mjerenih dužina):

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} = a_{r,i} = \frac{r_{i-1} \cdot \cos\alpha_i - r_i}{r_{i-1} \cdot r_i \sin\alpha_i} + \frac{r_{i+1} \cos\alpha_i - r_i}{r_i \cdot r_{i+1} \sin\alpha_{i+1}}, \frac{\partial F}{\partial S_i} = \alpha_{s,i} = \frac{S_i}{r_{i-1} r_i \sin\alpha_i}$$

Koeficijenti a_r, a_s dadu se izraziti u više prikladnih oblika. Mi ćemo se poslužiti ovima:

$$A = -\frac{\cos\alpha}{h} - \frac{\cos\beta}{h}, \quad B = \frac{1}{h}.$$

Ovdje su α i β periferni kutevi (uz radijalne strane), a h je visina trokuta nad obodnom stranom.

Izračunavš na taj način koeficijente uvjetne jednadžbe, te izrazivši nesuglasicu zatvaranja horizonta u centralnoj točki u lučnoj mjeri, dobivamo uvjetnu jednadžbu:

$$-22{,}64(c) - 24{,}90(e) - 4{,}85(b) + 22{,}04(f) + 3{,}93(d) + 1{,}58(a) + 4{,}75 = 0$$

Rješenje daje popravke:

(a) = —0,005 cm = —0,05 mm
(b) = +0,014 cm = +0,14 mm
(c) = +0,064 cm = +0,64 mm
(d) = —0,011 cm = —0,11 mm
(e) = +0,071 cm = +0,71 mm
(f) = —0,063 cm = —0,63 mm

$[vv] = -[kw] = +0{,}0136$
$\Sigma v^2 = 0{,}0134$
$m = \pm 0{,}116$ cm

Rezultati jednoga i drugoga načina izjednačenja su praktički isti.

Razmotrimo sada rezultate svih izjednačenja i rezultate mjerenja. Podaci navedeni pod I., III. i IV. razlikuju se za vrlo malene iznose. Pri tom ne treba smetnuti s uma okolnosti pod kojima su mjerenja izvršena, a niti razmjerno nepovoljan odnos dužina pravaca, kao i oblika likova u centralnom sistemu. Utjecaj neizbježnih pogrešaka u centriranju instrumenta jače se ispoljio na kratkim pravcima što i nije iznenađujuće.

Međutim, rezultati navedeni pod II. što se tiče kuteva pokazuju velik raskorak u usporedbi s ostalima. Već i površan pogled otkrit će činjenicu, da su razlike veće u trokutnim figurama nepravilnijeg oblika. Može se, dakle zaključiti, da je ova nepovoljna okolnost posljedica nepravilnosti likova u našem centralnom sistemu. Iz toga možemo izvući zaključak, da nas samo mjerenje dužina u nepravilnim, odnosno jako iskrivljenim geometrijskim figurama često ne može zadovoljiti, makar i sama mjerenja izvršili visokom točnošću.

Ispitivanja vršena radi izbora najpogodnijih oblika figura, koje bi se svrsishodno povezivale u mrežu ili lance[5] pokazala su, u kojoj mjeri oblik figure utječe na točnost.

Računajući težine pojedinih strana u pravilnim centralnim sistemima nakon izjednačenja po poznatom izrazu za težinu funkcije za uvjetna mjerenja:

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \ldots\ldots$$

i uz pretpostavku, da su mjerenja izvršena jednakom točnošću što je za Distomat DI 10 pravilna pretpostavka, te koristeći zakonitosti koje proizlaze iz pravilnosti likova, može se pisati:

$$\frac{1}{P_{(s)}} = 1 - \frac{1}{n\left(3 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right)} \qquad \frac{1}{P_{(r)}} = 1 - \frac{2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)}{n\left(3-2\cos\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$P_{(s)}$ je težina obodne strane, $P_{(r)}$ je težina radijalne strane, dok je n broj kuteva u centralnoj točki. U slijedećoj tabeli dane su vrijednosti težina za n od 3 (sistem, koji se sastoji od tri istokračna trokuta s centralnim kutevima 120°, i perifernim od 30°) do 10.

n	$\frac{1}{P_{(s)}}$	$\frac{1}{P_{(r)}}$	n	$\frac{1}{P_{(s)}}$	$\frac{1}{P_{(r)}}$
3	0,916	0,75	5	0,916	0,88
4	0,916	0,83	6	0,916	0,92
			10	0,927	0,97

Iz tabele je uočljivo, da je težina vanjske strane u području $3 \leqq n \geqq 6$ praktički konstantna, dok se težina radijalne strane povećava s rastućim n te se za n = 6 izjednačava s težinom obodne strane.

Koristeći se već spomenutim pogodnostima koje proizlaze iz pravilnosti predpostavljenog centralnog sistema, mogu se odrediti težine računatih kutova i prije i poslije izjednačenja[6]. Za n = 3 do n = 6 dati su ovi podaci u slijedećoj tabeli:

recipročne vrijednosti težina	n = 3	4	5	6
1. centralni kut $\alpha = \frac{2\pi}{n}$				
a) prije izjednačenja: $l^2[ff] = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} 4(2-\cos\alpha)$	30	8	3,58	2
b) poslije izjednačenja: $l^2\frac{1}{P} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{4}{n}\{(2-n)\cos\alpha + 2n - 3\}$	14	5	2,58	1,55

recipročne vrijednosti težina	n = 3	4	5	6
c) povećanje težine izjednačenjem u %	53	38	28	22
2. periferni kutevi $\beta = \gamma = \frac{n-2}{2n}\pi$				
a) prije izjednačenja: $l^2[ff] = \frac{1}{1-\cos\alpha}(2\cos^2\alpha - \cos\alpha + 3)$	8	3	2,16	2
b) poslije izjednačenja: $l^2\frac{1}{P} = \frac{1}{1+\cos\alpha}\frac{1}{n}\{(n-1)\,2\cos^2\alpha + (5-n)\cos\alpha + 3n - 3\}$	4	2,25	1,95	1,89
c) povećanje težine izjednačenjem u %	50	25	10	5

U gornjim izrazima l je najveća dužina, koja se dade direktno izmjeriti. To bi bilo dovoljno za razjašnjenje razlika u rezultatima izjednačenja našeg slobodnog sistema. Osvrnimo se konačno i na mogućnost, koja nam u praksi može pod izvjesnim okolnostima biti od koristi. Znamo da je srednja pogreška mjerene udaljenosti kod Distomata Wild DI 10 ±1 cm neovisno o dužini, što na 1 km predstavlja relativnu točnost 1 : 100 000.

Predpostavimo li, da imamo na pravcu postavljenih n + 1 stativa, koji su na međusobnoj udaljenosti maksimalno mjernog dometa Distomata DI 10, te da je prisilnim centriranjem moguće izmjenjivanje vizure glave i reflektora, tada bi mogli izmjeriti n dužina, kojima su srednje pogreške međusobno jednake, pa bi prema zakonu o prirastu pogrešaka srednja pogreška udaljenosti prvog i n + 1 stativa iznosila:

$$M = m\sqrt{n} = \pm\sqrt{n}\ \text{cm}$$

Tim putem možemo teroretski po volji povećati relativnu točnost izmjerene dužine. Primjerice, kad bi ovim nadovezivanjem izmjerili dužinu od 100 kilometara, relativna točnost iznosila bi 1 : 1 000 000. Prirodno je, da ovakovo mjerenje ne možemo primjeniti na tako velike udaljenosti, no i na mnogo kraćim, ako postoji opravdana potreba, moći će poslužiti.

Studioznošću pri rješavanju konkretnih zadataka u praksi, pribori ovakovih karakteristika omogućuju veliki broj primjena i izbora u svakom pogledu najpovoljnijih rješenja.

LITERATURA:

1 — Borčić: Gauss-Krügerova projekcija
2 — Čubranić: Teorija pogrešaka s računom izjednačenja
3 — Janković: Inženjerska geodezija I. dio
4 — Jordan—Eggert—Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde, Band VI.
5 — Schelling: Über die Grundfigur und den Längsfehler in Streckenketten
6 — Schelling: Die Richtungsübertragung in Streckenketten (Ö. Z. f. V. W., Heft Nr. 5/6 1952. i Nr. 5 1954.)