

Universidad Andina Simón Bolívar

Sede Ecuador

Área de Gestión

Maestría Profesional en Gestión Financiera y Administración de Riesgo Financiero

Aplicación de lógicas difusas a la construcción de carteras de inversión de instrumentos de renta variable como herramienta de gestión de inversiones comparada con métodos tradicionales CAPM y MBL, dentro del mercado ecuatoriano de valores, período 2019-2021

Daniel Alfredo Meza Molina

Tutor: Carlos Andrés Oñate Paredes

Quito, 2023



Cláusula de cesión de derecho de publicación

Yo, Daniel Alfredo Meza Molina, autor de la tesis intitulada “Aplicación de lógicas difusas a la construcción de carteras de inversión de instrumentos de renta variable como herramienta de gestión de inversiones comparada con métodos tradicionales CAPM y MBL, dentro del mercado ecuatoriano de valores, período 2019-2021”, mediante el presente documento dejo constancia de que la obra es de mi exclusiva autoría y producción, que la he elaborado para cumplir con uno de los requisitos previos para la obtención del título de Maestría en Gestión Financiera y Administración de Riesgos Financieros en la Universidad Andina Simón Bolívar, Sede Ecuador.

1. Cedo a la Universidad Andina Simón Bolívar, Sede Ecuador, los derechos exclusivos de reproducción, comunicación pública, distribución y divulgación, durante 36 meses a partir de mi graduación, pudiendo por lo tanto la Universidad, utilizar y usar esta obra por cualquier medio conocido o por conocer, siempre y cuando no se lo haga para obtener beneficio económico. Esta autorización incluye la reproducción total o parcial en los formatos virtual, electrónico, digital, óptico, como usos en red local y en internet.
2. Declaro que en caso de presentarse cualquier reclamación de parte de terceros respecto de los derechos de autor/a de la obra antes referida, yo asumiré toda responsabilidad frente a terceros y a la Universidad.
3. En esta fecha entrego a la Secretaría General, el ejemplar respectivo y sus anexos en formato impreso y digital o electrónico.

17 de marzo de 2023

Firma: _____

Resumen

La determinación de carteras de inversión en renta variable es un tema que actualmente se posiciona entre los principales tópicos relativos a finanzas e inversiones, existe una profusa literatura sobre la creación de modelos de inversión alternativos aplicados a países con mercados desarrollados, mientras que en Latinoamérica predomina el uso de modelos como el de Markowitz y Black-Litterman, estos métodos denominados como clásicos gozan de una aceptación generalizada entre quienes se dedican al mundo de las finanzas en Ecuador. Sin embargo, estos métodos requieren grandes cantidades de información que, en muchos casos, no existe, como es el caso del mercado nacional de valores, esto debido a distintos factores como la baja transaccionalidad de los instrumentos, la poca profundidad de mercado y las dificultades existentes para acceder a la información financiera. El objetivo de la presente investigación es determinar si la aplicación de metodologías alternativas como la lógica difusa puede generar resultados viables en comparación a los métodos de Markowitz y Black-Litterman aplicado al mercado nacional de valores. Se ha aplicado una metodología cuantitativa y cualitativa, presentando los resultados del trabajo a través de la evaluación de cinco acciones transadas en la bolsa de valores de Ecuador para construir una cartera de inversión. Los resultados indican que es posible aplicar la lógica difusa para construir carteras de inversión de renta variable con una simplificación sistemática de cálculos y un ahorro de tiempo que amplifica la adaptabilidad del modelo en comparación a las metodologías clásicas. Se proponen también metodologías complementarias a la lógica difusa que permiten ampliar y profundizar la línea de investigación para crear modelos difusos mucho más precisos y dinámicos que puedan evaluar distintos tipos de variables para mejorar los resultados obtenidos.

Palabras clave: Lógica difusa, inversión, renta variable, bolsa de valores, Ecuador

A mi madre, gracias por todo.

A mi padre, gracias por todo.

A la memoria de mi abuela, Elsa Rojas.

Agradecimientos

A la Universidad Andina Simón Bolívar y todos quienes han formado parte de este viaje, todos sus aportes ayudaron a construir este camino.

Tabla de contenidos

Figuras y tablas	13
Introducción.....	15
Capítulo primero Estado del arte	29
2. Bases teóricas de lógica difusa	37
3. Conjuntos difusos	39
4. Producto Cartesiano Difuso.....	47
5. Relaciones Difusas	49
6. Fuzzificación	52
7. Defuzzyficación.....	52
8. Inferencia Difusa	54
9. Capital Asset Pricing Model (CAPM).....	56
10. Modelo de Black-Litterman.....	58
Capítulo segundo Construcción de carteras difusas e interpretación de datos	61
1. Índices de evaluación para la construcción de carteras difusas	70
Capítulo tercero Controlador difuso	81
1. Resultados obtenidos del controlador difuso.....	82
2. Comparación de resultados.....	89
Conclusiones y recomendaciones.....	95
Obras citadas.....	99

Figuras y tablas

Figura 1.	Operación algebraica de unión. Fuente: Timothy J. Ross. 2010. <i>Fuzzy Logic with Engineering Applications</i>	44
Figura 2.	Operación algebraica de intersección. Fuente: Timothy J. Ross. 2010. <i>Fuzzy Logic with Engineering Applications</i>	45
Figura 3.	Operación algebraica complemento. Fuente: Timothy J. Ross. 2010. <i>Fuzzy Logic with Engineering Applications</i>	45
Figura 4.	Elementos de una función de membresía. Fuente: Timothy J. Ross. 2010. <i>Fuzzy Logic with Engineering Applications</i>	52
Tabla 1.	Operadores equivalentes lógica proposicional y teoría de conjuntos.....	55
Tabla 2.	Modus ponens.....	55
Tabla 3.	Modus Tollens	56
Tabla 4.	Acciones seleccionadas para cartera de inversión.....	62
Figura 5.	Distribución porcentual volumen de transacción efectivo.	62
Figura 6.	Resultado aplicación test de normalidad Shapiro-Wilk acción Banco Guayaquil.	63
Figura 7.	Resultado aplicación test de normalidad Shapiro-Wilk acción Banco Pichincha.	63
Figura 8.	Resultado aplicación test normalidad Shapiro-Wilk acción Brikcapital. ...	64
Figura 9.	Resultado aplicación test normalidad Shapiro-Wilk acción Cervecería Nacional.	64
Figura 10.	Resultado aplicación test normalidad Shapiro-Wilk acción Corporación la Favorita.	65
Figura 11.	Evolución precios acción Banco Guayaquil.....	65
Figura 12.	Evolución retornos acción Banco Guayaquil.	66
Figura 13.	Evolución precios acción Banco.....	66
Figura 14.	Evolución retornos acción Banco Pichincha.	67
Figura 15.	Evolución precios acción Brikcapital.	67
Figura 16.	Evolución retornos acción Brikcapital.	68
Figura 17.	Evolución precios acción cervecería nacional.....	68
Figura 18.	Evolución retornos acción Cervecería Nacional.	69

Figura 19. Evolución precios acción Corporación Favorita.	69
Figura 20. Evolución retornos acción Corporación Favorita.....	70
Tabla 5. Definición de variables lingüísticas de entrada y universo de discurso	74
Tabla 6. Definición variable lingüística de salida y universo de discurso.....	75
Tabla 7. Reglas de control lingüístico.	79
Figura 21. Controlador difuso tipo mamdani Fuente y elaboración: Ross, 2010.	81
Figura 22. Salida de controlador difuso BANCO GUAYAQUIL S.A. Fuente: Elaboración propias.	83
Figura 23. Salida de controlador difuso BRIKCAPITAL S.A. Fuente: Elaboración propias.	84
Figura 24. Salida de controlador difuso CERVECERIA NACIONAL CN SA. Fuente: Elaboración propias.	84
Figura 25. Salida de controlador difuso CERVECERIA NACIONAL CN SA. Fuente: Elaboración propias.	85
Figura 26. Salida de controlador difuso CORPORACION LA FAVORITA C.A. Fuente: Elaboración propia.....	85
Tabla 8. Calculo media y desviación estándar difusa.....	87
Tabla 9. Tasas de interés pasivas efectivas promedio por instrumento.....	88
Tabla 10. Carteras de inversión generadas controlador difuso.....	89
Tabla 11. Carteras de inversión generadas método Markowitz.....	90
Tabla 12. Carteras de inversión generadas método Black-Litterman mínima varianza	91
Tabla 13. Carteras de inversión generadas método Black-Litterman máximo rendimiento.....	92

Introducción

Actualmente los mercados de valores del mundo desempeñan un papel protagónico en el desarrollo de las economías y de su rol funcional dentro de los esquemas sociales. De igual forma, los mercados financieros influyen en una medida singular la dinámica e interacción de las esferas económicas que se suscitan en cada región o país.

En relación a esta afirmación, Porras (2004, 144) relaciona factores como el crecimiento económico de un país y el desarrollo de los mercados financieros e indica que las tasas de crecimiento y crecimiento autosostenido dentro de una economía dependen de factores inherentes a los esquemas de producción y distribución del ingreso y del consumo. Como, por ejemplo, la tecnología, las características institucionales u organizacionales de los participantes del mercado, los patrones preferentes de consumo por parte de los demandantes, y los marcos regulatorios de cada país. Asimismo, comenta que los intermediarios financieros que nacen y se desarrollan en los mercados, son el medio de comunicación y transformación de los flujos e influjos de capitales y ayudan a suavizar las fricciones que existen dentro de la propia dinámica del sistema económico, demostrando que el desarrollo de la economía real va de la mano con el desarrollo de los mercados financieros y, en consecuencia, de los intermediarios financieros que canalizan los recursos.

Prieto y Fajardo (2015, 12), comentan la conexión que existe entre desarrollo del mercado financiero y el desarrollo del sector real, en los cuales, los mercados de valores son una piedra angular para el desarrollo y expansión del aparato económico, ya que fungen como canalizadores de recursos entre las unidades con excedentes (ahorros) y las unidades deficitarias; impactando de manera significativa en el mercado real, ya que provee liquidez para financiar proyectos de inversión que satisfacen necesidades reales de la población.

Adicionalmente, Prieto y Fajardo (2015, 13), denotan que la función de intermediación financiera provee al mercado de información certera y oportuna acerca de los costos y potencialidades de los productos sobre los cuales ejercen la intermediación. Dicha realidad se ve reflejada en los precios de cada uno de los productos que se transan a través de los agentes integrantes del mercado financiero, del cual, los mercados de valores forman parte.

Estos mismos autores indican que, en mercados financieros activos y líquidos, los mercados de valores coadyuvan al abaratamiento del financiamiento por los servicios y productos que estos ofrecen, haciendo al mercado en general más eficiente y dinámico. En las economías modernas, el crecimiento económico está influenciado por el desarrollo de un sector financiero eficiente y efectivo que sea capaz de convertir los ahorros internos en inversión y que movilice capital para generar proyectos productivos.

El tema de la relación entre el crecimiento económico y la intermediación financiera no es nuevo, pues, al menos, pueden mencionarse dos antecedentes remarcables en el área de los modelos de crecimiento económico; Por ejemplo, en el trabajo de Gurley y Shaw (1995) que demarca la función de los agentes financieros intermediarios en la actividad económica a través de la oferta de crédito, se obtiene como resultado que la intermediación financiera facilita la movilización de fondos de préstamo e inversión entre entes de ahorro e inversión, estableciendo una red bien interconectada que incrementa la eficiencia en el intercambio de bienes y servicios, lo cual coadyuva al desarrollo de la economía real de las comunidades.

Por su parte, Mckinnon (2010), ahonda mucho más en la relación entre intermediación financiera y desarrollo económico. La profundización financiera, es decir, el grado de penetración de los servicios financieros en la sociedad, estimula el crecimiento económico a través del efecto positivo que tiene esta intermediación en las tasas de ahorro y mejora notablemente la distribución de los recursos monetarios disponibles para la inversión, este incremento en la eficiencia de la asignación de recursos también impacta positivamente en los réditos esperados por los inversionistas al depositar sus excedentes monetarios en una opción de inversión que cumpla con sus expectativas.

Adicionalmente, existen numerosos autores que resaltan aspectos particulares e interesantes sobre la interacción del sector financiero con el sector real. Saint-Paul (1992) indica que una peculiaridad positiva de esta interacción es que la oferta de intermediación, a través del estudio sistemático de los instrumentos y productos que se transan en el mercado, ayudan a una mejor distribución del riesgo asociado a los mercados de capitales.

Greenwood y Jovanovic (1990) concluyen que la intermediación financiera mejora la calidad de la distribución de información relevante para la toma de decisiones, mientras que Bencivenga y Smith (1991) indican que, resultado de esta interacción se propicia una mejor composición de ahorros que favorezca el crecimiento de la productividad de un mercado.

La mención de estos estudios demuestra que en efecto existe una relación de importancia entre la dinámica del mercado financiero y el sector real de la economía. Además, denota una tendencia global y no aislada, en la que el mercado financiero ayuda al desarrollo económico sin importar el lugar o el momento. Ciertamente existen características propias de las economías que pueden amplificar o reducir los impactos del mercado financiero sobre la economía real. Sin embargo, persiste la presencia de una correlación positiva entre el desarrollo del mercado financiero y el desarrollo de la economía real.

Por esta razón, para Ecuador, es necesario poder desarrollar la amplitud y el impacto de los mercados financieros nacionales y en específico, los mercados de valores, pues, como se mencionó anteriormente, diversificaría el riesgo de mercado, daría posibilidad de financiación a costos bajos, ayudaría a la diversificación de productos y servicios en el país y coadyuvaría a estimular la interacción entre los partícipes del mercado nacional e internacional y podría convertir al mercado de valores nacional en un centro financiero relevante para la economía del país.

Esta apreciación coincide con lo expuesto por Marchini (2002), en donde conceptualiza a los centros financieros como un componente clave de la economía global. Asegurando que la función primordial de estos centros es esencialmente la concentración de agentes especializados de distinta naturaleza de participación e interacción de mercado, para facilitar la transición de recursos entre unidades con excedente monetario y unidades con necesidad de dichos recursos. Así como una función de abaratamiento del costo intrínseco de financiación al fungir como conectores entre inversores y emisores.

Sin embargo, el mismo autor advierte que las actividades de los centros financieros van mucho más allá de la actividad de intermediación financiera entre los ahorristas y los inversionistas. Fungen también como centros de comunicación y de gestión global, los cuales operan dentro de densas redes de interconexión tecnológica, comercial, política y social.

Con base en estas apreciaciones, los centros financieros se desarrollan actualmente en el contexto de la globalización. Entendida según Palomenque y Avilés (2018) como un proceso multidimensional que involucra factores tecnológicos, sociales, políticos y culturales a gran escala, que generan una dinámica creciente de interdependencia entre distintos países del mundo. En los que se unifican mercados, sociedades y culturas, a través de transformaciones y avances tecnológicos que afectan a los grupos sociales involucrados en el proceso.

Si bien es cierto que en el Ecuador no hay un mercado de valores difundido, robusto y que su volumen de transa sea significativo dentro de los estándares comparados con otros países de la región. Su estudio, comprensión, profesionalización e impulso son parte de una labor fundamental para la innovación y el apoyo al desarrollo económico del país.

Sobre este particular, Moreno (2012, 10) indica que, en Ecuador, el mercado de valores es pequeño en comparación con sus pares latinoamericanos. Esto se atribuye a que no existe una divulgación apropiada de sus beneficios para el sector real de la economía ni de los procedimientos administrativos y regulaciones vinculantes al tema. Las empresas desconocen las facilidades de financiamiento y expansión que existen a través de la bolsa de valores, por lo que la principal fuente de financiamiento en el país es el crédito bancario corporativo.

Por su parte Pérez, Rivera y Solís (2015, 9-10) desarrollan un estudio relativo a la financiación de las pequeñas y medianas empresas a través del mercado de valores en Ecuador. Analizan la capacidad y viabilidad de la inversión de las Pymes fuera del esquema tradicional de inversión y financiación en el sector bancario. Su investigación indica primeramente que el mercado de valores es limitado en su volumen de transa contrastado contra el PIB; donde, para el período de 2006 a 2010 solo se alcanza el 8.9% y 9.4% respectivamente lo cual es mucho menor en comparación a otros países de la región.

En cuanto a la difusión de los beneficios que pueden obtenerse a través de la vía del mercado de valores, los autores ya indicados anteriormente precisan que fuera de Quito y Guayaquil, el conocimiento general acerca de cómo funcionan las bolsas de valores y qué beneficios pueden obtenerse, son casi nulos.

Incluso dentro de las principales ciudades del Ecuador, el conocimiento general es poco con respecto a este medio de inversión y financiación frente al tradicional mercado bancario donde acuden la mayoría de las pequeñas y medianas empresas en busca de financiación o inversión.

De igual forma, los autores indican que la normativa vigente referente al mercado de valores nacional dificulta la participación de las Pymes dentro del escenario bursátil. Por lo que es necesario generar instrumentos y regulaciones apropiadas para este sector, siendo las pequeñas y medianas empresas la principal fuente de empleo del país.¹

¹ Ley de Mercado de Valores promulgada el 23 de junio de 1998 bajo el Registro Oficial No. 367

Pérez, Rivera y Solís (2015, 10) concluyen indicando que las alternativas de financiación e inversión existen en el país. Sin embargo, son desaprovechadas, subutilizadas o bien olvidadas por la desinformación y las dificultades que involucra la inserción de este sector empresarial en la oferta de valores nacional. Lo cual denota una pérdida significativa de potencial que podría ayudar al desarrollo del sector real de la economía.

Haciendo una síntesis de lo expuesto por Rosero (2010), el mercado de valores en el Ecuador contiene una serie de problemas estructurales que interfieren en su función principal de intermediación financiera al corto y mediano plazo para los distintos sectores comerciales y financieros del país.

Acorde con lo expuesto por Rosero (2010, 25) los factores que propician esta serie de defectos estructurales son varios, entre los cuales puede mencionarse como primer elemento relevante, que el valor total de las transacciones de ambas bolsas de valores desde el 2007-2009 no superan en promedio el 10% del PIB anual. Lo que evidencia que el volumen de transa es considerablemente inferior si comparamos este mismo ratio con países de la región como Chile, donde se alcanza el 60% del PIB o Colombia cuyo mismo ratio refleja un 25% del PIB.

Como segundo factor importante a mencionar según Rosero (2010, 26), es el tema relativo a la falta de diversidad de productos que se transan dentro de las bolsas de valores. Se observa que, para el monto negociado en ambas bolsas de valores, para el año 2008, más de la mitad del monto transado, alrededor de un 54% corresponde a papeles bancarios, seguido inmediatamente por títulos valores del Estado.

Acorde con el autor anteriormente referenciado, esta situación evidencia que el mercado de valores nacional es una fuente de financiación habitual para los bancos y una fuente de liquidez a corto plazo para los gobiernos, situación que representa un problema, ya que el riesgo por concentración se dispara, al existir un panorama sobre el cual se desarrolla una inadecuada asignación del ahorro nacional, ya que los recursos destinados al financiamiento a largo plazo, terminan utilizando en el corto plazo.

El hecho de que solo existan dos actores fuertes de transa de los títulos valores, implica que la información financiera producida no es la óptima, ya que no recoge las expectativas de una amplia base de participantes del mercado y finalmente deriva en que los precios carecen de una adecuada formación y los costos de financiación para las empresas son más altos de lo que pudiesen ser en un mercado abierto y realmente difundido. Esto genera una distorsión en el mercado de valores y una asignación

incorrecta del ahorro nacional, ya que los recursos colocados a largo plazo terminan utilizándose como una fuente de liquidez inmediata.

Un tercer factor a considerar, tomando como punto de partida lo expuesto por Rosero (2010, 26-7), es que el principal inversor institucional del país es el IESS y acorde con sus políticas de inversión definidas por la ley²; para marzo de 2010 mantenía un 72% de su inversión en títulos del sector público y un 28% al sector privado. Lo que coadyuva a mantener una distorsión dentro del mercado de valores, en la que reina la escasez de productos financieros y el mercado de valores es usado como una fuente de liquidez en el corto plazo por el sector público. Ya que el principal actor del mercado, está limitado en la composición de su cartera de inversión. Adicionalmente, esto significa que el sector público y privado tienen una fuente adicional de financiación a través de las aportaciones de los asegurados.

Ahora bien, visto desde la perspectiva operativa de la bolsa de valores ecuatoriana y tomando en consideración las aristas propias del mercado nacional. Investigadores académicos como Terán (2015), Martínez (2018) y Argumedo (2020), citados en capítulos anteriores, han intentado generar múltiples métodos de evaluación de carteras de inversión, derivados principalmente de los modelos originales de Markowitz y Black-Litterman. Los cuales, intentan sortear y resolver los problemas que se generan en la dinámica actual del mercado de valores ecuatoriano como una propuesta alternativa válida para generar resultados adecuados que puedan captar acertadamente la realidad económica del país y de los emisores que componen la oferta de títulos de renta variable.

Sin embargo, acorde con Villalba (1998, 4), respecto a la aplicación de modelos tradicionales de determinación de inversiones, indica que, existen particularidades que son difícilmente adaptables a los modelos tradicionales como el de Markowitz. La carencia de información diaria, así como vacíos de información dentro de la data que publican las bolsas de valores y la dificultad para acceder a la información en general, tienden a distorsionar los resultados que se puedan obtener utilizando el modelo original de Markowitz y las derivaciones creadas para intentar resolver estos problemas.

Los modelos tradicionales de determinación de carteras eficientes basados en los supuestos de Markowitz contienen una serie de requisitos de cálculo que dificultan su

² Ley del Banco Del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social publicada el 11 de mayo de 2009 a través del suplemento del Registro Oficial No. 587.

Política de Inversiones no Privativas del BIESS, publicada en agosto de 2019.

construcción y aplicación³. Así como restricciones propias del modelo que lo hacen estático dentro de la concepción del riesgo diversificable y difícil de controlar ante pequeños cambios en las variables de determinación. Modificaciones muy pequeñas al modelo generan cambios significativos en la cartera óptima objetivo, lo cual pueda causar un resultado poco realista, tomando en consideración lo expuesto por Villalba (1998, 5).

Sobre este particular existen antecedentes que vale la pena mencionar. Terán (2015) aplica el modelo de Markowitz al mercado de valores de Ecuador. Su investigación persigue determinar una cartera óptima de inversión con los títulos disponibles en el mercado nacional. Sin embargo, la carencia de información bursátil, la poca transaccionalidad de títulos de renta variables y, en consecuencia, la poca liquidez del mercado, causan una distorsión sobre la formación de los precios de las acciones.

Esta realidad se convierte en un problema significativo al momento de aplicar la metodología seleccionada. Aún con estos factores en contra, el autor logra determinar nueve portafolios de inversión, concluyendo que es posible realizar un proceso de optimización en mercados bursátiles poco desarrollados.

Advierte que, a pesar de que es posible construir un portafolio de inversión, los rendimientos y riesgos asociados a los productos pueden variar con respecto a la realidad del mercado. Ya que, al no tener una formación de precios apropiada y una transaccionalidad que pueda evidenciar la información que los precios de las acciones contienen en sí, la evolución del rendimiento del portafolio puede distar significativamente de la realidad.

Por su parte, Argumedo (2020), analiza la aplicación del modelo Black-Litterman dentro de un portafolio de inversión de renta variable en el mercado ecuatoriano. Utiliza información disponible para el público en general como el índice bursátil ECUINDEX y el volumen de capitalización bursátil de cada emisor para obtener los rendimientos implícitos del mercado. Desarrolla su investigación sobre un modelo en el cual se toman en cuenta las expectativas del inversionista para de esta manera incluir el desempeño esperado de los activos en el portafolio.

³ Villalba (1998) hace referencia principalmente a la dificultad para incluir las opiniones de expertos dentro del modelo, así como la rigidez de la función de riesgo contemplada, adicionalmente indica que existe dificultad dentro de los cálculos ya que cualquier cartera definida con un número considerable de activos requiere una matriz de covarianzas de al menos el cuadrado del número de activos lo que suele traducirse en un programa cuadrático con un número de términos en la función objetivo superior a $n^2/2$ donde n es el número de activos considerados. Finalmente indica que las soluciones obtenidas son inestables, es decir, pequeños cambios en los rendimientos de los activos tienen efectos poderosos sobre el resultado final

Los resultados que obtiene el autor evidencian que sí es factible aplicar la metodología Black-Litterman en el mercado nacional, siempre y cuando se asuma que los retornos siguen una distribución normal, así como utilizar únicamente acciones con publicación de precios constantes debido a las características propias del mercado ecuatoriano como la baja transaccionalidad de los instrumentos, la poca profundidad de mercado y la dificultad para acceder a información bursátil

Por su parte, Martínez (2018), desarrolla una investigación donde analiza las condiciones y características necesarias para la optimización de una cartera de inversión para el Banco del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (BIESS). En esta investigación es usado el modelo Markowitz para optimización de portafolios de inversión. El mismo es aplicado al mercado de valores ecuatoriano tomando en consideración instrumentos de renta fija y renta variable.

Los resultados obtenidos por el autor demuestran que es posible aplicar el modelo matemático de Markowitz al mercado nacional y, en definitiva, fue posible determinar una cartera de inversión específica bajo el supuesto de la frontera eficiente para los requerimientos de inversión del BIESS. Sin embargo, las restricciones de información disponible, así como la escasa liquidez del mercado son los principales problemas a los que se enfrentó el autor, advirtiendo finalmente que los resultados pueden distar de la realidad debido a las restricciones del modelo aplicado.

Montenegro (2018) realiza una aplicación del modelo de valoración de activos de capital (CAPM) y de la teoría de selección de portafolios de Markowitz, para el mercado de valores nacional, con el fin de determinar el riesgo-rendimiento asociado a los títulos de renta variable disponibles en el país.

Los resultados obtenidos a través de la aplicación del modelo, evidencian la formación de distintas carteras de inversión con diferentes niveles riesgo, en donde la cartera que ofrece el mayor rendimiento tiene un mayor riesgo sistémico que el riesgo del mercado y que los rendimientos esperados de la mayoría de activos son negativos. Acorde con las conclusiones del autor, esto puede deberse al hecho de que el mercado nacional es pequeño y fuertemente asimétrico en lo que respecta a la información financiera.

El autor referido indica que el modelo de Markowitz está pensado para mercados de valores fuertes y dinámicos, más no para mercados de valores de países emergentes, en donde existen distorsiones y concentraciones de capital y riesgo que dificultan el cumplimiento de las premisas teóricas determinadas por el propio Markowitz.

León, Ruiz y Echeverría (2010) desarrollan una investigación basada en el uso de algoritmos genéticos aplicados a la determinación de una cartera de inversión óptima para México y Ecuador. Su premisa principal se basa en la modificación del modelo original planteado por Markowitz incorporando una función de ajuste en la que no se escoge una solución inicial, sino un conjunto de soluciones conocidas como población inicial, las cuales son iteradas constantemente para seleccionar aquellas acciones de idoneidad cromosómica para conseguir un par óptimo o tuplas de acciones dentro de un conjunto de acciones.

Los resultados obtenidos por los investigadores demuestran que utilizando este proceso es posible determinar carteras de inversión viables. Sin embargo, advierten que mientras más información sea posible integrar dentro de la población inicial, mejores resultados se obtendrán en la conformación final de la cartera de inversión, ya que el proceso de iteración se alimenta de esta data y mientras más elementos sean iterados más combinaciones exitosas podrán ser obtenidas.

Tomando en consideración los antecedentes expuestos en lo relativo a la investigación académica realizada sobre la determinación de carteras de inversión en el Ecuador, se evidencia la necesidad de profundizar en la búsqueda de metodologías alternativas que sirvan para poder establecer un análisis más apropiado con base en las características propias del mercado nacional.

Con respecto a estas metodologías alternativas, se presenta la lógica difusa definida por Zadeh (1994) a carteras de inversión como una alternativa válida al uso de los modelos tradicionales. En razón a esto, la presente investigación busca contrastar dicho modelo contra las metodologías clásicas de Markowitz y Black Litterman, para generar como resultado, la determinación de una cartera de inversión equiparable a los estándares de los modelos clásicos con mejoras en tiempos de cálculo, así como economía en los recursos de construcción.

La aplicación de los fundamentos de la lógica difusa tiene como principal ventaja una simplificación sistemática en las metodologías de cálculo y recopilación de información. Ya que no es preciso calcular las covarianzas de los activos financieros y su resolución es posible mediante un modelo lineal y no cuadrático. Siendo sus resultados equivalentes al modelo Markowitz, con la ventaja adicional que, es posible actualizar sin mucha dificultad el modelo, así como insertar las variables que el analista financiero considere necesarias para una apropiada determinación de cartera objetivo, siguiendo con lo planteado por (Villalba 1998, 4).

Existen antecedentes sobre la aplicación de lógicas difusas en el mundo de las finanzas. Por ejemplo, en el estudio planteado por Akdag y İskenderoğlu (2019, 2) indican que la utilización de la lógica difusa instrumentalizada a través de la programación lineal difusa genera portafolios proyectados con rendimientos mucho más enfocados a la realidad. Así como riesgos propios de los componentes del portafolio que no fueron detectados inicialmente bajo la determinación de cartera de Markowitz para la actividad desarrollada en la bolsa de valores de Turquía.

Otro antecedente interesante de la aplicación de lógica difusa al mundo de las finanzas, se presenta en la investigación llevada a cabo por Villalba (1998, 2-3), donde desarrolla un modelo de determinación de cartera eficiente basado en un modelo de desviaciones medias absolutas, derivado de los basamentos de la lógica difusa y aplicado a través de la programación lineal difusa. En el que es posible delimitar diferentes escenarios de composición y evolución de una cartera de inversión. Así como definir diferentes funciones de riesgo asimétrico, esta investigación se aplica a un caso real de la bolsa española y sus resultados son equivalentes a los modelos tradicionales con la diferencia de que es una metodología de cálculo más sencilla y eficiente.

El autor concluye que la utilización de los modelos tradicionales, como el de Markowitz, en el plano real de la economía es escaso y no muy fructífero, a pesar de la profusa literatura que existe sobre el tema, y esto es debido a que la aplicación del mismo, depende de factores de mercado e información que en muchos casos no está disponible para los analistas.

Por su parte Arango, Velásquez y Franco (2013), evalúan el estado del arte en el progreso de la aplicación de técnicas de predicción de índices de mercado de valores de Colombia, a través de metodologías fundamentadas en sistemas de inferencia difusa y redes neuronales difusas. Estos autores indican que los principales temas en boga referentes a la lógica difusa se centran en el tema de la predicción, específicamente en los rendimientos de los precios, el nivel de los precios de los instrumentos o la volatilidad de los rendimientos.

Las conclusiones a las cuales han llegado los autores en referencia indican que los modelos de pronósticos basados en sistemas de lógica difusa y sistemas neuro-difusos superan a los modelos econométricos y a los modelos basados en redes neuronales puras, ya que se obtienen resultados más acertados en la proyección de comportamiento de los mercados de valores. Las técnicas afianzadas en el ANFIS (Adaptative Neural Fuzzy

Inference System) resultan muy efectivas para la predicción de los precios de las acciones, teniendo en cuenta sus ventajas en rapidez, costo y precisión.

En Ecuador ya existen antecedentes de aplicaciones básicas de esta teoría al mundo de las finanzas, Álvarez, et al (2020, 2), plantean la utilización de la lógica difusa como una herramienta de evaluación de riesgo financiero de portafolios de inversión en el sector cooperativo del Ecuador. En su estudio, utilizan los basamentos de lógica difusa propuesta por Zadeh (1994), y los principios de la programación lineal difusa de Konno-Yamazaki (2010), para generar una metodología de determinación de riesgos asociados a la cartera de inversión que son mucho más sensibles a los cambios del entorno económico y mucho más simples de calcular en comparación con los métodos tradicionales aplicados hasta el momento.

Díaz, Molina y Navarrete (2017), establecen una metodología de clasificación de riesgo financiero al sector cooperativo uno del Ecuador a través de la aplicación de lógica difusa sobre indicadores de riesgo financiero. De dicha manera, validan el nivel de pertinencia que tiene ese indicador al compararlo con el modelo CAMEL (Capital, Asset, Management, Earning y Liquidity) y sus calificaciones de riesgo.

Los autores citados anteriormente, concluyen que la metodología difusa aplicada a los riesgos financieros presenta un nivel de pertenencia mayor hacia la calificación crediticia buena, dando una dimensión de evaluación nueva en contraste al análisis clásico. En el cual, los resultados tienden a mostrar una posición negativa de evaluación, aun cuando las variables analizadas están muy cerca de los estándares regulares impuestos como limitantes en la calificación crediticia.

Aplicado a la evaluación crediticia Altamirano, Espinoza y Arandes (2018), desarrollan una investigación sobre el estudio del riesgo financiero bajo el enfoque de la lógica difusa para empresas del sector artesanal de Cuenca, Ecuador. La dirección que los autores dan a la investigación se centra en el análisis de las 5C (carácter, capital, capacidad, colateral y condición de la economía) bajo una condición de incertidumbre. Con el fin de ubicar a estas empresas en una adecuada categoría de riesgo crediticio que demuestre nuevas dimensiones de la información utilizada para la evaluación crediticia y permita a estas empresas ingresar al mercado bancario y obtener capital para sus operaciones.

Los resultados obtenidos por los autores indican que, la utilización de la lógica difusa sobre la evaluación crediticia de las 5C determina una dimensión de la calidad crediticia que no es denotada mediante el análisis crediticio tradicional. Esto permite

evaluar factores objetivos y subjetivos para el otorgamiento o rechazo del crédito al empresario artesanal.

Tomando en consideración lo expuesto anteriormente, el mercado nacional de valores contiene algunas características especiales que dificultan la aplicación de métodos tradicionales para la determinación de carteras de inversión como el modelo Markowitz y el modelo Black-Litterman. Por ende, es necesario repensar los métodos y conceptos que son usados para su ejecución en pro del progreso del país.

Es vital desarrollar adecuadamente este mercado y reformar las estructuras actuales de funcionamiento que no permiten su expansión y especialización; no solo en beneficio de los demandantes y oferentes actuales, sino, además, para poder generar nuevas oportunidades de inversión a mediano y largo plazo que en definitivo puedan mejorar el mercado real del país, generar más ingresos para la nación y desarrollar un nicho económico necesario para el futuro del país. Así como diversificar y masificar el mercado de valores presentando oportunidades de progreso reales para las personas comunes y pequeñas empresas que buscan un mejor futuro.

La relevancia de aplicar lógicas difusas al análisis de los problemas de inversión financiera radica en su capacidad de lidiar eficazmente con el conocimiento imperfecto o ambiguo de los rendimientos futuros de los activos. Es bien conocido que los mercados financieros son altamente complejos, con problemas de sistemas no lineales, los cuales se evidencian por la gran cantidad de ruido dentro de las series temporales, las mismas son afectadas por condiciones endógenas y exógenas que muchas veces son de difícil cuantificación y que más bien pertenecen al dominio del condicionamiento lingüístico o a las expectativas propias de los participantes de mercado.

La lógica difusa puede abarcar este tipo de factores y conglomerarlos junto a variables cualitativas para dar una solución aproximada a la realidad.

La metodología difusa propuesta es capaz de hacer esta evaluación sin importar la cantidad de variables bajo escrutinio, siempre y cuando haya sido correctamente segmentado su contenido y exista una apropiada asignación de funciones de pertenencia que permitan puntualizar valores de pertenencia a conjuntos difusos diversos que posteriormente puedan ser defuzzyficados e interpretados en los rangos establecidos para las variables de salida del sistema difuso.

Como es posible apreciar en las investigaciones anteriormente referenciadas, el uso de la lógica difusa en el ámbito financiero aporta cualidades y dimensiones de

información útil que pueden englobar situaciones y características particulares de mercados financieros, opiniones de expertos y expectativas de los inversores.

Estas variables pueden adoptar valores de diversa naturaleza y que, en conjunto, desarrollan modelos de inversión y evaluación que están mucho más apegados al desarrollo histórico de los instrumentos financieros que conforman estos modelos de inversión. Cabe resaltar que una de las prominentes ventajas de la lógica difusa es su capacidad para adaptarse a distintos esquemas de información en cantidad y calidad; lo cual supone un grado de ajuste singular y valioso a distintos entornos financieros.

En el caso latinoamericano, esta ventajosa particularidad tiene un importante potencial de aplicabilidad en el área de las finanzas. Dadas las características específicas de los mercados latinoamericanos, donde escasea la información cuantitativa y la misma es de difícil acceso, existe información y vectores de valores cualitativos que pueden complementar y mejorar los resultados obtenidos, además de denotar de mejor manera los rendimientos y volatilidades de los instrumentos existentes en estos mercados y coadyuvar al desarrollo del sector real de estas economías.

Con estos antecedentes se plantean la pregunta y objetivos centrales, así como también los objetivos específicos de la investigación:

Pregunta central: ¿la aplicación de lógicas difusas a carteras de inversión en el mercado de valores ecuatorianos generaría modelos de inversión viables tomando en consideración la dinámica del mercado nacional en comparación al CAPM y MBL, período 2019-2021?

Objetivo General: Determinar si la aplicación de lógicas difusas a carteras de inversión refleja un resultado más acertado en comparación a las metodologías tradicionales, en el período 2019-2021.

Objetivos específicos:

1. Realizar una revisión teórica acerca de las características y definiciones de portafolios de inversión eficientes en instrumentos de renta variable, basado en las metodologías de lógica difusa, CAPM y MBL.
2. Recopilar información acerca de la construcción de carteras de inversión en el mercado nacional valores, basados en los modelos CAPM y MBL, para el período 2019-2021
3. Comparar los resultados de la aplicación de la lógica difusa a carteras de inversión con respecto a los resultados de modelos tradicionales CAPM y

MBL en el contexto del mercado de valores nacional para el período 2019-2021.

4. Analizar la adaptación de la lógica difusa a carteras de inversión de renta variable al contexto ecuatoriano período 2019-2021.

Capítulo primero

Estado del arte

En la actualidad, la aplicación de la lógica difusa al sector de las finanzas presenta un incremento y especialización considerable, gracias en parte a la aparición de la analítica de datos y los conceptos de automatización de machine learning, inteligencia artificial y algoritmos genéticos evolucionarios, los cuales permiten abarcar más información y paradigmas de análisis mucho más complejos que dan como resultado modelos matemáticos con gran capacidad de adaptación a los cambios y estudios de variables que coadyuvan a modelar la realidad de manera mucho más dinámica e innovadora. Los fundamentos de la lógica difusa y sus distintas vertientes de aplicación son considerados como un tema en boga dentro de múltiples ámbitos de la ciencia y la presente revisión teórica tiene como fin evidenciar cómo estos elementos se han integrado al mundo de las finanzas y cómo se han convertido en un tema de vanguardia científica gracias a su gran potencial de aplicación a los problemas actuales que se suscitan en algunas áreas como las inversiones de capital y el riesgo financiero. Adicionalmente, se trata de evidenciar los alcances que posee la teoría difusa para destilar datos y generar información valiosa para la toma de decisiones. Tal como indica Korol (2014) “la lógica difusa es una herramienta efectiva para modelar escenarios imprecisos, inciertos y ambiguos”.

La revisión teórica está estructurada únicamente en base a los aportes conceptuales que distintos autores han alcanzado en los últimos años tras la utilización de los basamentos de la lógica difusa a sus respectivas investigaciones en el área de las finanzas, inversiones y riesgo financiero. Se busca demostrar al lector las diversas formas innovadoras de aplicación de la teoría difusa al mundo de las finanzas, que, a su vez, responden a objetivos de múltiple naturaleza y que, a fin de cuentas, logran un resultado enriquecedor a los distintos ambientes de aplicación de investigación científica, demostrando que la lógica difusa tiene un potencial significativo dentro de este mundo, ya sea generando nuevos modelos de evaluación o complementando los ya existentes.

Las principales ventajas asociadas a la aplicación de la lógica difusa al mundo de las finanzas estriban principalmente en su capacidad de integrar información vaga o imprecisa a modelos certeros, o bien, fungir como un complemento al uso de modelos de

evaluación tradicionales que coadyuvan efectivamente al proceso de toma de decisiones, tal como concluyen Escrig-Olmedo et al. (2017), Del Giudice et al. (2017) y Álvarez et al. (2020).

Las conclusiones alcanzadas por Escrig-Olmedo et al. (2017) demuestran que los sistemas de inferencia difusa son particularmente útiles al conjugar información ambigua con información certera para determinar carteras de inversión que integran las expectativas de distintos tipos de inversionistas con distintos tipos de objetivos dentro de un sistema difuso definido. Los autores fueron capaces de utilizar los principios de la lógica difusa para integrar variables subjetivas como juicios, expectativas y preferencias de todo tipo de inversores dentro de un modelo de determinación de carteras de inversión medioambientalmente sustentables que se basa en los principios y métodos clásicos de construcción de carteras ya conocidos y, de esta manera, obtienen una solución óptima sin la necesidad del consenso absoluto entre los distintos grupos de inversores y sin sacrificar el rendimiento y la oportunidad de inversión en opciones social y medioambientalmente responsables.

Los autores indican que el método difuso multicriterio, incide positivamente en la toma de decisiones de los inversores e interesados en la cartera de inversión, evaluando el rendimiento, minimizando el riesgo, facilitando la integración de criterios subjetivos ya que en modelos tradicionalmente utilizados las expectativas o preferencias de los inversores no han sido adecuadamente adaptados.

Además, Del Giudice et al. (2017) demuestran en su investigación sobre “Valoración de Inversiones Inmobiliarias mediante Lógica Difusa” que esta metodología de lógica difusa contribuye a tomar decisiones reduciendo el grado de incertidumbre, mejora la capacidad de aprovechamiento de las inversiones.

De igual manera, Pimenta et al (2017) y Molina (2019) remarcan que la utilización de los sistemas difusos incrementa la certidumbre de los datos obtenidos propulsando una cercanía considerable a los datos reales y a su evolución en el futuro, gracias a su capacidad de aglutinar datos de distinta naturaleza y a su fuerte capacidad para el análisis de información en grandes cantidades y dimensiones tal como indica Zhang (2020) en el resultado de su investigación.

Pimenta et al (2017) proponen un sistema computacional que combine análisis técnico de mercado con programación genética y lógica difusa, así como un algoritmo de optimización multiobjetivo. Los autores evidencian que el uso de inteligencia computacional basada en redes neuronales o lógica difusa tiende a obtener mejores

resultados que los métodos tradicionales y que tienen una medición más adecuada de la incertidumbre relacionada a la inversión de activos financieros. El objetivo de los autores es crear un sistema computacional evolucionario automatizado para inversión en el mercado de capitales.

Los resultados alcanzados por los autores anteriormente mencionados son prometedores, el sistema obtuvo retornos financieros considerables sobre la variación de los precios de la bolsa de valores, incluso logra encontrar una solución satisfactoria en escenarios donde la caída del valor de los activos es significativa, lo cual puede interpretarse como una capacidad adaptativa significativa a ambientes cambiantes.

Molina (2019) propuso un “modelo de lógica difusa para pronosticar la inflación en Colombia”, abordó el problema inflacionario mediante un modelo alternativo aplicando estimaciones para reducir la incertidumbre a través de la lógica difusa, llegando a determinar que efectivamente la utilización de esta herramienta permite aumentar la certidumbre de los datos a encontrar para la toma de decisiones. Los autores demostraron que la lógica difusa es efectiva para estimar, logrando apearse a la realidad para dar la oportunidad a los analistas a tomar decisiones.

Derivado de esto, el manejo de los riesgos asociados a cualquier inversión pueden ser delimitados y estudiados de mejor manera ya que un procesador difuso puede extender su rango de evaluación a tantas variables como el diseñador considere necesario, de igual forma, su rápida capacidad de adaptación y reestructuración permite ampliar, reducir o proyectar la evaluación a un campo n-dimensional que enriquece los resultados obtenidos tal como coinciden los autores Vincenzo, Pierfranceso y Battista (2017) y Nakano, Takahashi y Takahashi (2019) en las conclusiones de sus respectivas investigaciones.

Vicenzo, Pierfranceso y Battista (2017) establecen un modelo de valuación de inversiones de bienes raíces a través de la lógica difusa. Los resultados de la investigación demuestran que la aplicación de un marco de procesamiento basado en lógica difusa instrumentalizado a través de un software de procesamiento difuso, permite reducir la incertidumbre a una extensión limitada, lo cual, facilita la toma de decisiones ya que abarca múltiples tipos de información existente en el mercado.

El modelo generado por Vincenzo, Pierfranceso y Battista (2017) fue aplicado a la compra de un edificio de oficinas, y la conclusión indica que, con la aplicación correcta de los operadores de lógica difusa, bróker e inversores son capaces de optimizar sus decisiones de inversión en términos de calidad y reducción sistemática del riesgo derivado de la incertidumbre de las variables de entrada.

Nakano, Takahashi y Takahashi (2019) proponen un nuevo marco de trabajo de aprendizaje adaptativo para sistemas difusos bajo ambientes dinámicos de cambio, con el objetivo de crear portafolios de inversión basados en el retorno medio del portafolio. La metodología de construcción del sistema difuso está basada en algoritmos de auto-aprendizaje de redes neurales artificiales. Tal como los algoritmos de propagación que son utilizados en este caso como identificadores intérpretes de sistema difusos multicapa. En adición a esto los autores determinan la generación de reglas difusas de iteración y los parámetros de aprendizaje a través de algoritmos de cálculo evolucionario como los sistemas difusos genéticos. En el caso de las funciones de membresía atribuidas a los conjuntos difusos del sistema se utilizan métodos basados en cadenas de Markov y modelos Montecarlo para determinar los parámetros de la función y los cambios de estado de las series.

Los autores concluyen que el modelo propuesto confirma la alta aplicabilidad de los sistemas difusos al mundo de los mercados de valores y que el sistema propuesto construye efectivamente portafolios de inversión con estimaciones riesgo-rendimiento que son apropiadas y cercanas a la realidad que demuestra la evolución de los índices financieros.

El mundo de las finanzas se caracteriza por escenarios sumamente complejos que involucran factores de todo tipo, incluidos juicios personales, percepciones de una población, panoramas políticos y estados mentales o físicos que tienen potencial de impacto sobre el resultado de una decisión financiera, autores como Duarte (2018), Valaskova, Barosova y Kubala (2019) remarcan la aplicabilidad de la lógica difusa a este tipo de problemas gracias a la capacidad de la teoría difusa de involucrar variables de evaluación certeras y no certeras dentro de un mismo problema para su resolución dentro del aparato difuso instrumentalizado por las reglas IF-THEM, ya que estas variables de difícil precisión sí afectan las decisiones que toman los administradores de capital sea de manera consciente o no.

En los modelos de evaluación financiera orientados a la toma de decisiones es común encontrar que dichos modelos solo son capaces de analizar variables objetivas o certeras, es decir, solo números, porcentajes o rangos estadísticos. Sin embargo, sabemos que las finanzas y la economía no se rigen enteramente por este tipo de información, sino que, además, los resultados de las decisiones, así como las decisiones mismas se ven afectadas por factores subjetivos y riesgos no identificados que pueden modificar el

resultado y dar un giro radical con el potencial de cambiar todas las proyecciones anteriormente estudiadas.

Tomando en consideración estas aristas, Duarte (2018) realizó una propuesta sobre el análisis de valoración multicriterio en las instituciones financieras, combinando la lógica difusa para la toma de decisiones, denominado Multicriterio (TODIM), enfocados en una metodología TODIM Fuzzy. El objetivo general fue proponer una metodología para la toma de decisiones de las instituciones financieras basadas en cálculos de puntajes/gradados, comparando desempeños futuros proyectados.

La población objeto de estudio de Duarte (2018) se enfocó en los 6 bancos más representativos del país. Se aplicaron análisis de sensibilidad para demostrar los cambios en las entradas y su afectación en los resultados basados en el TODIM (por sus siglas en portugués) inicial u original y el TODIM Fuzzy, se establecieron escenarios negativos con números borrosos simétricos y asimétricos, permitiendo entender que en el futuro los bancos se enfrentarían a situaciones negativas de alto riesgo. Los resultados son consistentes y robustos e indican que la metodología propuesta, aunada a la capacidad de la matemática difusa para procesar información no certera, así como información basada en juicios de expertos, constituye una metodología valiosa que amplía el espectro de evaluación posible y permite dimensionar posibilidades que antes no eran evidencias por la estructura del análisis tradicional.

Por su parte, Valaskova, Barosova y Kubala (2019) estudian los aspectos del comportamiento humano en la toma de decisiones financieras a través de los fundamentos de la psicología cognitiva instrumentalizados mediante la lógica difusa. La premisa principal del estudio realizado por estos autores es que los humanos no siempre se conducen por comportamientos netamente racionales, en lo que ha decisiones financieras se refiere. Los estados de ánimo, así como la aversión al riesgo, son estamentos mentales que afectan la decisión de las personas ante eventos de decisión financiera, aunado a esto, los traumas o los prejuicios propios de quién toma las decisiones impactan significativamente sobre los resultados finales que se obtienen de estas decisiones. De igual forma, este comportamiento colectivo indica que los mercados no son por sí mismos enteramente racionales y, por ende, no son enteramente eficientes.

En el estudio referido anteriormente utilizan la lógica difusa para procesar variables lingüísticas sujetas a juicios de valor por parte de los tomadores de decisiones. El proceso utilizado es conocido como controladores difusos, en los cuales la data es procesada mediante múltiples funciones de membresía, son iteradas y conjugadas

mediante un set de reglas IF-THEM que explican la naturaleza del sistema a evaluar. Posteriormente los datos son defuzzificados y los resultados obtenidos son demostrados en una escala porcentual donde puede evidenciarse el grado de aversión al riesgo que demuestran los juicios de valor de los expertos entrevistados.

Ahora bien, si bien es cierto que el potencial de la lógica difusa al mundo de las finanzas se proyecta de manera promisorio sobre el futuro de la toma de decisiones de inversión, también es cierto que el modelo difuso es tan exitoso como lo sea la capacidad del diseñador del sistema para definir los parámetros de alimentación y la forma de conjunción de las reglas IF-THEM, esto implica que el modelo por sí mismo tiene un potencial limitado de aplicación derivado de los estándares de evaluación definidos por su creador, por ende, autores como Zhang (2020), Dzwigol et al (2019) y Nakano, Takahashi y Takahashi (2019) advierten sobre la necesidad de visualizar a la lógica difusa como una herramienta de complemento poderosa que permita interpretar datos requeridos, aunada a estudios, proyecciones o métodos ya establecidos para crear comparaciones de datos y pulir evolutivamente el modelo difuso a lo largo del tiempo.

Los autores Dzwigol et al (2019) desarrollaron un modelo para evaluar el atractivo de inversión en Rusia basado en las relaciones estructurales de lógica difusa a través del proceso de fuzzyficación de variables como el atractivo de mercado, costo y calidad de la mano de obra, disponibilidad de infraestructura necesaria para desarrollar inversiones, de recursos naturales y seguridad jurídica de la actividad inversora en la región.

Para el caso presentado por Dzwigol et al (2019) es pertinente señalar que, debido a la dinámica propia del aparato gubernamental y administrativo de Rusia, no existía una metodología estándar que pudiese ser evaluada a través de los indicadores típicos utilizados para este tipo de tarea; no obstante, sí era posible extraer información de distintas fuentes para poder establecer rangos de evaluación, criterios lingüísticos de expertos en el área y cálculos estadísticos básicos que permitían, en conjunto, dimensionar una imagen aproximada de la viabilidad de las inversiones en la región.

Los autores anteriormente citados indican que, la metodología de jerarquización e iteración propia de la lógica difusa permite resolver la dificultad de la sobredimensión de un problema, pues una persona solo puede evaluar simultáneamente siete o nueve variables de distinta naturaleza y el rango de iteración se limita a la capacidad del investigador para rastrear e interpretar apropiadamente los resultados.

El resultado de la investigación indica inicialmente que el uso de la lógica difusa complementa los estudios existentes en el área, al fungir como un aglutinador de

información basado en los distintos enfoques científicos que han abordado la tarea de generar estimadores de evaluación para la viabilidad de inversiones en la región. De igual forma, se establecen recomendaciones para puntualizar y especializar los indicadores ya existentes, así entablar un modelo mucho más eficiente.

Es por esto que Zhang (2020) y Nakano, Takahashi y Takahashi (2019) utilizan la lógica difusa en paralelo con algoritmos de auto-aprendizaje, algoritmos de propagación, algoritmos de proyección cromosómica evolutiva, técnicas de finanzas y econometría que permiten en complemento generar un algoritmo inteligente de evaluación multiobjetivo que pueda aprender de sus propios errores y pulir su propio aparato de inferencia difusa para perfeccionar los resultados del controlador difuso.

Zhang (2020) desarrolló un modelo de riesgo de inversión basado en inteligencia artificial de redes neuronales difusas y VaR (Value at Risk), con el objetivo de evaluar el riesgo crediticio de los gobiernos locales de China en el momento que reciben préstamos financiados por parte de las empresas que forman la plataforma financiera del sistema local.

El objetivo de este modelo fue establecer un apropiado sistema de alerta temprana para el riesgo crediticio asociado a gobiernos locales y los proyectos de inversión que desarrollan dentro de sus comunidades. La metodología utilizada por el autor para evaluar los resultados de este sistema difuso fue comparar los resultados obtenidos contra un modelo tradicional basado en regresiones de data histórica. Las variables utilizadas en el sistema difuso se componen de tres niveles previamente diseñados por el investigador para filtrar y perfilar los datos de entrada que formaron parte del sistema difuso en cuestión. El primer nivel viene determinado por índices macroeconómicos, índices mesoeconómicos, índices financieros de gobiernos locales e índices financieros de las compañías que forman la plataforma financiera. En el segundo nivel se determinan variables como estratificación de negocios locales, índices de flujo de efectivo, de capacidad operativa y de capacidad de crecimiento. Finalmente, los autores establecieron un tercer nivel de índices en el cual se analizan ratios de evaluación a Estados Financieros, como el total de activos, ingreso operativo, flujo de caja operativo, rotación de inventarios, EBITDA, margen de ganancia sobre ventas, índices de endeudamiento, tasa de crecimiento en ventas y ratio de acumulación de capital.

Zhang (2020) distingue las ventajas de utilizar la metodología difusa junto a redes neuronales en comparación con sistemas tradicionales, principalmente gracias a las virtudes de auto-aprendizaje derivadas del machine learning y a las características propias de

ambos sistemas utilizados (lógica difusa y redes neuronales) como son: la asociabilidad de datos de distinta naturaleza, el reconocimiento automático de cambios en los patrones de trabajo del sistema y las virtudes del procesamiento masivo de información. En este sentido, el mismo autor indica que el modelo optimiza el procesamiento e interpretación de información sujeta a incertidumbre aleatoria y al principio de incertidumbre lingüística asociado a los juicios de valor. De igual manera muestra, la posibilidad de describir el comportamiento del sistema basado en reglas IF-THEM permite visibilizar los posibles resultados de ejecutar el algoritmo difuso, facilitando su comprensión y creación en términos de programación y ejecución en ordenadores.

Los resultados obtenidos por Zhang (2020), arrojan una serie de ventajas con respecto a los modelos tradicionales de evaluación de riesgo de inversión, los cuales estriban principalmente en una fuerte capacidad de procesamiento de información en procesos paralelos, amplia capacidad de adaptabilidad del algoritmo a los cambios propios de la naturaleza de los datos, fuerte capacidad de razonabilidad y buena capacidad para el procesamiento de información ambigua o difusa; así también una capacidad significativa de auto-aprendizaje por parte del algoritmo de redes neurales basado en machine learning y por supuesto, pero no menos importante, las facilidades de programación y adaptación a ordenadores, gracias a que es un modelo de procesamiento no lineal.

Lo particularmente remarcable del modelo propuesto por Zhang (2020) es que definen las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos a través de algoritmos de aprendizaje de redes neuronales, lo cual, supone un avance significativo en el establecimiento de grados pertenencia de un dato a un conjunto difuso, ya que regularmente, este proceso se lleva a cabo mediante la técnica de “expertizaje”. Los datos obtenidos mediante esta técnica son adaptados automáticamente, esto supone una respuesta inmediata a cambios en la tendencia de los datos o el reconocimiento de posibles choques exógenos al modelo, ello permite respuestas rápidas y capacidades de adaptación que no son logradas por los modelos tradicionales.

La lógica difusa aplicada a las finanzas es una potencial puerta de entrada de la inteligencia artificial al mundo de la economía y las finanzas, con posibles aplicaciones a problemas muchos más complejos y controversiales que pueden abrir la puerta a nuevos paradigmas de investigación científica sin fronteras visibles en el corto y mediano plazo, siempre y cuando se profundice y especialice su aplicación a este mundo.

2. Bases teóricas de lógica difusa

El principal exponente que aborda el tema de la lógica difusa es Loftfy Zadeh (1994), quien define a la lógica difusa como un concepto emanado de la lógica multivaluada, aunque solo en una fase inicial, ya que, en sentido estricto, la lógica difusa se relaciona a un sistema lógico que apunta a una formalización del razonamiento aproximado. Y que, el propio autor, lo sitúa dentro del campo de la computación suave, siendo su objetivo principal, replicar la habilidad humana para emplear modos de razonamiento no certero resolviendo conjeturas y problemas del mundo real.

Tomando en consideración las observaciones realizadas por Zadeh (1994), el punto de partida de la computación suave se basa en la tesis de que la precisión y lo certero acarrear un costo basado en el valor de la tolerancia hacia la imprecisión y la incertidumbre que deberían ser explotados por el razonamiento computacional y los tomadores de decisiones. Acorde con este autor, la remarcable habilidad humana para explotar este tipo de características ambiguas dentro de un problema como, por ejemplo, discursos imprecisos, juicios lingüísticos ambiguos, toma imprecisa de decisiones, reconocimiento y clasificación inmediata de imágenes y, aun así, tener la capacidad de encontrar una solución racional y práctica. Hace que, dentro del campo de la matemática, estadística y computación, esta cualidad sea altamente útil. Generalmente estas tres áreas se basan o se alimentan de información precisa que no siempre es posible obtener o construir.

Adicionalmente Zadeh (1994), remarca la existencia de variables lingüísticas, reglas de interacción de sistema IF-THEM, modos borrosos de razonamiento, como el razonamiento interpolado, silogístico y disposicional que, en suma, buscan complementarse para construir un modo de razonamiento que se asemeje a las características principales del razonamiento humano y que lo diferencien por completo del concepto tradicional de la lógica multivaluada y de la matemática certera.

Nacida de la idea propuesta por Zadeh (1994), el campo de la lógica difusa se ha ido expandiendo con el tiempo, hasta que actualmente se habla de definiciones y avances en programación matemática difusa, aritmética difusa, teoría difusa de grafo, topología difusa, y análisis difuso de datos. Teniendo en consideración que toda teoría certera puede ser fuzzycada a través de la generalización de conceptos de un conjunto.

Sostiene el mismo autor que las aplicaciones de esta rama de la ciencia al campo real han tenido una difusión variada y práctica en muchos ámbitos. Desde la construcción de controladores difusos tipo Mandami que regulan el nivel de agua o electricidad en

electrodomésticos; sistema de frenos ABS basados en los principios de la lógica difusa para identificar los puntos de mayor necesidad del sistema; algoritmos de machine learning basados en lógica difusa y redes neurales evolutivas para rastrear enfermedades genéticas y algoritmos de evaluación basados en lógica difusa que estudian indicadores macroeconómicos que intentan predecir el comportamiento de la economía de un país en un periodo de tiempo.

El punto neural de un sistema difuso, en palabras de Zadeh (1994), está relacionado directamente a su capacidad de solución adaptativa aunada a la complejidad de un sistema existente. Con base en el principio de incompatibilidad descrito por Zadeh (1994), en la medida en que la complejidad de un sistema aumenta, la posibilidad de ser puntuales o exactos e intentar construir explicaciones concretas de la actuación o el comportamiento del sistema disminuye hasta un punto en que la exactitud de un resultado y el significado del mismo son características mutuamente excluyentes, visto desde la perspectiva típica de una solución precisa.

Sin embargo, Zadeh (1994), afirma que el sistema difuso puede lidiar con la incertidumbre y la imprecisión hasta otorgar una solución basada en resultados aproximados que describan al sistema como un organismo vivo que interactúa con su entorno en base a reglas de acto y consecuencia y que devenga finalmente en un resultado producto de su propia interacción con el entorno o consigo mismo.

Referente a la aplicación práctica de los conceptos de la lógica difusa al mundo de las inversiones y, específicamente, a la determinación de carteras de inversión eficientes. Nakano, Takahashi y Takahashi (2019), proponen un acercamiento estado-espacio de un modelado adaptativo difuso para inversión financiera. Donde, su principal objetivo es desarrollar un marco de aprendizaje adaptativo para sistemas difusos bajo ambientes dinámicos cambiantes. Especialmente centrado en un algoritmo de filtrado de datos, tradicionalmente usados para la estimación de variables no observables, aplicado a problemas de optimización no lineales a través de la reinterpretación de variables de control y funciones objetivo como variables de estado y modelos de observación.

La metodología usada por los autores anteriormente mencionados, mejora sustancialmente la flexibilidad de las funciones objetivo, que permiten a su vez, construir el sistema difuso adaptativo, logrando el fin lógico arbitrario que el diseñador del sistema busca con la investigación.

Adicionalmente, el análisis de las estructuras de las series de tiempo es introducido dentro del parámetro de transición de estado de las variables, esto con el

propósito de potenciar el rendimiento del modelado de datos. Particularmente, la introducción de procesos de reversión de la media hace posible que el modelo de aprendizaje adaptativo se centre en torno a niveles predeterminados de confianza obtenidos por las metodologías de aprendizaje existentes.

El trabajo de Nakano, Takahashi y Takahashi (2019), se enfoca en la construcción de la rentabilidad objetivo del portafolio, esta se especifica como un índice de mercado con desperdicio cero teniendo en cuenta la demanda de los inversores por construir una cartera con riesgo a la baja controlado y maximización de los beneficios. El resultado obtenido por los autores, una vez definido el modelo de inteligencia artificial, basado en lógica difusa y filtrado bayesiano de datos, confirma las intenciones de crear un marco de trabajo viable para el sistema que pueda generar carteras de inversión con los objetivos determinados por los autores; que conlleve una reducción del riesgo y una maximización de la rentabilidad objetivo de la cartera.

3. Conjuntos difusos

Es necesario mencionar que de acuerdo a Zhang (2020), la lógica difusa tiene una ventaja que permite a los grupos interesados describir el comportamiento esperado. Por otra parte, para Zadeh (1994, 2), la lógica difusa, , es una alternativa de evaluación a la lógica multivaluada; esta se basa en los conjuntos difusos, aquellos que son comprendidos como expresiones infinitas de un conjunto certero evaluado bajo n tramos de segmentación del conjunto tradicional, esta naturaleza indefinida y abierta permite evaluar conceptos o datos que no son totalmente ciertos o falsos ya que su evaluación pasa por los n tramos de segmentación de un conjunto difuso y el valor en sí posee un grado de pertenencia a cada tramo sobre el que es evaluado. Es decir, es la lógica aplicada a conceptos que pueden tomar un valor cualquiera dentro de un conjunto de valores posibles, que pivota entre dos extremos posibles. Como, por ejemplo, cierto, falso, verdad, mentira, blanco, negro, bueno o malo.

Alternativamente Kaufman y Aluja (1987), definen un conjunto borroso, como una serie infinita o finita de bandas de seguridad. Estas bandas de seguridad permiten aplicar criterios pertenecientes al concepto de la autenticidad de una afirmación o parámetro de medición. Precizando o estableciendo niveles variables o trechos de pertenencia a un concepto determinado e imitando de esta manera, modelos argumentativos parecidos a los del razonamiento humano, donde existe de igual forma trechos de seguridad conceptual para aseverar o refutar un concepto.

Nakano et al., (2019), mencionan que la lógica difusa es una metodología primaria y complementaria de la inteligencia artificial que permite modelar diferentes escenarios, para que expertos en la toma de decisiones, se apeguen un poco más a la realidad. El sistema borroso almacena reglas de inferencia que imita cuantitativamente el razonamiento humano. Así la lógica difusa contribuye a los mercados financieros a la toma acertada de decisiones en beneficio de los de inversores y receptores de capital, minimizando el riesgo operativo, de crédito y liquidez.

Tal como indica Zadeh (1994, 3), lo difuso dentro de todo esto no es la lógica propiamente dicha sino lo que esta estudia o pretende evaluar bajo los n tramos de grados de pertenencia, esta información pertenece a universo de discurso en el cual los valores exactos pueden no representar la naturaleza o el comportamiento propio del universo y tiende a expresar una cierta falta de precisión del concepto al que se aplica. La lógica difusa permite tratar expresiones de diversa naturaleza con información imprecisa o ambigua. Haciendo uso del ejemplo más famoso de Zadeh, expresiones como “estatura media” o “temperatura baja” por sí solas no contribuyen a determinar resultados útiles, a menos que sean contrastadas contra un parámetro común o contra un consenso de reglas generalizadas.

Acorde con el Zadeh (1994), la raíz de utilidad de la lógica difusa, o bien, los cimientos de su construcción, se basan en las estructuras sobre los que se construye el pensamiento humano. Los cuales, no son números, sino etiquetas o juicios lingüísticos, ya que el conocimiento común o la forma en la que se ha construido el mundo humano parte mayoritariamente de un tipo de entendimiento, análisis e introspección lingüístico cualitativo más que cuantitativo.

Pimenta et al. (2018), demostraron en su investigación denominada “un método de inversión automatizado para el mercado de valores basado en la programación genética multiobjetivo” que un sistema automatizado financiero, permite identificar momentos más adecuados para la decisión de inversión o compra porque combina la optimización multiobjetivo, la programación genética, el análisis técnico y la selección de características.

Esto supone que, en el mundo en que vivimos existe mucho conocimiento no preciso que sirve de base para la construcción de una sociedad o para la interpretación de un fenómeno. El más claro ejemplo es el mismo razonamiento humano, el cual es capaz de funcionar con este tipo de información y es capaz de encontrar soluciones viables a problemas bajo este esquema de pensamiento. Como, por ejemplo, los juicios de valor

sobre la estatura, la temperatura, la diferencia que puede suscitar el significado de un discurso entre el emisor y los posibles receptores, por la sola asimetría argumentativa que existe en cada persona y como ésta interpreta el lenguaje.

Villalba (1998), indica que la existencia de esta singularidad en el interactuar cotidiano entre humanos y su entorno rebate a su vez, la afirmación del comportamiento enteramente lógico y preciso de los individuos dentro de una economía. Siendo este principio uno de los supuestos básicos de muchos de los postulados base de la teoría económica clásica.

El planteamiento de la lógica difusa dentro de la teoría de inversión significa una diferencia importante con respecto a los basamentos inamovibles de los esquemas económicos tradicionales.

Zadeh (1994, 6), indica que, el lenguaje matemático planteado a través de la lógica difusa y la teoría de conjuntos difusos, permite trabajar datos numéricos precisos junto con términos lingüísticos que pueden aproximarse a un comportamiento, tendencia o condición de un conjunto de datos cuantitativos. Lo cual, aporta una nueva dimensión de posibilidades si se observa su aplicación dentro del mundo de las finanzas e inversiones.

La información lingüística sobre juicios de valor u opiniones acerca de un tópico evidentemente son mucho menos exactos que los datos numéricos, pero en muchas ocasiones su propia naturaleza aporta información contextual e inferencial mucho más útil para el razonamiento humano. En el caso específico de las finanzas, estos juicios de valor basados en la experiencia o el conocimiento impreciso, son capaces de contextualizar un escenario posible o complementar un conjunto de resultados sobre los cuales pueda ser tomada una decisión.

La lógica difusa, acorde con Zadeh (1994, 6), tiene la capacidad de reproducir de manera aproximada los escenarios comunes del razonamiento humano. Considerando generalmente que la idea de la certeza o precisión de una proposición, es una cuestión de comparación con un valor o juicio conocido que permita entablar una métrica de evaluación, o el grado de asociabilidad con una serie de consensos aceptados y generalizados como buenos o malos para un determinado tópico teórico o práctico.

De esta manera Zadeh (1994), considera al razonamiento preciso como los límites de la naturaleza de los conjuntos difusos, o la frontera de sus estados de existencia y por esta razón, por esta flexibilidad conceptual, su tolerancia a la imprecisión e incertidumbre y su base en el lenguaje humano como elemento de valor de las variables observables. Se convierte en una herramienta sumamente valiosa para la abstracción de información y la

posibilidad de contextualizarlos dentro de un escenario determinado en el que pueda aportar una nueva visión y una metodología para la solución de problemas.

Opina Zadeh (1994), que el nivel de pertenencia borrosa de un dato “x” a un conjunto borroso, simboliza las semejanzas de este dato al conjunto al que pretende pertenecer, o la aproximación hacia una o unas características que definen al conjunto y permiten determinar si es o no semejante. Siendo que las propiedades de estos conjuntos no se expresan de manera exacta, sino que pueden ser interpretadas por un contexto, muestra estadística o tendencia resultante de una serie de eventos.

El ejemplo más famoso para poder entender que es un conjunto difuso es dado por el mismo Loftfy Zadeh (1994, 8-9), quien, para ejemplificar el concepto de conjunto difuso, toma como punto de partida el calificativo lingüístico de “hombres altos”, el cual se entiende como un conjunto certero al que pertenecen los hombres que superen una estatura determinada o sean iguales a la estatura determinada Para el ejemplo antes mencionado por Zadeh (1994, 8-9), la estatura determinada se estableció en 1.80 metros, en consecuencia cualquier hombre inferior a esta altura quedaría automáticamente excluido del conjunto “hombres altos”.. Sin embargo, decir que un hombre de 1.79 metros no es alto sonaría ilógico e impráctico, tomando en consideración que existen “n” conjuntos de estatura, tantos como el observador quiera definir.

El enfoque de la lógica difusa, siguiendo las ideas de Zadeh (1994, 8-9), es que el conjunto “hombres altos” no puede considerarse como un valor totalmente cierto o totalmente falso, ya que bajo diferentes puntos de observación la frontera que define al conjunto “hombres altos” puede cambiar considerando variables circundantes que pueden aportar información valiosa para enriquecer el concepto de lo que podría entenderse como “hombres altos”.

Aplicando los basamentos de la lógica difusa, Zadeh (1994, 8-9), en primera instancia deberían definirse múltiples conjuntos difusos cada uno con una función de pertenencia que defina al conjunto y que una muestra de estaturas sea evaluada en cada conjunto difuso definido, naturalmente, la estatura evaluada tendrá un valor de pertenencia a cada conjunto difuso y es en este punto donde se define una función de transición de “alto” a “no alto” que finalmente nos indique que la estatura evaluada pertenece en mayor o menor grado a uno de los conjuntos difusos creados. De esta manera, tomando como base el ejemplo de Zadeh (1994, 8-9), definiendo un conjunto borroso “hombres altos” con valores entre 0 y 1, una estatura de 1.79 metros podría pertenecer al conjunto difuso “hombres altos” con un grado de asociación de 0.8, una

estatura evaluada de 1.89 metros podría pertenecer al conjunto difuso “hombres altos” con un grado de asociación de 0.85 y una estatura evaluada de 1.50 metros tendría un grado de asociación de 0.1 al conjunto “hombres altos”

Sostiene Zadeh (1994, 9-10) que esta asignación de valores de pertenencia al conjunto permite entablar una apreciación mucho más acertada de la realidad al recoger valores cuantitativos certeros e inamovibles y combinarlos con un grado de pertenencia al conjunto que podría estar determinado por factores de apreciación subjetivos basados en categorizaciones cualitativas; como, por ejemplo, “hombre pequeño”, “hombre pequeño-mediano”, “hombre mediano-alto” y “hombre alto”.

Ross (2010, 34), puntualiza la definición dada por Zadeh, indicando que un conjunto borroso contiene elementos que tienen varios grados de pertenencia a un conjunto y que estos definen una función de transición gradual de un estado a otro o también de un conjunto borroso a otro, lo cual puede ser visto como conjunto cuyos límites son vagos o ambiguos y, por tanto, un elemento real “x” puede pertenecer a múltiples conjuntos difusos con distintos grados de pertenencia.

De igual forma, Ross (2010, 34), indica que los elementos de un conjunto difuso pueden ser mapeados dentro de los valores de membresía usando funciones teóricas continuas y discretas, definiendo tales como:

- Conjunto difuso de un universo de discurso discreto:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots \right\} = \left\{ \sum_i \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \right\}$$

- Conjunto difuso de un universo de discurso continuo:

$$\tilde{A} = \left\{ \widetilde{\int} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} \right\}$$

Cabe recalcar que, según Ross (2010, 34), en ambas expresiones, la barra horizontal no indica división, sino un delimitador entre la función de membresía, situada en la parte superior y el valor real, situado en la parte inferior. En la segunda expresión el símbolo de integración no indica integrales algebraicas sino una función teórica continua de operadores agregados para una variable continua.

Así, según Ross (2010, 15), la teoría de conjuntos difusos es capaz de contemplar la membresía parcial de un elemento a un conjunto difuso determinado. Un conjunto difuso contiene objetos o valores que satisfacen propiedades imprecisas de membresía, es decir, la membresía de un objeto o dato hacia un conjunto difuso puede ser aproximada y puede contener elementos que tengan varios grados de membresía dentro del conjunto.

Gracias a esta flexibilidad, los elementos dentro de un conjunto difuso, pueden pertenecer a otros conjuntos difusos del mismo universo ya que la función de membresía necesaria para pertenecer al conjunto difuso, no es una membresía total, sino parcial.

Acorde con Ross (2010, 15), esta asignación viene determinada mediante una función de membresía asociada a dicho conjunto difuso, donde cada posible valor de un conjunto de valores de entrada “x”, tiene asociado un grado de pertenencia al conjunto difuso “A” determinado por la función de pertenencia $\mu_A(x)$ que adopta valores entre 0 y 1.

Formalmente el Universo de discurso de la función de membresía puede ser descrito como:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

De igual forma Ross (2010, 15), indica que es posible decir que el conjunto A es matemáticamente equivalente a su función de membresía $\mu_A(x)$, ya que conocer $\mu_A(x)$ es igual a conocer A. Ya que el límite superior de la función de membresía representa todos los atributos del conjunto A.

Un conjunto difuso en el universo de discurso U se caracteriza por una función de membresía $\mu_A(x)$ que toma valores entre [0, 1] y puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento “x” y su valor de pertenencia al conjunto se determinaría como:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\}$$

Con respecto a las operaciones posibles dentro de los conjuntos difusos, Ross (2010, 35), define tres operaciones básicas, la unión, intersección y complemento. Pensemos en tres conjuntos difusos \tilde{A} , \tilde{B} y \tilde{C} pertenecientes al universo de discurso X. Para un elemento “x” de dicho universo la formalización de la función teórica de operaciones de los conjuntos teóricos viene dada por:

- Unión (\cup):

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \text{MAX}[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$$

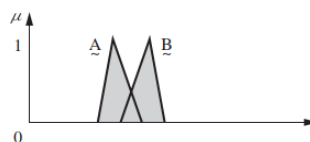


Figura 1. Operación algebraica de unión. Fuente: Timothy J. Ross. 2010. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*.

- Intersección (\cap):

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \text{MIN}[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$$

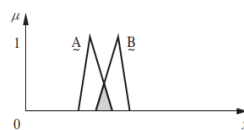


Figura 2. Operación algebraica de intersección. Fuente: Timothy J. Ross. 2010. Fuzzy Logic with Engineering Applications.

- Complemento:

$$\overline{\mu_{\tilde{A}}(x)} = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

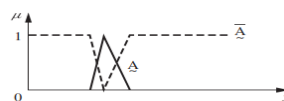


Figura 3. Operación algebraica complemento. Fuente: Timothy J. Ross. 2010. Fuzzy Logic with Engineering Applications.

Acorde con Ross (2010, 41), estas operaciones son denominadas como estándares y también son aplicables a conjuntos certeros. Sin embargo, existen más operaciones que las tres básicas anteriormente nombradas. Por cada una de estas tres operaciones estándar existe un conjunto de tipos de funciones cuyos miembros pueden ser considerados como generalizaciones difusas de las operaciones estándar.

Este tipo de funciones que califican como intersecciones difusas y uniones difusas son referidas como t-normas y t-conormas. Plantea Ross (2010, 41) que los principales operadores que cumplen las condiciones para ser llamados t-conormas son el operador máximo y la suma algebraica, por ende:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$$

De igual forma, Ross (2010, 41) indica que los principales operadores que cumplen las condiciones para ser t-normas son el operador mínimo y el producto algebraico, por ende:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$$

Asimismo, Ross (2010, 41) resalta que, a pesar de la existencia de las t-normas y t-conormas, las operaciones estándar difusas tienen una significancia especial comparadas con las normas generalizadas. La intersección difusa, es decir, el operador mínimo, produce el valor de membresía más amplio de todas las t-normas. Y, la unión difusa, es decir, el operador máximo, produce el valor de membresía más pequeño de todas las t-conormas.

Estas cualidades de las operaciones estándar difusas son importantes porque previenen el error compilado de los operadores, la mayoría de las alternativas generalizadas carece de esta significancia.

Siguiendo a Ross (2010, 35), existen conceptos particulares y únicos de los conjuntos difusos que no son originarias de la teoría de conjuntos certeros, como lo son:

- Soporte de un conjunto difuso: El soporte de un conjunto difuso A en el universo de discurso U es un conjunto numérico que contiene todos los elementos de U que tienen un valor de pertenencia distinto de cero en A, esto es:

$$sop(x) = \{x \in U | \mu_A(x) > 0\}$$

- Si el soporte de un conjunto difuso no posee elementos se denominará conjunto difuso vacío.
- Si el soporte de un conjunto difuso es un único punto, se denominará conjunto difuso singleton.
- El punto de cruce de un conjunto difuso se determina por el valor en el universo de discurso U, cuyo valor de pertenencia al conjunto difuso sea igual 0.5.
- Dos conjuntos difusos denominados A y B, serán iguales si y solo si sus funciones de membresía son iguales:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

- El conjunto difuso B contiene al conjunto difuso A si y solo sí, la función de membresía de A es menor o igual a la función de membresía de B para valor de x en el universo de discurso U:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ para todo } x \in U$$

De igual forma, Ross (2010, 38), identifica las propiedades de los conjuntos difusos y advierte que los conjuntos difusos poseen las mismas propiedades que sus pares certeros, ya que los valores de membresía de un conjunto clásico son un subconjunto del intervalo [0,1], los conjuntos clásicos pueden ser pensados como un caso especial de los conjuntos difusos, por ende, las propiedades de los conjuntos difusos pueden ser identificadas como:

- Conmutatividad:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Asociatividad:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- Distributivita:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- Idempotencia:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A.$$

- Identidad:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap X = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$A \cup X = X.$$

- Transitividad:

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

- Involución:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

En referencia a las dos propiedades especiales de operación de conjuntos conocidas como los axiomas medios excluidos y los principios de Morgan. Ross (2010, 30), indica que, en el caso de conjuntos difusos, los axiomas medios excluidos no son aplicables como en el caso de conjuntos certeros. Para el caso de los principios de Morgan si son aplicables dentro de la teoría difusa gracias a su utilidad para demostrar tautologías y contradicción en la lógica inferencial, así como en una multitud de otras operaciones y demostraciones de conjuntos.

La formalización de los principios de Morgan viene dada por:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

4. Producto Cartesiano Difuso

Con respecto al producto cartesiano entre dos conjuntos difusos, Ross (2010, 56), indica que el mismo se implementa exactamente como el producto cruzado de dos vectores. Por ende, piénsese en un conjunto difuso en el universo Y . Entonces el producto

cartesiano entre los conjuntos difusos \tilde{A} y \tilde{B} dará como resultado una relación difusa, que está contenida completamente en el espacio producto cartesiano.

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \tilde{R} \subset X * Y$$

Donde la relación difusa tiene una función de membresía de la forma:

$$\mu_R(x, y) = \mu_{\tilde{A} \times \tilde{B}}(x, y) = \text{MIN}(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))$$

Ross (2010, 56) señala que la idea principal es emparejar elementos entre conjuntos difusos, es decir, cada uno de los conjuntos borrosos podría considerarse como un vector de valores de membresía y cada elemento está emparejado con un elemento particular del conjunto con el cual se aplicará la multiplicación.

Tomemos en consideración el ejemplo dado por Zamora (2015, 11:53): se tienen dos conjuntos difusos que describen cómo aumenta la gravedad de un accidente automovilístico a medida que incrementa la velocidad del automotor y el tipo de accidente que podría producirse. Defina un conjunto difuso \tilde{A} que representará la velocidad del automóvil, a la par de cada velocidad se encuentra la función de membresía que describe el grado de pertenencia al conjunto siendo 0 que no pertenece al conjunto y 1 que pertenece totalmente.

El conjunto difuso \tilde{B} describirá el tipo de accidente en función a su gravedad, donde 1 representa volcamiento, 2 representa salirse de la calle, 3 describe un choque lateral y 4 un choque frontal. De igual manera a cada tipo de choque le acompaña su respectiva función de membresía que describe su grado de pertenencia al conjunto gravedad del accidente, siendo 0 que no pertenece y 1 que pertenencia.

$$\tilde{A}(\text{alta velocidad}) = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0.1}{40} + \frac{0.5}{80} + \frac{0.8}{100} + \frac{1}{120} + \frac{1}{140} \right\}$$

$\tilde{B}(\text{gravedad del accidente})$

$$= \left\{ \frac{0.8}{\underbrace{1}_{\text{Volcamiento}}} + \frac{0.8}{\underbrace{2}_{\text{Salir de la calle}}} + \frac{0.9}{\underbrace{3}_{\text{Choque lateral}}} + \frac{1}{\underbrace{4}_{\text{Choque frontal}}} \right\}$$

$$\tilde{R} = \tilde{A} \circ \tilde{B} = \begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 40 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ & 80 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ \tilde{R} = \tilde{A} \circ \tilde{B} = & 100 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ & 120 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 1 \\ & 140 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 1 \\ & & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

Al momento de determinar la relación difusa nacida del producto cartesiano, debemos hacer notar, acorde con Zamora (2015, 11:53), que la intensidad de la relación

aumenta a medida que la velocidad del hipotético automóvil llega a 140 km/h y se produce un choque frontal. El valor de membresía que adopta esta relación es exactamente 1, lo cual indica que un accidente será grave si se dan estas dos condiciones.

De igual forma, si el hipotético automóvil tiene velocidad 0 km/h la intensidad de la relación decae en todos los casos de choque. Lo que indica que, a menor velocidad, la intensidad de la relación decae en todos los tipos de choque. Esto deriva en que, de producirse un choque, puede no ser grave.

5. Relaciones Difusas

Con respecto a las relaciones difusas, Ross (2010, 49), indica que estas representan el grado de asociación presente o ausente, que determina la interacción o interconexión entre elementos de dos o más conjuntos difusos. Las relaciones difusas son la base de la lógica difusa, razonamiento aproximado, sistemas de control basados en reglas, simulaciones no lineales, evaluación sintética, reconocimiento de patrones y control difuso.

Para Ross (2010, 48), las relaciones representan asignaciones para conjuntos difusos, justo como lo hacen las funciones matemáticas. Las relaciones son útiles para representar conectadores en la lógica inferencial.

Tomemos como referencia el ejemplo de Ross (2010, 49) y definamos que, “x es mayor que y”, y supongamos que los mismos pertenecen a dos universos de discurso U y V, respectivamente. La relación difusa definida como $R(U, V)$ es un conjunto difuso en el espacio producto universo $U \times V$ que se define mediante una función de membresía $\mu_R(x, y)$ donde x pertenece al universo U; y pertenece a V, la definición formal de esta relación difusa es:

$$R(U, V) = \{(x, y), \mu_R(x, y) \mid (x, y) \in U \times V\}$$

Donde, en el caso de relaciones difusas $\mu_R(x, y) \in [0, 1]$.

Según Ross (2010, 49), las relaciones difusas son un conjunto difuso diferente de sus componentes en el mismo espacio producto universo, por ende, las operaciones de conjuntos difusos y los operadores generalizados son también válidos para las relaciones difusas.

Supongamos $R(x, y)$ y $S(x, y)$ son dos relaciones en el mismo espacio producto universo $U \times V$. La intersección o unión entre R y S, son composiciones entre las dos relaciones, tal que:

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \mu_R(x, y) * \mu_S(x, y)$$

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \mu_R(x, y) \theta \mu_S(x, y)$$

Donde * es cualquier t-norma y θ es cualquier t-conorma.

Formalmente la relación $R \circ S$, cuando R y S pertenecen a universos discretos de discurso, se define como una relación difusa en $U \times W$ cuya función de membresía está determinada por:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \underbrace{SUP}_{y \in V} [\mu_R(x, y) * \mu_S(y, z)]$$

Donde, según Ross (2010,49), el operador SUP es el máximo y el operador * puede ser reemplazado por cualquier t-norma. Acorde con Ross (2010, 50) en función a la t-norma definida es posible obtener distintas composiciones; las más conocidas y usadas son la composición MAX-MIN y la composición MAX-PRODUCT. Tomando como referencia el ejemplo usado por Ross (2010, 50), estas pueden definirse como:

- MAX-MIN: la composición difusa de las relaciones difusas $R(U, V)$ y $S(V, W)$ es una relación difusa $R \circ S$ en $U \times W$ definida por la función de pertenencia.

$$\mu_{R \circ S}(x, y) = \underbrace{MAXMIN}_{y \in V} [\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)]$$

Donde $(x, z) \in U \times W$.

- MAX-PRODUCT: la composición difusa de las relaciones difusas $R(U, V)$ y $S(V, W)$ es una relación difusa $R \circ S$ en $U \times W$ definida por la función de pertenencia.

$$\mu_{R \circ S}(x, y) = \underbrace{MAX}_{y \in V} [\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)]$$

Donde $(x, z) \in U \times W$.

Funciones de membresía.

Ross (2010, 90) es de la opinión que toda la información inserta en un conjunto difuso está descrita por su función de pertenencia. Esta función define el grado de pertenencia de un elemento a un subconjunto establecido por una variable lingüística.

Existen múltiples formas sobre las cuales puede ser definida una función de pertenencia. Sin embargo, las más comunes o normalmente utilizadas son:

- Forma triangular:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x \in [a, m] \\ (b-x)/(b-m) & \text{si } x \in [m, b] \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Forma trapezoidal:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x \leq a) \vee (x \geq d) \\ (x-a)/(b-a) & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \in [b, c] \\ (d-x)/(d-c) & \text{si } x \in [c, d] \end{cases}$$

- Forma S:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 2\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in [a, m] \\ 1 - 2\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in [m, b] \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

- Forma Singleton:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

Derivado de estas formas de función de pertenencia o membresía, se desprenden una serie de anotaciones importantes que sirven para tipificar y estructurar particularidades de los resultados obtenidos.

Establece Ross (2010, 90) que el centro (core) de una función de membresía de un conjunto difuso A, está definido como la región del universo de discurso caracterizado por tener una membresía completa al conjunto A. El centro comprime los elementos x del universo, tal que $\mu_A(x) = 1$.

El soporte (support) de una función de membresía para un conjunto difuso A, está definido como la región del universo de discurso caracterizado por una función de membresía distinta de cero en el conjunto A. El soporte comprime los elementos x del universo, tal que $\mu_A(x) > 0$. (Ross, 2010, 90).

Puntualiza Ross (2010,91) que la frontera (boundry) de una función de membresía para un conjunto difuso A, está definida como la región del universo de discurso que contiene elementos que tienen un valor de membresía distinto de cero, pero no poseen una membresía completa al conjunto. Las fronteras comprimen esos elementos x del universo de discurso, tal que, $0 < \mu_A(x) < 1$.

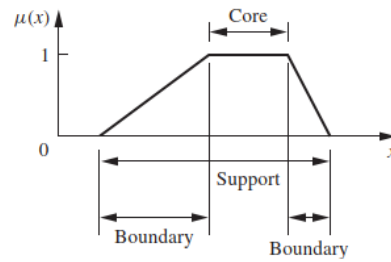


Figura 4. Elementos de una función de membresía. Fuente: Timothy J. Ross. 2010. Fuzzy Logic with Engineering Applications

Los puntos de cruce de una función de membresía están definidos como los elementos en el universo de discurso de un conjunto difuso A donde el valor de membresía o pertenencia es igual 0.5, tal que $\mu_A(x) = 0.5$, (Ross, 2010, 91).

6. Fuzzificación

Ross (2010, 93) establece que la fuzzificación es el proceso de convertir un número certero a un número difuso. La idea primaria detrás de este proceso, es simplemente reconocer que muchas de las cantidades o resultados que concebimos como determinísticos en realidad no lo son, los resultados generalmente conllevan dentro de sí una cantidad considerable de incertidumbre. Esto es debido al ambiente general de imprecisión y ambigüedad en el cual estos resultados son generados.

Jantzen (2007, 23), indica que, todo sistema de control difuso involucra este proceso de fuzzificación, es la puerta de entrada para la analítica derivada de un controlador difuso tipo Mandami. Acorde con el autor anteriormente citado, puede describirse como un proceso lógico-matemático en el que se convierte un elemento “ x ” de un universo de discurso, en un valor de función de membresía determinado por el sistema de inferencia difusa, en el cual, se le asigna un valor de pertenencia a los conjuntos establecidos a través de las formas de funciones de membresía.

7. Defuzzyficación

Descrito por Jantzen (2007, 23) como el inverso de la fuzzificación, es un proceso matemático que convierte valores difusos en valores certeros. Es la conclusión del sistema de inferencia difusa basada en la data de entrada. Dentro de los procesos normales de un controlador difuso, el sistema de inferencia difusa, basado en las reglas de interacción de sistema difuso, concluyen con un resultado derivado de la iteración de las reglas difusas y los valores de las funciones de pertenencia o membresía. El valor obtenido de este proceso es un conjunto difuso que por sí mismo no tiene utilidad, a menos que, sea

aplicado un proceso de defuzzificación que permita interpretar los valores obtenidos por el controlador.

Dzwigol & Aleinikova (2019), mencionan que emplear la lógica difusa es efectivo donde existe información verbal lingüística, permitiendo evaluar el indicador inicial con valores denominados conjuntos borrosos, este modelo, junto con el procedimiento de defuzzificación, contribuyen a monitorear la variación en el indicador inicial con el de los factores que influyen en este indicador.

Precisa Ross (2010, 96), que existen diferentes métodos para lograr esta defuzzificación, cada uno de ellos arroja resultados diferentes, donde será el diseñador del sistema difuso quien decida cuál es el más apropiado, basado en su experiencia y sus previsiones del sistema. Los métodos más comúnmente utilizados son:

- Defuzzificación por centroide: básicamente determina el centro de gravedad de un conjunto de coordenadas “x” del conjunto difuso de salida.

$$y_0 = \frac{\sum y, \mu(y)}{\sum \mu(y)}$$

Se define como el cociente entre la suma del producto de y por la distribución de masa derivada de la función de membresía, entre la distribución de masa derivada de la función de membresía.

Esta definición es el punto de partida de muchos métodos de defuzzificación y forman el nexo del sistema entre el mundo difuso y el mundo real.

- Criterio de máximo: Acorde con Ross (2010, 105), la salida del valor defuzzificado es el valor de x que haya alcanzado la función de membresía más alta.
- Máximo central (MOM): Acorde con Ross (2010, 106), es el promedio de los máximos cuando se gráfica o bien es el centro o núcleo de la función de membresía.
- Máximo más pequeño (SOM): Acorde con Ross (2010, 106), es el menor valor de los máximos.
- Máximo más grande (LOM): Acorde con Ross (2010, 106), es el mayor valor de los máximos.

- Bisectriz: Acorde con Ross (2010, 106), es la división del área bajo la curva de la función de membresía en 2 áreas que contengan individualmente el 50% del área total.

8. Inferencia Difusa

Jantzen (2007, 35), define la inferencia difusa como un conjunto de reglas difusas elaboradas bajo las proposiciones IF-THEM que rigen la interacción del sistema en torno al problema que se quiere resolver.

Una regla difusa simple está compuesta por una premisa un conector y un consecuente de la forma:

Si “x” es A, entonces “y” es B.

Donde: “x”; “y” son variables lingüísticas y A;B son valores lingüísticas asociados a la variable lingüística, entendidos como conjuntos difusos. De acuerdo con Jantzen (2007, 35), una regla difusa expresa una relación objetiva o subjetiva sobre los conjuntos difusos A;B, los cuales tendrán una función de pertenencia o membresía de la forma $\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$, que describe un producto cartesiano difuso.

La definición de las reglas difusas es el corazón de cualquier sistema difuso, ya que el mismo describe la interacción de los datos con el parámetro de referencia y define en última instancia la respuesta del sistema.

Confirma Ross (2010, 129) que las reglas difusas permiten expresar conocimiento aplicable al problema a través de antecedentes y consecuentes, su construcción se basa en la lógica proposicional desde la cual se extrapola al algebra booleana y a la teoría de conjuntos, con lo cual se busca la construcción de un aparato lógico-deductivo que sea capaz de solucionar problemas haciendo uso de lógica aproximada o difusa.

Por su parte Jantzen (2007, 35), comenta acerca de la lógica clásica, indicando que, bajo este paradigma una proposición sólo puede ser cierta o falsa, no admite términos medios y pueden construirse muchos tipos de proposiciones a través de tres operaciones básicas. Las mismas se definen como; conjunción ($p \wedge q$), donde las dos proposiciones son ciertas simultáneamente. Disyunción ($p \vee q$), cualquiera de las dos proposiciones es cierta. Implicación ($p \rightarrow q$), en donde el cumplimiento de unas de las proposiciones tiene como consecuencia el cumplimiento de la otra. Y finalmente, negación ($\sim p$), la cual invierte el sentido de la proposición.

Los operadores equivalentes encontrados en la teoría de conjuntos pueden compararse de la siguiente forma:

Tabla 1.
Operadores equivalentes lógica proposicional y teoría de conjuntos

Lógica Proposicional	Teoría de conjuntos
\wedge	\cap
\vee	\cup
\sim	$-$
Lógica Proposicional	Algebra de Boole
V	1
F	0
\wedge	x
\vee	$+$
\sim	\cdot
\leftrightarrow	$=$

Fuente y elaboración: Ross, 2010.

Ross (2010, 129), indica que una tautología se define como el agregado de múltiples proposiciones y cuya verdad es independientes de la verdad o falsedad de las proposiciones que la componen. La importancia última de las tautologías reside en la posibilidad de expresar una función característica de implicación $p \rightarrow q$ en términos de reglas de inferencia Modus Tollens y Modus Ponens.

Sostiene Ross (2010, 130), que el Modus Ponens o razonamiento directo puede definirse de la siguiente manera:

Tabla 2.
Modus ponens

Premisa 1:	x es A
Premisa 2:	Si x es A, entonces y es B
Consecuencia	y es B

El modus ponens está relacionado a la implicación “A implica B” $A \rightarrow B$; en términos de lógica proposicional se define como: $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Fuente y elaboración: Ross, 2010.

Acorde con Ross (2010, 130) el Modus Tollens o razonamiento inverso puede resumirse de la siguiente manera:

Tabla 3.
Modus Tollens

Premisa 1:	y es no B
Premisa 2:	Si x es A, entonces y es B
Consecuencia	x es no A

El modus tollens, en términos de lógica proposicional se define como: $(\bar{q} \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \bar{p}$

Fuente y elaboración: Ross, 2010.

De estos dos modos tautológicos el Modus Ponens es el utilizado para la construcción de controladores difusos ya que conserva la relación causa-efecto que sirve más claramente para la interacción de la base de reglas IF-THEM.

Nakano et al., (2019), sostienen que la lógica difusa permite modelar la percepción, razonamiento y comportamiento de las condiciones financieras para que las personas minimicen el riesgo en la toma de decisiones, usa un sistema borroso de almacenamiento mediante reglas de inferencia denominadas SI-ENTONCES.

9. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Afirma Gálvez, Salgado y Gutiérrez (2010) que el enfoque propuesto Harry Markowitz, considerado como el padre de la teoría de portafolios de inversión, cambió totalmente el campo de las finanzas, definiendo conceptos claves como los portafolios eficientes. Un portafolio eficiente es, según las definiciones dadas por el propio Markowitz (1952), aquella selección de activos de inversión que arrojan un mínimo de riesgo, para un retorno determinado o bien, un rendimiento máximo para un nivel riesgo determinado. En el mismo sentido, señala que el proceso de selección de un portafolio de inversión puede estar dividido en dos etapas. La primera comienza con la observación sobre y estudio del mercado y las variables que pueden cambiar su estado inicial; y termina con apreciaciones sobre el futuro desempeño de las opciones disponibles. La segunda etapa de este proceso comienza con las creencias relevantes acerca del desempeño futuro de los instrumentos financieros y termina con la selección de un grupo de activos que representan los intereses del inversor.

La segunda premisa sobre la cual Markowitz (1952) construye su teoría se basa en la diversificación de la inversión. Para el autor, cualquier maximización de rendimiento descontado que no incluya la diversificación, debe ser rechazada de facto. La diversificación es a la vez observable y sensata, ya que, el prorateo de las posibles imperfecciones internas o externas de los instrumentos financieros que son transados en

el mercado, conlleva dentro sí una disminución sistémica del riesgo asociado a los productos financieros observados por individual.

En concordancia con Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, y Barbutín-Díaz (2011,74), el modelo Markowitz se representa formalmente mediante la siguiente formulación:

$$\text{Max } E(Rp) = \sum_{i=1}^n w_i * E(RI)$$

Sujeto a:

$$\sigma^2(Rp) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i * w_j * \sigma_{ij} \leq \sigma_0^2$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad w_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$p = \frac{\sum_{j=1}^n r_j x_j}{n}$$

$$C = \sum_{j=1}^n x_j$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Donde:

- n: número de activos en el portafolio.
- RI: variable aleatoria rendimiento del activo i.
- Rp: rendimiento del portafolio.
- E(Rp): rendimiento esperado del portafolio.
- $\sigma^2(Rp)$: varianza del rendimiento del portafolio.
- σ_{ij} : es la covarianza de las rentabilidades de las acciones i y j.
- σ_0^2 : varianza máxima admitida.
- w_j : es la cantidad de dinero a invertir en la acción j.
- w_i : es la cantidad de dinero a invertir en la acción i
- r_j : es la rentabilidad esperada de la acción j.
- u_j : es la cantidad máxima de dinero que puede invertirse en la acción j
- C: es la cantidad disponible a invertir.
- p: Rentabilidad mínima exigida por los inversores.

Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, y Barbutín-Díaz (2011, 75) también precisan que la alternativa del sistema se basa en determinar las ponderaciones de activos que

minimizan la varianza del conjunto de activos, teniendo como restricción un rendimiento mínimo requerido para el portafolio. Dicha formulación matemática se expresa como:

$$\text{Min } \sigma^2(Rp) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i * w_j * \sigma_{ij}$$

Sujeto a:

$$E(Rp) = \sum_{i=1}^n w_i * E(Ri) \geq p$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad w_i \geq 0 (i = 1, \dots, n)$$

A ello agregan que la utilización del modelo Markowitz con una gran cantidad de activos financieros tiene un inconveniente importante, el cual se basa en la gran cantidad de covarianzas que hay que calcular, aunado a esto, la utilización de series históricas en la estimación de los parámetros esperados, tiende a producir carteras sesgadas por activos de alto rendimiento, reducida varianza y baja correlación, lo que puede conllevar a altas concentraciones de inversión en pocos activos.

Acorde con los autores anteriormente citados, esta situación puede solventarse incluyendo restricciones de inversión en el modelo, forzando al modelo a buscar soluciones adaptadas a las pautas del constructor del sistema.

Por otra parte, el uso de series históricas para predecir el futuro de los movimientos del mercado, supone que éste es plenamente conocido y que se comportará en el futuro de la misma forma que lo hizo en el pasado, lo cual, no necesariamente es cierto.

Y, por último, el modelo no permite incorporar las expectativas del gestor de inversiones o del inversionista mismo dentro del modelo, lo cual supone una restricción importante para la aplicabilidad del sistema bajo condiciones cambiantes, así como adaptación a tendencias o deseos de los inversores.

10. Modelo de Black-Litterman

Acorde con Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, y Barbutín-Díaz (2011, 77), el modelo de Black y Litterman parte de una igualdad de mercado, es decir, una serie de rentabilidades esperadas que equiparen la oferta y la demanda, siempre y cuando todos los inversionistas tuviesen las mismas expectativas, este modelo surge como una solución para a los dos problemas de los modelos frecuentemente utilizados para la época, al contrario del modelo Markowitz, la rentabilidad esperada se obtiene a través de

optimización inversa, es decir, en lugar de establecer como objetivo la ponderación idónea para determinar un nivel x de rentabilidad, se plantea que rentabilidad esperada supone la ponderación que indica la capitalización.

Los estudios en referencia también indican que, una vez conseguido este objetivo el siguiente paso dentro del modelo es entablar la incorporación de las expectativas de los inversores sobre el futuro del mercado y el tipo de inversión que desean. Además de asignar un nivel de confianza para cada activo financiero, que es simplemente la probabilidad a priori de cumplir las expectativas planteadas por el inversor.

Acorde con Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, y Barbutín-Díaz (2011, 77), estas expectativas pueden ser de tres tipos. Absolutas, Relativa simple y Relativa múltiple.

El modelo Black-Litterman como mejora del modelo Markowitz se basa en tres pilares básicos:

- El supuesto de que el mercado es semi-eficiente,
- Toma el Capital Asset Pricing Model como medida de las rentabilidades de los distintos activos en el mercado y
- Utiliza el Teorema de Bayes, que hace posible la incorporación de las expectativas a la información histórica.

La expresión matemática del modelo se define a continuación:

$$E(\mu - Rf) = \left[\left(\sum \tau \right)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1} \left[\left(\sum \tau \right)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q \right]$$

Donde:

$E(\mu - Rf)$: Es un vector que indica el exceso de rentabilidad esperado de cada uno de los activos que forman la cartera.

τ : En general se define como un escalar que tiene un valor cercano de 1.

Σ : es una matriz de dimensiones que indica el parámetro de la matriz varianza covarianzas.

P : Es una matriz que expresa las expectativas de exceso/defecto de rentabilidad del inversor relacionadas con cada activo.

Ω : Es una matriz diagonal que mide el error de las vistas. Las entradas que utiliza son los coeficientes de confianza de cada una de las vistas. La matriz es diagonal ya que se asume la independencia de las vistas.

Π : Es un vector que indica la rentabilidad que esperamos obtener según el mercado. $\Pi = \lambda \Sigma w$. Donde:

- La Ponderación de los activos está determinada por un vector de peso $W = (W_1, W_2, W_3, \dots, W_n)$, en donde la ponderación del activo W_i está determinada por:

$$W_i = \frac{M_i}{\sum_{i=1}^n M_i}$$

- λ es el coeficiente de aversión al riesgo:

$$\lambda = \frac{R_m - R_f}{\sigma_M^2}$$

- R_m es el retorno del mercado, R_f es la tasa libre de riesgo del mercado y σ_M^2 es la varianza del retorno del mercado.
- El exceso de retornos implícitos de equilibrio, denominados de esta forma debido a que si los precios de los activos se ajustan hasta el nivel de los retornos esperados estos hacen que la demanda iguale la oferta, este vector de exceso de retornos denotado por Π está dado por:

$$\Pi = \lambda \Sigma W$$

- Los retornos en exceso son iguales al retorno de cada activo seleccionado menos la tasa libre de riesgo. Este vector se supone que tiene una distribución normal con retorno esperado μ y una matriz de covarianza Σ , definida como:
- $R \sim N(\mu, \Sigma)$
- w_{mk} es peso del activo en el mercado.

Q : es un vector que define las expectativas. Cada uno de los elementos de la matriz es el valor de rentabilidad absoluta o relativa que define la expectativa. Q incluye un factor de error ε que es un vector aleatorio, independiente y se distribuye según una normal $(0,1)$.

Acorde con Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, y Barbutín-Díaz (2011, 79), la principal ventaja que aporta es la incorporación de expectativas del gestor. Sin embargo, presenta inconvenientes en la medida de ciertos parámetros y en sus suposiciones:

- Mide el riesgo de los activos y el riesgo de contagio entre activos mediante la varianza y covarianza.
- Asume que las rentabilidades de los activos siguen una distribución gaussiana.
- Problemas de dimensiones y complejidad ya que, para un gran número de activos las matrices son demasiado grandes y difíciles de manejar.
- Dificultad de determinar varios parámetros.
- Dificultad de cuantificar la correlación entre las expectativas.

Capítulo segundo

Construcción de carteras difusas e interpretación de datos

El presente capítulo describe el proceso de selección de activos de renta variable y la metodología de construcción de la cartera de inversión bajo los conceptos y premisas de la teoría difusa, así como los resultados que se obtuvieron de la aplicación del modelo.

Para la elaboración del portafolio difuso propuesto en esta investigación se utilizaron los precios históricos diarios de cinco instrumentos transados en la Bolsa de Valores de Quito desde el 02 de enero de 2019 hasta el 17 de diciembre de 2021 por ser este periodo temporal aquel al cual se pudo acceder a información con elementos suficientes para alimentar el modelo, esto debido a las dificultades existentes para acceder a la información histórica de la Bolsa de Valores de Quito, por ende, se buscó realizar el análisis sobre la serie temporal que tuviera menos vacíos de información. El criterio de selección de estos activos se basó en la liquidez de la acción, representada por el volumen de transacción efectivo dentro de la Bolsa de Valores de Quito que, en conjunto, representan el 65.70% del volumen transado durante el período de tiempo evaluado en esta investigación. Esto implica que los cinco activos seleccionados poseen cotizaciones de precios históricos constantes a lo largo del tiempo, lo cual indica que existe una adecuada formación de precios de los instrumentos, garantizando en cierta medida la existencia de características de mercado deseables, como la transparencia de los precios formados a través de la compra-venta constante de estos instrumentos, que a su vez amplifica la profundidad de mercado para los instrumentos seleccionados y flexibiliza la respuesta del mercado ante variaciones exógenas de las condiciones de la economía nacional.

Desde la perspectiva del inversor estos atributos son deseables en toda opción de inversión financiera, ya que le permiten interpretar de manera más adecuada la información objetiva y subjetiva contenida en el precio de la acción, lo cual le permite tomar una decisión más acertada en un entorno con información escasa como lo es el mercado nacional de valores.

En base a estas consideraciones las cinco acciones que conformarán la cartera difusa son:

Tabla 4.
Acciones seleccionadas para cartera de inversión

EMISOR	% Valor Efectivo
BANCO GUAYAQUIL S.A.	4,91%
BANCO PICHINCHA C.A.	2,35%
BRIKAPITAL SA	2,08%
CERVECERIA NACIONAL CN S A	1,50%
CORPORACION FAVORITA C.A.	54,86%
Total	65,70%

Fuente y elaboración propias.

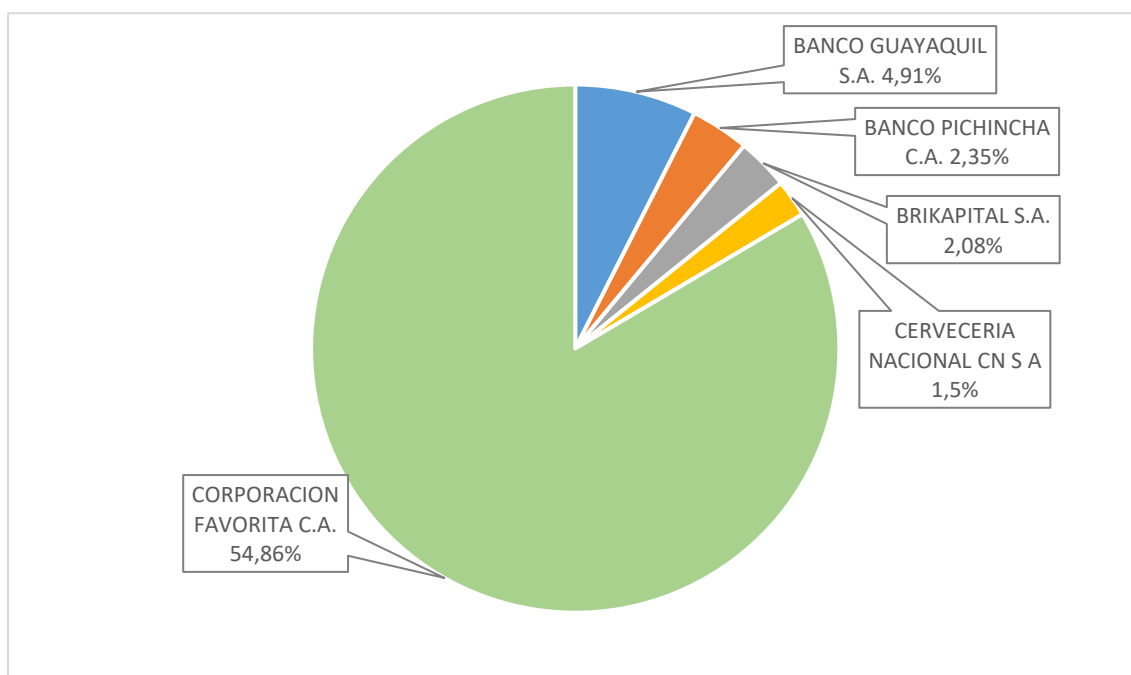


Figura 5. Distribución porcentual volumen de transacción efectivo.

Se ha llevado a cabo una evaluación básica del supuesto de normalidad de las series históricas de precios de acciones seleccionadas, obteniendo como resultado que ninguna de las series de tiempo sigue una distribución normal, esto se debe en gran parte al problema de formación de precios y a los vacíos de información existentes dentro de la data publicada por las bolsas de valores nacionales, característica que fue mencionada en capítulos anteriores, el resultado de la aplicación del test de Shapiro-Wilk indica lo siguiente:

```

# Load the time series data
data = pd.read_csv('base_de_datos_normalidad BANCO GUAYAQUIL.csv', header=None, sep=';')

print(data)

# Apply the Shapiro-Wilk test
stat, p = shapiro(data)

# Interpret the results
if p > 0.05:
    print('The time series is normally distributed.')
else:
    print('The time series is not normally distributed.')

```

```

      0
0    1.000000
1    1.000000
2    1.000000
3    1.000000
4    1.000000
...    ...
1046  0.955000
1047  0.955000
1048  0.955000
1049  0.903333
1050  0.900000

[1051 rows x 1 columns]
The time series is not normally distributed.

```

Figura 6. Resultado aplicación test de normalidad Shapiro-Wilk acción Banco Guayaquil.

```

# Load the time series data
data = pd.read_csv('base_de_datos_normalidad BANCO PICHINCHA.csv', header=None, sep=';')

print(data)

# Apply the Shapiro-Wilk test
stat, p = shapiro(data)

# Interpret the results
if p > 0.05:
    print('The time series is normally distributed.')
else:
    print('The time series is not normally distributed.')

```

```

      0
0    97.000
1    97.000
2    97.000
3    97.000
4    97.000
...    ...
1046  82.225
1047  75.000
1048  75.000
1049  75.000
1050  75.000

[1051 rows x 1 columns]
The time series is not normally distributed.

```

Figura 7. Resultado aplicación test de normalidad Shapiro-Wilk acción Banco Pichincha.

```

# Load the time series data
data = pd.read_csv('base_de_datos_normalidad BRIKCAPITAL.csv', header=None, sep=';')

print(data)

# Apply the Shapiro-Wilk test
stat, p = shapiro(data)

# Interpret the results
if p > 0.05:
    print('The time series is normally distributed.')
else:
    print('The time series is not normally distributed.')

```

```

      0
0    1000.0
1    1000.0
2    1000.0
3    1000.0
4    1000.0
...    ...
1046  915.0
1047  915.0
1048  915.0
1049  915.0
1050  915.0

[1051 rows x 1 columns]
The time series is not normally distributed.

```

Figura 8. Resultado aplicación test normalidad Shapiro-Wilk acción Brikcapital.

```

# Load the time series data
data = pd.read_csv('base_de_datos_normalidad CEV NAC.csv', header=None, sep=';')

print(data)

# Apply the Shapiro-Wilk test
stat, p = shapiro(data)

# Interpret the results
if p > 0.05:
    print('The time series is normally distributed.')
else:
    print('The time series is not normally distributed.')

```

```

      0
0     91.5
1     91.5
2     91.5
3     91.5
4     91.5
...    ...
1046  55.0
1047  55.0
1048  55.0
1049  55.0
1050  55.0

[1051 rows x 1 columns]
The time series is not normally distributed.

```

Figura 9. Resultado aplicación test normalidad Shapiro-Wilk acción Cervecería Nacional.


```

# Load the time series data
data = pd.read_csv('base_de_datos_normalidad CORP FAV.csv', header=None, sep=';')

print(data)

# Apply the Shapiro-Wilk test
stat, p = shapiro(data)

# Interpret the results
if p > 0.05:
    print('The time series is normally distributed.')
else:
    print('The time series is not normally distributed.')

```

```

      0
0    2.650000
1    2.650000
2    2.650000
3    2.650000
4    2.650000
...
1046 2.270000
1047 2.255000
1048 2.270000
1049 2.266667
1050 2.270000

[1051 rows x 1 columns]
The time series is not normally distributed.

```

Figura 10. Resultado aplicación test normalidad Shapiro-Wilk acción Corporación la Favorita.

Referente a la evolución de los precios y retornos de los instrumentos financieros evaluados, los intervalos de tiempo comprenden desde el 02 de enero de 2019 hasta el 17 de diciembre de 2021 y gráficamente se comportan de la siguiente manera:

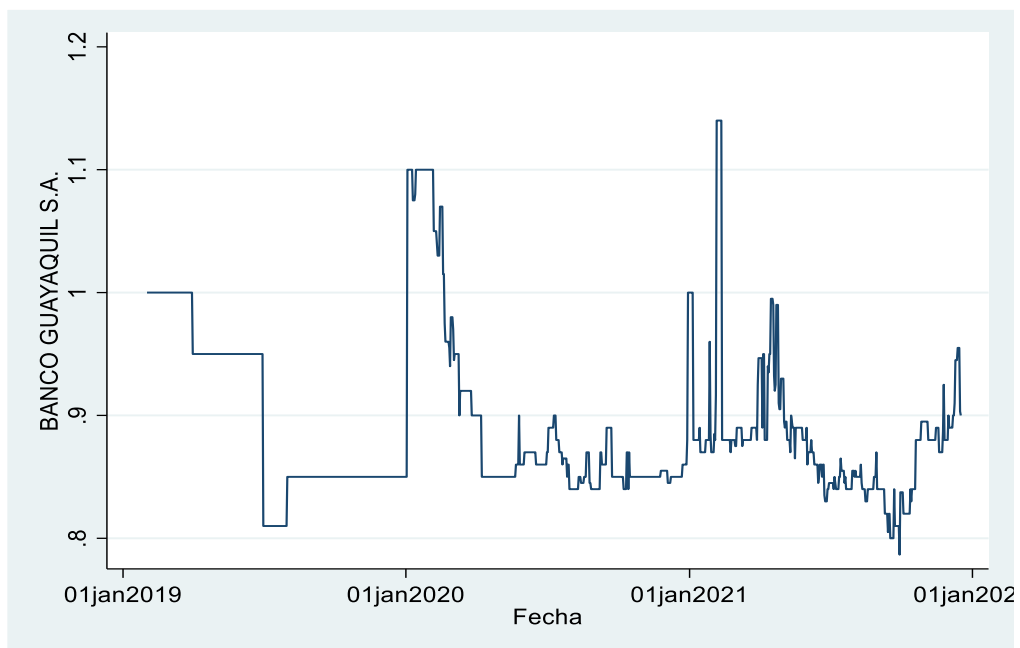


Figura 11. Evolución precios acción Banco Guayaquil.

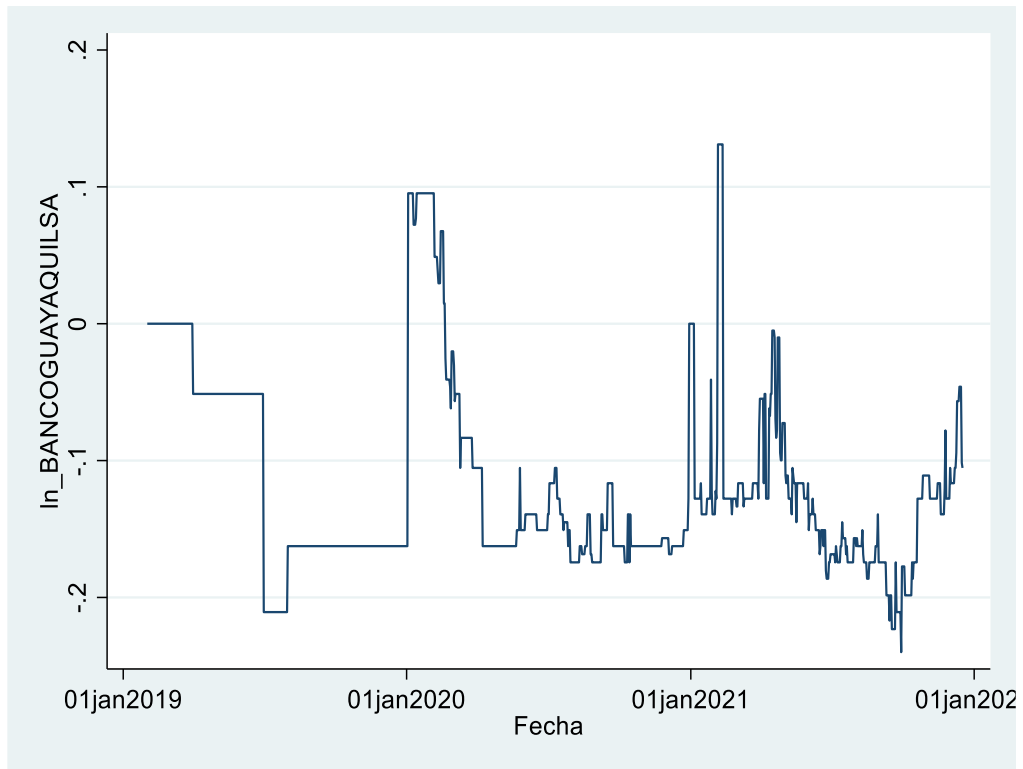


Figura 12. Evolución retornos acción Banco Guayaquil.

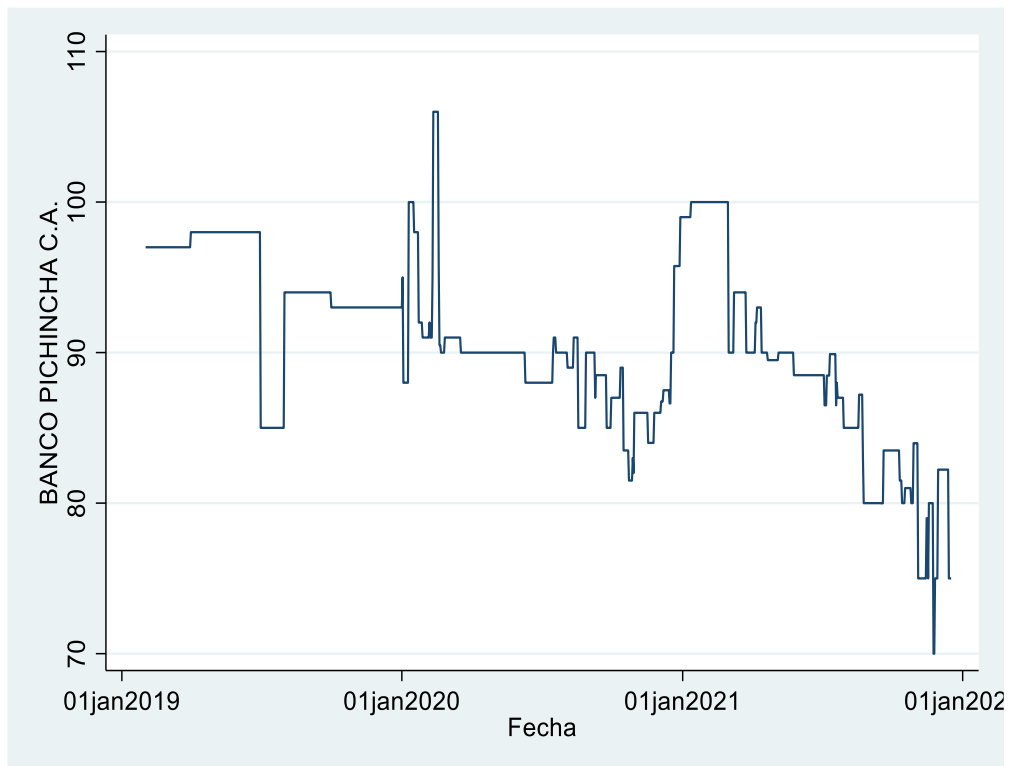


Figura 13. Evolución precios acción Banco

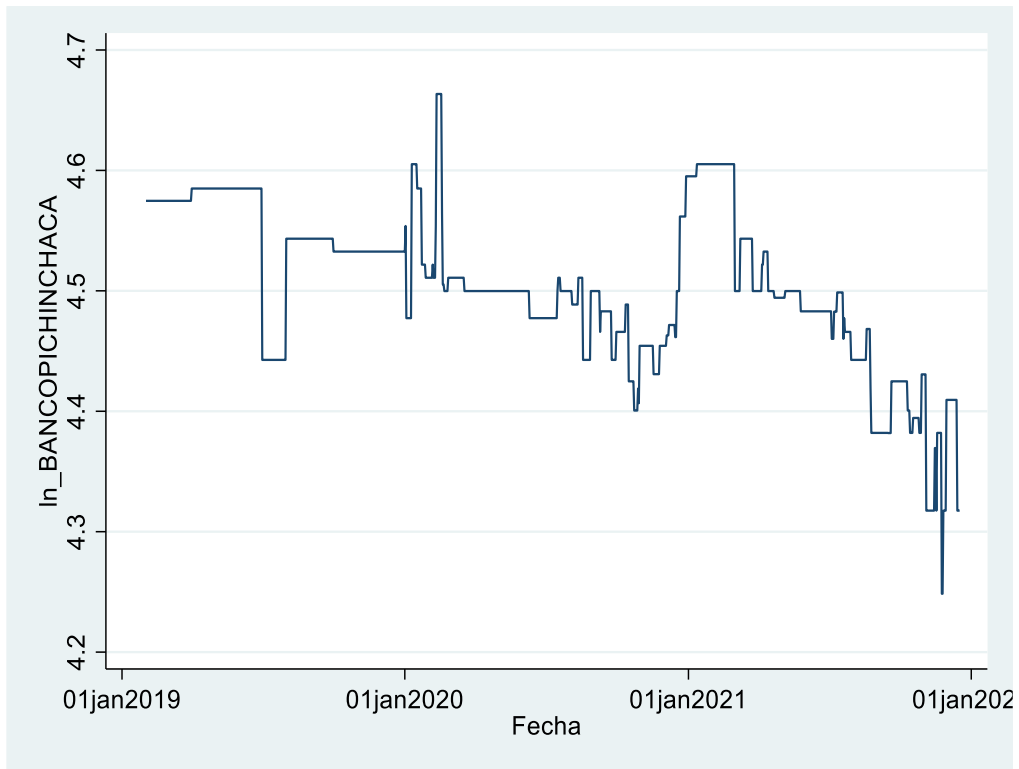


Figura 14. Evolución retornos acción Banco Pichincha.

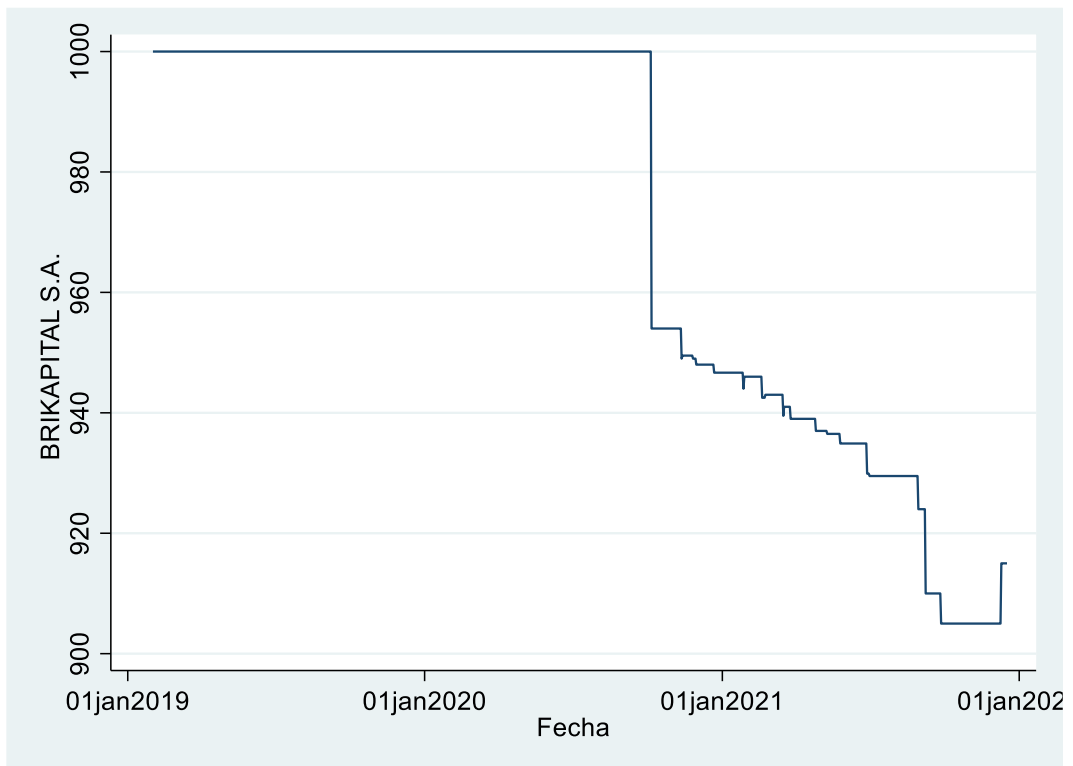


Figura 15. Evolución precios acción Brikapital.

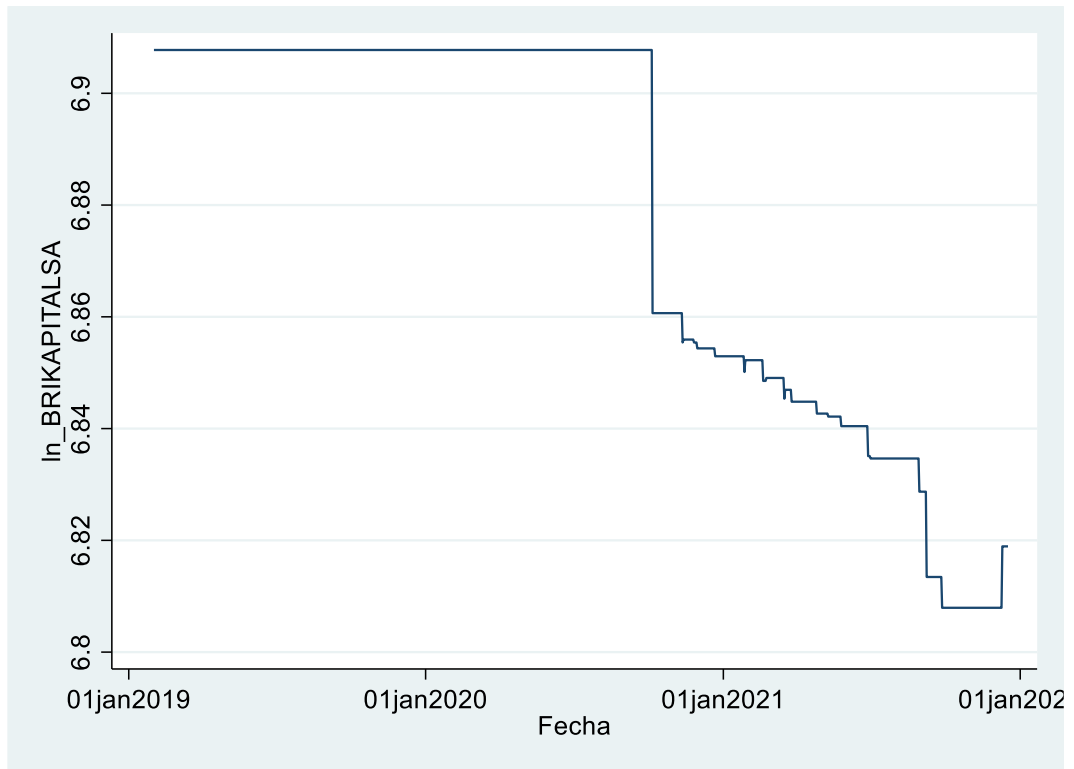


Figura 16. Evolución retornos acción Brikcapital.

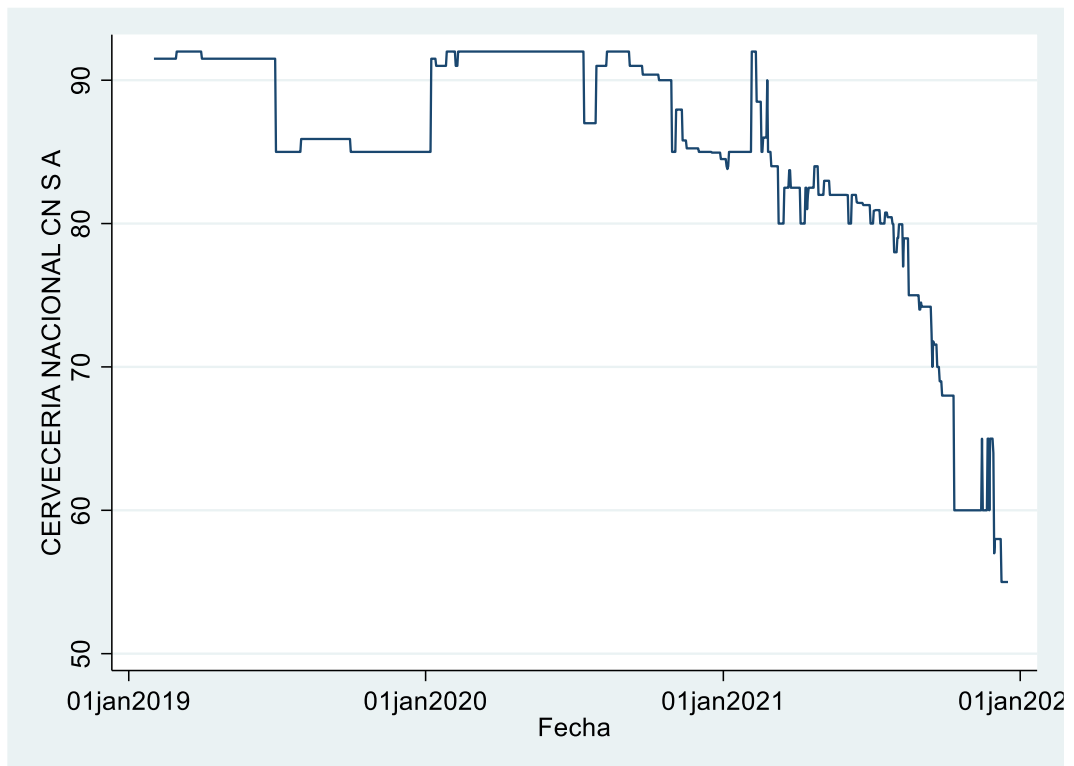


Figura 17. Evolución precios acción cervecería nacional.

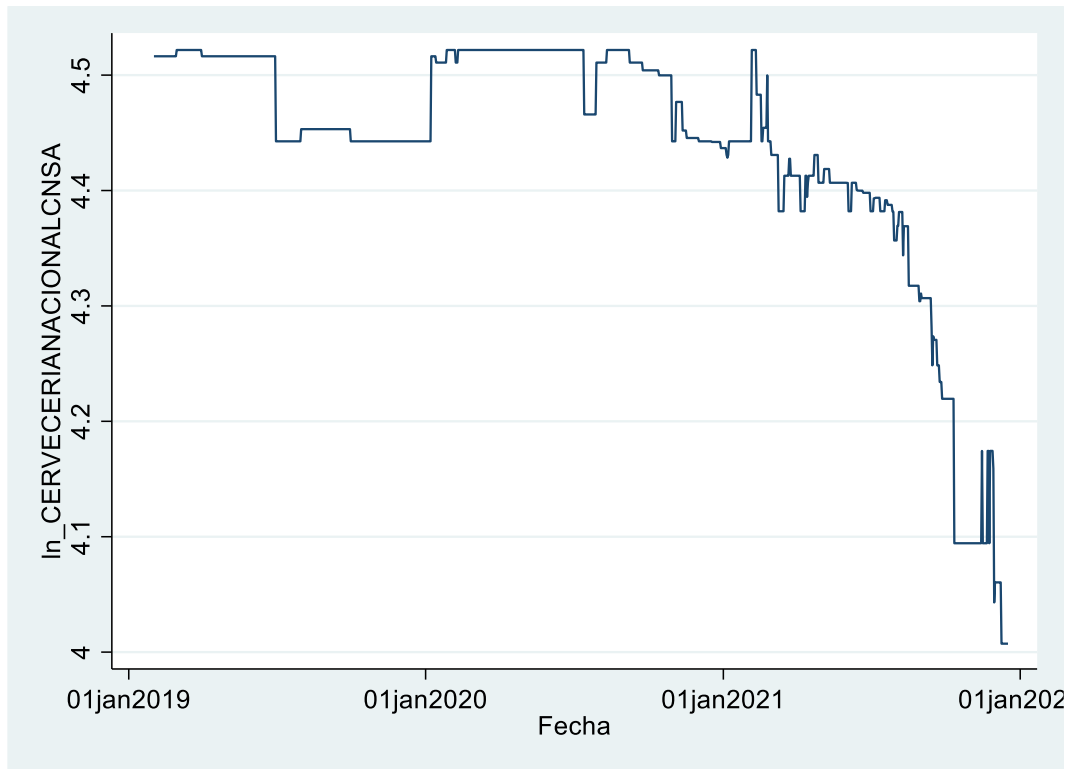


Figura 18. Evolución retornos acción Cervecería Nacional.

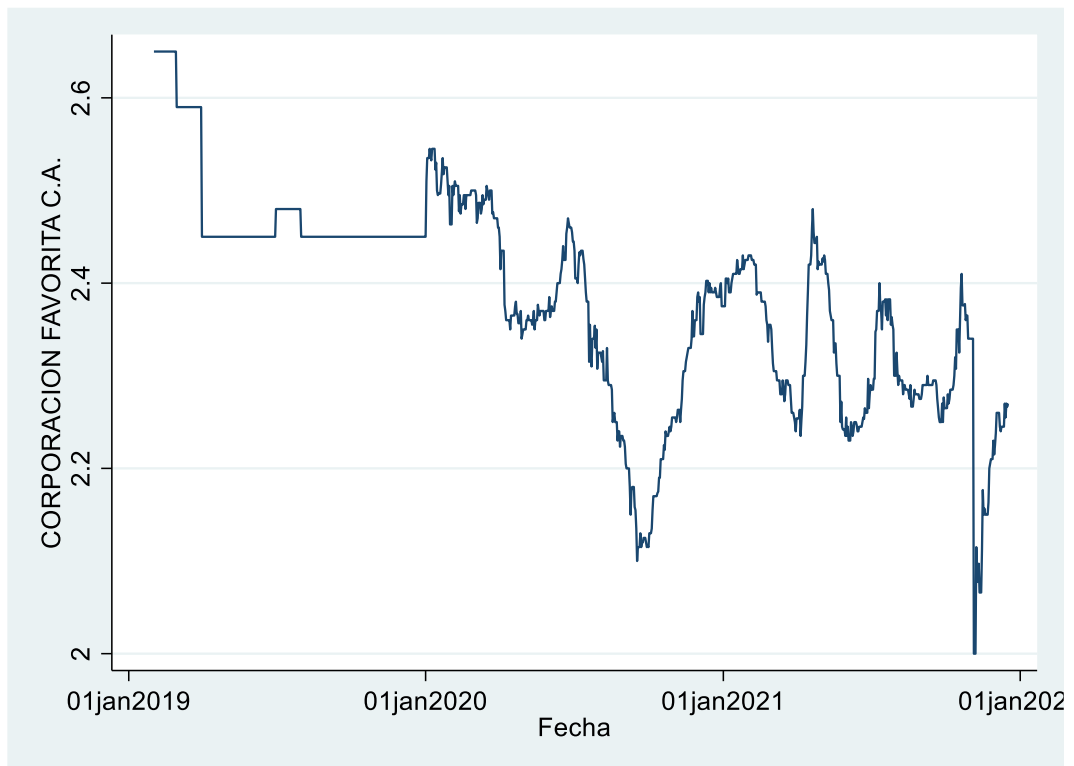


Figura 19. Evolución precios acción Corporación Favorita.

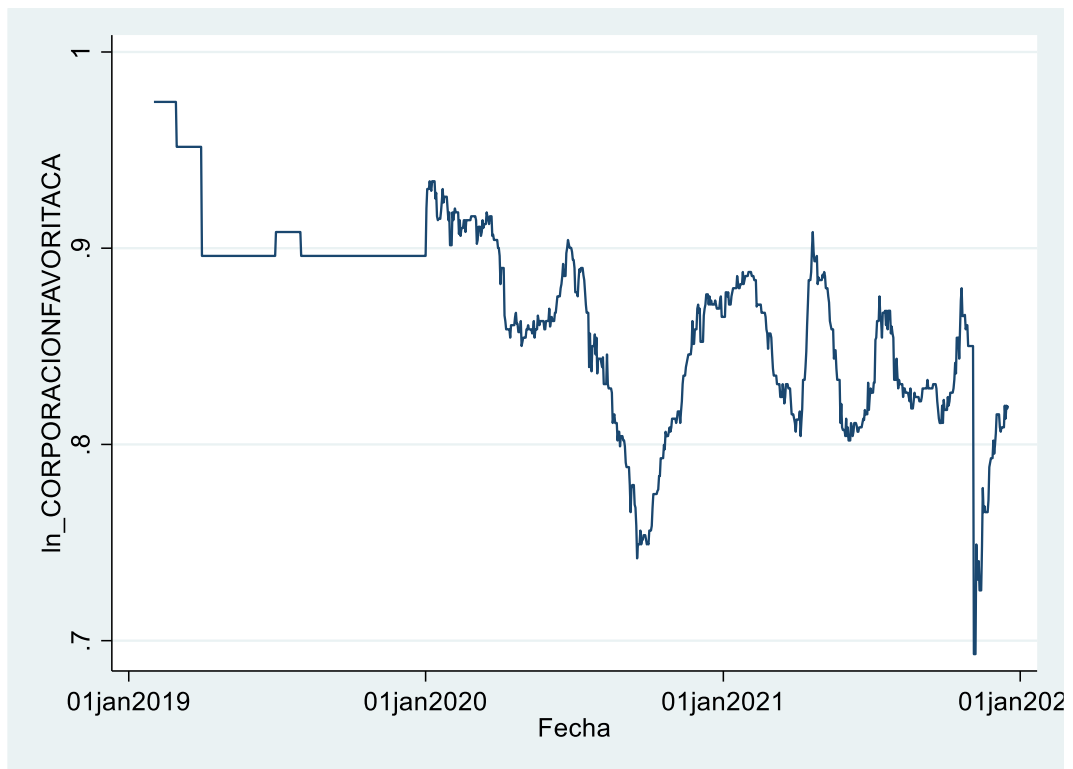


Figura 20. Evolución retornos acción Corporación Favorita.

1. Índices de evaluación para la construcción de carteras difusas.

Para poder diseñar y crear un modelo de inversión basado en lógica difusa, deben definirse una serie de variables de entrada del modelo difuso que alimenten al controlador, para el presente caso se ha definido un controlador difuso tipo mandami, el cual establece la existencia de variables lingüísticas de entrada y una variable lingüística de salida que interactúan a través de la iteración de los rangos de valor lingüísticos representados por un universo de discurso y una función de membresía dentro del aparato de inferencia difuso, que a su vez son regidos por las reglas IF-THEM que asocian las variables y los valores lingüísticos asignados para el modelo.

En el caso particular de la presente investigación, partiendo de la premisa de que la lógica difusa puede adaptarse a condiciones de mercado variables y conlleva una simplificación de procesos y cálculos en comparación con metodologías tradicionales, se han definido cinco variables de entrada para evaluar cada instrumento seleccionado, estas variables han sido elegidas con base en su practicidad y sencillez de cálculo ya que, ante un escenario de escasa información, estas variables siguen siendo fácilmente calculables en comparación con otros indicadores que requieren grandes y complejos conjuntos de datos y cálculos matemáticos.

1. Rentabilidad: acorde con Van Horne y Wachowicz (2010, 98), se entiende como el ingreso percibido de una inversión más cualquier cambio del mercado que afecte el precio del activo. Para nuestro caso particular generalmente se expresa como la variación porcentual en los rendimientos de los precios cotizados de un instrumento de inversión determinado. Acorde con Pérez (2021), la rentabilidad logarítmica o capitalización compuesta como medio de cálculo de la rentabilidad de un activo se basa en la determinación de la variación diaria del precio de una acción a través del logaritmo natural entre el precio del día “x” dividido para el precio del día “x-1”, entendiéndose que esta metodología de cálculo trae como ventaja que el logaritmo natural del rendimiento incorpora la variación del valor del dinero en el tiempo.

$$R_l = \ln \frac{R_x}{R_{x-1}} = \ln(R_x) - \ln(R_{x-1})$$

Posterior a este paso simplemente se obtiene la rentabilidad promedio de la serie histórica de la acción a través del promedio simple de los rendimientos logarítmicos.

$$R_p = \frac{\sum R_l}{n}$$

2. Riesgo: acorde con Van Horne y Wachowicz (2010, 99) podría indicarse que se trata de la estimación de la incertidumbre asociada a la rentabilidad de una inversión debido a las fluctuaciones en su precio cotizado, acorde con los autores anteriormente citados, el cálculo de esta variación se realiza simplemente a través la desviación estándar derivada de la varianza de una muestra estadística, que en este caso son los rendimientos logarítmicos de una serie histórica de precios cotizados de una acción determinada.

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

3. Liquidez: acorde con Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, y Barbutín-Díaz (2011, 78), es la medida en la que un título de inversión puede ser fácilmente convertible a efectivo en moneda corriente, este índice se calcula a través de la base de capitalización de mercado, la cual, sirve en buena medida para observar la cantidad de acciones que tiene la empresa en la bolsa de valores y el valor de

mercado de la misma, adicionalmente sirve como referente para evaluar la cantidad de acciones que son comercializadas en un periodo de tiempo y saber si las mismas pueden ser transformadas en dinero en base a la oferta y demanda de la acción. La base de cálculo de este índice es simplemente el número de acciones por el precio de mercado de una acción al momento de la evaluación:

$$Cap. Bursátil = N. acciones \times Precio$$

4. CAPM (Capital Asset Pricing Model): acorde con Gitman y Zutter (2012, 341) este índice puede definirse como un modelo de valoración de activos financieros que mide la rentabilidad mínima esperada de un instrumento en base a una función de riesgo sistemático. La metodología de cálculo asociado a este modelo puede expresarse formalmente de la siguiente manera:

$$E_{(ri)} = r_f + \beta(E_{(rm)} - r_f)$$

Donde:

- $E_{(ri)}$: Tasa de rentabilidad mínima esperada de un activo.
 - r_f : Tasa libre de riesgo.
 - β : Variación relativa de rentabilidad del activo contrastado contra el mercado en el que cotiza.
 - $E_{(rm)}$: Rendimiento esperado del mercado en el que cotiza el instrumento.
5. VaR (Valor en Riesgo): Acorde con Guerard J. (2010, 534), es la probabilidad límite de pérdida que puede sufrir una inversión dentro de un horizonte de tiempo determinado para un nivel “x” de confianza, este índice es calculado de la siguiente forma:

$$VaR = |R - z * \delta| * V$$

Donde:

- R: Rentabilidad esperada
 - Z: valor asociado a un nivel de significancia “x”
 - δ : Desviación estándar
 - V: Valor de la inversión.
6. Factibilidad de inversión en acción (variable de salida del controlador difuso): esta variable se asocia con cada uno de los índices antes descritos y será el determinante de inversión a ser tomado en cuenta para puntualizar la probabilidad de inversión en los activos seleccionados.

Una vez definidas las variables que serán utilizadas para alimentar el sistema difuso, así como la variable de salida que determinará la factibilidad de inversión de los instrumentos que conformaran la cartera de instrumentos financieros, hay que definir el universo de discurso de cada una de las variables, así como también los valores lingüísticos que adoptarán cada una de esas variables y los subsecuentes rangos de valores que se asociaran a estos.

Un punto crucial para la elaboración de la cartera de inversión es determinar la función de membresía que será utilizada para cada uno de los valores lingüísticos, por motivos de practicidad didáctica y tradición de doctrina, los valores extremos de las variables lingüísticas adoptarán funciones trapezoidales abiertas, ya que estas ejemplifican acertadamente las tendencias hacia el infinito de los extremos de una función hacia la izquierda o hacia la derecha y, para los valores lingüísticos centrales serán utilizadas funciones triangulares que describen acertadamente la naturaleza limitada de una función que actúa solo sobre un rango de valores específico.

Tabla 5.
Definición de variables lingüísticas de entrada y universo de discurso

Variable Lingüística (x)	Descripción	Universo de discurso (X)	Rango Valor lingüístico T(x)	Tipo de función de membresía	Especificación de la función de membresía	Núcleo de los valores lingüísticos
Rentabilidad	Es la variación en los rendimientos de precio de instrumento cotizado	-100%+100%	Muy mala mala Media Buena Muy Buena	Trapezoidal triangular triangular triangular Trapezoidal	trapezoidal abierta hacia izquierda triangular cerrada triangular cerrada triangular cerrada trapezoidal abierta hacia derecha	desde -100% hasta 7% desde 5% hasta 10% desde 8% hasta 25% desde 20% hasta 50% desde 50% hasta 100%
Riesgo	Es la Incertidumbre sobre la rentabilidad de una inversión debido a cambios en los rendimientos de la misma	0% a 100%	Ninguno Bajo Medio Alto Muy Alto	Trapezoidal triangular triangular triangular Trapezoidal	trapezoidal abierta hacia izquierda triangular cerrada triangular cerrada triangular cerrada trapezoidal abierta hacia derecha	desde 0% hasta 2% desde 0% hasta 10% desde 5% hasta 20% desde 10% hasta 40% desde 40% hasta 100%
CAPM	Tasa de rentabilidad mínima requerida para un instrumento que forma parte de una cartera de inversión	0% a 100%	Muy bajo Bajo Medio Alto Muy Alto	Trapezoidal triangular triangular triangular Trapezoidal	trapezoidal abierta hacia izquierda triangular cerrada triangular cerrada triangular cerrada trapezoidal abierta hacia derecha	desde 0% hasta 5% desde 0% hasta 8% desde 5% hasta 10% desde 10% hasta 20% desde 20% hasta 100%
Liquidez	La liquidez es la medida en la que un título, pueden ser convertido en dinero se mide por la capitalización de mercado	0% a 100%	Nula Baja Media Alta Muy alta	Trapezoidal triangular triangular triangular Trapezoidal	trapezoidal abierta hacia izquierda triangular cerrada triangular cerrada triangular cerrada trapezoidal abierta hacia derecha	desde 0% hasta 2% desde 0% hasta 5% desde 3% hasta 10% desde 5% hasta 20% desde 20% hasta 100%
VAR	Es la pérdida máxima que puede experimentar una inversión dentro de un horizonte temporal, dado un nivel de confianza determinado	0% a 100%	Muy bajo Bajo Medio Alto Muy Alto	Trapezoidal triangular triangular triangular Trapezoidal	trapezoidal abierta hacia izquierda triangular cerrada triangular cerrada triangular cerrada trapezoidal abierta hacia derecha	desde 0% hasta 2% desde 0% hasta 10% desde 5% hasta 20% desde 10% hasta 40% desde 40% hasta 100%

Tabla 6.
Definición variable lingüística de salida y universo de discurso

Variable Lingüística (x)	Descripción	Universo de discurso (X)	Rango Valor lingüístico T(x)	Tipo de función de membresía	Especificación de la función de membresía	Núcleo de los valores lingüísticos
Factibilidad de inversión en acción	Medida porcentual sobre la viabilidad de inversión en un instrumento determinado	0% a 100%	Nula	Trapezoidal	trapezoidal abierta hacia izquierda	desde 0% hasta 2%
			Baja	triangular	triangular cerrada	desde 0% hasta 10%
			Media	triangular	triangular cerrada	desde 5% hasta 20%
			Alta	triangular	triangular cerrada	desde 10% hasta 40%
			Muy alta	Trapezoidal	trapezoidal abierta hacia derecha	desde 40% hasta 100%

Fuente y elaboración propia.

Acorde con Ross (2010, 16) la diferencia clave entre un conjunto normal o certero y un conjunto difuso yace principalmente en la función de membresía establecida a través de la variable lingüística a evaluar. Un conjunto normal o certero posee una única función de membresía para describir todo el universo al que pretende representar, mientras que un conjunto difuso posee varias formas de funciones de membresía que se usan para estudiar de forma más fidedigna las características de aquello que pretende representar. Para los conjuntos difusos y, en consecuencia, las variables difusas, se sacrifica la unicidad y precisión de un resultado, pero se gana flexibilidad para hacer uso de la ambigüedad y de la información contextual.

Acorde con lo expresado anteriormente por Ross (2010, 16) el núcleo de valores lingüístico asociado a un conjunto difuso, que a su vez se entrelaza con un universo de discurso adjunto a una variable de evaluación difusa, no está determinado por una única fórmula o criterio de construcción, en algunos casos puede estar enteramente determinado por el conocimiento del constructor del sistema referente a lo que pretende estudiar, o bien, está definido por los criterios de expertos en un área determinada.

Podemos citar algunos ejemplos con respecto a este punto, Korol (2014) crea un modelo para pronosticar los tipos de cambio basado en lógica difusa, evaluado durante períodos de prosperidad (2005-2007) y durante períodos de crisis financieras (2009-2011). Las reglas de abstracción lingüística utilizadas en la investigación fueron definidas por el autor con base en estructuras de programación condicional IF-THEM, así es representado y almacenado el conocimiento de los expertos en el área para definir las bandas de evaluación de los núcleos lingüísticos y el grado de pertenencia de los resultados a estas categorías condicionales.

Por su parte Cai et al (2014) presentan un modelo de predicción de series temporales difusas combinado un modelo de optimización de colonia de hormigas y modelos autorregresivos. La adaptación de estos modelos de optimización de colonia de hormigas es incluida para obtener una partición adecuada del universo del discurso lingüístico y las fronteras de los núcleos lingüísticos de las funciones de membresía, esto con el fin de estratificar los juicios de expertos en relación a la condición o situación de un evento determinado.

Bolos, Bradea y Delcea (2019) desarrollan un algoritmo basado en la lógica difusa para la optimización de decisiones de inversión dentro de empresas, el cual consta de tres etapas principales; el desarrollo de una matriz de grado de pertenencia de los activos seleccionados con respecto a los parámetros de pertenencia definidos por el autor

utilizando números triangulares borrosos. La definición de un vector global de grado de pertenencia y el máximo grado de membresía global como un operador de inferencia para establecer las ofertas validas acorde con el algoritmo presentado.

En el caso del estudio de Nakano, Takahashi y Takahashi (2019), mencionado en capítulos anteriores, definen las funciones de membresía atribuidas a los conjuntos difusos del sistema utilizando métodos basados en cadenas de Markov y modelos Montecarlo para determinar los parámetros de la función y los cambios de estado de las series de tiempo utilizadas.

Como se puede observar, no hay una única forma de determinación de los parámetros o fronteras que existen dentro de un conjunto difuso y las fronteras de las funciones de membresía. Los conjuntos difusos contienen propiedades que satisfacen el análisis e interpretación de la imprecisión existente en la toma de decisiones basadas en información inferencial.

Definidos estos elementos es cuando se establecen las reglas de control del sistema, es decir, las reglas IF-THEM basadas en sentencias argumentativas lógicas bajo el modus ponens, estas reglas definirán la forma en la que interactúa el sistema con las variables de entrada y posteriormente con la variable de salida y es realmente el corazón del sistema. A raíz de esta interacción, el sistema pueda iterar y extrapolar los principios de control argumentativo lingüístico a un número “n” de datos provenientes de las variables definidas y los índices básicos creados para el análisis de los activos, la selección de los instrumentos y la construcción de la cartera de inversión.

Tal como indicaba Zadeh (1994), la lógica difusa tiende a imitar los modos argumentativos del razonamiento humano, esto es posible gracias a la forma en que se instrumentalizan las reglas IF-THEM, estas reglas son la piedra angular del sistema, ya que definen su interacción a través de modos argumentativos lingüísticos derivados de las conclusiones acto-consecuencias planteadas por los humanos en su razonar cotidiano. La diferencia, es que la lógica difusa puede tomar estos estamentos y proyectarlos a un número infinito de variables, asociando “n” cantidad de valores derivados de esas variables y, gracias a que el corazón del sistema está hecho de un número limitado de reglas IF-THEM, es posible mantener la significancia de los resultados, gracias al razonamiento aproximado que involucra esta operación lógica- matemática.

Es en este punto donde la significancia y la exactitud de los datos se convierten en elementos que podrían considerarse mutuamente excluyentes, en los cuales, el mismo Zadeh (1994) indicaba que a medida que un sistema se vuelve más complejo, los

resultados precisos comienzan a perder relevancia y, el cambio de paradigma se centra en interpretar valores por reglas de abstracción mental que permitan contextualizar y revivir la significancia del sistema a través de juicios de valor derivados del aprendizaje humano y la experiencia de conocer a nivel micro la interacción de las variables para poder extrapolar dicho aprendizaje a niveles macro y darle valor a los resultados obtenidos.

Tabla 7.
Reglas de control lingüístico.

Antecedente				Consecuente	Conclusión de la regla				
Variable lingüística		Valores lingüísticos				Variable lingüística		Valores lingüísticos	
conector	x	conector	A	Consecuente	conector	y	conector	B	
Si	Rentabilidad	es	Muy mala	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Nula	
Si	Rentabilidad	es	mala	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Baja	
Si	Rentabilidad	es	Media	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Media	
Si	Rentabilidad	es	Buena	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Alta	
Si	Rentabilidad	es	Muy Buena	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Muy alta	
Si	Riesgo	es	Ninguno	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Muy alta	
Si	Riesgo	es	Bajo	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Alta	
Si	Riesgo	es	Medio	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Media	
Si	Riesgo	es	Alto	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Baja	
Si	Riesgo	es	Muy Alto	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Nula	
Si	CAPM	es	Muy bajo	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Muy alta	
Si	CAPM	es	Bajo	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Alta	
Si	CAPM	es	Medio	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Media	
Si	CAPM	es	Alto	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Baja	
Si	CAPM	es	Muy Alto	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Nula	
Si	Liquidez	es	Nula	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Nula	
Si	Liquidez	es	Baja	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Baja	
Si	Liquidez	es	Media	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Media	
Si	Liquidez	es	Alta	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Alta	
Si	Liquidez	es	Muy alta	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Muy alta	
Si	VAR	es	Muy bajo	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Muy alta	
Si	VAR	es	Bajo	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Alta	
Si	VAR	es	Medio	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Media	
Si	VAR	es	Alto	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Baja	
Si	VAR	es	Muy Alto	Entonces	la	Factibilidad de inversión en acción	es	Nula	

Fuente y elaboración propias.

Una vez establecidas las bases del sistema difuso, es momento de definir la forma en la que interactúan los datos junto a las funciones de membresía y las reglas IF-THEM, es decir, el aparato de inferencia difusa. Para lograr relacionar todos estos elementos debe constituirse un controlador difuso, que no es más que el punto de encuentro de todas las bases y reglas de información.

Capítulo tercero

Controlador difuso

Para el presente proyecto se definió un controlador difuso tipo Mamdani el cual se caracteriza por permitir múltiples entradas de datos a través de dos o más premisas, un hecho y un consecuente, la estructura básica de este tipo de controlador puede definirse de la siguiente manera:

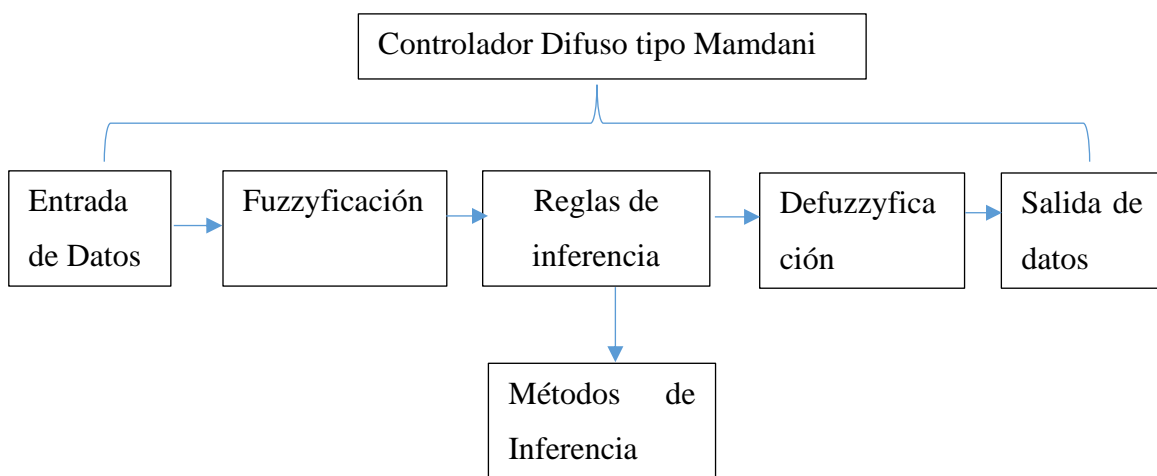


Figura 21. Controlador difuso tipo mamdani Fuente y elaboración: Ross, 2010.

La entrada de datos está representada por las variables lingüísticas y los índices de evaluación financieros definidos anteriormente, el proceso de fuzzyficación implica la evaluación de los valores de los índices dentro de las funciones de membresía establecidas para cada valor que adopta la variable lingüística.

Las reglas de inferencias hacen referencia al conjunto de reglas IF-THEM que rigen la iteración de los valores de membresía y los métodos de inferencia definen el algoritmo computacional que será utilizado para entablar la inferencia difusa de los datos y determinar una conclusión a partir de las premisas, es decir, a partir de los datos de entrada y las reglas de control creadas bajo el modus ponens difuso.

Una vez iterados los valores y conjugadas las funciones de membresía, los conjuntos cortados deben ser defuzzycados para que tengan un resultado útil para el diseñador del sistema, existen múltiples métodos para poder realizar esta tarea, sin embargo, en la presente investigación se ha utilizado el método del centroide el cual

consiste en determinar el cociente entre la suma del producto de los x valores por la distribución de masa de las funciones de membresía.

$$y_o = \frac{\sum y \mu(y)}{\mu(y)}$$

Los datos de salida son los datos procesados a través del controlador difuso que sirven para determinar si el activo financiero que será utilizado para conformar la cartera de inversión en efecto cumple con las condiciones para ser miembro de la cartera de inversión, este vector de resultado está determinado por la variable de salida comentada anteriormente, la cual mide la factibilidad de inversión en una acción de acuerdo con cinco valores de variables lingüísticas determinados en la sección de entrada de datos.

La variable de salida determina el valor real que será utilizado después del proceso de defuzzificación por centroide para establecer la viabilidad de la inversión en el instrumento financiero.

1. Resultados obtenidos del controlador difuso

Ya que han sido explicadas las características del sistema y las formas de interacción de las variables propuestas anteriormente, es momento de explicar los resultados reales surgidos a raíz de la puesta en marcha del controlador difuso con los datos obtenidos de las cinco acciones que fueron seleccionadas para formar parte de la cartera de inversión.

En los inicios de este capítulo indicamos que el sistema depende de la alimentación de datos a través de las variables de entrada, posterior a esto se crea un bloque de reglas IF-THEM o bien, un centro de inferencia difusa que se rige por las reglas presentadas en la tabla 7, la conjunción de estas reglas dicta la forma de iteración de los valores lingüísticos y , en consecuencia, los valores numéricos de dichas variables. En suma, estos elementos son la “consciencia lógica” del sistema, son el razonar del controlador difuso, ya que en este punto tanto variables como reglas IF-THEM se conjugan y remezclan analizando cada una de las sentencias lógicas del modus ponens, buscando una combinación de valores que cumpla con los requisitos establecidos por el diseñador del sistema.

A continuación, se expone la evaluación del sistema difuso a los títulos valores seleccionados. En el ejemplo de BANCO GUAYAQUIL S.A., se puede observar que se inserta un valor por cada variable lingüística asociada al índice de evaluación previamente definido, de tal forma, el sistema arroja una probabilidad de inversión reflejada por la

gráfica de la función de membresía del 52,68%, lo cual indica que es una buena acción para invertir.

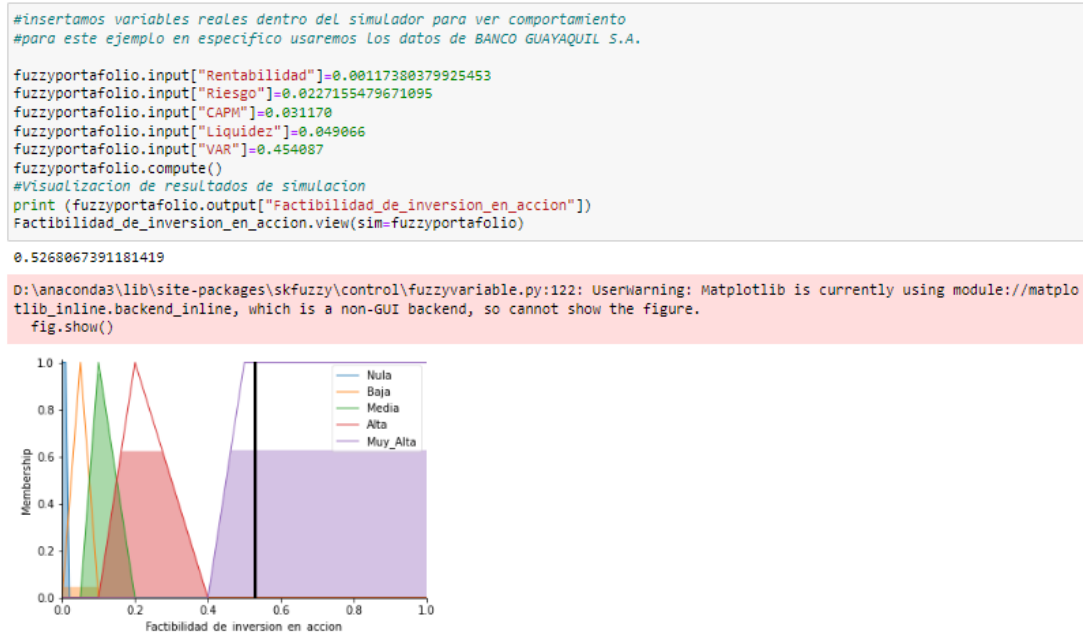


Figura 22. Salida de controlador difuso BANCO GUAYAQUIL S.A. Fuente: Elaboración propias.

En el caso de la acción del Banco Pichincha el resultado obtenido de la variable factibilidad de inversión es 60,72% lo cual sitúa a la acción en el rango de probabilidad de inversión alta y muy alta.

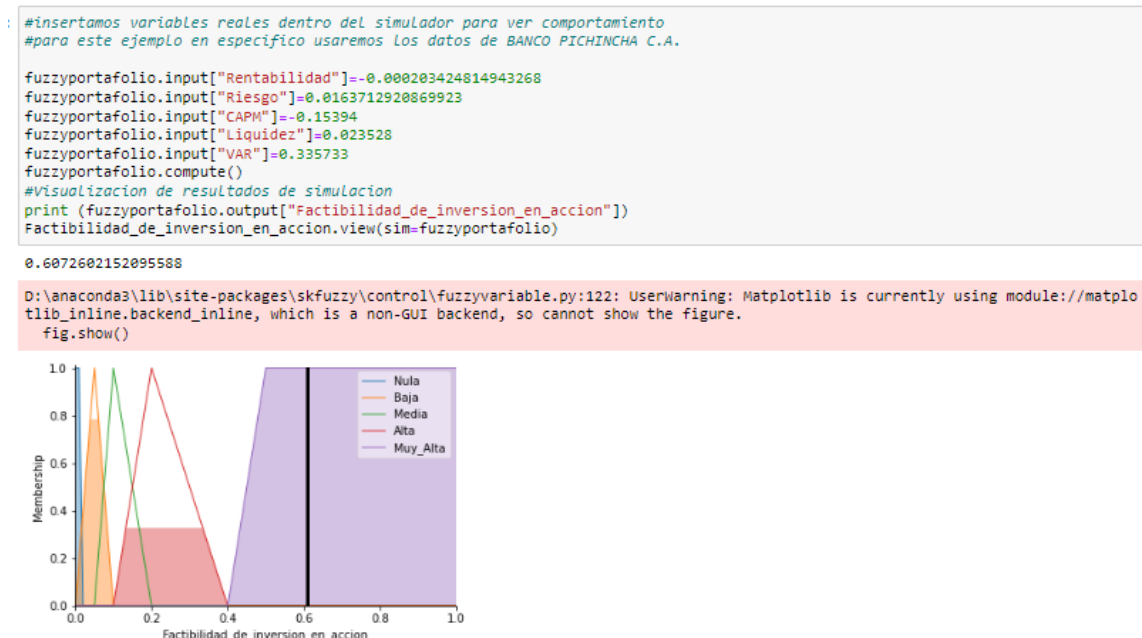


Figura 23. Salida de controlador difuso BRIKCAPITAL S.A. Fuente: Elaboración propias.

BRIKCAPITAL S.A. obtiene como resultado 55,69% de probabilidad de inversión situándose en el rango de inversión media, alta y muy alta.

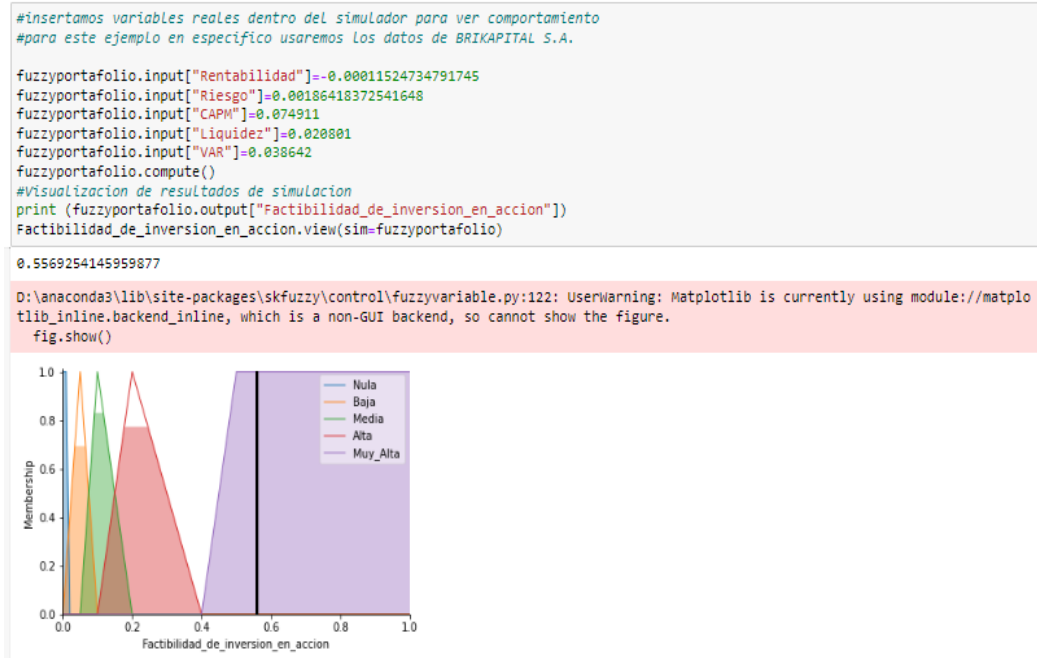


Figura 24. Salida de controlador difuso CERVECERIA NACIONAL CN SA. Fuente: Elaboración propias.

En el caso de Cervecería Nacional CN S.A. el resultado obtenido de la variable factibilidad de inversión es 60,20% lo cual la sitúa en el rango de inversión alto y muy alto.

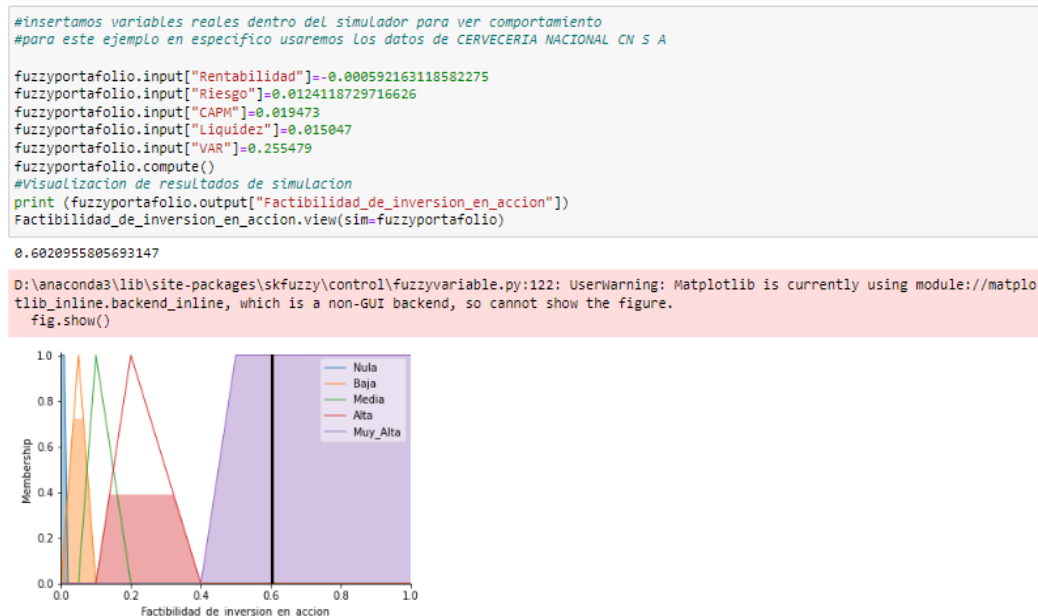


Figura 25. Salida de controlador difuso CERVECERIA NACIONAL CN SA. Fuente: Elaboración propias.

Finalmente, en el caso de Corporación la Favorita C.A. el resultado obtenido es de 57.60% lo cual la sitúa en el rango de factibilidad de inversión alta y muy alta.

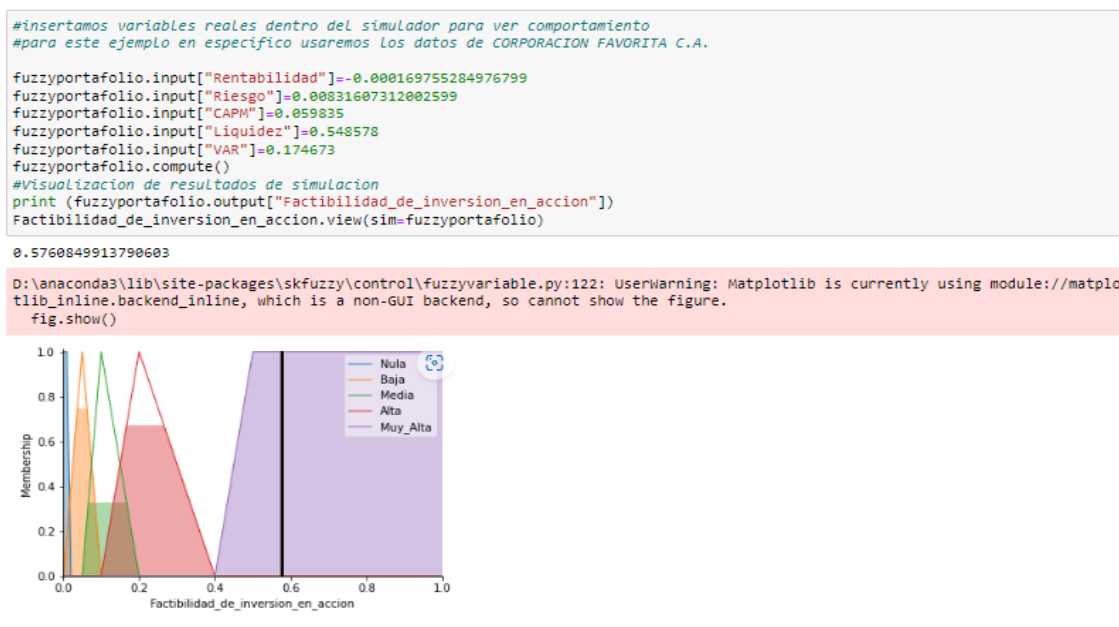


Figura 26. Salida de controlador difuso CORPORACION LA FAVORITA C.A. Fuente: Elaboración propia.

Una vez que han sido evaluados los activos que formarán parte de la cartera final de inversión es necesario determinar el rendimiento y el riesgo de dicha cartera. Para el cálculo del rendimiento utilizamos el promedio ponderado del producto del peso porcentual por el rendimiento de los activos.

Acorde con Cengiz y Özgür (2016, 19), con respecto a la varianza del portafolio recordemos que la varianza de una población es la distancia al cuadrado promedio de todas las mediciones para la media de la población, donde:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

- x_i : representa los i valores en un conjunto de datos.
- μ : es la media de un conjunto de datos.
- n : es el número de elementos que comprende el conjunto de datos.

Aplicado a la estadística difusa la varianza muestral mantiene rasgos parecidos a la estadística tradicional y la varianza de una función de membresía puede ser descrita como:

$$\tilde{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i - \bar{\tilde{x}})^2}{n - 1}$$

- \tilde{x}_i : valores de las funciones de membresía que son evaluadas sobre los datos de entrada.
- $\bar{\tilde{x}}$: valor medio de las funciones de membresía que son evaluadas sobre los datos de entrada.
- n : número de valores de funciones de membresía evaluadas sobre los datos de entrada.

En el caso particular de este proyecto, la varianza del portafolio ha sido calculada a través de una función de membresía triangular, por lo que la varianza del portafolio toma la forma:

$$\tilde{s}^2 = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{li} - \bar{\tilde{x}}_l)^2}{n - 1}; \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{mi} - \bar{\tilde{x}}_m)^2}{n - 1}; \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{ui} - \bar{\tilde{x}}_u)^2}{n - 1} \right\}$$

- \tilde{x}_{li} : valores de las funciones de membresía que son evaluadas sobre los datos de entrada del primer valor de la función triangular difusa.
- $\bar{\tilde{x}}_l$: valor medio de las funciones de membresía que son evaluadas sobre los datos de entrada del primer valor de la función triangular difusa.
- \tilde{x}_{mi} : valores de las funciones de membresía que son evaluadas sobre los datos de entrada del segundo valor de la función triangular difusa.
- $\bar{\tilde{x}}_m$: valor medio de las funciones de membresía que son evaluadas sobre los datos de entrada del segundo valor de la función triangular difusa.
- \tilde{x}_{ui} : valores de las funciones de membresía que son evaluadas sobre los datos de entrada del tercer valor de la función triangular difusa.
- $\bar{\tilde{x}}_u$: valor medio de las funciones de membresía que son evaluadas sobre los datos de entrada del tercer valor de la función triangular difusa.
- n : número de valores de funciones de membresía evaluadas sobre los datos de entrada.

La desviación estándar difusa basada en la función triangular se ha definido como:

$$\tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}$$

Aplicados estos conceptos sobre el controlador difuso para determinar el riesgo del portafolio a través de la desviación estándar difusa como medida de tendencia central difusa, se llevó a cabo una evaluación de los valores de membresía por medio de una

función triangular difusa que fue defuzzyficada a través del teorema del máximo central, la cual arroja una desviación estándar difusa de 5,72%.

Tabla 8.
Cálculo media y desviación estándar difusa

Acciones seleccionadas	Wi %	Rendimiento	Varianza	Desviación estándar	Función triangular fuzzycada		
					Bajo	Medio	Alto
BANCO GUAYAQUIL S.A.	0,20	0,01%	0,05%	2%	1%	0%	0%
BANCO PICHINCHA C.A.	0,20	-0,02%	0,03%	2%	1%	0%	0%
BRIKAPITAL S.A.	0,20	-0,01%	0,00%	0%	0%	0%	0%
CERVECERIA NACIONAL CN S A	0,20	-0,06%	0,02%	1%	0%	0%	0%
CORPORACION FAVORITA C.A.	0,20	-0,02%	0,01%	1%	0%	0%	0%
	100%						
Número elementos					5	5	5
Media difusa					0,40%	0,00%	0,00%
Varianza difusa					0,00%	0,00%	0,00%
desviación estándar					0,36%	0,00%	0,00%
Riesgo del portafolio							5,72%

Fuente y elaboración propias.

Partiendo del modelo inicial antes mencionado, se ha inducido la diversificación del modelo a través de restricciones a los pesos de inversión y limitantes tanto al riesgo como al rendimiento, obteniendo como resultado cuatro posibles carteras de inversión en las que el rendimiento no supera al riesgo en ningún caso, esta es una característica común en todos los modelos debido al problema de formación de precios en el mercado ecuatoriano.

Como una segunda observación a los resultados, ninguna de las opciones de inversión generadas por el controlador difuso sobrepasa la tasa pasiva efectiva promedio referencial calculada por el Banco Central del Ecuador, la cual es usada en la presente investigación como tasa representativa del costo de oportunidad de una inversión financiera. Acorde con Gitman y Zutter (2012, 449) este costo de oportunidad se entiende como todos aquellos flujos de efectivo generados por una inversión cualquiera a partir del mejor uso de las alternativas de las que dispone un activo financiero. Esta tasa se sitúa en 5,51%, para el mes de septiembre del 2021 y representa la tasa que usan los bancos nacionales para pagar a sus inversores los rendimientos generados por los depósitos a plazo fijo, catalogados como instrumentos de renta fija, los cuales representan una

alternativa de inversión a los títulos de renta variable y que, adicionalmente, conllevan una menor tasa de riesgo frente a la compra-venta de acciones debido a las garantías establecidas por ley para el pago de la obligación por parte del emisor. En Ecuador este tipo de productos financieros están bajo la cobertura de la Corporación del Seguro de Depósitos (COSEDE).

De igual manera las entidades financieras que ofrecen estos productos están sujetas a una calificación crediticia que respalda la estabilidad financiera de la entidad, en razón a esto, la inversión en acciones con el fin de comprar o vender en el mercado secundario no sería tan viable en comparación a otras alternativas de inversión como los depósitos a plazo fijo los cuales tienen un mayor rendimiento y un menor riesgo gracias a lo anteriormente expuesto.

Tabla 9.
Tasas de interés pasivas efectivas promedio por instrumento

Tasas Referenciales	% Anual	Tasas Referenciales	% Anual
Depósitos a plazo	5,51	Depósitos de Ahorro	1,14
Depósitos monetarios	0,74	Depósitos de tarjetahabientes	1,22
Operaciones de reporto	1,5		

Fuente y elaboración: Tasa de interés vigentes 092021. Banco Central del Ecuador.

En relación a los rendimientos generados por las carteras de inversión difusas, aquella opción definida como la de máximo rendimiento se sitúa en 0,18% seguida por la cartera de mínima varianza con 0,14%. Las dos carteras remanentes no generan rendimientos ni siquiera cercanos al 0,1%.

Tabla 10.
Carteras de inversión generadas controlador difuso

Acciones seleccionadas	Wi % máxima varianza	Wi % mínima varianza	Wi % máximo rendimiento con restricción al 10%	Wi % máximo rendimiento con restricción al 15%	Wi % máximo rendimiento con restricción al 25%	Wi % máximo rendimie nto	Wi %Portaf olio inicial
BANCO GUAYAQUIL S.A.	63,69%	89,87%				100,00%	20,00%
BANCO PICHINCHA C.A.	10,96%	0,00%				0,00%	20,00%
BRIKAPITAL S.A.	13,44%	10,00%				0,00%	20,00%
CERVECERIA NACIONAL CN S A	0,00%	0,00%				0,00%	20,00%
CORPORACION FAVORITA C.A.	11,91%	0,13%				0,00%	20,00%
Rendimiento del portafolio	0,03%	0,15%	0,00%	0,00%	0,00%	0,19%	-0,31%
Desviación	6,29%	5,72%	no hay solución	no hay solución	no hay solución	6,55%	5,72%

Fuente y elaboración propias.

Los resultados obtenidos por el controlador difuso son equivalentes tanto con el modelo de Markowitz como con el modelo de Black-Litterman, el valor de retorno, así como el riesgo del portafolio no arrojan diferencias significativas que puedan ser interpretadas de una manera distinta la cual evidencie una nueva dimensión de información que pueda aportar datos más útiles a los ya existentes.

2. Comparación de resultados

Una vez aplicado el modelo difuso es necesario comparar sus resultados versus modelos tradicionales para contrastar sus conclusiones y determinar la viabilidad del modelo en relación a sus pares.

Para que existiese una base común de medición y comparación se trabajaron los modelos de Markowitz y Black-Litterman con la misma cartera de acciones seleccionada en el modelo difuso, bajo el mismo parámetro de tiempo evaluado.

Con respecto a los resultados obtenidos por el modelo Markowitz, es relevante resaltar que, comparado con el modelo difuso, éstos son similares tanto en rendimiento como en riesgo, y, de igual forma, el modelo Markowitz no pudo encontrar soluciones a carteras con objetivos de rendimiento superiores al 5%, ni siquiera pudo encontrar una solución donde el rendimiento fuera positivo. Sin embargo, al igual que en el modelo difuso, los rendimientos negativos son muy cercanos a 0%.

En relación al riesgo, los resultados son semejantes entre la metodología difusa y lo planteado por el modelo Markowitz. Para el portafolio de mínima varianza, la

desviación estándar se sitúa en 6,72%, mientras que, en el modelo difuso, en el mismo portafolio, este indicador se sitúa en 5,72%. Para el caso del portafolio de máximo rendimiento, la desviación estándar se sitúa en 8,27%, mientras que en el modelo difuso se sitúa en 6,55%.

Aún bajo la evaluación de Markowitz, ninguna de las carteras supera la tasa pasiva efectiva promedio referencial calculada por el Banco Central del Ecuador la cual se sitúa 5,51% para el período evaluado. Pensando en los intereses del inversor es preferible colocar el dinero en un depósito a plazo fijo por los resultados en rendimiento y riesgo de estos instrumentos.

Tabla 11.
Carteras de inversión generadas método Markowitz

Cartera	WI peso	R ANUAL	Desv.Estandar	Beta	Portafolio inicial	Máximo rendimiento	portafolio mínima VAR
BANCO GUAYAQUIL S.A.	20%	0,01%	2,27%	32,87%	20%	35%	4%
BANCO PICHINCHA C.A.	20%	-0,02%	1,64%	67,47%	20%	0,00%	10%
BRIKAPITAL S.A.	20%	-0,01%	0,19%	0,36%	20%	35%	35%
CERVECERIA NACIONAL CN S A	20%	-0,06%	1,24%	41,56%	20%	0,00%	16%
CORPORACION FAVORITA C.A.	20%	-0,02%	0,83%	11,57%	20%	30%	35%
Total	100%				100%	100%	100%
Rendimiento del portafolio		-0,019%			-0,019%	-0,005%	-0,021%
Varianza del portafolio		1,15%			1,15%	0,68%	0,45%
Desv. Standr Portafolio		10,73%			10,73%	8,27%	6,72%
Costo de oportunidad		5,51%			5,51%	5,51%	5,51%

Fuente y elaboración propias.

Con relación al modelo de Black-Litterman, si bien existe una diferencia más acentuada con respecto al modelo difuso, estos resultados no se escapan de la tendencia general encontrada en Markowitz y el modelo difuso; por tanto, en todos los casos el riesgo fue superior al rendimiento.

Definiendo un portafolio de inversión de mínima varianza con los mismos activos financieros, la desviación estándar obtenida fue de 2,86%, mientras que el rendimiento alcanzó -0,24%. En el caso difuso, este mismo portafolio de mínima varianza generó una desviación estándar de 5,72% y un rendimiento de 0,14%.

Tabla 12.
Carteras de inversión generadas método Black-Litterman mínima varianza

Item	Black Litterman		Portafolio Allocation			
	Valor usando Pi	Retornos en exceso esperados $E(\mu-RF)$	Z	Pesos actuales	Pesos irrestrictos del portafolio	Pesos restrictivos del portafolio
BANCO GUAYAQUIL S.A.	(148,53)	(0,11)	(148,53)	20,00%	20,00%	0,47%
BANCO PICHINCHA C.A.	(148,53)	(0,06)	(148,53)	20,00%	20,00%	1,12%
BRIKAPITAL S.A.	(750,26)	(0,00)	(611,21)	20,00%	82,30%	91,23%
CERVECERIA NACIONAL CN S A	(1.218,34)	(0,14)	(834,98)	20,00%	112,43%	1,74%
CORPORACION FAVORITA C.A.	1.523,02	0,07	1.000,61	20,00%	-134,74%	5,45%
Retornos en exceso esperados	-0,24%					
Varianza del portafolio	0,00%					
Desviación estándar	2,86%					

Fuente y elaboración propias.

En el caso de un portafolio de máximo rendimiento bajo la metodología Black-Litterman, el rendimiento generado es de 7,43% pero la desviación estándar obtenida es de 13,62% lo cual mantiene la tendencia de mayor riesgo que rendimiento. Por su parte, el modelo difuso creado para el máximo rendimiento genera un rendimiento de 0,19% y un riesgo de 6,55%.

Si bien es cierto que esta cartera genera un rendimiento superior a la tasa pasiva efectiva promedio referencial calculada por el Banco Central del Ecuador de 5,51% el riesgo de dicha cartera hace que sea preferible seguir invirtiendo en pólizas de depósito a plazo fijo, ya que las mismas conllevan un riesgo mucho menor.

Tabla 13.
Carteras de inversión generadas método Black-Litterman máximo rendimiento.

Item	Black Litterman		Portafolio Allocation			
	Valor usando Pi	Retornos en exceso esperados $E(\mu-RF)$	Z	Pesos actuales	Pesos irrestrictos del portafolio	Pesos restrictivos del portafolio
BANCO GUAYAQUIL S.A.	(148,53)	(0,11)	(148,53)	20,00%	20,00%	0,00%
BANCO PICHINCHA C.A.	(148,53)	(0,06)	(148,53)	20,00%	20,00%	0,00%
BRIKAPITAL S.A.	(750,26)	(0,00)	(611,21)	20,00%	82,30%	0,00%
CERVECERIA NACIONAL CN S A	(1.218,34)	(0,14)	(834,98)	20,00%	112,43%	0,00%
CORPORACION FAVORITA C.A.	1.523,02	0,07	1.000,61	20,00%	-134,74%	100,00%
Retornos en exceso esperados del portafolio	7,43%					
Varianza del portafolio	0,01%					
Desviación estándar	13,63%					

Fuente y elaboración propias.

Los resultados obtenidos en esta investigación, evidencian que es posible construir y determinar carteras de inversión a través de metodologías alternativas al canon establecido en el mercado nacional.

La lógica difusa como herramienta de construcción de portafolios sirve efectivamente para los fines propuestos, aun cuando existen limitantes propias del mercado de valores nacional que hacen de este tipo de inversión una opción poco atractiva frente a otros instrumentos financieros con menor riesgo y mayor rentabilidad.

Existen teorías y técnicas complementarias que pueden ampliar y perfeccionar el campo de acción de la lógica difusa al campo de las finanzas, lo cual devela a investigadores y profesionales por igual un rico campo de estudio, investigación y aplicación de estos principios a distintas áreas de las ciencias económicas.

Realizando una comparación de los principales resultados obtenidos en esta investigación versus los resultados obtenidos por los principales autores referenciados podemos indicar que:

Los resultados obtenidos por Nakano, Takahashi y Takahashi (2019) coinciden con los resultados obtenidos en esta investigación; se confirma que es posible crear carteras de inversión con los objetivos propuestos tanto por administradores de inversiones como por inversionistas, catalizados a través del diseñador del sistema, los cuales involucran la evaluación e internalización de variables subjetivas o expectativas de inversores dentro de modelos matemáticos consolidados, y que coadyuva a una

minimización del riesgo y una maximización de los rendimientos de las carteras construidas.

En el caso de las conclusiones alcanzadas por Escrig-Olmedo et al. (2017), los resultados armonizan con los obtenidos en la presente investigación, determinando que, los sistemas difusos son útiles en ambientes donde existe información escasa, asimétrica y disímil.

Por otro lado, los resultados obtenidos por Pimenta et al. (2017) distan de los presentados en este trabajo, pues los autores indican que el uso de la lógica difusa en la creación de modelos de inversiones en el mercado de capitales obtiene mejores resultados, tanto en el manejo de riesgo como en la rentabilidad en comparación a los métodos tradicionales; dichos autores indican además que, el modelo encuentra respuestas satisfactorias bajo ambientes de estrés extremo simulados dentro de sus variables.

Por su parte, los resultados alcanzados por Zhang (2020), coinciden en un nivel general con lo planteado inicialmente en esta investigación, existe una verdadera ventaja en el uso de la lógica difusa en contraposición a los modelos tradicionales de evaluación de riesgo de inversión en lo referente a la capacidad que tienen los controladores difusos de evaluar cantidades masivas de información de forma rápida y eficiente sin la necesidad de tener un poder computacional excepcional, además de una amplia capacidad de adaptabilidad del algoritmo a los cambios propios de la naturaleza de los datos, es posible cambiar y reforzar el algoritmo de manera muy rápida gracias a que las reglas de control están escritas en sentencias argumentativas lógicas y familiares para el razonamiento humano.

Conclusiones y recomendaciones

Los resultados obtenidos no indican que exista alguna optimización en el manejo de riesgos o rentabilidades asociadas a las carteras de inversión, sino que los resultados obtenidos a través de los tres métodos propuestos son similares y siguen la misma tendencia donde el riesgo es superior al rendimiento, de igual manera, no se evidenció una dimensión de la información que pudiera dar nuevas perspectivas acerca del comportamiento de los instrumentos financieros.

Al comparar los resultados, es importante resaltar que ninguno de los tres modelos de determinación de carteras de inversión logró encontrar una combinación de activos que pudiese optimizar tanto el riesgo como el rendimiento para definir una cartera inversión viable, o que, por lo menos, pudiese superar el vector de costo de oportunidad, representado a través de la tasa pasiva efectiva promedio referencial calculada por el Banco Central del Ecuador para septiembre del 2021.

Este resultado puede ser atribuido en parte, a las características propias del mercado de valores nacional donde no existe un volumen de transacción de acciones que permita una adecuada formación de precios a nivel general, así como una profundidad de mercado que pueda especializar y sensibilizar al mercado en sí y al hecho de que los autores anteriormente referenciados utilizaron dentro de su algoritmo difuso, específicamente en el aparato difuso, técnicas de Machine Learning e Inteligencia Artificial, las cuales pueden, en primera instancia, evaluar nuevas variables objetivas o subjetivas para la calificación de los instrumentos financieros, con el fin de crear un campo de información n-dimensional que sirva para visibilizar aspectos de los instrumentos financieros que no han sido evaluados anteriormente, lo cual supone un avance significativo en la aplicación de la teoría difusa al mundo de las inversiones.

Una de las limitantes para la aplicación de este tipo de sistema en regiones como América Latina, es la escasa existencia de información científica sobre el tema aplicada a mercados de la región, lo cual deriva en una curva de aprendizaje mucho más acentuada, los casos de aplicación de esta metodología en el ámbito latinoamericano están aún en etapas muy tempranas de desarrollo, lo cual dificulta la comparación de resultados con experiencia previas que contengan situaciones o circunstancias de mercado parecidas.

Sin embargo, más allá de esta limitante, la aplicación de la lógica difusa en la presente investigación sí fue posible y sí significó un ahorro de tiempo y complejidad de los cálculos a través del algoritmo diseñado, la capacidad que tiene el controlador difuso de adaptar, actualizar y rediseñar rápidamente las reglas de control IF-THEM del sistema, hace que sea más versátil y flexible en cuanto a los modelos de Markowitz y Black-Litterman, esto se traduce, en términos operativos, en menos horas de trabajo y mayor capacidad de interpretación y abstracción de los resultados obtenidos, ya que, al estar regido por sentencias argumentativas lógicas es posible abstraer y proyectar resultados sin mayor esfuerzo, ya que está expresado en términos familiares al pensamiento humano.

Esta simplificación de los cálculos, así como la definición e inclusión de distintos tipos de variables de entrada del controlador difuso, pueden ayudar a los administradores de carteras de inversión a ampliar los horizontes de evaluación al simular rápidamente distintos tipos de escenarios con diversas medidas de complejidad que puedan dar un panorama más amplio y real de las posibles consecuencias de invertir en “x” o “y” activo.

Cabe acortar que, una de las desventajas planteadas en el presente modelo se basa en la imposibilidad de diversificar automáticamente bajo los estamentos del diseño actual del controlador difuso, por lo cual, el criterio de segmentación porcentual de inversión debe ser incluido exteriormente por el diseñador del sistema. Como es conocido en el sector de las finanzas e inversiones, el volumen porcentual de inversión de una cartera en uno u otro instrumento afecta significativamente el rendimiento y el riesgo del mismo.

Otros autores como Konno-Yamazaki (2010) han logrado desarrollar modelos de diversificación automática a través de programación lineal difusa y minimización de las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad media de la cartera, basados en principios de lógica difusa; esta posibilidad abre la puerta para futuras investigaciones.

Este tema en particular, así como la instrumentalización de las reglas IF-THEM dependen enteramente de la concepción del diseñador del sistema, por ende, el horizonte de análisis del controlador estará supeditado a los condicionamientos del diseñador, esto significa que pueden o no integrarse variables importantes de análisis al modelo difuso, independientemente de si son variables objetivas o subjetivas, lo cual puede soslayar la significancia de los resultados, es por esta razón que muchos de los autores citados en esta investigación han utilizado algoritmos complementarios de Inteligencia Artificial para solucionar este problema.

Estas breves referencias a los resultados de las investigaciones citadas anteriormente sirven como sustento para evidenciar la viabilidad del uso de estos métodos

en el mercado nacional, por supuesto, primero deben resolverse las limitantes antes expuestas, pero, sin lugar a dudas, la forma de interacción de la lógica difusa, las definiciones argumentativas y los requisitos de cálculo son mucho más simples y ágiles que con los métodos tradicionales y, tomando en cuenta que los resultados son semejantes, es posible especializar y afinar el modelo para obtener mejores resultados en cuanto a la realidad de la relación riesgo-rendimiento de las acciones nacionales.

Como recomendación general para la aplicación de modelos difusos al mundo de las inversiones es de suma importancia el análisis de las variables que formarán parte de las entradas de datos del sistema, un controlador difuso puede tener n variables de entrada de distinta naturaleza y puede conjugarlas bien sin la necesidad de contar con un gran motor de análisis computacional. Por ende, el modelo difuso debe contar con variables de significancia para el objeto que pretende estudiar, en ámbitos de información escasa como lo es el mercado de valores nacional, sería muy recomendable insertar más variables subjetivas o borrosas, basadas en el expertizaje de distintos profesionales del área de las finanzas, así como también variables que evalúen la percepción de los inversionistas con respecto a determinados productos financieros.

La lógica difusa tiene amplios potenciales de crecimiento como línea de investigación dentro del mundo de las finanzas, la tríada compuesta por la lógica difusa, la econometría y la inteligencia artificial constituyen un tema de vanguardia importante para el futuro y existen casos actuales interesantes que abren el camino hacia soluciones creativas y significativas que tienen el potencial de cambiar el panorama actual.

Como, por ejemplo, Tansuchat et al. (2020) trabajan en modelos de computación suave con números difusos aleatorios en series econométricas de aprendizaje automático para mejorar el procesamiento de datos en investigaciones empíricas, los resultados de la investigación indican que la teoría difusa, así como la teoría de conjuntos aleatorios, tienen un papel fundamental y promisorio en el desarrollo de la computación suave y se perfilan como motores de procesamiento de datos sumamente exitosos.

Por su parte, Chang y Fang (2021) proponen un modelo de análisis y predicción de rendimiento en inversiones innovadoras en industrias de 3C (computación, comunicaciones y consumo electrónico de productos) basado en sistemas híbridos de lógica difusa con técnicas de máquinas de vectores en el cual puedan construir un sistema de alerta temprana para las altas gerencias teniendo como principal recurso la minería de texto en buscadores en línea, posteriormente usan modelos econométricos para definir un parámetro de significancia del resultado defuzzyficado del modelo, los resultados

obtenidos indican que existe una relación significativa entre rendimiento de inversiones innovadoras y alerta temprana basada en minería de texto.

Estos son apenas ejemplos básicos de lo que se está llevando a cabo hoy día con la lógica difusa, lo cual, como puede apreciarse, tiene la capacidad de adaptarse y aplicarse a tantos campos como el investigador puede pensar, habilitando un fértil campo de investigación futuro.

Obras citadas

- Ajibola, Deiji. 2018. "Capital market development and economic growth in Nigeria" *Scholedge International Journal of Management & Development* 04 (10): 99-110. DOI: 10.19085/journal.sijmd041001.
- Altamirano, Kléber, Espinoza William Espinoza y Arandes Jaime Arandes. 2018. "Estudio del riesgo financiero(5C) bajo el enfoque difuso". *Revista Economía y Política. Universidad de Cuenca.* 2 (28):47-57.
<https://doi.org/10.25097/rep.n28.2018.04><https://doi.org/10.25097/rep.n28.2018.04>
- Álvarez, Carmen, Juan Erazo Juan, Cecilia Narváez Cecilia y Kléber Luna Kléber 2020. "Lógica difusa como herramienta de evaluación del portafolio de inversiones en el sector cooperativo del Ecuador". *Revista Espacios* 41 (36).
<https://www.revistaespacios.com/a20v41n36/20413603.html>
- Arango, Adriana, Juan Velásquez Juan y Carlos Granco Carlos. 2013. "Técnicas de lógica difusa en la predicción de índices de mercados de valores: una revisión de literatura". *Revista de Ingenierías. Universidad de Medellín.* 12 (22):177-126.
<https://doi.org/10.22395/rium.v12n22a10>.
- Argumedo, Marcelo 2020 "Aplicabilidad del modelo Black-Litterman para la optimización de portafolios de instrumentos de renta variable del Ecuador". *Tesis de Maestría, Universidad Andina Simón Bolívar. Sede Ecuador.*
<http://hdl.handle.net/10644/7289>.
- Bencivenga, Valerie y Bruce Smith Bruce. 1991. "Financial Intermediation and Endogenous Growth". *Review of Economic Studies* 58 (2): 195-209.
<https://www.jstor.org/stable/2297964>.
- Bolos, Marcel-Ioan, Ioana-Alexandra Bradea Ioana-Alexandra y Camelia Delcea Camelia 2019. "A fuzzy logic algorithm for Optimizing the investment decisions within companies". *Symmetry* 11 (2):186. <https://doi.org/10.3390/sym11020186>.
- Botea, Adi, Ben Strasser Ben y Daniel Harador Daniel. 2014 "Complexity Results for Compressing Optimal Paths". *Proceedings of the Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence*: 1100-1106. <https://harabor.net/data/papers/sbh-aaai15.pdf>.

- Cai, Qisen, Defu Zhang Defu, Wei Zheng Wei y Stephen Leung Stephen. 2015. "A new fuzzy time series forecasting model combined with ant colony optimization and auto-regression". *Knowledge- Based System* 74: 61-68.
<https://doi.org/10.1016/j.knosys.2014.11.003>.
- Cano, Diana y Liz Ricalde 2021. "Impacto del desarrollo del mercado de valores en el crecimiento económico del Perú, periodo: 2015-2018. *Tesis de pregrado*. Universidad San Ignacio de Loyola, sede Lima-Perú.
<http://repositorio.usil.edu.pe/handle/USIL/11458>.
- Castells, Manuel. 1999 "La revolución de la tecnología de la información". *Análisis Político* 37: 3-16.
<https://revistas.unal.edu.co/index.php/anpol/article/view/79113/70410>.
- Cengiz, Kahraman y Kabak Özgür Kabak. 2016. *Fuzzy Statistical Decision-Making Theory and Applications*. s.l.: Springer International Publishing Switzerland.
- Chang, Chiu-Lan y Ming Fang Ming 2021. "Híbrido fuzzy logic with SVM based prediction analysis model to predict innovation performance of 3C industry". *Jornal of Intelligent & Fuzzy Systems* 40: 8485-8492. DOI:10.3233/JIFS-189668.
- Contreras, Maylix. 2010. "Mercado de capitales y crecimiento económico: caso Venezuela". Serie Documentos de trabajo Gerencia de Investigaciones Económicas. Banco Central de Venezuela 111.
<http://www.bcv.org.ve/publicaciones/ndeg-111-mercado-de-capitales-y-crecimiento-economico-caso-venezuela>.
- Del Giudice, Vincenzo, Pierfrancesco De Paola Pierfranceso y Cantasina Giovanni Battista 2017. "Valuation of Real Estate Investments through Fuzzy Logic". *MDPI Buildings* 7 (1), 26. <https://doi.org/10.3390/buildings7010026>.
- Díaz Córdova, Jaime Fabián, Molina Edison, Coba Edison y Paúl Navarrete Paúl. 2017 "Lógica difusa y el riesgo financiero. Una propuesta de clasificación de riesgo financiero al sector cooperativo": *Revista de contaduría y administración* 62, (5): 51671-1686. <https://doi.org/10.1016/j.cya.2017.09.001>.
<http://www.scielo.org.mx/pdf/cya/v62nspe5/0186-1042-cya-62-05-01670.pdf>.
- Duarte, Antonio Marcos. 2018. "Applying the Todim Fuzzy Method To The Valuation Of Brazilian Banks". *Pesquisa Operacional*. 38 (1): 153-171.
<https://doi.org/10.1590/0101-7438.2018.038.01.0153>.
- Dzwigol, Henry, Olena Aleinikova, Yuliia Umanska, Nadiia Shmygol y Yaroslav Pushak. 2019. "An Entrepreneurship Model For Assesing The Investment

- Attractiveness of Regions”. *Journal of Entrepreneurship Education* 22.
oai:lib.iitta.gov.ua:718688.
- Escrig-Olmeda, Elena, Juana María Rivera-Lirio, María Jesús Muñoz-Torres y María Ángeles Fernández-Izquierdo. 2017. “Integrating multiple ESG investors preferences into sustainable investment: A fuzzy multicriteria methodological approach”. *Journal of Cleaner Production* 162: 1334-1345.
<https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.06.143>.
- Franco, Luis, Claudia Avendaño y Haroldo Barbutín. 2011 “Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión”. *Revista Tecno Lógicas* 26: 71-88.
<http://www.scielo.org.co/pdf/teclo/n26/n26a05>.
- Galarza, Fernando y Guillermo Miranda. 1995. “Intermediación financiera y crecimiento económico”. *Cuadernos de Economía* 14 (23): 178-196.
<https://revistas.unal.edu.co/index.php/ceconomia/article/view/13824>.
- Gálvez, Patricio, Marcelo Salgado y Mauricio Gutiérrez 2010. “Optimización de carteras de inversión modelo Markowitz y estimación de volatilidad con GARCH”. *Horizontes empresariales*, 9 (2): 39-50.
<http://revistas.ubiobio.cl/index.php/HHEE/article/view/2031>.
- Gitman, Lawrence y Chad Zutter. 2012. “Principios de Administración Financiera”. Ciudad: México Editoril: Pearson Educación. Décimosegunda edición.
- Giudice, Vincenzo; Pierfrancesco De Paola y Giovanni Del Battista 2017.”Valuación de inversiones en mercados de bienes raíces a través de lógica difusa”. *Buildings* 7. (26). doi:10.3390/buildings7010026.
- Greenwood, Jeremy y Boyan Jovanovic 1990. "Financial Development, Growth, and the Distribution of Income", *Journal of Political Economy* 98 (5): 1076-1107.
<https://www.jstor.org/stable/2937625>.
- Guerard, John B. 2010. *Handbook of Portfolio Construction, Contemporary Applications of Markowitz Techiques*. Nueva York: Editorial Springer New York.
- Gurley, John y E.S. Shaw. 1995. “Financial Aspects of economic development”. *The American Economic Review*. 45 (4): 515-538.
<http://www.jstor.org/stable/1811632>.
- İskenderoglu, Ömer y Saffet Akdag. 2019 “A comparison of portfolio optimization results with fuzzy konno-yamazaki linear programming in bull and bear markets:

- the case of Turkey”. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research* 53 (4): 195-208.
https://www.researchgate.net/publication/338030495_A_Comparison_of_Portfolio_Optimization_Results_with_Fuzzy_Konno-Yamazaki_Linear_Programming_in_Bull_and_Bear_Markets_The_Case_of_Turkey.
- Jantzen, Jan. 2007. *Foundations of Fuzzy Control*. España: Editorial Wiley.
- Konno Hiroshi y Hiroaki Yamazaki. 1991. “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market”. *Management Science* 37 (5) (1991): 519-53. <https://www.jstor.org/stable/2632458>.
- Korol, Tomasz 2014. “A fuzzy logic model for forecasting exchange rates”. *Knowledge-Based System* 67: 49-60. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2014.06.009>.
- León, María, Nelson Ruíz y Fabricio Echeverría. 2010. “Optimización de una cartera de inversiones utilizando algoritmos genéticos”. Instituto de Ciencias Matemáticas. Escuela Superior Politécnica del Litoral.
<https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/9108/1/Optimizaci%C3%B3n%20de%20una%20cartera%20de%20inversiones%20utilizando%20algoritmos.pdf>
- Marchini, Genevieve. 2002. “Los centros financieros regionales en Asia-Pacífico: Hong-Kong”. *México y la Cuenca del Pacífico* 5 (17).
<http://dx.doi.org/10.32870/mycp.v5i17.175>.
- Markowitz, Harry 1952 “Portfolio Selection”. *The Journal of Finance* 7 (1): 77-91.
<https://doi.org/10.2307/2975974>.
- Markowitz, Harry 1991 “Foundations of Portfolio Theory”. *The Journal of Finance* 46 (2): 469-477. <http://www.jstor.org/stable/2328831>.
- Martínez, Ernesto. 2018. “Análisis del Mercado Bursátil Ecuatoriano y Selección de Cartera Óptima del Banco del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social 2015-2017”. Tesis de pregrado. Universidad de Guayaquil. Sede Ecuador.
<http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/34273>.
- McKinnon, Ronald. 2010. “Money and capital in economic development”. Brookings Institution Press.
https://play.google.com/store/books/details?id=erOVIDIY1jEC&rdid=book-erOVIDIY1jEC&rdot=1&source=gbs_vpt_read&pcampaignid=books_booksearch_viewport.

- Molina, Carlos. 2019. "Modelo de Lógica Difusa Para Pronosticar La Inflación En Colombia" Una Tesis Presentada Para Obtener El Título De Magister En Economía Aplicada Universidad Eafit. <http://hdl.handle.net/10784/15872>.
- Montenegro, Efrén. 2018. "Rendimiento y riesgo de portafolios de inversión en el mercado de valores ecuatorianos". *Revista de Ciencias Económicas y Administrativas*.1 (1): 42-55.
<http://investigacion.utc.edu.ec/revistasutc/index.php/prospectivasutc/article/view/File/114/231>.
- Moreno Palacios, Milton. 2012. "Modelo de estructuración financiera de una titularización de flujos futuros en el mercado de valores ecuatoriano para una empresa de business process outsourcing". Tesis de maestría. Universidad Andina Simón Bolívar, sede Ecuador. <http://hdl.handle.net/10644/3113>.
- Nakano Masafumi, Akihiko Takahashi y Soichiro Takahashi 2019. "State-space approach to adaptive fuzzy modeling for financial investment". *Applied Soft Computing Journal* 82. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.105590>.
- Nakano Masufumi, Akihiko Takahashi Akihiko y Soichiro Takahashi Soichiro 2017. "Fuzzy logic-based portafolio selection with particle filtering and anomaly detection". *Knowledge- Based System* 131 (1): 113-124.
<https://doi.org/10.1016/j.knosys.2017.06.006>.
- Palomenque, Galo y Byron Avilés 2018. "Influencia de la globalización financiera en el mercado de valores ecuatoriano". *Revista Ciencia UNEMI* 11 (27): 52-65.
<http://dx.doi.org/10.29076/issn.2528-7737vol11iss27.2018pp52-65p>.
- Pérez Peña, Rodrigo 2021. "Aplicación de las técnicas de Markowitz a la Comercialización de Productos Agrícolas". *Revista Ingenierías USB Med*, 12 (2): 1-16. <https://doi.org/10.21500/20275846.5073>.
- Pérez, Orlando, Andrea Rivera, Luis Solís 2015. "Análisis del mercado de valores ecuatoriano como fuente de inversión para las Pymes". *Revista Ciencia UNEMI*. 8 (13): 8-15. <http://dx.doi.org/10.29076/issn.2528-7737vol8iss13.2015pp8-15p>.
- Pimenta, Alexandre, Ciniro Nametala, Frederico Guimarães, and Eduardo Carrano. 2018. "An Automated Investing Method for Stock Market Based on Multiobjective Genetic Programming." *Computational Economics* 52 (1): 125-44.
<https://doi.org/10.1007/s10614-017-9665-9>.
- Prats, María y Beatriz Sandoval 2016. "Mercado de valores y crecimiento económico. Un estudio empírico en países del Este de Europa". Conferencia presentada en el

- XIX Applied Economics Meeting, Sevilla, febrero 2016.
https://www.researchgate.net/publication/304824855_Mercado_de_valores_y_crecimiento_economico_Un_estudio_empirico_en_paises_del_Este_de_Europa.
- Prieto, Diego y Wendy Fajardo 2015. “La integración de los mercados de valores como mecanismo de crecimiento económico: caso mercado integrado latinoamericano MILA”. Tesis de maestría. Universidad de la Salle, Bogotá, Colombia.
https://ciencia.lasalle.edu.co/finanzas_comercio/154.
- Rosero, Luis. 2010. “El desarrollo del mercado de valores en el Ecuador: Una aproximación”. *Ecuador Debate* 80: 23-34. <http://hdl.handle.net/10469/3490>.
- Ross, Timothy J. 2010. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Estados Unidos de Norteamérica: Editorial Wiley.
- Ruiz Porras, Antonio. 2004 "Mercados financieros y crecimiento económico en América Latina: un análisis econométrico." *Análisis Económico* 19 (40):141-165.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41304008>.
- Saint-Paul, Gilles. 1991. “Technological choice, financial markets and economic development”. *European Economic Review* 36: 763-781.
[https://doi.org/10.1016/0014-2921\(92\)90056-3](https://doi.org/10.1016/0014-2921(92)90056-3).
- Sala-i-Martin Xavier y Roubini Nouriel 1991. “Financial Development, the trade regime, and economic growth”. *National Bureau of Economic Research*. Working paper 3876. [https://doi.org/10.1016/0304-3878\(92\)90055-E](https://doi.org/10.1016/0304-3878(92)90055-E).
- Santiago, Carlos 2019. “Modelo de lógica difusa para pronosticar la inflación en Colombia”. Tesis de Maestría. Universidad Eafit, Sede Medellín. Colombia.
<http://hdl.handle.net/10784/15872>.
- Sassen, Saskia 2003. “Contrageografías de la globalización. Género y ciudadanía en los circuitos transfronterizos” *Traficantes de sueños mapas* 1: 13-137.
https://www.researchgate.net/publication/277955812_Contrageografias_de_la_Globalizacion_Genero_y_ciudadania_en_los_circuitos_transfronterizos/link/5e57e5ee4585152ce8f474d2/download.
- Tansuchat, Roenchai, Uyen Pham y Van Chon Le 2020. “On soft computing with random fuzzy sets in econometrics and machine learning”. *Soft Computing* 25: 7745-7751.
<https://doi.org/10.1007/s00500-020-05154-6>.
- Taylor, Frederick 1969. *Principios de la administración científica*. México: Editorial Herrero Hnos S.A.

- Terán, Fausto 2015. “Construcción de un portafolio óptimo de acciones de empresas que cotizan en las bolsas de valores ecuatorianas”. Tesis de maestría. Universidad Andina Simón Bolívar. Sede Ecuador.
<http://hdl.handle.net/10644/4638>.
- Valaskova, Katarina, Viera Bartosova, and Pavol Kubala. 2019. “Behavioural Aspects of the Financial Decision-Making.” *Organizacija* 52 (1): 22–31.
<https://doi.org/10.2478/orga-2019-0003>.
- Van Horne C, James Wachowicz James y John M 2010. *Fundamentos de Adiministración Financiera*. México: Editorial Pearson Educación.
- Villalba, Daniel. 1998. “Un modelo de selección de cartera con escenarios y función de riesgo asimétrico”. *Revista Española de Financiación y Contabilidad* 27 (96): 613-637. <https://www.jstor.org/stable/42782158>.
- Zadeh, Lotfi. 1994 “Fuzzy logic, neural networks and soft computing”.
Communications of the ACM, 37(3):77–84.
https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814261302_0040.
- Zamora, Erick (2015). “Lógica Difusa - 2.1.2 Producto Cartesiano Difuso - Hackeando Tec”. Video de Youtube, a partir de un curso de lógica y control difuso.
https://www.youtube.com/watch?v=Xki34v7gIug&list=PLIyIZGa1sAZoWAeT_tL7zCv3wi1ISrBa0&index=11.
- Zhang, Jiboning. (2020). “Investment risk model based on Intelligent fuzzy neural network and Var”. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 371: 112707. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112707>.