MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 10 *No* 03
Tahun 2022

IDEAL FUZZY INTUISIONISTIK-$(\in, \in)$ IMPLIKATIF POSITIF DARI *BCK*-ALJABAR

Fanindya Sadida Karima
Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: fanindya.18055@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito
Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
Penulis Korespondensi: agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Pada artikel ini diperkenalkan konsep ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif yang diimplementasikan pada *BCK*-aljabar, beberapa sifat ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif, dan hubungan antara ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif dan ideal fuzzy intuisionistik. Artikel ini juga menyajikan beberapa syarat untuk ideal fuzzy intuisionistik menjadi ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif.
Kata Kunci: ideal fuzzy intuisionistik, ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif.

Abstract

The idea of positive implicative intuitionistic$-(\in, \in)$ *fuzzy ideal, which is used in this article, is introduced in this article. The investigation of some of positive implicative intuitionistic*$-(\in, \in)$ *fuzzy ideal's characteristics is followed by a discussion of how positive implicative intuitionistic*$-(\in, \in)$ *fuzzy ideal and intuitionistic fuzzy ideal relate to one another. The prerequisites for intuitionistic fuzzy ideal to become positive implicative intuitionistic*$-(\in, \in)$ *fuzzy ideal are also discussed in this article.*
Keywords: *intuitionistic fuzzy ideal, positive implicative intuitionistic*$-(\in, \in)$ *fuzzy ideal.*

PENDAHULUAN

Konsep *BCK*-aljabar, pertama kali dikemukakan oleh Y. Imai dan K. Iseki pada tahun 1966. Gagasan ini berasal dari dua penyelesaian yang berbeda; yaitu berdasarkan teori himpunan dan perhitungan proposisional klasik dan non-klasik. *BCK*-aljabar merupakan kelas spesial pada *BCI*-aljabar, yang memiliki peranan penting dalam teori *BCI*-aljabar dan mempunyai hubungan dekat dengan teori kisi. *BCK*-aljabar terlebih dahulu dicetuskan daripada *BCI*-aljabar. Sejak itulah banyak peneliti mempelajari beberapa gagasan dan sifat-sifat pada *BCK*-aljabar.

Zadeh memperkenalkan derajat keanggotaan dan mendefinisikan himpunan fuzzy (Zadeh, 1965). Attanasov memperkenalkan konsep derajat kenonanggotaan dan mendefinisikan himpunan fuzzy intuisionistik (Attanasov, 1986), sebagai generalisasi dari gagasan himpunan fuzzy. Konsep ideal fuzzy pada *BCK*-aljabar diperkenalkan oleh Y.B. Jun, sebagai gagasan dari himpunan fuzzy (Y. B. Jun, 1995). Kemudian Kim dan Jun memperkenalkan konsep ideal fuzzy intuisionistik pada *BCK*-aljabar, sebagai generalisasi dari gagasan himpunan fuzzy intuisionistik dan ideal fuzzy (Jun dan Kim, 2000).

Hubungan antara konsep ideal fuzzy intuisionistik dan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif penting untuk diketahui tetapi belum begitu jelas. Untuk mengeksplorasi hubungan yang mungkin kedua konsep ini, pada artikel ini akan didiskusikan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif yang diimplementasikan pada *BCK*-aljabar. Kemudian menyelidiki beberapa sifat ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif dan membahas mengenai hubungan antara ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif dan ideal fuzzy intuisionistik. Artikel ini juga menyajikan beberapa syarat untuk ideal fuzzy intuisionistik dapat menjadi ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif.

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1. (Meng dan Jun, 1994)
BCI-aljabar adalah himpunan tak-kosong X dengan elemen istimewa 0 dan operasi biner $*$, memenuhi empat aksioma berikut:

(I) $\big((u * v) * (u * w)\big) * (w * u) = 0,$

(II) $\big(u * (u * v)\big) * v = 0,$

(III) $u * u = 0,$

(IV) $u * v = v * u = 0 \Longrightarrow u = v$

untuk semua $u, v, w \in X$. *BCI*-aljabar X yang memenuhi aksioma

(V) $0 * u = 0$ untuk sebarang $u \in X$ disebut *BCK-aljabar*.

Proposisi 2.2. *Setiap BCK/BCI-aljabar X memiliki syarat berikut:*

$$(\forall u \in X)(u * 0 = u).$$

Bukti. Substitusikan $v = 0$ pada Aksioma (II), sehingga mendapatkan

$$\big(u * (u * 0)\big) * 0 = 0. \quad (2.1)$$

Pada Aksioma (I), substitusikan $u * 0$ pada v dan u pada w, supaya mendapatkan

$$\Big(\big(u * (u * 0\,)\big) * (u * u)\Big) * \big(u * (u * 0\,)\big) = 0. \quad (2.2)$$

Dengan Aksioma (III) ubah persamaan (2.2) menjadi

$$\Big(\big(u * (u * 0\,)\big) * 0\Big) * \big(u * (u * 0\,)\big) = 0. \quad (2.3)$$

Substitusikan (2.1) ke (2.3) untuk mendapatkan

$$0 * \big(u * (u * 0\,)\big) = 0. \quad (2.4)$$

Dengan Aksioma (IV), persamaan (2.1) dan (2.4) menghasilkan

$$u * (u * 0\,) = 0. \quad (2.5)$$

Pada Aksioma (II), substitusikan u pada v supaya memperoleh

$$\big(u * (u * u)\big) * u = 0. \quad (2.6)$$

Dengan Aksioma (III), persamaan (2.6) menjadi

$$(u * 0) * u = 0 \quad (2.7)$$

Dengan Aksioma (IV) persamaan (2.5) dan (2.7), menghasilkan

$$u * 0 = u. \qquad ■$$

Definisi 2.3. *Pada BCK/BCI-aljabar X, pengurutan parsial $\leq$ memenuhi syarat*

$$(\forall u, v \in X)(u \leq v \Leftrightarrow u * v = 0).$$

Proposisi 2.4. *Pada BCK/BCI-aljabar X, pengurutan parsial $\leq$ memiliki tiga sifat berikut:*

(i) $(u \leq u)$, yaitu refleksif,

(ii) $(u \leq v,\ v \leq w \ \Rightarrow\ u \leq w)$, yaitu transitif, dan

(iii) $(\,u \leq v\,, v \leq u\ \Rightarrow\ u = v)$, yaitu anti-simetris.

Bukti. (i) Dengan Definisi 2.3 dan menggunakan Aksioma (III), didapatkan

$$u \leq u,$$

sehingga terbukti bahwa pengurutan parsial $\leq$ bersifat refleksif.

(ii) Misalkan $u \leq v$ dan $v \leq w$. Gunakan Definisi 2.3 diperoleh $u * v = 0$ juga pada $v \leq w$ berarti $v * w = 0$.
Pada Aksioma (I), substitusikan $v = w$ dan $w = v$, untuk mendapatkan

$$\big((u * w) * (u * v)\big) * (v * w) = 0,$$

sehingga $u * v = 0$ dan $v * w = 0$ mengakibatkan

$$\big((u * w) * 0\big) * 0 = 0.$$

Dengan menggunakan Proposisi 2.2 dua kali secara berturutan untuk mendapatkan

$$u * w = 0,$$

berdasarkan Definisi 2.3 menghasilkan $u \leq w$.Jadi terbukti bahwa pengurutan parsial $\leq$ bersifat transitif.

(iii) Misalkan $u \leq v$ dan $v \leq u$. Gunakan Definisi 2.3, dari $u \leq v$ untuk memperoleh $u * v = 0$. Dengan Definisi 2.3 gunakan $v \leq u$ untuk memperoleh $v * u = 0$, sehingga Aksioma (IV) menghasilkan $u = v$.Jadi terbukti bahwa pengurutan parsial $\leq$ bersifat anti-simetris. ■

Proposisi 2.5. *Setiap BCK/BCI-aljabar X berlaku sifat:*

(i) $u \leq v \Longrightarrow u * w \leq v * w,$

(ii) $u \leq v \Longrightarrow w * v \leq w * u,$

(iii) $(u * v) * w = (u * w) * v,$

(iv) $(u * w) * (v * w) \leq u * v.$

$(\forall u, v, w \in X)$

Bukti. (i) Pada Aksioma (I), substitusikan $v = w$ dan $w = v$ untuk mendapatkan

$$\big((u * w) * (u * v)\big) * (v * w) = 0.$$

Karena $u \leq v$ berarti $(u * v = 0)$, persamaan ini menghasilkan

$$\big((u * w) * 0\big) * (v * w) = 0.$$

Dengan menggunakan Proposisi 2.2 menghasilkan

$$(u * w) * (v * w) = 0,$$

Berdasarkan Definisi 2.3 mengakibatkan

$$u * w \leq v * w. \qquad ■$$

(ii) Pada Aksioma (I), substitusikan $w = u$ dan $u = w$ untuk mendapatkan

$$\big((w * v) * (w * u)\big) * (u * v) = 0.$$

Karena $u \leq v$ setara dengan $(u * v = 0)$, persamaan tersebut menyebabkan

$$\big((w * v) * (w * u)\big) * 0 = 0.$$

Dengan menggunakan Proposisi 2.2 menghasilkan

$$(w * v) * (w * u) = 0,$$

Berdasarkan Definisi 2.3 mengakibatkan

$$w * v \leq w * u. \qquad \blacksquare$$

(iii) Pada Aksioma (II), substitusikan $v = w$ supaya memperoleh persamaan

$$\big(u * (u * w)\big) * w = 0$$

Berdasarkan Definisi 2.3 persamaan ini setara dengan

$$u * (u * w) \leq w.$$

Kemudian gunakan Proposisi 2.5 bagian (ii) dengan faktor $u * v$ untuk mendapatkan

$$(u * v) * w \leq (u * v) * \big(u * (u * w)\big).$$

Pada Aksioma (I), substitusikan $w = u * w$ untuk memperoleh

$$\Big((u * v) * \big(u * (u * w)\big)\Big) * \big((u * w) * v\big) = 0$$

Berdasarkan Definisi 2.3 persamaan ini setara dengan

$$(u * v) * \big(u * (u * w)\big) \leq (u * w) * v.$$

Karena $(u * v) * w \leq (u * v) * \big(u * (u * w)\big)$ dan $(u * v) * \big(u * (u * w)\big) \leq (u * w) * v$, sifat transitif pengurutan $\leq$ (Proposisi 2.4(ii)) menghasilkan

$$(u * v) * w \leq (u * w) * v.$$

Kemudian substitusikan $v = w$ dan $w = v$ untuk memperoleh

$$(u * w) * v \leq (u * v) * w,$$

sehingga Aksioma (IV) menghasilkan

$$(u * v) * w = (u * w) * v. \qquad \blacksquare$$

(iv) Pada Aksioma (I), substitusikan $w = v$ dan $v = w$ untuk mendpatkan persamaan

$$\big((u * w) * (u * v)\big) * (v * w) = 0.$$

Gunakan Proposisi 2.5 bagian (iii), yaitu $(u * v) * w = (u * w) * v$ agar mendapatkan

$$\big((u * w) * (v * w)\big) * (u * v) = 0,$$

sehingga Definisi 2.3 menghasilkan

$$(u * w) * (v * w) \leq u * v. \qquad \blacksquare$$

Definisi 2.6. *BCK-Aljabar X dikatakan implikatif positif jika memenuhi*

$$(\forall u, v, w \in X), (u * w) * (v * w) = (u * v) * w \tag{2.8}$$

Definisi 2.7. *Subhimpunan tak-kosong S dari BCK/BCI-Aljabar X disebut subaljabar dari X jika memenuhi*

$$(\forall u, v \in S)(u * v \in S) \tag{2.9}$$

Definisi 2.8. *BCK/BCI-aljabar X disebut ideal dari X pada subhimpunan tak-kosong I, apabila memenuhi syarat:*

$$0 \in I \tag{2.10}$$

$$(\forall u \in X)(\forall v \in I)(u * v \in I \ \Rightarrow u \in I) \tag{2.11}$$

Definisi 2.9. *BCK-aljabar X disebut ideal implikatif positif dari X pada subhimpunan tak-kosong I, apabila memenuhi (2.10) serta*

$$\big((u * v) * w \in I, v * w \in I \Rightarrow u * w \in I\big) \tag{2.13}$$

untuk setiap $u, v, w \in X$.

Proposisi 2.10 (Meng dan Jun, 1994)
Setiap ideal implikatif positif merupakan ideal.

Bukti. Ambil sebarang I ideal implikatif positif. Jika pada persamaan (2.11), yaitu $u * v \in I$ dan $v \in I$, kemudian substitusi persamaan (2.13) dengan $w = 0$ didapatkan $(u * v) * 0 \in I$ dan $v * 0 \in I$. Dari persamaan (2.13) diperoleh $u = u * 0 \in I$, sehingga persamaan menjadi

$$(u * v) * 0 \in I, v * 0 \in I \Rightarrow u * 0 \in I$$

Karena berdasarkan dengan persamaan (2.10) dan (2.11), jadi setiap ideal implikatif positif *BCK-aljabar X* merupakan ideal, terbukti. $\blacksquare$

Kebalikan Proposisi 2.10 tidak berlaku, sebagaimana contoh yang diberikan berikut ini. Perhatikan $X = \{0,1,2,3,4\}$ dan operasi $*$ pada X yang ditunjukkan tabel Cayley di Tabel 1,

Tabel 1. Tabel Cayley untuk operasi biner "$*$".

$*$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1
2	2	2	0	2	0
3	3	1	3	0	3
4	4	4	4	4	0

$(X,*,0)$ merupakan *BCK*-aljabar. Yang termasuk dalam ideal implikatif positif X yaitu $\{0,1,3\}$ dan $\{0,1,2,3\}$. Subhimpunan $\{0\}$, $\{0,2\}$, dan $\{0,2,4\}$ merupakan ideal dari X, tetapi tidak implikatif positif.

$\{0,2\}$ merupakan ideal, tetapi bukan ideal implikatif positif karena $(3 * 1) * 1 = 1 * 1 = 0 \in \{0,2\}$, $1 * 1 = 0 \in \{0,2\}$, tetapi $3 * 1 = 1 \notin \{0,2\}$. Oleh karena itu, contoh ini telah menunjukkan bahwa setiap ideal belum tentu merupakan ideal implikatif positif.

Lemma 2.11. Misalkan I subhimpunan tak-kosong pada BCK-aljabar X. Maka semua pernyataan berikut ekuivalen:

(i) I merupakan ideal implikatif positif.

(ii) I merupakan ideal, jika $(u * v) * v \in I$, maka $u * v \in I$, untuk seluruh $u, v \in X$.

(iii) I merupakan ideal, jika $(u * v) * w \in I$, maka $(u * w) * (v * w) \in I$, untuk setiap $u, v, w \in X$,

(iv) $0 \in I$, dan jika $\big((u * v) * v\big) * w \in I$ dan $w \in I$, maka $u * v \in I$.

Bukti. $\big($(i) ⇒ (ii)$\big)$ Misalkan I ideal implikatif positif. Menurut Proposisi 2.10, I merupakan ideal. Misalkan $(u * v) * v \in I$. Substitusi $w = v$ pada (2.13), sebab $v * v = 0 \in I$, diperoleh $u * v \in I$.

$\big($(ii) ⇒ (iii)$\big)$ Asumsikan (ii) dan $(u * v) * w \in I$ berlaku. Maka menggunakan Proposisi 2.5 (iv) didapatkan

$$\big((u * w) * (v * w)\big) * w \leq (u * v) * w \in I,$$

sehingga $\big((u * w) * (v * w)\big) * w \in I$.

Kemudian menggunakan Proposisi 2.5 (iii) didapatkan

$$\Big(\big(u * (v * w)\big) * w\Big) * w = \big((u * w) * (v * w)\big) * w \in I.$$

Jadi, dengan (ii) dapat disimpulkan

$$\big(u * (v * w)\big) * w \in I,$$

sehingga menggunakan Proposisi 2.5 (iii) didapatkan $(u * w) * (v * w) \in I$.

$\big($(iii) ⇒ (iv)$\big)$ Karena I ideal, jelaslah $0 \in I$. Asumsikan bahwa $\big((u * v) * v\big) * w \in I$ dan $w \in I$. Maka dengan (iii) didapatkan

$$\big((u * v) * (v * v)\big) * w = \big((u * v) * v\big) * w \in I,$$

serta menggunakan Aksioma (III) dan Proposisi 2.2 didapatkan

$$\big((u * v) * 0\big) * w = (u * v) * w \in I.$$

Karena I ideal dan $w \in I$, dapat disimpulkan menjadi $u * v \in I$.

$\big($(iv) ⇒ (i)$\big)$ Asumsikan bahwa I memenuhi (iv). Maka I merupakan ideal pada X dengan mensubstitusi $w = v$ dan $v = 0$.

Misalkan $(u * v) * w \in I$ dan $v * w \in I$. Proposisi 2.5 (iii) mengakibatkan $\big(u * w\big) * v \in I$.

Menggunakan Proposisi 2.5 (iv) didapatkan

$$\big((u * w) * w\big) * (v * w) \leq (u * w) * v \in I,$$

sehingga $\big((u * w) * w\big) * (v * w) \in I$. Oleh karena itu, dengan (iv) disimpulkan bahwa $u * w \in I$. Terbukti bahwa ideal I implikatif positif. ∎

Lemma 2.12. Misalkan I dan A ideal dari BCK-aljabar X sehingga $I \subseteq A$. Jika I implikatif positif, maka begitu juga A.

Bukti. Misalkan $(u * v) * w \in A$ dan $s = (u * v) * w$. Menggunakan Aksioma (III) diketahui jika:

$$\big((u * v) * w\big) * s = 0 \in I.$$

Dengan Proposisi 2.5 (iii) didapatkan

$$\big((u * s) * v\big) * w = 0 \in I.$$

Karena I merupakan implikatif positif, maka menggunakan Lemma 2.11 (iii) didapatkan

$$\big((u * s) * w\big) * (v * w) \in I,$$

menggunakan Proposisi 2.5 (iii) didapatkan

$$\big((u * w) * s\big) * (v * w) \in I,$$

dan

$$\big((u * w) * (v * w)\big) * s \in I,$$

substitusi $s = (u * v) * w$, didapatkan

$$\big((u * w) * (v * w)\big) * \big((u * v) * w\big) \in I.$$

Karena $I \subseteq A$, didapatkan

$$\big((u * w) * (v * w)\big) * \big((u * v) * w\big) \in A.$$

Karena $(u * v) * w \in A$ dan A ideal, diperoleh

$$(u * w) * (v * w) \in A.$$

Berdasarkan Lemma 2.11 (iii), A ideal implikatif positif. ∎

Lemma 2.13. Pada BCK-aljabar X, semua pernyataan berikut ekuivalen:

(i) BCK-aljabar X implikatif positif.

(ii) $\{0\}$ merupakan ideal implikatif positif dari X.

(iii) Setiap ideal dari X adalah implikatif positif.

(iv) Untuk setiap a anggota X, himpunan

$$T(s) = \{u \in X : u \leq s\}$$

merupakan ideal dari X.

Bukti. $\big($(i) ⇒ (ii)$\big)$ Jelas bahwa $\{0\}$ merupakan ideal. Asumsikan bahwa BCK-aljabar X implikatif positif. Misalkan $(u * v) * v \in \{0\}$. Dengan Definisi 2.6 dan Aksioma (III), didapatkan

$$\begin{aligned} u * v &= (u * v) * 0 \\ &= (u * v) * (v * v) \\ &= (u * v) * v \in \{0\} \end{aligned}$$

Menggunakan Lemma 2.11 (ii), dapat disimpulkan bahwa ideal $\{0\}$ implikatif positif.

$\big($(ii) ⇒ (iii)$\big)$ Menggunakan Lemma 2.12 disimpulkan bahwa karena $\{0\}$ ideal implikatif positif, maka semua ideal dari X adalah implikatif positif.

$\big($(iii) ⇒ (iv)$\big)$ Untuk $s \in X$ dan $\big(u * v, v \in T(s)\big)$, berlaku $u * v \leq s$ dan $v \leq s$. Karena itu, $(u * v) * s = 0 \in \{0\}$ dan $v * s = 0 \in \{0\}$. Dengan (iii), karena $\{0\}$

merupakan ideal implikatif positif, $u * s \in \{0\}$. Maka dari itu, $u \in T(s)$. Jadi, untuk sebarang $s \in X$, himpunan $T(s) = \{u \in X : u \leq s\}$ merupakan ideal.

$\big((\text{iv}) \Rightarrow (\text{i})\big)$ Misalkan untuk sebarang $s \in X$, $T(s) = \{u \in X : u \leq s\}$ ideal dan $(u * v) * v = 0$, dengan demikian $u * v \in T(v)$. Karena $T(v)$ merupakan ideal dan $v \in T(v)$, didapat $u \in T(v)$, sehingga $u * v = 0$. Karena itu, terbukti bahwa untuk BCK-aljabar X, berlaku $(u * v) * v = 0$ berakibat $u * v = 0$. Untuk menunjukkan hasil ini diperlukan cara yang mudah sehingga mengakibatkan pada BCK-aljabar X berlaku $(u * v) * v = u * v$, dan hasil ini setara dengan menyatakan bahwa X merupakan BCK-aljabar implikatif positif. ∎

Definisi 2.14. (Attanasov, 1986)
Misalkan X adalah himpunan semesta tak-kosong. Himpunan fuzzy intuisionistik (IFS) T di X didefinisikan sebagai bentuk berikut:
$T = \{(u, \alpha_T(u), \beta_T(u)) \mid u \in X\}$
dengan $\alpha_T : X \to [0,1]$ didefinisikan sebagai derajat keanggotaan dan $\beta_T : X \to [0,1]$ didefinisikan sebagai derajat non-keanggotaan $u \in X$ pada himpunan T yang merupakan subhimpunan dari X, dan untuk sebarang $u \in X$ berlaku:

$$0 \leq \alpha_T(u) + \beta_T(u) \leq 1 \tag{2.14}$$

Setiap himpunan fuzzy intuisionistik dapat ditulis sebagai

$$\{(u, \alpha_T(u), 1 - \alpha_T(u)) \mid u \in X\}$$

Himpunan fuzzy intuisionistik (IFS) $T = \{(u, \alpha_T(u), \beta_T(u)) \mid u \in X\}$ di X dapat diidentifikasi menjadi pasangan berurutan (α_T, β_T) di $I^X \times I^X$, dengan I^X menyatakan himpunan semua fungsi dari X ke I. Untuk memudahkan penulisan, simbol $T = (\alpha_T, \beta_T)$ dapat menjadi pengganti dalam penulisan simbol $T = \{(u, \alpha_T(u), \beta_T(u)) \mid u \in X\}$.

Definisi 2.15. (Jun Y.B., Kim K.H., 2000)
BCK/BCI-aljabar X pada suatu himpunan fuzzy intuisionistik $h = (h_\alpha, h_\beta)$ disebut subaljabar fuzzy intuisionistik dari X apabila memenuhi:

$$\begin{aligned}&(\forall u, v \in X)\ (h_\alpha(u * v) \geq \min\{h_\alpha(u), h_\alpha(v)\})\\&(\forall u, v \in X)\ (h_\beta(u * v) \leq \max\{h_\beta(u), h_\beta(v)\})\end{aligned} \tag{2.15}$$

Definisi 2.16. (Jun Y.B., Kim K.H., 2000)
BCK/BCI-aljabar X pada suatu himpunan fuzzy intuisionistik $h = (h_\alpha, h_\beta)$ disebut ideal fuzzy intuisionistik dari X apabila memenuhi:

$$(\forall u \in X)\begin{pmatrix} h_\alpha(0) \geq h_\alpha(u), \\ h_\beta(0) \leq h_\beta(u) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$(\forall u, v \in X)\begin{pmatrix} h_\alpha(u) \geq \min\{h_\alpha(u * v), h_\alpha(v)\} \\ h_\beta(u) \leq \max\{h_\beta(u * v), h_\beta(v)\} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Definisi 2.17.
Untuk setiap $\alpha, \beta \in [0,1]$ dan himpunan fuzzy intuisionistik $h = (h_\alpha, h_\beta)$ pada BCK/BCI-aljabar X, didefinisikan himpunan-himpunan berikut ini:

$$U_\in(h; \alpha) = \{u \in X \mid h_\alpha(u) \geq \alpha\}$$

dan:

$$L_\in(h; \beta) = \{u \in X \mid h_\beta(u) \leq \beta\}.$$

Setiap himpunan $U_\in(h; \alpha)$ dan $L_\in(h; \beta)$ adalah subhimpunan-$\in$ intuisionistik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 3.1. Himpunan fuzzy intuisionistik $h = (h_\alpha, h_\beta)$ pada BCK-aljabar X disebut *ideal fuzzy intuisionistik*-$(\in, \in)$ *implikatif positif* dari X jika memenuhi kondisi persamaan (2.16) pada Definisi 2.16 dan:

$$\begin{aligned}&[(u * v) * w \in U_\in(h; \alpha_1), v * w \in U_\in(h; \alpha_2) \Rightarrow u * w \in U_\in(h; \min\{\alpha_1, \alpha_2\})],\\&[(u * v) * w \in L_\in(h; \beta_1), v * w \in L_\in(h; \beta_2) \Rightarrow u * w \in L_\in(h; \max\{\beta_1, \beta_2\})]\end{aligned} \tag{3.1}$$

Untuk semua $u, v, w \in X, (\alpha_1, \beta_1) \in [0,1] \times [0,1]\ dan\ (\alpha_2, \beta_2) \in [0,1] \times [0,1]$.

Contoh 3.2.
Pertimbangkan himpunan $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ yang ditunjukkan tabel Cayley di Tabel 2.

Tabel 2. Tabel Cayley untuk operasi biner " $*$ "

*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	2	2	0	0	2
3	3	3	3	0	3
4	4	4	4	4	0

Maka, $(X, *, 0)$ adalah BCK-aljabar. Misal $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan himpunan fuzzy intuisionistik pada X yang didefinisikan Tabel 3.

Tabel 3. Representasi tabular dari $h = (h_\alpha, h_\beta)$.

X	$h_\alpha(u)$	$h_\beta(u)$
0	0.8	0.1
1	0.7	0.2
2	0.6	0.4
3	0.4	0.6
4	0.1	0.9

Dapat diverifikasi bahwa $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif dari X.

Teorema 3.3. Untuk himpunan fuzzy intuisionistik $h = (h_\alpha, h_\beta)$ pada BCK-aljabar X, dua pernyataan berikut ini ekuivalen.

(i) Subhimpunan-$\in$ intuisionistik tak-kosong $U_\in(h;\alpha)$ dan $L_\in(h;\beta)$ adalah ideal implikatif positif dari X untuk semua $\alpha, \beta \in [0,1]$.

(ii) $h = (h_\alpha, h_\beta)$ memenuhi kondisi persamaan (2.16) dan untuk seluruh $u, v, w \in X$

$$\begin{pmatrix} h_\alpha(u * w) \geq \min\{h_\alpha((u * v) * w), h_\alpha(v * w)\} \\ h_\beta(u * w) \leq \max\{h_\beta((u * v) * w), h_\beta(v * w)\} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Bukti. $((\text{i}) \Rightarrow (\text{ii}))$ Misalkan subhimpunan-$\in$ intuisionistik tak-kosong $U_\in(h;\alpha)$ dan $L_\in(h;\beta)$ merupakan ideal implikatif positif dari X untuk semua $\alpha, \beta \in [0,1]$. Andaikan $h_\alpha(0) < h_\alpha(\alpha)$ untuk setiap $\alpha \in X$, maka $0 \notin U_\in(h; h_\alpha(\alpha))$. Karena pernyataan ini merupakan kontradiksi, $h_\alpha(0) \geq h_\alpha(u)$ untuk semua $u \in X$. Andaikan bahwa $h_\beta(0) > h_\beta(\alpha)$ untuk setiap $\alpha \in X$. Maka $0 \notin L_\in\left(h; h_\beta(\alpha)\right)$. Karena pernyataan ini merupakan kontradiksi, $h_\beta(0) \leq h_\beta(u)$ untuk semua $u \in X$. Oleh karena itu, persamaan (2.16) berlaku. Andaikan bahwa terdapat a, b, c anggota X dengan

$$h_\alpha(a * c) < \min\{h_\alpha((a * b) * c), h_\alpha(b * c)\}.$$

Ambil $\alpha := \min\{h_\alpha((a * b) * c), h_\alpha(b * c)\}$ untuk menunjukkan bahwa $(a * b) * c \in U_\in(h;\alpha)$ dan $b * c \in U_\in(h;\alpha)$, tetapi $a * c \notin U_\in(h;\alpha)$ yang merupakan kontradiksi. Dengan demikian, untuk seluruh $u, v, w \in X$ diperoleh

$$h_\alpha(u * w) \geq \min\{h_\alpha((u * v) * w), h_\alpha(v * w)\}$$

Andaikan ada $u, v, w \in X$ dengan

$$h_\beta(u * w) > \max\{h_\beta((u * v) * w), h_\beta(v * w)\} := \beta$$

Maka $(u * v) * w \in L_\in(h;\beta)$ dan $v * w \in L_\in(h;\beta)$, tetapi $u * w \notin L_\in(h;\beta)$ merupakan kontradiksi. Jadi, untuk seluruh $u, v, w \in X$ diperoleh

$$h_\beta(u * w) \leq \max\{h_\beta((u * v) * w), h_\beta(v * w)\}$$

$((\text{ii}) \Rightarrow (\text{i}))$ Misalkan $h = (h_\alpha; h_\beta)$ himpunan fuzzy intuisionistik pada X memenuhi persamaan (2.16) dan persamaan (3.2). Asumsikan bahwa $U_\in(h;\alpha)$ dan $L_\in(h;\beta)$ tak-kosong untuk $\alpha, \beta \in [0,1]$. Misalkan $i \in U_\in(h;\alpha)$ dan $i \in L_\in(h;\beta)$ untuk $\alpha, \beta \in [0,1]$. Maka dengan menggunakan persamaan (2.16) diperoleh

$$h_\alpha(0) \geq h_\alpha(x) \geq \alpha \text{ dan } h_\beta(0) \leq h_\beta(u) \leq \beta,$$

sehingga $0 \in U_\in(h;\alpha)$ dan $0 \in L_\in(h;\beta)$. Misalkan $a, b, c \in X$ dengan $(a * b) * c \in U_\in(h;\alpha)$ dan $b * c \in U_\in(h;\alpha)$ untuk $\alpha \in [0,1]$. Maka, menggunakan persamaan (3.2)

$$h_\alpha(a * c) \geq \min\{h_\alpha((a * b) * c), h_\alpha(b * c)\} \geq \alpha,$$

sehingga, $a * c \in U_\in(h;\alpha)$. Misalkan $(u * v) * w \in L_\in(h;\beta)$ dan $v * w \in L_\in(h;\beta)$ untuk seluruh $u, v, w \in X$ dan $\beta \in [0,1]$. Maka $h_\beta((u * v) * w) \leq \beta$ dan $h_\beta(v * w) \leq \beta$, yang berdasarkan persamaan (3.2) diperoleh

$$h_\beta(u * w) \leq \max\{h_\beta((u * v) * w), h_\beta(v * w)\} \leq \beta.$$

Oleh karena itu, $u * w \in L_\in(h;\beta)$, sehingga, subhimpunan-$\in$ intuisionistik tak-kosong $U_\in(h;\alpha)$ dan $L_\in(h;\beta)$ adalah ideal implikatif positif dari X untuk semua $\alpha, \beta \in [0,1]$. ∎

Teorema 3.4. Misalkan $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan himpunan fuzzy intuisionistik di BCK-aljabar X. $h = (h_\alpha, h_\beta)$ adalah ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif jika dan hanya jika subhimpunan-$\in$ intuisionistik tak-kosong $U_\in(h;\alpha)$ dan $L_\in(h;\beta)$ adalah ideal implikatif positif dari X untuk semua $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Bukti.$(\Rightarrow)$ Misalkan $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif pada X, dan asumsikan bahwa $U_\in(h;\alpha)$ dan $L_\in(h;\beta)$ tak-kosong untuk $\alpha, \beta \in [0,1]$. Maka, terdapat $u, w \in X$ bahwa $u \in U_\in(h;\alpha)$ dan $w \in L_\in(h;\beta)$. Berdasarkan persamaan (2.16) sehingga $h_\alpha(0) \geq h_\alpha(u) \geq \alpha$ dan $h_\beta(0) \leq h_\beta(u) \leq \beta$. Karena itu, $0 \in U_\in(h;\alpha)$ dan $0 \in L_\in(h;\beta)$.

Misalkan $u, v, w, i, j, k \in X$ dimana $(u * v) * w \in U_\in(h;\alpha)$, $v * w \in U_\in(h;\alpha)$, $(i * j) * k \in L_\in(h;\beta)$, dan

$j * k \in L_{\in}(h;\beta)$. Maka dengan menggunakan persamaan (3.1) diperoleh, $u * w \in U_{\in}(h;\min\{\alpha,\alpha\}) = U_{\in}(h;\alpha)$ dan $i * k \in L_{\in}(h;\max\{\beta,\beta\}) = L_{\in}(h;\beta)$. Karena itu, subhimpunan-$\in$ intuisionistik tak-kosong $U_{\in}(h;\alpha)$ dan $L_{\in}(h;\beta)$ adalah ideal implikatif positif dari X untuk semua $\alpha,\beta \in [0,1]$.

($\Leftarrow$) Sebaliknya, misalkan $h = (h_\alpha, h_\beta)$ himpunan fuzzy intuisionistik pada X. Untuk setiap $U_{\in}(h;\alpha)$ dan $L_{\in}(h;\beta)$ tak-kosong dan merupakan ideal implikatif positif pada X untuk semua $\alpha,\beta \in [0,1]$. Sudah pasti persamaan (2.16) adalah benar.

Misalkan $u,v,w \in X$ dan $\alpha_1,\alpha_2 \in [0,1] \times [0,1]$ sehingga $(u * v) * w \in U_{\in}(h;\alpha_1)$ dan $v * w \in U_{\in}(h;\alpha_2)$. Maka, $(u * v) * w \in U_{\in}(h;\alpha)$, $v * w \in U_{\in}(h;\alpha)$ dimana $\alpha = \min\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Karena, $U_{\in}(h;\alpha)$ merupakan ideal implikatif positif pada X, selanjutnya $u * w \in U_{\in}(h;\alpha) = U_{\in}(h;\min\{\alpha_1,\alpha_2\})$. Andaikan $(u * v) * w \in L_{\in}(h;\beta_1)$ dan $v * w \in L_{\in}(h;\beta_2)$ untuk semua $u,v,w \in X$ dan $(\beta_1,\beta_2) \in [0,1] \times [0,1]$. Maka, $(u * v) * w \in L_{\in}(h;\beta)$ dan $v * w \in L_{\in}(h;\beta)$ dimana $\beta = \max\{\beta_1,\beta_2\}$. Dengan demikian, $u * w \in L_{\in}(h;\beta) = L_{\in}(h;\max\{\beta_1,\beta_2\})$ karena $L_{\in}(h;\beta)$ merupakan ideal implikatif positif dari X. Oleh sebab itu, $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in,\in)$ implikatif positif dari X. ■

Akibat 3.5 Misalkan $h = (h_\alpha, h_\beta)$ himpunan fuzzy intuisionistik di *BCK*-aljabar X. Maka, $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in,\in)$ implikatif positif pada X jika dan hanya jika memenuhi dua kondisi persamaan (2.16) dan (3.2).

Teorema 3.6. Setiap ideal fuzzy intuisionistik-$(\in,\in)$ implikatif positif dari *BCK*-aljabar X merupakan ideal fuzzy intuisionistik pada X

Bukti.
Misalkan $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in,\in)$ implikatif positif pada *BCK*-aljabar X. Pada persamaan (3.2) substitusi $w = 0$ didapatkan

$$h_\alpha(u * 0) \geq \min\{h_\alpha((u * v) * 0), h_\alpha(v * 0)\}$$
$$h_\beta(u * 0) \leq \max\{h_\beta((u * v) * 0), h_\beta(v * 0)\}$$

Dengan menggunakan Proposisi 2.2, persamaan menjadi

$$h_\alpha(u) \geq \min\{h_\alpha(u * v), h_\alpha(v)\}$$
$$h_\beta(u) \leq \max\{h_\beta(u * v), h_\beta(v)\}$$

Karena berdasarkan definisi (2.16), maka terbukti bahwa setiap ideal fuzzy intuisionistik-$(\in,\in)$ implikatif positif dari *BCK*-aljabar X merupakan ideal fuzzy intuisionistik pada X. ■

Lemma 3.7. (Jun Y.B., Kim K.H., 2000)
Setiap ideal fuzzy intuisionistik $h = (h_\alpha, h_\beta)$ pada *BCK/BCI*-aljabar memenuhi pernyataan berikut.

$$(\forall u,v \in X)\left(u \leq v \Rightarrow \begin{cases} h_\alpha(u) \geq h_\alpha(v) \\ h_\beta(u) \leq h_\beta(v) \end{cases}\right) \tag{3.3}$$

Bukti: Misalkan $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik. Kemudian, misalkan $u,v \in X$ dengan $u \leq v$. Berdasarkan definisi (2.3), maka $u * v = 0$, sehingga menggunakan persamaan (2.17) dan diperoleh

$$h_\alpha(u) \geq \min\{h_\alpha(0), h_\alpha(v)\}$$
$$h_\beta(u) \leq \max\{h_\beta(0), h_\beta(v)\}$$

Berdasarkan persamaan (2.16) diperoleh

$$h_\alpha(u) \geq h_\alpha(v)$$
$$h_\beta(u) \leq h_\beta(v)$$

Oleh karena itu, ideal fuzzy intuisionistik $h = (h_\alpha, h_\beta)$ memenuhi persamaan (3.3) ■

Proposisi 3.8.
Setiap ideal fuzzy intuisionistik-$(\in,\in)$ implikatif positif $h = (h_\alpha, h_\beta)$ dari *BCK*-aljabar X memenuhi pernyataan-pernyataan berikut.

$$(\forall u,v,w \in X)$$
$$\begin{pmatrix} h_\alpha(u * v) \geq h_\alpha((u * v) * v) \\ h_\beta(u * v) \leq h_\beta((u * v) * v) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$
$$\begin{pmatrix} h_\alpha((u * w) * (v * w)) \geq h_\alpha((u * v) * w) \\ h_\beta((u * w) * (v * w)) \leq h_\beta((u * v) * w) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

dan

$$\begin{pmatrix} h_\alpha(u * v) \geq \min\left\{h_\alpha\left(((u * v) * v) * w\right), h_\alpha(w)\right\} \\ h_\beta(u * v) \leq \max\left\{h_\beta\left(((u * v) * v) * w\right), h_\beta(w)\right\} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Bukti.
Misalkan $h = (h_\alpha, h_\beta)$ ideal fuzzy intuisionistik-$(\in,\in)$ implikatif positif pada *BCK*-aljabar X. Maka $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik pada *BCK*-aljabar X berdasarkan Teorema 3.6. Karena $u * u = 0$ untuk sebarang $u \in X$, substitusi $w = v$ pada persamaan (3.2) dan menggunakan (2.16) menyebabkan (3.4).
Pada persamaan (3.2) substitusi $w = v$

$$h_\alpha(u*v) \geq \min\{h_\alpha((u*v)*v), h_\alpha(v*v)\}$$
$$h_\beta(u*v) \leq \max\{h_\beta((u*v)*v), h_\beta(v*v)\}$$

Karena $u*u=0$ untuk semua $u \in X$, diperoleh

$$h_\alpha(u*v) \geq \min\{h_\alpha((u*v)*v), h_\alpha(0)\}$$
$$h_\beta(u*v) \leq \max\{h_\beta((u*v)*v), h_\beta(0)\}$$

Jadi,

$$h_\alpha(u*v) \geq \min\{h_\alpha((u*v)*v)\}$$
$$h_\beta(u*v) \leq \max\{h_\beta((u*v)*v)\}$$

Berdasarkan persamaan (2.16)

$$h_\alpha(u*v) \geq h_\alpha((u*v)*v)$$
$$h_\beta(u*v) \leq h_\beta((u*v)*v)$$

Jadi, persamaan (3.4) terbukti.

Selanjutnya, karena

$$\big((u*(v*w))*w\big)*w = ((u*w)*(v*w))*w \leq (u*v)*w$$

untuk semua u,v,w anggota X, maka dengan menggunakan Proposisi 2.5 (iii) kita punya:

$$h_\alpha((u*w)*(v*w)) = h_\alpha\big((u*(v*w))*w\big)$$
$$h_\beta((u*w)*(v*w)) = h_\beta\big((u*(v*w))*w\big)$$

Maka berdasarkan persamaan (3.4)

$$h_\alpha\big((u*(v*w))*w\big) \geq h_\alpha\Big(\big((u*(v*w))*w\big)*w\Big)$$
$$h_\beta\big((u*(v*w))*w\big) \geq h_\beta\Big(\big((u*(v*w))*w\big)*w\Big)$$

Kemudian dari lemma 3.7 diperoleh

$$h_\alpha\big((u*(v*w))*w\big) \geq h_\alpha((u*v)*w)$$
$$h_\beta\big((u*(v*w))*w\big) \leq h_\beta((u*v)*w)$$

Maka dari itu, didapatkan

$$h_\alpha((u*w)*(v*w)) \geq h_\alpha((u*v)*w)$$
$$h_\beta((u*w)*(v*w)) \leq h_\beta((u*v)*w),$$

sehingga persamaan (3.5) adalah benar.

Selanjutnya, catat bahwa:

$$(u*v)*w = \big((u*w)*v\big)*(v*v)$$

Untuk seluruh $u,v \in X$. Selanjutnya dari persamaan (2.17), didapatkan:

$$h_\alpha(u*v) \geq \min\{h_\alpha((u*v)*w), h_\alpha(w)\}$$
$$h_\beta(u*v) \leq \max\{h_\beta((u*v)*w), h_\beta(w)\}$$

Dengan menggunakan Aksioma (III) dan Proposisi 2.5 (iii) diperoleh

$$h_\alpha((u*v)*w) = h_\alpha\Big(\big((u*w)*v\big)*(v*v)\Big)$$
$$h_\beta((u*v)*w) = h_\beta\Big(\big((u*w)*v\big)*(v*v)\Big)$$

Maka

$$h_\alpha(u*v) \geq \min\Big\{h_\alpha\Big(\big((u*w)*v\big)*(v*v)\Big), h_\alpha(w)\Big\}$$
$$h_\beta(u*v) \leq \max\Big\{h_\beta\Big(\big((u*w)*v\big)*(v*v)\Big), h_\beta(w)\Big\}$$

berdasarkan persamaan (3.5) didapatkan

$$h_\alpha\Big(\big((u*w)*v\big)*(v*v)\Big) \geq h_\alpha\Big(\big((u*w)*v\big)*v\Big)$$
$$h_\beta\Big(\big((u*w)*v\big)*(v*v)\Big) \leq h_\beta\Big(\big((u*w)*v\big)*v\Big)$$

sehingga

$$h_\alpha(u*v) \geq \min\Big\{h_\alpha\Big(\big((u*w)*v\big)*v\Big), h_\alpha(w)\Big\}$$
$$h_\beta(u*v) \leq \max\Big\{h_\beta\Big(\big((u*w)*v\big)*v\Big), h_\beta(w)\Big\}$$

Dengan Proposisi 2.5 (iii)

$$h_\alpha(u*v) \geq \min\Big\{h_\alpha\Big(\big((u*v)*v\big)*w\Big), h_\alpha(w)\Big\}$$
$$h_\beta(u*v) \leq \max\Big\{h_\beta\Big(\big((u*v)*v\big)*w\Big), h_\beta(w)\Big\}$$

untuk semua $u,v,w \in X$. Oleh karena itu, persamaan (3.6) benar. ■

Kebalikan dari Teorema 3.6 tidak benar seperti yang tertera pada contoh berikut ini.

Contoh 3.9.

Pertimbangkan BCK-aljabar $X = \{0,1,2,3,4\}$ yang ditunjukkan oleh tabel Cayley di Tabel 4.

Tabel 4. Tabel Cayley untuk operasi biner " $*$ "

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1
2	2	2	0	2	0
3	3	1	3	0	3
4	4	4	4	4	0

$(X;*,0)$ merupakan BCK-aljabar. Yang termasuk dalam ideal implikatif positif X adalah $\{0,1,3\}$ dan $\{0,1,2,3\}$, sedangkan $\{0\}$, $\{0,2\}$, dan $\{0,2,4\}$ merupakan ideal X, tetapi tidak implikatif positif.

Contoh tersebut menunjukkan bahwa $\{0,2\}$ merupakan ideal, tetapi bukan ideal implikatif positif karena $(3*1)*1 = 1*1 = 0 \in \{0,2\}$, $1*1 = 0 \in \{0,2\}$, tetapi $3*1 = 1 \notin \{0,2\}$. Karena $\{0,2\}$ bukan ideal implikatif positif, maka tidak terbukti bahwa ideal fuzzy intuisionistik merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in,\in)$ implikatif positif. ■

Misalkan $h = (h_\alpha, h_\beta)$ himpunan fuzzy intuisionistik pada X yang ditentukan Tabel 5.

Tabel 5. Representasi tabular dari $h = (h_\alpha, h_\beta)$

X	$h_\alpha(u)$	$h_\beta(u)$
0	0.7	0.3
1	0.4	0.5
2	0.5	0.4
3	0.4	0.5
4	0.1	0.6

Dapat diverifikasi bahwa $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik dari X, dan subhimpunan-∈ intuisionistik diberikan oleh:

$$U_\in(h;\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \text{jika } \alpha \in (0.7, 1], \\ \{0\} & \text{jika } \alpha \in (0.5, 0.7], \\ \{0, 2\} & \text{jika } \alpha \in (0.4, 0.5], \\ \{0, 1, 2, 3\} & \text{jika } \alpha \in (0.1, 0.4], \\ X & \text{jika } \alpha \in (0, 0.1], \end{cases}$$

dan

$$L_\in(h;\beta) = \begin{cases} \emptyset & \text{jika } \beta \in (0.6, 1], \\ \{0, 1, 2, 3\} & \text{jika } \beta \in (0.5, 0.6], \\ \{0, 2\} & \text{jika } \beta \in (0.4, 0.5], \\ \{0\} & \text{jika } \beta \in (0.3, 0.4], \\ X & \text{jika } \beta \in (0, 0.3], \end{cases}$$

Jika $\alpha \in (0.4, 0.5]$ dan $\beta \in (0.4, 0.5]$, maka $U_\in(h;\alpha)$ dan $L_\in(h;\beta)$ bukan ideal implikatif positif dari X. Oleh karena itu, $h = (h_\alpha, h_\beta)$ bukan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif dari X oleh Teorema 3.3 dan 3.4. ■

Teorema berikut menjelaskan kondisi untuk ideal fuzzy intuisionistik yang merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif.

Teorema 3.10. Untuk himpunan fuzzy intuisionistik $h = (h_\alpha, h_\beta)$ pada BCK-aljabar X, semua pernyataan berikut ekuivalen:

(i) $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif dari X yang memenuhi dua kondisi persamaan (2.16) dan (2.17)

(ii) $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik dari X yang memenuhi kondisi persamaan (3.4).

(iii) $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik dari X yang memenuhi kondisi persamaan (3.5).

(iv) $h = (h_\alpha, h_\beta)$ memenuhi dua kondisi persamaan (2.16) dan (3.6).

Bukti.

((i) ⇒ (ii)) Asumsikan bahwa $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif dari X. Maka, $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik dari X oleh Teorema 3.6. Dengan mensubstitusi $w = v$ di (3.2)

$$h_\alpha(u * v) \geq \min\{h_\alpha((u * v) * v), h_\alpha(v * v)\}$$
$$h_\beta(u * v) \leq \max\{h_\beta((u * v) * v), h_\beta(v * v)\}$$

selanjutnya menggunakan (2.16) diperoleh

$$h_\alpha(u * v) \geq h_\alpha((u * v) * v)$$
$$h_\beta(u * v) \leq h_\beta((u * v) * v)$$

Maka, didapatkan kondisi (3.4).

((ii) ⇒ (iii)) Asumsikan bahwa $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik dari X memenuhi kondisi (3.4). Karena untuk semua $u, v, w \in X$,

$$\big((u * (v * w)) * w\big) * w = ((u * v) * (v * w)) * w \leq (u * v) * w$$

Selanjutnya dari Proposisi 2.5 (iii) diperoleh bahwa:

$$h_\alpha((u * w) * (v * w)) = h_\alpha\big((u * (v * w)) * w\big)$$
$$h_\beta((u * w) * (v * w)) = h_\beta\big((u * (v * w)) * w\big),$$

sehingga berdasarkan persamaan (3.4)

$$h_\alpha((u * w) * (v * w)) \geq h_\alpha\Big(\big((u * (v * w)) * w\big) * w\Big)$$
$$h_\beta((u * w) * (v * w)) \leq h_\beta\Big(\big((u * (v * w)) * w\big) * w\Big)$$

Kemudian, dari lemma 3.7 diperoleh

$$h_\alpha\big((u * (v * w)) * w\big) \geq h_\alpha((u * v) * w)$$
$$h_\beta\big((u * (v * w)) * w\big) \leq h_\beta((u * v) * w)$$

Dengan demikian,

$$h_\alpha((u * w) * (v * w)) \geq h_\alpha((u * v) * w)$$
$$h_\beta((u * w) * (v * w)) \leq h_\beta((u * v) * w)$$

sehingga (3.5) adalah benar.

((iii) ⇒ (iv)) Asumsikan bahwa $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik pada X memenuhi kondisi (3.5). Sudah jelas bahwa $h = (h_\alpha, h_\beta)$ memenuhi kondisi (2.16). Menggunakan (2.17), Aksioma (III), Proposisi 2.5 (iii), dan (3.5), kita punya:

$$h_\alpha(u * v) \geq \min\{h_\alpha((u * v) * w), h_\alpha(w)\}$$
$$h_\beta(u * v) \leq \max\{h_\beta((u * v) * w), h_\beta(w)\}$$

Kemudian menggunakan Aksioma (III) dan Proposisi 2.5 (iii) diperoleh

$$\min\{h_\alpha((u * v) * w), h_\alpha(w)\} = \min\Big\{h_\alpha\Big(\big((u * w) * v\big) * (v * v)\Big), h_\alpha(w)\Big\}$$

$$\max\{h_\beta((u * v) * w), h_\beta(w)\} = \max\Big\{h_\beta\Big(\big((u * w) * v\big) * (v * v)\Big), h_\beta(w)\Big\}$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (3.5) didapatkan

$$h_\alpha(u * v) \geq \min\Big\{h_\alpha\Big(\big((u * w) * v\big) * v\Big), h_\alpha(w)\Big\}$$
$$h_\beta(u * v) \leq \max\Big\{h_\beta\Big(\big((u * w) * v\big) * v\Big), h_\beta(w)\Big\}$$

Berdasarkan Proposisi 2.5 (iii),

$$\min\left\{h_\alpha\left(((u*w)*v)*v\right), h_\alpha(w)\right\} = \min\left\{h_\alpha\left(((u*v)*v)*w\right), h_\alpha(w)\right\}$$

$$\max\left\{h_\beta\left(((u*w)*v)*v\right), h_\beta(w)\right\} = \max\left\{h_\beta\left(((u*v)*v)*w\right), h_\beta(w)\right\}$$

Sehingga, untuk semua $u, v, w \in X$, diperoleh

$$h_\alpha(u*v) \geq \min\left\{h_\alpha\left(((u*v)*v)*w\right), h_\alpha(w)\right\}$$

$$h_\beta(u*v) \leq \max\left\{h_\beta\left(((u*v)*v)*w\right), h_\beta(w)\right\}$$

Oleh karena itu, persamaan (3.6) benar.

$\left((\text{iv}) \Rightarrow (\text{i})\right)$ Asumsikan bahwa $h = (h_\alpha, h_\beta)$ memenuhi dua kondisi (2.16) dan (3.6), diperoleh:
Berdasarkan Proposisi 2.2,

$$h_\alpha(u) = h_\alpha(u*0)$$
$$h_\beta(u) = h_\beta(u*0),$$

Sehingga berdasarkan persamaan (3.6)

$$h_\alpha(u*0) \geq \min\left\{h_\alpha\left(((u*0)*0)*v\right), h_\alpha(v)\right\}$$

$$h_\beta(u*0) \leq \max\left\{h_\beta\left(((u*0)*0)*v\right), h_\beta(v)\right\}$$

karena

$$\min\left\{h_\alpha\left(((u*0)*0)*v\right), h_\alpha(v)\right\} = \min\{h_\alpha(u*v), h_\alpha(v)\}$$

$$\max\left\{h_\beta\left(((u*0)*0)*v\right), h_\beta(v)\right\} = \max\{h_\beta(u*v), h_\beta(v)\}$$

untuk semua $u, v \in X$. Jadi $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzy intuisionistik pada X.
Karena, untuk seluruh $u, v, w \in X$

$$((u*w)*w)*(v*w) \leq (u*w)*v = (u*v)*w$$

Selanjutnya dari persamaan (3.6) dan persamaan (3.3) dari Lemma 3.7 bahwa:

$$h_\alpha(u*w) \geq \min\left\{h_\alpha\left(((u*w)*w)*(v*w)\right), h_\alpha(v*w)\right\}$$

$$h_\beta(u*w) \leq \max\left\{h_\beta\left(((u*w)*w)*(v*w)\right), h_\beta(v*w)\right\},$$

sehingga,

$$h_\alpha(u*w) \geq \min\{h_\alpha((u*v)*w), h_\alpha(v*w)\}$$
$$h_\beta(u*w) \leq \max\{h_\beta((u*v)*w), h_\beta(v*w)\}$$

Substitusi $w = 0$, diperoleh

$$h_\alpha(u*0) \geq \min\{h_\alpha((u*v)*0), h_\alpha(v*0)\}$$
$$h_\beta(u*0) \leq \max\{h_\beta((u*v)*0), h_\beta(v*0)\}$$

Maka, untuk seluruh $u, v, w \in X$ didapatkan

$$h_\alpha(u) \geq \min\{h_\alpha(u*v), h_\alpha(v)\}$$
$$h_\beta(u) \leq \max\{h_\beta(u*v), h_\beta(v)\}$$

Oleh karena itu, $h = (h_\alpha, h_\beta)$ merupakan ideal fuzzyintuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif pada X. ■

PENUTUP

KESIMPULAN

Dalam artikel ini, diperkenalkan ideal fuzzy intuisionistik dalam BCK-aljabar dan menetapkan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif. Suatu himpunan fuzzy intuisionistik dikatakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif jika memenuhi beberapa syarat. Suatu himpunan fuzzy intuisionistik merupakan ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif jika dan hanya jika subhimpunan-$\in$ intuisionistik tak-kosong adalah ideal implikatif positif di BCK-aljabar X. Setiap ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif adalah ideal fuzzy intuisionistik, tetapi tidak sebaliknya. Oleh karena itu, terdapat beberapa syarat agar ideal fuzzy intuisionistik memenuhi ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif. Pertama, ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif harus terbukti memenuhi $h_\alpha(u*v) \geq h_\alpha((u*v)*v)$ dan $h_\beta(u*v) \leq h_\beta((u*v)*v)$, untuk semua $u, v \in X$, sebagai persyaratan ideal fuzzy intuisionistik. Kedua, dilanjut dengan ideal fuzzy intuisionistik yang telah memenuhi $h_\alpha(u*v) \geq h_\alpha((u*v)*v)$ dan $h_\beta(u*v) \leq h_\beta((u*v)*v)$, untuk semua $u, v \in X$, harus terbukti memenuhi $h_\alpha((u*w)*(v*w)) \geq h_\alpha((u*v)*w)$ dan $h_\beta((u*w)*(v*w)) \leq h_\beta((u*v)*w)$, untuk semua $u, v \in X$. Ketiga, ideal fuzzy intuisionistik yang memenuhi $h_\alpha((u*w)*(v*w)) \geq h_\alpha((u*v)*w)$ dan $h_\beta((u*w)*(v*w)) \leq h_\beta((u*v)*w)$, untuk semua $u, v \in X$, harus terbukti memenuhi himpunan fuzzy intuisionistik yang memenuhi $h_\alpha(0) \geq h_\alpha(u)$ dan $h_\beta(0) \leq h_\beta(u)$, serta $h_\alpha(u*v) \geq \min\left\{h_\alpha\left(((u*v)*v)*w\right), h_\alpha(w)\right\}$ dan $h_\beta(u*v) \leq \max\left\{h_\beta\left(((u*v)*v)*w\right), h_\beta(w)\right\}$, untuk semua $u, v, w \in X$. Terakhir, himpunan fuzzy intuisionistik yang telah memenuhi persyaratan $h_\alpha(0) \geq h_\alpha(u)$ dan $h_\beta(0) \leq h_\beta(u)$, serta $h_\alpha(u*v) \geq \min\left\{h_\alpha\left(((u*v)*v)*w\right), h_\alpha(w)\right\}$ dan $h_\beta(u*v) \leq \max\left\{h_\beta\left(((u*v)*v)*w\right), h_\beta(w)\right\}$, untuk semua $u, v, w \in X$, harus memenuhi ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif. Dengan demikian, didapatkan kondisi ideal fuzzy intuisionistik memenuhi ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif.

SARAN

Dalam artikel ini telah dibahas ideal fuzzy intuisionistik-$(\in, \in)$ implikatif positif pada BCK-aljabar X. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya, ide-ide berikut dapat menjadi pertimbangan, yaitu menyelidiki ideal fuzzy intuisionistik pada struktur aljabar lainnya serta menjelaskan syarat-syarat yang diperlukan.

DAFTAR PUSTAKA

Atanassov K.T., (1986). Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets Syst. 1986, 20, 87–96.

Iseki K., (1965). Algebraic formulations of propositional calculi. Proc. Japan Acad., 41, 803-807.

Iséki K., (1966). An algebra related with a propositional calculus. Proc. Japan Acad., 42, 26–29.

Iseki K., dan Tanaka S., (1976). Ideal Theory of BCK-Algebra. Math. Japon. 21, 351-366.

Jun Y. B., (1995). A note on fuzzy ideals in BCK-algebras. Math. Japon. 42, 333-335.

Jun Y.B., Roh E. H., Öztürk M. A., (2018). Positive Implicative Ideals of *BCK*-Algebras Based on Intuitionistic Falling Shadows. *Mathematics*, 6(9).

Jun Y.B.; Kim K.H. (2000) Intuitionistic fuzzy ideals of BCK-algebras. Int. J. Math. Math. Sci., 24, 839–849.

Meng J., dan Jun Y. B., (1994). BCK-Algebras. Seoul:Kyungmoon Sa Co.

Muhiuddin G., G. Muhiuddin's Notes: Ideals in BCK-algebra.