Jacques Herbrand

Jacques Dubucs et Paul Égré[1]

(le texte qui suit n'est pas la version autorisée et définitive de cet article, laquelle sera publiée prochainement par les Presses Universitaires de France dans un volume dirigé par Jean Gayon, *Cent ans d'épistémologie française*).

Jacques Herbrand fait partie des génies dont la mort prématurée et absurde laisse rêver après un second destin. Né le 12 février 1908 à Paris, Jacques Herbrand est mort à l'âge de 23 ans, le 27 Juillet 1931, au cours d'une excursion en montagne dans le massif du Pelvoux. La richesse d'une production interrompue de manière si précoce conduit presque inévitablement à prolonger la courbe déjà parcourue, et à imaginer, à l'examen de ce que Herbrand avait effectivement réalisé, la place qui aurait pu être la sienne sans cette soudaine disparition.

Il n'est pas déraisonnable de penser que si Herbrand avait survécu ne serait-ce que jusqu'en 1957, année de la mort du mathématicien John von Neumann, il eût laissé une œuvre aussi abondante, inventive et diversifiée. Tous les témoignages relatifs à Herbrand soulignent non seulement la précocité de son génie, mais plus encore l'ampleur de ses intérêts, et notamment son attention aux développements récents des sciences physiques. La postérité tardive de son œuvre en informatique, d'autre part, ne peut que

[1] Nous tenons à remercier tout particulièrement la Bibliothèque Firestone et l'Institute for Advanced Study de Princeton, qui nous ont autorisé la consultation et les citations de la correspondance Herbrand-Gödel, ainsi que l'Université de Princeton pour son accueil durant l'année 1998-1999. Nous sommes également

renforcer la vraisemblance de ce rapprochement avec von Neumann, qu'il rencontra d'ailleurs lors de son séjour en Allemagne en 1930, et dont il connaissait fort bien le mémoire de 1927 sur la non-contradiction de l'arithmétique.

Du fait de ses liens privilégiés avec les membres fondateurs du groupe Bourbaki, on peut aussi imaginer que Herbrand eût apporté à l'entreprise des contributions de premier plan, notamment pour la rédaction du tome consacré à la théorie des ensembles et aux fondements des mathématiques[2].

Enfin, Herbrand, mort peu après son retour d'un séjour de plusieurs mois passés en Allemagne, au cours duquel il avait établi des contacts étroits avec certaines des grandes figures de la logique mathématique moderne, aurait très certainement, autant qu'un Gödel ou, aux États-Unis, un Church, contribué au développement de la théorie de la calculabilité, cette nouvelle branche de la logique qui se constituait justement au début des années 1930 : le très bref échange épistolaire de Herbrand avec Gödel [3], interrompu au moment où tant de choses se jouent en logique, représente un moment tout à fait essentiel dans la mise au point d'une définition des fonctions calculables, et laisse imaginer la place qu'aurait occupée Herbrand dans cette phase cruciale. On peut aussi songer à l'inflexion qu'il eût apportée dans les rapports de la philosophie à la logique, et dont la réalité est déjà attestée par l'écho de ses travaux dans les œuvres, elles-mêmes tragiquement interrompues, de Cavaillès et de Lautman.

---

reconnaissants à Wilfried Sieg de sa relecture attentive et de ses critiques.

[2] Voir Chevalley et Lautman, 1931.

[3] La correspondance, encore inédite, est conservée parmi les manuscrits de Gödel légués à l'Institute for Advanced Study de Princeton. Nous remercions vivement l'Institute for Advanced Study de nous en avoir autorisé la consultation, ainsi que la Division des Manuscrits de la Firestone Library à l'Université de Princeton pour son accueil.

1. Une trajectoire intellectuelle : des *Principia Mathematica* à la métamathématique de Hilbert et aux recherches sur la calculabilité.

1.1. La lecture des *Principia*. Après ses études secondaires et son entrée à l'École Normale à l'âge de 17 ans, Herbrand s'est aussitôt consacré aux recherches mathématiques qui l'intéressaient en propre. Il prend vraisemblablement connaissance de la logique mathématique dans le manuel de Stanislas Zaremba, qui le conduit très vite à l'examen des *Principia mathematica* de Whitehead et Russell.

Comme le montrent les premières lignes du chapitre introductif de sa thèse, l'impact des travaux de Russell et Whitehead réside avant tout, pour Herbrand, dans leur innovation du point de vue de la formalisation : Herbrand souligne comme l'un des “ grands mérites ” de leur “ ouvrage capital ”

> d'avoir montré, en poursuivant la voie ouverte par les mathématiciens de l'école de Peano, que toute proposition mathématique pouvait se traduire par les combinaisons d'un petit nombre de signes et que les lois du raisonnement se ramenaient, en définitive, à quelques règles simples de combinaison de ces signes (1930, 35).

Les mathématiques peuvent s'écrire, poursuit-il, au moyen d'un vocabulaire logique n'exigeant, outre les signes de ponctuation nécessaires pour défaire l'ambiguïté des *étendues* des opérateurs logiques, que trois signes primitifs : la disjonction et la négation, suffisants pour l'ensemble du calcul propositionnel, et le quantificateur existentiel, dont l'adjonction suffit à l'expression du calcul dit des prédicats.

Est-on cependant justifié à penser que *toute* proposition mathématique possède une contrepartie dans ce système de signes, et que chaque démonstration peut y être formalisée ? À cette question de la suffisance des règles de formation et d'inférence des *Principia*, Herbrand estime qu'il n'existe qu'une réponse “ expérimentale ”, dont la validité ne saurait être “ confirmée que par une dialectique philosophique ” (*ibid.*, 36). “ On peut, en un certain sens ”, écrit-il dans le premier alinéa de sa thèse, “ considérer ce système de signes comme équivalent à l'ensemble des mathématiques” (*ibid.*, 35). Mais en quel sens, précisément ? Admettons que chaque proposition mathématique puisse être exprimée par une formule des *Principia*, lesquels constitueraient donc, comme le dit Herbrand, une sorte de “sténographie” des mathématiques (1931a, 210). Est-il exact, pour autant, que chaque formule qui formalise dans ce système une proposition mathématique *vraie* y est dérivable à l'aide des axiomes et des règles d'inférence ? Qu'en est-il de l'*adéquation* du système de signes, non seulement au regard de sa capacité *expressive*, mais de sa capacité *démonstrative* ?

1.2. La rencontre avec le programme de Hilbert. C'est à cet endroit que l'influence de la lecture de Russell et Whitehead est relayée par celle du mathématicien David Hilbert, dont Herbrand découvre dès 1925 le texte décisif, *Sur l'Infini*.

On ne saurait surestimer l'influence de Hilbert sur Herbrand : elle est une révélation. Herbrand sera un hilbertien, radical et sans compromis, plus royaliste, disait van Heijenoort, que le roi lui-même (1985a, 118). Dans l'unique texte que Herbrand ait expressément destiné au public philosophique (1930a, 155), Herbrand explique ce qu'un philosophe devrait, à ses yeux, retirer de l'enseignement du maître de Göttingen.

D'une part, Hilbert a fondé une science nouvelle, la “métamathématique” ou “théorie de la démonstration” (*Beweistheorie*), expressément destinée à “résoudre les questions que l'on pouvait se poser en s'attachant à l'étude des ensembles de signes qui sont la traduction des propositions vraies dans une théorie déterminée” (*ibid.*, 160) : “toutes les questions de principe concernant les mathématiques doivent lui être soumises”, car “elle a pour objet d'étude non pas les objets dont s'occupent habituellement les mathématiciens, mais les phrases mêmes qu'ils peuvent prononcer sur ces objets” (*ibid.*, 157).

D'autre part, et c'est ici que cette nouvelle science devient, sous la plume de Herbrand, “nouvelle logique”, et même “nouvelle doctrine” (*ibid.*, 155), il y a entre mathématiques et métamathématique une séparation beaucoup plus radicale que la distinction familière entre langage et métalangage. Différant par leur objet, les deux disciplines diffèrent aussi par leurs méthodes. Hilbert voulait que la métamathématique

> satisfît aux exigences de la rigueur la plus absolue ; il n'a voulu tomber sous aucune des objections qu'avaient soulevées les détracteurs les plus sévères des méthodes mathématiques habituelles ; il s'est imposé de n'employer que des modes de raisonnement si immédiats qu'ils entraînent avec eux la conviction dans tous les cas où on aura à les employer (*ibid*., 160).

Cette restriction à des méthodes extrêmement élémentaires s'expliquait d'abord par des raisons conjoncturelles dont Herbrand avait, bien entendu, tout à fait conscience. Venait d'éclater ce que Hermann Weyl devait nommer une “ nouvelle crise des fondements ”, au cours de laquelle la légitimité même des mathématiques classiques était mise en doute. Anticipé, en quelque façon, par certains analystes français dans les années 1900 [4], un mouvement de contestation radicale des mathématiques classiques, et notamment de la théorie cantorienne des ensembles, se fait jour dans la communauté savante. Sous l'impulsion du Hollandais Brouwer, la “ révolution ” *intuitionniste* fait un nombre croissant d'adeptes, y compris chez les plus proches disciples de Hilbert. On y propose de restreindre les mathématiques à leur partie “ constructive ”, c'est-à-dire, par exemple, de ne plus considérer comme correct un théorème d'existence, tant que n'a pas été donné un moyen de construire effectivement l'objet dont l'existence est affirmée. Au moment où Herbrand prend connaissance de l'œuvre de Hilbert, l'heure est donc, à Göttingen, à l'*endiguement* de l'intuitionnisme : Brouwer, dit Hilbert, ne nous chassera pas du paradis que Cantor a créé pour nous. La stratégie de Hilbert consiste à réduire l'intuitionnisme à l'absurde en montrant, sur la base de principes encore plus restreints que ceux auxquels Brouwer voudrait se confiner, que les mathématiques classiques ne peuvent donner lieu à contradiction. La “ métamathématique ” emploiera donc des principes absolument élémentaires, pour prouver l'innocuité des

---

[4] Voir Baire, Borel, Hadamard et Lebesgue, “Cinq lettres sur la théorie des ensembles”, in Rivenc & de Rouilhan (dir.), 1992, 287-307.

méthodes non élémentaires *en mathématiques*. On utilisera, en somme, les *méthodes* intuitionnistes pour montrer que la *doctrine* intuitionniste est frivole.

Tel est l’état d’esprit dans lequel Herbrand part en Allemagne, après avoir été reçu premier à l’agrégation de mathématiques et soutenu sa thèse sur la théorie de la démonstration. La Bourse Rockefeller dont il bénéficie lui permet de se rendre d’abord à Berlin auprès de von Neumann, puis à Hambourg, avant de rejoindre Hilbert lui-même à Göttingen.

1.3. L’année allemande. La période pendant laquelle Herbrand séjourne en Allemagne représente, pour le programme de recherches dans lequel il s’était engagé, une phase cruciale et, à vrai dire, dramatique. L’objectif principal de ce programme était, on l’a dit, de trouver une preuve “ finitiste ” (“ intuitionnistique ”, comme dit Herbrand [5]) de la cohérence de l’arithmétique. Certains résultats partiels avaient été atteints en ce domaine, laissant croire que le but était en vue. Ackermann en 1923, mais surtout von Neumann en 1927, avaient prouvé la cohérence de fragments étendus de l’arithmétique. Herbrand lui-même avait magnifiquement contribué à l’entreprise, en trouvant une preuve de cohérence “ beaucoup plus ” complète encore (1931b, 217) que celle de von Neumann, bien que comportant, de son propre aveu, “ encore quelques petites restrictions ” (1931a, 213).

C'est justement von Neumann qui lui signale le travail d’un jeune logicien de deux ans son aîné, Kurt Gödel, qui vient d’exposer, quelques mois auparavant, des résultats montrant que le programme de Hilbert était irréalisable : on ne saurait prouver la cohérence d’aucun système arithmétique assez fort sans recourir à

[5] En fait, les méthodes finitistes, que Herbrand ne discerne pas des méthodes intuitionnistes (cf. 1931c, 225), sont encore plus sévèrement délimitées que ces dernières. Mais la distinction ne sera rigoureusement faite que bien ultérieurement, par Gödel (1958, 280 *sqq*) : là où le finitisme hilbertien n’admet que des raisonnements de nature purement combinatoire, mettant en jeu des configurations finies de signes, l’intuitionnisme admet des objets “ abstraits ”, comme des fonctionnelles d’ordre supérieur.

des méthodes non formalisables dans le système lui-même. Les méthodes “ intuitionnistes ”, qui avaient tant la faveur de Herbrand, sont donc trop faibles pour ce qu’on attendait d’elles.

C’est à réfléchir aux implications ultimes de ce coup de théâtre que sont consacrés les six derniers mois de la vie de Herbrand. Envoyant à Gödel les épreuves de sa propre démonstration de cohérence partielle, dont il venait, donc, d’apprendre qu’elle ne pourrait jamais être prolongée en une preuve de cohérence pour la totalité de l’arithmétique, il lui écrit, le 7 Avril 1931, une longue lettre ainsi conclue :

> Pardonnez-moi pour ces longues considérations, qui ne sont peut-être pas parfaitement claires, compte tenu de ma mauvaise maîtrise de la langue allemande. Mais il y a encore, dans ces questions, bien des faits mystérieux (*geheimnisvolle Tatsachen*), et cette question de la formalisation des preuves intuitionnistes me paraît très importante pour la signification philosophique de la métamathématique.

La réponse de Gödel, en date du 25 Juillet 1931, et que Herbrand, par conséquent, n'aura jamais pu lire, commence par une déclaration qui illustre bien l’estime dans laquelle il tenait son cadet :

> Je connaissais déjà vos “ thèses ”, et les méthodes que vous y développez pour les preuves de cohérence me paraissent très importantes, et les seules, jusqu’ici, à avoir conduit à des résultats positifs pour des systèmes significatifs.

Le reste de cette réponse, telle du moins qu’on la connaît aujourd’hui [6], et dans laquelle Gödel examine une partie des arguments métamathématiques que Herbrand développera à nouveau dans un article achevé à peine deux semaines avant sa mort (1931c), ne fait pas encore toute sa part à une suggestion contenue dans la lettre de Herbrand, et qui a trait à la caractérisation de la notion de calculabilité. Ce n’est que quelques années plus tard que Gödel, se remémorant le contenu de cette correspondance, proposera

[6] L’exemplaire de la lettre de Gödel conservé parmi ses archives à la Bibliothèque Firestone de Princeton et qui constitue le brouillon de la réponse que fit Gödel à Herbrand est malheureusement lacunaire. Nos efforts pour retrouver la version définitive de cette lettre dans les papiers de Herbrand sont pour l’instant restés vains.

une légère modification de l'idée de Herbrand, amendement qui conduira à la définition moderne du concept de fonction calculable : les fonctions récursives générales ou « récursives au sens de Herbrand-Gödel » sont bel et bien identiques à celles reconnues indépendamment par Church, aux Etats-Unis, et Turing, au Royaume Uni, comme *absolument* caractéristiques de la notion de fonction calculable.

Dans le mince dossier qui contient, à la Firestone Library de Princeton, la correspondance de Herbrand et de Gödel, la troisième pièce est un mot très bref du père de Herbrand :

> Monsieur le Professeur,
> Le 26 Juillet, vous avez écrit une longue lettre à mon fils, Jacques Herbrand.
> Le 27 Juillet, mon fils est tombé au cours d'une excursion dans les Alpes et s'est tué. Ainsi s'explique son silence.
> Mon fils aurait été heureux, sans aucun doute, d'entretenir une correspondance avec vous sur les sujets qu'il aimait.

2. Métamathématique et philosophie des mathématiques : la situation de Herbrand.

2.1. Peut-on définir l'évidence effective ? La métamathématique – entendue, donc, au sens que Herbrand donne à ce mot, et non dans l'acception, beaucoup plus générale et libérale, dans laquelle Tarski prendra ultérieurement le terme – est une discipline qui a exclusivement affaire aux signes mathématiques, et qui s'en occupe à l'aide de méthodes élémentaires, de type combinatoire. Les signes mathématiques, ou leurs groupements, possèdent éventuellement des propriétés que l'on peut tester de façon élémentaire. Avoir même nombre de parenthèses ouvrantes et fermantes, être une formule bien formée, sont deux propriétés de ce genre. La " bonne formation ", pour prendre ce dernier exemple, est une propriété dont la satisfaction peut être contrôlée. Contrôlable, elle l'est même *fortement* : si la formule examinée est effectivement bien formée, ce fait peut être vérifié, et si elle ne l'est pas, cet autre fait peut l'être également. " Etre une démonstration " est une propriété du même type. Il est toujours possible de suivre une démonstration étape par étape, et de vérifier que chaque étape résulte bien des étapes précédentes en vertu des règles d'inférence du système. Pour de telles propriétés, il y a donc un “ algorithme de décision ” : une procédure routinière peut être mise en oeuvre, qui ne demande ni “ intuition ”, ni “ sagacité ”, laquelle aboutit, en un temps fini, à un verdict fiable délivré dans tous les cas : positif là où il convient, négatif là où il le faut. Idéalement, la métamathématique se restreint à cela : aux propriétés *décidables* satisfaites par les groupements de signes mathématiques, au sujet desquelles aucune contestation ne peut être envisagée.

Montrer qu’une propriété est décidable est, d’une certaine manière, comme montrer qu’un point est constructible à la règle et au compas : une suite de constructions nous assure de la constructibilité, et nous la fait *constater*. Déterminer un *critère* de constructibilité, en revanche, n’a de sens que pour qui s’emploierait à montrer qu’un point *n’*est *pas* constructible. Là, et là seulement, serait requise une quantification universelle sur la classe de toutes les suites possibles de gestes de construction. Un acte réussi montre qu’un acte réussi était possible. Un acte infructueux ne montre pas qu’un acte réussi était impossible. Une définition stricte des actes n’a de sens que s’il est question de montrer qu’un acte d'un type déterminé ne peut réussir. De même, une définition formelle des méthodes “ évidentes ”, et des propriétés “ décidables ”, n’a lieu d’être que s’il s’agit de montrer qu’une propriété est *in-décidable*. Un tel propos n’est jamais celui de Herbrand. Jamais, sauf, précisément, dans cette unique lettre à Gödel : il y est question de la possibilité de donner, pour la notion de procédé “ intuitionniste ” ou effectif, une définition rigoureuse et stricte. Personne, en avril 1931, ne *sait* faire cela, et c’est Gödel qui comprendra, méditant sur cette lettre, comment on peut s’en sortir [7].

Herbrand formule en effet une objection considérable : supposons, écrit-il en substance, que nous ayons réussi à donner une définition *effective* de l’effectivité. La question de savoir si une fonction est ou non un élément de l’ensemble E de toutes les fonctions calculables serait donc décidable, et nous pourrions

---

[7] Sur ce point, cf. van Heijenoort 1985a, 113-117.

effectivement énumérer les membres de cet ensemble : f_0, f_1, f_2, … Or c'est chose impossible, puisque la fonction f, définie par $f(0) = f_0(0) + 1$, $f(1) = f_1(1) + 1$, $f(2) = f_2(2) + 1$, … possède visiblement les deux propriétés suivantes. D'une part, elle est effectivement calculable (l'algorithme de calcul de sa valeur pour n consiste à identifier la n-ième fonction de la liste, à calculer la valeur de cette fonction pour l'argument n, et à ajouter 1 au résultat). D'autre part, elle n'est pas dans l'ensemble E, puisqu'elle diffère de la p-ième fonction de cet ensemble par sa valeur pour p) :

> En d'autres termes, il est impossible de décrire *précisément* (*genau*) [souligné par nous, J.D. et P.E.] tous les procédés permettant de construire intuitionnistiquement des fonctions : si l'on décrit de tels procédés, alors il y a toujours des fonctions [calculables] qui ne seront pas construites avec ces procédés : on ne peut pas définir les méthodes intuitionnistiques à l'aide d'un nombre fini de mots. Ce fait me paraît très remarquable.

Tout est dans ce mot, " précisément ", et dans l'ambiguïté dont il est porteur :

(i) Entendu dans le sens " métamathématique " pour lequel Herbrand use volontiers de l'étrange adverbe " intuitionnistiquement ", le mot confère bien à l'objection dans lequel il figure la valeur d'une interdiction absolument insurmontable. Herbrand a mille fois raison : il ne saurait exister aucune énumération *effective* de toutes les fonctions effectivement calculables, et l'argument, ainsi compris, est à cet égard *parfaitement* concluant. Il peut bien exister une liste complète de ces fonctions, mais à la condition qu'il n'y ait pas de procédé effectif permettant de reconnaître si une fonction donnée appartient ou non à la liste. Pour le dire en bref, dans le langage qu'utilisera Turing quelques années plus tard : il n'y a pas de fonction " universelle " pour les fonctions récursives totales.

(ii) En revanche, si l'on entend le mot " précisément " en son sens familier, moins strict, l'objection tombe : rien n'interdit que l'on puisse rigoureusement *définir* l'ensemble des fonctions calculables, à condition de ne pas attendre de cette définition un critère *effectif* qui nous permettrait de déterminer si une fonction donnée est ou non un élément de cet ensemble. C'est, du reste, ce que Gödel et d’autres sont sur le point de réussir en 1931 : les règles qui définiront ces fonctions (“ récursives générales ”) seront justement d’une nature telle que la question de savoir si une fonction est *effectivement* calculable ne sera pas *effectivement* décidable.

Le point crucial n’est donc pas, comme le croit alors Herbrand, de savoir si une définition de la notion de “ procédé intuitionniste ” est ou non possible “ à l’aide d’un nombre fini de mots ”, mais celui de savoir si l’on peut attendre d’une définition de ce genre qu’elle nous mette toujours en position, un “ procédé ” étant donné, de reconnaître en un nombre fini d’étapes si ce procédé est ou non “ intuitionniste ” au sens de la définition considérée. À cette question, la réponse est *négative*, et elle est démontrablement telle [8]. Autrement dit, la caractéristique centrale des raisonnements “ métamathématiques ” ne saurait être définie sans admettre un genre de définition que la métamathématique récuse [9].

2.2. Signes mathématiques, référence et déréférence. Nous avons commencé par la fin, et par les “ faits mystérieux ” à la lumière desquels Herbrand, si la vie lui en avait laissé le loisir, aurait certainement reconnu les limites dans lesquelles l’attitude “ ultra-hilbertienne ” qu’il avait adoptée le tenait enclos. Il est temps de dire mieux ces limites, et l’extraordinaire virtuosité avec laquelle Herbrand se mouvait dans l’espace qu’elles dessinent.

---

[8] Le contenu technique de cette réponse négative est donné par le théorème sur l’indécidabilité du problème de l’arrêt des machines de Turing.

[9] Naturellement, cette situation n’est nullement contradictoire. Bien au contraire, Herbrand l’utilise avec une étourdissante ingéniosité, dans un mémoire achevé à Göttingen quelques jours avant sa mort, pour montrer en quoi le second théorème d’incomplétude de Gödel ne s’applique pas à sa propre preuve de cohérence : c’est *justement* parce que les axiomes du système qu’il étudie ne permettent pas de décrire “ d’un seul coup ” tous les procédés intuitionnistes de fabriquer *[sic]*des fonctions d’entiers (1931c, 231).

On pourrait considérer que l'activité mathématique est, en principe, descriptible de trois points de vue distincts. Celui, d'abord, du mathématicien lui-même, de ses constructions mentales, des preuves qu'il engage, regardées comme motifs de certitude. Celui, ensuite, des objets dont il parle, et dont il essaie d'établir les propriétés. Celui, enfin, des signes écrits qui sont l'expression tangible de son activité. La philosophie des mathématiques s'essaie à démêler les rapports entre ces trois pôles : le rapport de référence entre les signes et les objets, le rapport d'adéquation entre les constructions mentales et leur expression symbolique, le rapport épistémique entre le mathématicien et les objets mathématiques. Les diverses philosophies se distinguent par le pôle qu'elles tiennent pour fondamental, et autour duquel elles cherchent à tout organiser. Le platonisme met en avant les objets mathématiques, l'intuitionnisme privilégie l'activité mentale du mathématicien, Herbrand, quant à lui, donne priorité aux signes. Cette priorité est absolue, et sans compromis. La relation des signes aux objets qu'ils sont supposés désigner, aussi bien que leur relation aux épisodes mentaux qui président à leur écriture, sont délibérément *passées sous silence*, non qu'il n'y ait rien à en dire, mais parce que rien ne *peut* en être dit, sinon sur le mode ordinaire et sans rigueur pour lequel Herbrand n'avait que dédain.

L'une et l'autre abstention sont admirablement décrites par Claude Chevalley, qui lui était très proche et qui eut, sur ce point, de " nombreuses conversations " avec lui. S'agissant des intuitionnistes — les adversaires par excellence, donc, de Herbrand —, Chevalley écrit ceci :

> [Les intuitionnistes construisent les objets] à partir d'une intuition, l'intuition temporelle, de sorte que les affirmations mathématiques représentent pour eux les affirmations que l'on peut faire sur les intuitions du temps ; et que seules les affirmations qui peuvent se traduire de cette manière seront considérées comme valables. Pour J. Herbrand de semblables restrictions étaient sans fondement, car il ne croyait pas qu'aucun raisonnement concernant un donné concret fût valable au point de vue purement mathématique, ni à plus forte raison qu'il soit nécessaire de se limiter à de semblables raisonnements (1934,19).

Herbrand, pour autant, n'accorde au réalisme platonicien aucune créance. Loin de se représenter, comme il est habituel de faire, le platonisme et l'intuitionnisme comme deux conceptions antithétiques, Herbrand décèle dans les deux doctrines un dogme commun, qu'il récuse sous toutes ses versions : l'idée des mathématiques comme science *descriptive*, description d'objets indépendants dans un cas, de constructions mentales dans l'autre. Aucune des deux conceptions ne rend compte de l'objectivité des mathématiques. Cette objectivité ne peut être fondée sur aucune *réalité donnée*, mentale ou pas. Comme l'atteste encore Chevalley :

> Les mathématiques sont tout naturellement considérées [par Herbrand] comme une connaissance par l'homme de ce monde. (...) Si on abandonne le point de vue platonicien, il faut bien admettre que l'objectivité en mathématiques, qui n'est plus l'indice de l'existence d'un monde rationnel [séparé], est créée par l'homme (*ibid.*, 18).

" Connaissance de ce monde " et " création par l'homme " pourraient sembler des expressions antinomiques, synthèse désespérée du platonisme et de l'intuitionnisme, si Herbrand ne dissociait constamment, comme le rappelle aussitôt Chevalley, la notion d' " objectivité " de celle de " réalité concrète " entendue ordinairement, comme domaine d'objets établi au-delà des signes et que ces derniers auraient pour vocation de dénoter. Herbrand, si sévère à l'égard des méthodes sémantiques ensemblistes, dont il reproche l'usage à Löwenheim, n'accorde pas même, dans ses *Recherches sur la théorie de la Démonstration*, que les symboles dits non-logiques d'une formule du calcul des prédicats soient interprétés par la donnée de ce que nous appellerions aujourd'hui une *extension*, qu'une constante ou " lettre d'individu ", par exemple, dénote un objet *extralogique*, situé hors du langage : dans l'usage capital qu'il fait dans sa thèse de la notion de *champ*, Herbrand ne considère pour seule " réalité " que des collections de lettres qui, pour ainsi dire, s'autoréfèrent. Univers dénombrables de signes engendrés mécaniquement, les *champs* de Herbrand sont à la fois présents *là*, sur le papier, et produits pas à pas par le mathématicien logicien, " créés " mais comme d'emblée réalisés, immanents à la théorie.

L'objectivité des mathématiques pourrait ainsi être caractérisée, selon le mot de Kreisel, comme une *objectivité sans objets*, si les conceptions de Herbrand n'invitaient à une discussion plus fine et plus rigoureuse encore de ces notions.

2.2.1. Parmi les questions relatives à une théorie mathématique, Herbrand sépare rigoureusement celles qui sont d’ordre métamathématique et celles, “ philosophiques ”, qui touchent, par exemple, à la légitimité de la théorie ou à sa supériorité sur les autres. La “ nouvelle logique ”

> cherche seulement à examiner les théories déjà existantes et étudie les caractères des propositions qui y sont vraies ; elle ne prend pas part aux discussions que celles-ci soulèvent ; elle ne cherche pas à les départager ; elle se borne à signaler qu’en raisonnant de telle manière les résultats obtenus posséderont telles propriétés. (…) À aucun moment la métamathématique ne cherchera à savoir si une théorie donnée décrit convenablement les propriétés de tel objet, si elle correspond à quelque chose de réel ou non ; elle ne le pourrait d’ailleurs pas. Toutes les théories ont à ses yeux égal droit de cité (1930a, 164).

En métamathématique, il n’y a donc pas de morale : aucune contrainte métamathématique ne s’exerce sur le choix des théories mathématiques. Très proche, en l’affaire, de cet autre grand “ syntacticien ” qu’était le Carnap de la *Syntaxe Logique*, Herbrand justifie comme suit sa propre version du principe de tolérance :

> Cette position agnostique déplaira à beaucoup ; mais il ne faut pas se cacher que le rôle des mathématiques est peut-être uniquement de nous fournir des raisonnements et des formes, et non pas chercher quels sont ceux qui s’appliquent à tel objet. Pas plus que le mathématicien qui étudie l’équation de propagation des ondes n’a à se demander si dans la nature les ondes satisfont effectivement à cette équation, pas plus en étudiant la théorie des ensembles ou l’arithmétique il ne doit se demander si les ensembles ou les nombres auxquels il pense intuitivement satisfont bien aux hypothèses de la théorie qu’il considère. Il doit se borner à développer les conséquences de ces hypothèses et à les présenter de la manière la plus suggestive ; le reste est le rôle du physicien ou du philosophe (*ibid.*, 164-165).

L’égale hostilité de Herbrand à l’égard de l’intuitionnisme et du platonisme doit donc être interprétée par référence à cet “ agnosticisme ” professé. Les deux attitudes sont jugées *déplacées*, bien plutôt qu’*erronées*. Que l’on propose pour axiome l’hypothèse du continu parce qu’on la croit vraie, ou que l’on décide de disqualifier la règle *ex falso quodlibet* parce qu’elle ne reflète pas, allègue-t-on, les modes humains de raisonner, quoi de plus irréprochable, mais, aussi bien, de plus indifférent à ce dont il est réellement question ? Une fois rédigés explicitement les systèmes de signes qui résultent de ces choix, alors seulement commencent les choses *sérieuses*, c’est-à-dire les *problèmes* susceptibles d’une solution *théorique*. Le reste, c’est-à-dire les *raisons* pour lesquelles ont été introduits ces systèmes de signes de préférence à d’autres – mais aussi, et au même titre, la visée d’une référence *attendue* pour ces signes -, tout cela est à la fois légitime et inévitable, mais ne fait pas partie des mathématiques. Reconnaître la *marginalité* de ces éléments et, par-dessus tout, accorder qu’aucun d’entre eux ne saurait constituer, de la même façon qu’une dérivation formelle et sur le même plan qu’elle, la justification d’une proposition mathématique, voilà ce qui est visiblement, pour Herbrand, la première démarche d’une philosophie correcte des mathématiques.

Mais si le mathématicien écrit des signes conformément à des règles, n'est-ce pas aussi parce qu'il forme telle et telle pensée, opère telle ou telle construction dans son esprit, ou encore parce qu’il réfère par tel ou tel signe à tel ou tel objet, et que, agencés comme ils le sont, ces signes regroupés expriment des propositions relatives à ces objets ? Tel est assurément le cas, mais l’illusion qui le guette, perpétuellement renaissante, est cependant de s’imaginer que c’est cet élément caché qui *justifie* les formules visibles, et que les règles explicites de dérivation ne sont au fond qu’un *truchement* dont on pourrait, idéalement, se dispenser. On tient là l’expression la plus pure d’une mythologie dont l’intuitionnisme et le platonisme ne sont que des variantes, et que Herbrand récuse en sa totalité. Ce que l’on vit et ce que l’on vise, voilà qui peut infléchir le choix d’une théorie mathématique, mais aucune question *interne* ne peut trouver de solution sur ce terrain.

Herbrand, plus radical encore que Hilbert, emploie ainsi systématiquement “ vrai ” là où nous dirions – et où Hilbert lui-même dirait — “prouvable” ou “démontrable”, voulant ainsi montrer qu’il n’y a pas deux concepts en compétition (l’un, syntaxique, l’autre, sémantique), pour qualifier les propositions d’une théorie mathématique. Le seul concept rigoureux est celui de démontrabilité dans une théorie donnée, et il n’y aucune place, à ses yeux, pour une notion “extra-théorique” de correction d’un énoncé mathématique.

2.2.2. Au risque de nous engager dans une conjecture interprétative probablement plus fragile que les remarques qui précèdent, il nous paraît maintenant nécessaire de faire un sort à un point philosophique d’importance, qui ne trouve, à notre connaissance, aucun équivalent direct chez Hilbert. Dans le texte de Chevalley consacré à la pensée de Herbrand, se trouve un passage qui est, à y bien réfléchir, passablement énigmatique :

> Le processus de l’axiomatique, la méthode formaliste sont précisément les pointes extrêmes de ce mouvement vers l’objectif. C’est-à-dire, et c’est, je crois, ce que pensait Herbrand, que l’objectivité ne s’atteint que dans la symbolique pure, c’est-à-dire en vidant complètement les symboles de toute signification : objectivité et réalité concrète, loin d’être synonymes, s’excluent l’une l’autre (*ibid.*, 19).

Rien, dans les textes de Herbrand que nous avons expliqués jusqu’ici, ne semble autoriser cette allusion à un quelconque “mouvement” vers l’objectivité. L’objectivité des mathématiques, serait-on tenté de dire, est ce qu’elle est : définissable, nous dit Herbrand, en termes purement symboliques, sans nulle référence à une “réalité” mentale ou objectale. Aucune mention, en cette affaire, d’un progrès vers quoi que ce soit : au moment où il écrit ces lignes, trois ans après la mort de son aîné, Chevalley semble sensible aux conceptions plus spécifiques de Cavaillès, dont c'était là un thème favori. L'hypothèse d'une influence directe de Cavaillès sur la pensée de Herbrand serait toutefois plus fragile, et le propos même de Herbrand invite d'ailleurs à chercher dans une autre direction.

L’objectivité d’une théorie s’atteint, dit Herbrand par la bouche de Chevalley, lorsque ses symboles sont privés de référence.

Quelle dynamique préside, en mathématique, à l'attribution ou à la privation de référence ? Laissons de côté les platoniciens convaincus qui attribuent *par principe* une référence, toujours et à tout : leur cas relève de la statique ! Mais quant aux autres ? Dans quelles circonstances un " agnostique " en viendrait-il à *renoncer* à considérer un symbole comme référentiel ? L'agnostique n'est pas un *antiplatonicien*, qui par principe n'attribuerait de référence à aucun signe, jamais et en aucun cas. " 7 ", bien entendu, réfère : il réfère à I I I I I I I. Si nous admettons un univers de signes, nous devons bien admettre que les signes abréviatifs qui réfèrent à ces signes réfèrent authentiquement. De façon plus générale, les signes qui réfèrent aux éléments de l'ontologie " obligée ", de celle dont il n'y a même pas à délibérer, ces signes-là réfèrent. Les signes que l'on peut envisager de *priver* de référence sont d'autres signes, auxquels on avait attribué une référence sans y être *directement* obligé.

Admettons avec Herbrand que l'ontologie mathématique " obligée " soit celle des signes, de leurs groupements, et que les propositions mathématiques contenant des termes indiscutablement référentiels se réduisent aux énoncés " élémentaires " du type suivant : 7+5 = 12, x – y + y = x, où " x " et " y " peuvent être remplacés par n'importe quel entier. Platoniciens exceptés, nous ne sommes nullement enclins à considérer comme référentiels des termes " transcendants ", comme " **c** " (la " puissance du continu "). Mais nous nous résignerons à le faire, s'il apparaît que la seule preuve disponible d'une proposition *élémentaire* est une preuve qui contient un terme transcendant de ce genre [10]. En revanche, nous renoncerons à cette référentialité, s'il apparaît une nouvelle preuve *élémentaire* de la même proposition, c'est-à-dire une preuve dans laquelle les termes transcendants n'apparaissent plus. Autrement dit, certains progrès des mathématiques ont bel et bien pour effet de priver certains signes

[10] La chose, bien entendu, *peut* se produire : le " théorème de Fermat ", par exemple, est un énoncé élémentaire: $(n > 2 \Rightarrow x^n + y^n \neq z^n)$, dont nous ne connaissons pour l'heure qu'une démonstration hautement transcendante.

de leur fonction référentielle, c'est-à-dire d'accroître ce que Herbrand nomme l'“objectivité” des mathématiques : chaque fois qu'une preuve “transcendante” d'une proposition élémentaire est remplacée par une preuve élémentaire, un pas est fait vers la *déréférence* et l'objectivité. En d'autres termes encore, le platonisme n'est pas une philosophie *absurde*, mais une étape obligée, lorsque les preuves “impures” des propositions élémentaires sont encore les seules disponibles. Il y a, en mathématiques, une contrepartie binaire de la fameuse loi positiviste des “trois âges” : nous commençons nécessairement par être platoniciens, avant de cesser de l'être dès que les progrès de la connaissance nous permettent de “vider les symboles de leur signification”.

Le programme de Hilbert, on l'a dit, a pour objectif essentiel de donner une preuve de cohérence élémentaire pour l'arithmétique. Mais on peut le formuler autrement – comme Hilbert lui-même, du reste, l'a fait, dans ses fameux “théorèmes-epsilon”. L'objectif, dans cette seconde version du programme, consiste à montrer que l'arithmétique représente ce que nous appellerions aujourd'hui une “extension conservative” de sa partie élémentaire : il s'agit d'établir que si un énoncé élémentaire possède une preuve *quelconque*, alors il en possède déjà une preuve élémentaire. On voit que réaliser le programme de Hilbert sous cette version, c'est faire accomplir aux mathématiques *le progrès le plus significatif que l'on puisse imaginer en direction de l'objectivité*. C'est montrer, *d'un seul coup*, que le recours aux propositions comportant des termes “transcendants” n'est jamais *obligatoire* pour prouver une proposition élémentaire. C'est donc établir que ces termes transcendants peuvent en totalité être “déréférés”, puisque l'*unique* motif que l'agnostique avait de leur attribuer une référence était justement celui-là : leur rôle apparemment indispensable dans l'extraction des théorèmes élémentaires.

Dans un texte séparé qu'il consacre au problème de la décision, Herbrand indique dans des termes plus explicites encore que ceux de Hilbert l'immense champ d'enquête théorique auquel ouvrirait un résultat de conservativité :

> supposons (...) que l'on ait démontré que [la théorie développée dans les *Principia Mathematica*] n'était pas contradictoire ; alors on peut déduire un résultat général dont voici un cas particulier : *Si l'on a pu démontrer un théorème arithmétique en faisant usage de nombres incommensurables ou de fonctions analytiques, on peut aussi le démontrer en ne se servant que d'éléments purement arithmétiques* (entiers, fonctions définies par récurrence) (1929b, 33).

Contestable et contesté, et de façon éminente par Gödel lui-même [11], cet optimisme théorique va, notons-le, bien au-delà du seul déflationnisme ; purifier les méthodes de preuve en s'astreignant à ne recourir qu'à des objets assignables “ sur le papier ”, obtenus par engendrement systématique, c'est aussi s'orienter vers la recherche précise des éléments qu'on doit compter comme vecteurs d'*information* et de *signification* au sein des preuves mathématiques.

Naturellement, le platonicien *par système* persévérera, quant à lui, dans ses convictions gothiques, mais il n’importe : toute l’affaire était de montrer que l’authentique substance des mathématiques n’est pas telle qu’on *doive nécessairement* le suivre sur ce point.

Bien d’autres aspects de la philosophie de Herbrand demanderaient explication. Il faudrait dire dans le détail comment l'ascèse de la syntaxe l’a conduit à se priver des facilités offertes à qui s’autorise le libre maniement des notions sémantiques, et parler de la superbe récompense de cette ascèse : l’extraordinaire “ théorème fondamental de la logique ”, qui a mis si longtemps à être simplement *compris* , et dont tant de choses devaient sortir, en théorie des preuves et en informatique. Il faudrait aussi parler, sans aucun doute, de la composante

[11] Gödel, dans sa lettre inédite du 25 Juillet 1931, reprend explicitement Herbrand sur ce texte, que Herbrand lui avait communiqué.

esthétique de cette attitude sévère, et des résonances si évidemment mallarméennes de certains des propos de Herbrand. Dans l'étendue de cette étude, nous devons nous abstenir de tout cela, et laisser, pour conclure, la parole à Herbrand :

> C'est l'essence même de cette théorie, que Hilbert, son créateur, a appelée la " métamathématique ", que de vouloir résoudre les problèmes posés par la philosophie des mathématiques, non par des discussions verbales, mais par la solution de questions précises (1931a, 209).

Références

CHEVALLEY (Claude) et LAUTMAN (Albert), 1931, " Notice biographique sur Jacques Herbrand ", in Herbrand, *Écrits Logiques*, 13-15.

CHEVALLEY (Claude), 1934, " Sur la Pensée de Jacques Herbrand ", repris in Herbrand, *Écrits Logiques*, 17-20.

GÖDEL (Kurt), 1958, " Über eine noch nicht benützte Erweiterung des finites Standpunktes ", *Dialectica* XII-1958, 280-287.

-Lettre à Herbrand du 25 Juillet 1931, inédit, propriété de l'Institute for Advanced Study, Princeton, Manuscripts Division, Firestone Library, Princeton University.

-Lettre du père de Herbrand à Gödel du 13 Août 1931, inédit, *idem*.

HEIJENOORT (Jean van), 1985, *Selected Essays*, Naples, Bibliopolis.

1985a, " Jacques Herbrand's work in logic and its historical context ".

HERBRAND (Jacques), *Écrits Logiques*, (éd. par J. Van Heijenoort), Paris, PUF, 1968.

1929b, " Sur le problème fondamental des Mathématiques ", 31-33.

1930, " Recherches sur la théorie de la Démonstration", 35-153.

1930a, " Les bases de la logique hilbertienne ", 155-166.

1931a, " Note non signée sur la thèse de Herbrand écrite par Herbrand lui-même ", 209-214.

1931b, " Notice pour Jacques Hadamard ", 215-219.

1931c, " Sur la non-contradiction de l'arithmétique ", 221-232.

-Lettre à Gödel du 7 Avril 1931, document inédit, propriété de l'Institute for Advanced Study, Princeton, Manuscripts Division, Firestone Library, Princeton University.

RIVENC (François) et de ROUILHAN (Philippe) (dir.), 1992, *Logique et fondements des mathématiques (1850-1914)*, Payot.