Facultad de Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología

Grado en Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

Grafos infinitos

Cristina Villalba Rodríguez

El Profesor Tutor.
Fdo: **Juan Núñez Valdés**.
Profesor Titular de Universidad.
Dpto. de Geometría y Topología.
Universidad de Sevilla.

Fdo: **Cristina Villalba Rodríguez**.
Graduada en Matemáticas

Sevilla, Junio 2014.

AGRADECIMIENTOS

Sin duda, estos años de estudios en Sevilla formarán parte de una de las mejores etapas de mi vida. He vivido momentos inolvidables que nunca olvidaré, aunque he de admitir que también han sido muchas las horas sentada junto a un pupitre rodeada de apuntes. A pesar de tantas largas horas de estudios, poco a poco he ido conseguiendo mis objetivos, siendo uno de ellos la presentación de este Trabajo Fin de Grado.

Este Trabajo no hubiese llegado a su fin sin el apoyo incondicional de mi familia, que me ha animado desde el primer momento en que tomé la desición de estudiar el grado de Matemáticas. Para todos ellos va mi mayor agradecimiento, en especial para mis padres y hermano, que han aguantado pacientemente mis momentos de desánimo y siempre me han transmitido la fuerza necesaria para no desfallecer.

También he de agradecer al profesor D. Juan Núñez Valdés, quien me dio la oportunidad de realizar este Trabajo bajo su supervisión y siempre ha estado disponible para resolverme los problemas que me han ido surgiendo, al igual que para aportarme algunas ideas tendentes a mejorarlo.

A todos ellos, muchas gracias.

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Introducción

Tres son los **objetivos** principales que se persiguen en este Trabajo Fin de Grado. El **primero** de ellos es el de complementar con un nuevo apartado, en concreto el de los grafos infinitos, los conocimientos adquiridos por la autora de este Trabajo en la asignatura que cursó en su segundo año del Grado, titulada “Matemática Discreta". Ni en esa asignatura ni en ninguna otra de las cursadas durante su grado, la autora ha tenido la oportunidad de tratar con grafos infinitos, lo cual, a su juicio, avalado previamente por el director de este Trabajo, hacían a este tópico más que interesante para su tratamiento.

El **segundo** de estos objetivos, ahora de tipo metodológico, ha sido el de tratar de recopilar la mayor información posible sobre grafos infinitos, así como al mismo tiempo, unificar las distintas notaciones usadas para tratar conceptos análogos, observadas en las diferentes referencias usadas, al objeto de facilitar al investigador en general, el tratamiento de los grafos infinitos.

Y un *tercer objetivo* ha sido el de profundizar en el conocimiento de la Teoría de Grafos Infinitos, con el propósito de encontrar nuevos resultados, así como nuevas aplicaciones de estos objetos a diferentes disciplinas científicas. Obviamente, este objetivo era ya, de inicio, muy ambicioso y no se ha podido conseguir en este Trabajo, pero hemos creído bueno no perderlo de vista y tenerlo siempre en el horizonte con vistas a la realización de futuros trabajos en esta línea de investigación.

1.2. Motivación para tratar con grafos infinitos

A pesar de que la mayor atención en el último medio siglo en Teoría de Grafos la han tenido los grafos finitos, los grafos infinitos también han sido objeto de un extenso estudio.

Hay varias razones por las que se han estudiado los grafos infinitos. Aparte de que es interesante preguntarse cómo se trasladan al caso de estos grafos las principales propiedades de los grafos finitos, la razón principal del estudio de los grafos infinitos sea, probablemente, la importancia que tienen por sus aplicaciones en Lógica Matemáticas, como pueden ser, por ejemplo:

- Los *tableros semánticos* en lógicas de primer orden son árboles (en muchos casos infinitos) cuyos nodos está etiquetados con fórmulas. Se utilizan para organizar de manera sistemática la búsqueda de modelos que satisfagan un conjunto de fórmulas inicial.

  En la lógica de primer orden se consideran *árboles de ramificación finita* y en los razonamientos sobre ellos suele intervenir de distintas formas el Lema de König. Una referencia clásica sobre este tópico es la de R. Smullyan [24].

- En otros sistemas lógicos las demostraciones formales se representan mediante árboles de ramificación infinita bien fundamentados (es decir, sin ramas infinitas) y el rango de dichos árboles (el ordinal que correspondería a su altura) es muy útil en su estudio dentro de la *Teoría de la Demostración de Lógicas Infinitarias*. Una referencia al respecto es la de W. Pohlers [22].

- En la *Teoría Descriptiva de Conjuntos* los árboles infinitos aparecen en el estudio de la topología del espacio de Baire (el conjunto de las sucesiones de números naturales) o el espacio de Cantor (el conjunto de las sucesiones de ceros y unos), ambos con la topología producto (tomando sobre los números naturales la topología discreta).

  Así por ejemplo, los cerrados de ambos espacios pueden describirse como los conjuntos de ramas infinitas de ciertos árboles. Una referencia básica es el Capítulo 10 de Y.N. Moschovakis [17] y otro libro de referencia en Teoría Descriptiva es el de A. S. Kechris [14], cuyo Capítulo I tiene una sección introductoria muy completa sobre árboles.

- Estas descripciones anteriormente indicadas de los cerrados del espacio de Baire (o del de Cantor) son útiles en el estudio de la determinación de *juegos infinitos*. Esta aplicación de los grafos infinitos a los juegos infinitos puede verse en el Capítulo 6 del libro de Moschovakis [18].

- Otros ejemplos del uso de grafos infinitos, no necesariamente árboles, lo proporcionan los *modelos de Kripke* (también llamados marcos o "frames") que se utilizan para definir la semántica de las distintas lógicas modales (epistémica, dinámica, temporal,...). Aunque un modelo de Kripke no es necesariamente infinito, en muchos casos lo es (y de hecho, en el caso de las lógicas modales más comunes se trata de un grafo (o multigrafo) cuyas aristas y nodos pueden estar etiquetados de diferentes formas). Al respecto, puede consultarse el texto clásico [2] o cualquier libro más básico sobre Lógica Modal.

1.3. Estructura del Trabajo Fin de Grado

Al objeto de llevar adelante el estudio propuesto, la estructura de este Trabajo Fin de Grado es la siguiente.

Tras esta Introducción, en el Capítulo 2, se recuerdan algunos preliminares sobre Teoría de Grafos finitos, necesarios por una parte para una adecuada comprensión del Trabajo y por otra, para tratar de conseguir uno de los objetivos propuestos en el mismo, que era el de generalizar en la medida de lo posible los resultados sobre grafos finitos que en estos preliminares se indican al caso infinito. En todo caso, y para no alargar innecesariamente este Trabajo, únicamente hemos incluido en estos preliminares las definiciones y los enunciados de aquellos resultados ya conocidos sobre grafos finitos que van a ser utilizados a lo largo del mismo.

El Capítulo 3 constituye la parte de recopilación de este Trabajo. En él se comentan algunas de las aportaciones existentes en la literatura sobre grafos infinitos, tantos libros como artículos, desde los primeros aparecidos, allá por la década de 1950, hasta los más recientes. La idea es la de aportar al lector un estudio evolutivo del desarrollo de este tópico, que pueda ser de utilidad a los investigadores en este campo, con vistas a la realización de futuros trabajos.

En el Capítulo 4 se muestra el estudio realizado por la autora sobre grafos infinitos. Este Capítulo constituye la parte primordial de este Trabajo Fin de Grado, y de él se espera que contribuya a facilitar el progreso en el estudio de este tipo de grafos. En todo caso, es conveniente notar que por motivos de extensión, no se incluyen aquí las demostraciones de muchos de los los resultados que se indican.

Finalmente, en el Capítulo 5 se indican algunos problemas abiertos sobre este tópico, que podrían ser abordados en el futuro, terminándose el Trabajo con la relación de la correspondiente bibliografía utilizada.

CAPÍTULO 2

Preliminares

En este Capítulo daremos una serie de definiciones y resultados notables sobre grafos finitos, algunos de los cuales deseamos extender al caso infinito, que serán útiles para una adecuada comprensión de este Trabajo. Por motivos de extensión, no se incluyen en estos Preliminares las demostraciones de los resultados que se indican.

2.1. Preliminares básicos sobre grafos finitos

Un *grafo simple* $G = (V(G), E(G))$ es un par formado por dos conjuntos finitos: $V(G)$, el conjunto de los vértices del grafo, que es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices*, y $E(G)$, el conjunto de las aristas del grafo, que es un conjunto eventualmente no vacío de elementos llamados *aristas*, tal que cada arista $e \in E(G)$ tiene asignado un par no ordenado de vértices $\{u, v\}$, $(u \neq v)$ llamados extremos de e; se dice que la arista e une los vértices u y v.

Nótese que en la definición anterior no se hace distinción entre los vértices que une una arista, es decir, los vértices u y v a los que se refiere no guardan orden. Cuando el par de vértices se considera ordenado, la arista $e = (u, v)$ se denomina *arista dirigida* y el grafo G se llama *grafo dirigido*.

Gráficamente, en un grafo simple cada vértice es representado por un punto, mientras que cada arista corresponde a una línea que une el par de vértices que tiene asignados; en el caso de los grafos dirigidos, las aristas se representan como flechas que tienen como origen el primer vértice del par y como “punta” el otro vértice.

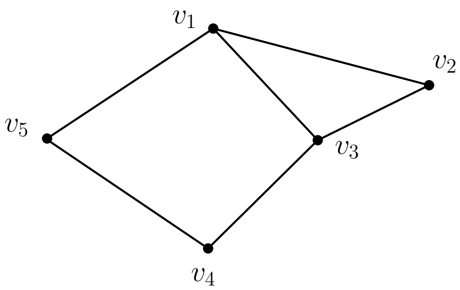

Figura 2.1: Un grafo simple.

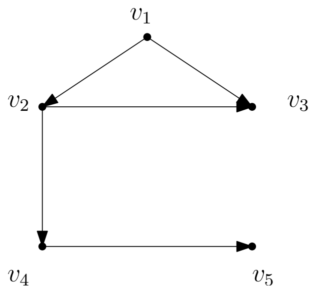

Figura 2.2: Un grafo dirigido.

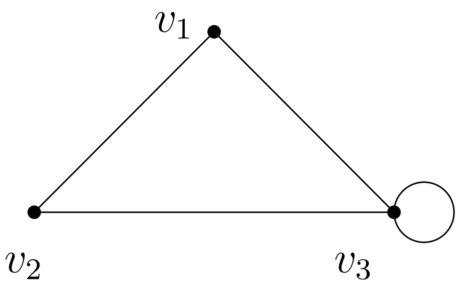

Figura 2.3: Un pseudografo.

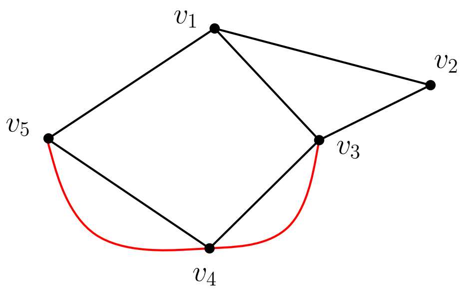

Figura 2.4: Un multigrafo.

Cuando u y v son el mismo vértice, la arista $e = (u, u)$ se llama *lazo* y se dice que el grafo G es un *pseudografo*. Finalmente, cuando aparecen aristas repetidas, el grafo resultante se denomina *multigrafo*.

La Figura 2.1 muestra un grafo simple, la Figura 2.2 un grafo dirigido, la Figura 2.3 recoge un pseudografo con un lazo en el vértice v_3, y la Figura 2.4 un multigrafo con dos aristas entre los vértices v_3 y v_4, y v_4 y v_5.

Se dice que dos vértices que definen una arista son *adyacentes o vecinos*; el conjunto de todos los vértices adyacentes a v se denota por $N(v)$ y, para un grafo simple, el *grado* de v es $\delta(v) = |N(v)|$, es decir, el número de vértices adyacentes a v.

En un grafo dirigido, el conjunto de vértices adyacentes a un vértice v puede descomponerse a su vez en dos subconjuntos: $N(v) = I(v) \cup O(v)$, donde $I(v) = \{u \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}$ y $O(v) = \{v \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}$. Se definen entonces el *grado de entrada* y de *salida* de v como $\delta_i(v) = |I(v)|$ y $\delta_o(v) = |O(v)|$, respectivamente.

Un grafo $G' = (V', E')$ es *subgrafo* de otro grafo $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, se denota $G' \subset G$.

Otro concepto es el de matriz de adyacencia de un grafo:

Sea G un grafo con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$; la *matriz de adyacencia* de G, respecto a esta lista ordenada de vértices, es la matriz $M(G) = (m_{ij})$ cuadrada $n \times n$, cuyo elemento m_{ij} corresponde al número de aristas que unen el vértice v_i con el vértice v_j.

Como ejemplo, a continuación, se muestra la matriz de adyacencia del multigrafo de la Figura 2.1:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Otra matriz a la que podemos referirnos en grafos es la matriz de incidencia:

Sea G un grafo con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$; la *matriz de incidencia* de G, respecto a esta lista ordenada de vértices, es la matriz $I(G) = (m_{ij})$ cuadrada y binaria $n \times n$, cuyo elemento m_{ij} corresponde a 0 si v_i no es adyacente con el vértice v_j y a 1 en el caso contrario.

Como ejemplo, a continuación, se muestra la matriz de incidencia del multigrafo de la Figura 2.4:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un grafo $G = (V, A)$ se dice *r-partito* si el conjunto V admite una partición $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ tal que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ en el conjunto V_i no hay vértices adyacentes. Un grafo G es *r-partito completo*, y se denota por $K_{a_1, a_2, \ldots, a_r}$, si es r-partito y cada vértice de V_i es adyacente a todos los vértices de V_j, para cada par $i \neq j$ con $i, j \in \{1, \ldots r\}$.

Destacamos a continuación algunas familias de grafos simples:

- Un *grafo cíclico* es un grafo en el que todos los vértices forman parte de un mismo ciclo, asemejándose a un polígono regular con el mismo número de lados que vértices tiene el grafo. Si el polígono tiene n lados se representa por C_n. En la Figura 2.5 tenemos un ejemplo de un grafo cíclico.

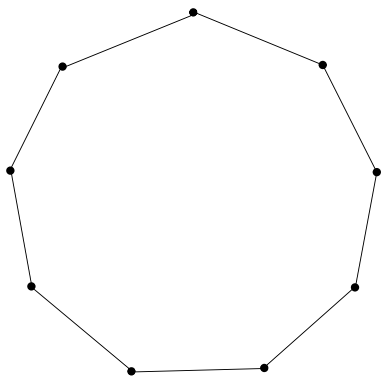

Figura 2.5: Grafo cíclico.

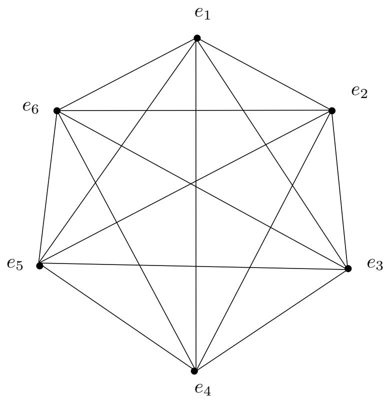

Figura 2.6: Grafo 6-partito.

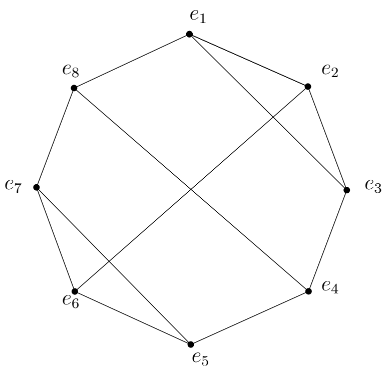

Figura 2.7: Grafo cúbico.

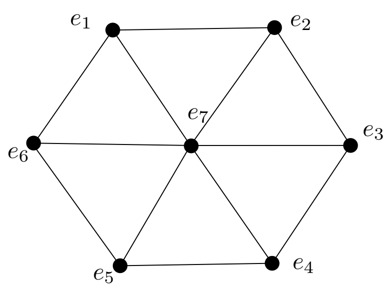

Figura 2.8: Grafo rueda.

- Recordamos que un grafo $G = (V, E)$ es *r-partito* si el conjunto V admite una partición $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ tal que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ en el conjunto V_i no hay vértices adyacentes. Un grafo G es *r-partito completo*, y se denota por $K_{a_1,a_2,\ldots,a_r}$, si es r-partito y cada vértice de V_i es adyacente a todos los vértices de V_j, para cada par $i \neq j$ con $i, j \in \{1, \ldots r\}$. En particular, para $r = 2$, el grafo se denomina *grafo bipartito*. Podemos ver un ejemplo en la Figura 2.6.

- Un *grafo cúbico* es un grafo regular de orden 3; recordamos que un grafo es regular cuando todos sus vértices tienen el mismo grado (ver Figura 2.7).

- Un *grafo rueda* W_n se define como el grafo de $n+1$ vértices en el que n vértices forman un ciclo C_n y el vértice restante, llamado *centro*, es adyacente a cada vértice del ciclo y solo a ellos (ver Figura 2.8).

Un *camino* entre dos vértices u y v en un grafo corresponde a una sucesión de aristas adyacentes que no se repiten, siendo u el vértice de origen de la primera arista y v el vértice de llegada de la última. Cuando los vértices u y v coinciden, el camino pasa a llamarse *ciclo*.

Un grafo $G = (V, E)$ se dice *conexo* si para todo par de vértices u y v de G existe un camino entre u y v en G. Dado G conexo, un conjunto no vacío $S \subset V \cup E$ es un *conjunto de corte o conjunto separador* de G si $G - S$ es un grafo no conexo. Si S es un conjunto formado por una única arista, a dicha arista se le llama *puente* de G. Si S es un conjunto formado por un único vértice, a dicho vértice se le llama *punto de corte* de G. Dado $n \in \mathbb{N}$, un grafo es *n-conexo* (por *aristas* respectivamente) si todo conjunto de corte de G formado solo por vértices (aristas, respectivamente) tiene cardinal mayor o igual que n.

En grafos finitos, las principales definiciones y resultados conocidos sobre conectividad son los siguientes (todos ellos pueden verse en [6]):

La *conectividad o conectividad puntual* de un grafo G es el menor número de vértices que hay que quitar a G para que resulte un grafo disconexo o trivial. Dicho número se representa por (G).

Se denomina *conectividad lineal* de un grafo G al menor número de aristas que hay que quitar a G para que resulte un grafo disconexo o trivial. Dicho número se representa por $\lambda(\mathrm{G})$.

Al respecto de grafos n-conexos, el siguiente resultado, denominado *Teorema de Tutte*, 1961, afirma que *un grafo G es 3-conexo si y sólo si es un grafo rueda o puede obtenerse a partir de un grafo rueda mediante una sucesión de operaciones de los dos tipos anteriores, esto es, añadiendo aristas o explotando vértices*.

Sea G un grafo y sean u y v dos vértices. Dos arcos uniendo u y v se dicen *independientes o disjuntos* si los únicos vértices que tienen en común son u y v y se dirán *independientes por aristas o linealmente disjuntos* si no tienen aristas en común.

Sea G un grafo y sean u y v dos vértices de G. Un conjunto S de vértices, aristas o vértices y aristas, del grafo G, se dice que *separa* a los vértices u y v si ambos están en distintas componentes conexas de $G - S$.

El siguiente teorema, Teorema de Menger y Whitney, 1932, afirma que *un grafo es n-conexo si y sólo si cada par de vértices están unidos por al menos n arcos independientes*.

Dado un grafo G y dos vértices u y v no adyacentes, se define la *conectividad local lineal* de ambos como el menor número de aristas que los separan. Se representa por $U(u; v)$.

El Teorema de Ford y Fulkerson, 1956, establece que *el menor número de aristas separando dos vértices u y v es el máximo número de arcos independientes por aristas uniendo u y v*.

Pasamos a continuación a comentar los resultados más notables sobre grafos eulerianos y hamiltonianos:

Un ciclo en un grafo se dice *euleriano* si contiene a todas las aristas del grafo. Se denomina *grafo euleriano* a todo grafo que posea un ciclo euleriano.

El *Teorema de Caracterización* de grafos eulerianos, unión de los resultados de Euler, en 1736, y de Hierholzer, en 1873, afirma que si G es un grafo conexo, son equivalentes las siguientes condiciones:

1. G es euleriano.
2. Todos los vértices de G son de grado par.
3. Existe una partición de $A(G)$ en ciclos, es decir, G admite una partición en ciclos por aristas.

De forma similar, un ciclo se dice *hamiltoniano* si contiene a todos los vértices del grafo y un grafo se denomina *hamiltoniano* si posee un ciclo hamiltoniano.

No se conoce ningún teorema de caracterización para grafos hamiltonianos que sea operativo. Sí se conocen, no obstante, condiciones necesarias y suficientes. Entre estas últimas, pueden ser citadas las siguientes:

Sea G un grafo simple de orden $n \geq 3$, con secuencia de grados dada por $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Entonces, G es un grafo hamiltoniano si se cumple alguna de las siguientes condiciones :

- Teorema de Redei, 1934: $d_u + d_v \geq n - 1$, $\forall u, v \in G$.
- Teorema de Dirac, 1952: $d_k \geq \frac{1}{2}\, n$, $\forall\, 1 \leq k \leq n$.
- Teorema de Ore, 1960: $d(u) + d(v) \geq n$, para cada par de vértices u y v de G no adyacentes.
- Teorema de Posa, 1962: $d_k > k$, $\forall\, 1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.
- Teorema de Bondy-Chvátal, 1976: $d_j + d_k \geq n$, para todos siendo $j \leq k$, $d_j \leq j$, $d_k \leq k - 1$.

Se dice que un grafo G es *plano* si se puede dibujar en el plano $\mathbb{R}^2$ de manera que dos aristas no incidentes nunca se corten y aristas incidentes se cortan sólo en sus vértices extremos. Se dice que G es *planar* si es isomorfo a un grafo plano. Si G es un grafo plano, cada una de las regiones en que el dibujo de G divide al plano se denomina *cara de* G. A la cara no acotada se le llama *cara exterior* de G.

Uno de los resultados más importantes de la Teoría de Grafos en general es el que se conoce como *Teorema de Kuratowski*, referido a grafos planares, establecido por el matemático polaco Kasimierz Kuratowski (1896 - 1980), en 1930. Este resultado afirma que: *Un grafo es plano si y sólo si no contiene subgrafos homeomorfos a* K_5 *o* $K_{3,3}$.

Dos resultados notables sobre *emparejamientos de grafos* son los siguientes:

Teorema 2.1.1. Teorema de Hall (Philip Hall (1904 – 1982), matemático inglés)
Para todo grafo bipartito $G = (V, E)$, *con subconjuntos* X *e* Y *de vértices, existe un emparejamiento completo de* X *a* Y *si y sólo si* $\mid S \mid = \mid \Gamma(S) \mid$*, donde* $\Gamma(S)$ *representa el conjunto de vértices adyacentes a los vértices de* S.

Este teorema es a veces conocido como el *Teorema del matrimonio*, porque afirma que si en un pueblo todo conjunto de k varones conoce al menos a k mujeres, entonces todos los hombres se pueden casar con alguna mujer que al menos conozcan.

Sin embargo, a veces se le da el este nombre de Teorema del matrimonio a otro teorema, parecido, que afirma que si cada varón conoce exactamente a k mujeres y cada mujer conoce a exactamente k varones, para algun $k > 0$, entonces todos los hombres y todas las mujeres se pueden casar con alguien a quien conocen. En terminos de Teoría de Grafos: *Todo grafo bipartito regular (con al menos una arista) tiene un emparejamiento perfecto*.

Teorema 2.1.2. Teorema de Tutte *Un grafo* G *tiene un emparejamiento perfecto si y sólo si, para cualquier* $S \in V(G)$*, se tiene que* $o(G-S) = |S|$*, donde* $o(G-S)$ *representa el número de componentes conexas del grafo* $G - S$.

Dado un grafo G, una *coloración* de (los vértices de) G es una asignación de colores, usualmente denotados por 1, 2, $\ldots$ a los vértices de G, un color por cada vértice, de modo que vértices adyacentes llevan asignados colores diferentes. Una n-*coloración* de G es una coloración con n colores distintos, en tal caso se dice que G es n-*coloreable*. Obsérvese que G es r-*partito* si y sólo si G es r-*coloreable*.

El *número cromático* de G es el mínimo valor n para el cual G es n-coloreable, se denota por $\chi(G)$ y se dice que G es $\chi(G)$-*cromático*.

Dado un grafo G, una *coloración de aristas* de G es una asignación de colores, usualmente denotados por 1, 2, $\ldots$ a las aristas de G, un color por cada arista, de modo que aristas incidentes llevan asignados colores diferentes. Una n-*coloración de aristas* de G es una coloración de aristas con n colores distintos, en tal caso se dice que G es n-*coloreable por aristas*. El *índice cromático* de G es el mínimo valor n para el cual G es n-coloreable por aristas, se denota por $\chi'(G)$ y se dice que G es $\chi'(G)$-*cromático por aristas*.

Finalmente, y aunque no se ha tratado en el caso de grafos infinitos por razones de extensión indicamos aquí otro apartado importante en la Teoría de Grafos: el tema de los *isomorfismos* entre grafos.

Un *morfismo* entre dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es una aplicación $\phi : V_1 \to V_2$ tal que si u y v son vértices adyacentes en G_1, entonces $\phi(u)$ y $\phi(v)$ son adyacentes en G_2. También puede definirse el concepto de morfismo entre pseudografos dirigidos, donde la condición que debe verificar la aplicación sería que si $(u, v) \epsilon E_1$, entonces $(\phi(u), \phi(v)) \epsilon E_2$, teniendo en cuenta el orden del par de vértices que define la arista.

Diremos que una aplicación f es un *isomorfismo* entre grafos (o pseudografos dirigidos) si es un morfismo biyectivo cuyo inverso es también morfismo.

CAPÍTULO 3

Los grafos infinitos en la literatura

A pesar de no ser objeto de estudio en ninguna de las asignaturas de la licenciatura ya finalizada ni en las del actual grado de Matemáticas de nuestra Universidad, los grafos infinitos constituyen un tópico muy tratado por los investigadores, tanto en forma de artículos como, algo menos, en forma de libros publicados.

En esta sección se muestran a continuación algunos de los ejemplos más significativos de ambas modalidades, varios de los cuales han sido consultados por la autora para la elaboración de este Trabajo Fin de Grado.

3.1. Libros sobre Grafos Infinitos

- Theory of Finite and Infinite Graphs, escrito por Dénes König en 1936 [16].

  En este libro, escrito originalmente en alemán, con el título “Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.en 1936, König presenta la teoría de Grafos como una materia importante por sí misma. Aunque en 1950 apareció una versión más revisada, todavía escrita en alemán, fue la traducción al inglés de este libro, en 1990, lo que contribuyó a darle a esta teoría un gran reconocimiento.

  En el libro, prologado por W. T. Tutte y que consta de 14 capítulos, König trata en su mayor parte con grafos finitos, si bien dedica los capítulos 6 y 13 específicamente al caso de los grafos infinitos. El autor, no obstante, hace también varios comentarios en el resto de capítulos sobre la generalización de los conceptos tratados en el caso finito al caso infinito. El libro también incluye la mayor parte de las referencias sobre Teoría de Grafos existentes hasta el momento de su publicación y finaliza con una biografía del autor, debida a T. Gallai.

- Further selected topics in Graph Theory, editado por Beineke y Wilson, en 1983 [27].

  Este libro, en el que se muestran los últimos avances en su momento de la Teoría de Grafos, está escrito por varios autores. Carsten Thomassen es el autor del Capítulo 5, que dedica particulamente al caso de los grafos infinitos (de hecho, ése es el título del capítulo).

  Thomassen divide este capítulo en 12 secciones, en las que trata de generalizar los conceptos ya conocidos sobre grafos finitos al caso de los infinitos. Así, entre otros, aborda los problemas de conectividad, planaridad, emparejamientos, grafos eulerianos y hamiltonianos, teoría cromática de grafos y árboles infinitos. De este capítulo se han sacado muchos de los resultados que se indican en este Trabajo.

3.2. Artículos sobre Grafos Infinitos

A fecha finales de mayo de 2014 pueden encontrarse en la base de datos MathSciNet 351 artículos que tienen las palabras “Infinite graphs" en el título, datando el más antiguo del año 1951. Sus autores son De Bruijn y Erdös [4], que tratan en él un problema de coloración para grafos infinitos y un problema de la teoría de relaciones. En todo caso, y a pesar de no tener las palabras citadas en el título, los artículos [8], [23] y [28], de 1938, 1949 y 1950, escritos respectivamente por Erdös, Grünwald y Vazsonyi (conjuntamente), Rado y Tutte pueden considerarse, sin ninguna duda, precursores en el estudio de los grafos infinitos.

Después de ese primer artículo citado de De Bruijn y Erdös, ya no aparecen otros con esas palabras en el título hasta la década de los 60 de ese siglo. De entre ellos, los más significativos, bien por autoría, bien por contenidos, son los siguientes:

- En 1960, Nash Williams publica un artículo sobre cadenas sin finales [19] y ese mismo autor, en 1967, publica un survey sobre grafos infinitos [21] en el que describe la evolución de los trabajos hechos sobre estos grafos, indicando además algunos problemas que en aquel momento permanecían abiertos. Ese artículo fue recencionado por Tutte.

- En 1966, Nash-Williams trata el problema de las líneas de Euler en grafos infinitos dirigidos [20].

- En 1974, Thomassen presenta una publicación sobre la existencia de ciertos subgrafos de grafos infinitos [25]. Este artículo, que fue recencionado por Nash-Williams, trata fundamentalmente de árboles infinitos y de subbosques.

- En 1975, Dirac [7] y Halin [9, 10] publican respectivamente artículos sobre grafos infinitos, todos ellos recencionados por Harary.

- En 1977, Halin trata la descomposición simplicial de grafos infinitos [11], probando que este concepto, introducido previamente por Wagner para el caso de grafos finitos, es también válido y útil en el caso de los infinitos.

- En 1982, Thomassen [26] extiende al caso infinito la *Teoría de la Dualidad de Whitney* de grafos, consiguiendo generalizar algunos resultados que él mismo había empezado a tratar en un artículo previo a éste, publicado en esa misma revista dos años antes. Este artículo fue recensionado por Halin.

- En 1985, Halin publica un artículo sobre grafos infinitos en memoria de G. A. Dirac [12].

- En 1996, Boza, Diánez y Márquez, profesores de nuestra universidad, publican un artículo [3] sobre las propiedades del centro de grafos infinitos y en 2000, Halin hace lo propio con un artículo en el que presenta una miscelánea de problemas sobre grafos infinitos.

Como resumen de todo lo indicado hasta el momento, puede considerarse que **Carsten Thomassen** (nacido en 1948, matemático danés), con 7 artículos con la mención explícita de grafos infinitos en su título, entre 1974 y 1983, **Rudolph Halin** (nacido en 1934, matemático alemán), con otros 7 entre 1979 y 2000, **Crispin St. John Alvah Nash-Williams** (1932 – 2001, matemático inglés y canadiense), con 4 entre 1967 y 1994, **Gabriel Andrew Dirac** (1925 – 1984, matemático inglés, hijo procedente del primer matrimonio de la segunda mujer de Paul Dirac), con otros 4 entre 1974 y 1986, y **Dénes Konig** (1884 - 1944, matemático húngaro), con 2 entre 1986 y 1990 son los cinco autores más representativos en el estudio de los grafos infinitos hasta comienzos del siglo actual, si bien indudablemente, otros autores, entre ellos fundamentalmente **Paul Erdös** (1913 – 1996, matemático húngaro) y **William Thomas Tutte** (1917 - 2002, matemático inglés), merecen sobradamente ser también citados en esta relación por sus grandes aportaciones a la Teoría de Grafos, a pesar de no aparecer explícitamente el nombre de grafos infinitos en los títulos de sus trabajos.

Ya en el siglo actual, el número de artículos sobre grafos infinitos se ha incrementado notablemente. Podemos destacar el survey de 2011 de Komjáth, sobre el número cromático de grafos infinitos [15] y el artículo publicado un año después por los profesores de la Universidad de Almería, Cáceres, Hernando, Mora, Pelayo y Puertas, sobre la dimensión métrica de estos grafos [5].

La última aportación que aparece en la base de datos MathSciNet hasta el momento de la presentación de este Trabajo es ya del año 2014 y se debe a Bauer y Bobo [1]. En ella, los autores estudian el espectro del operador normalizado de Laplace, introduciendo la constante dual de Cheeger para mostrar que en el caso infinito, esta constante puede ser utilizada para caracterizar que el espectro esencial del operador de Laplace normalizado se reduce a un punto.

CAPÍTULO 4

Grafos infinitos

En este Capítulo tratamos de generalizar las definiciones y resultados más notables de la Teoría de Grafos finitos al caso de los infinitos. Aunque para la realizacion de este estudio se han usado muchos textos, dos han sido, básicamente, los más utilizados: los libros de Carsten Thomassen [27] y de Konig [16].

4.1. Primeras definiciones de grafos infinitos

Definición 4.1.1. *Un* grafo infinito $G = (V(G), E(G))$ *es un par formado por dos conjuntos:* $V(G)$ *y* $E(G)$*, donde* $V(G)$ *es un conjunto infinito de elementos, llamados vértices, puntos o nodos y* $E(G)$ *es un conjunto de pares no ordenados de esos elementos, llamados aristas o nodos, que puede ser eventualmente vacío.*

La siguiente figura muestra algunos ejemplos de los grafos infinitos más simples; la *estrella infinita* y los *grafos 1-camino* y *2-caminos infinitos*, respectivamente:

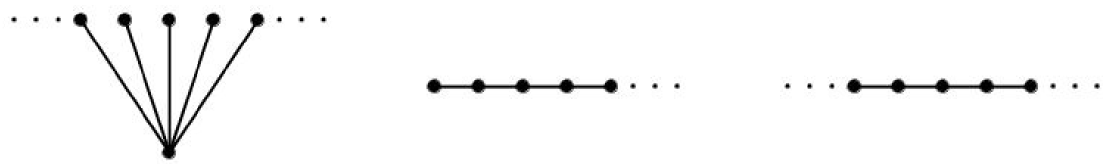

Figura 4.1: Ejemplos de grafos infinitos.

Definición 4.1.2. *Un* grafo numerable $G = (V(G), E(G))$ *es un par formado por dos conjuntos:* $V(G)$ *y* $E(G)$*, donde* $V(G)$ *es un conjunto numerable de elementos, llamados vértices, puntos o nodos y* $E(G)$ *es un conjunto de pares no ordenados de esos elementos, llamados aristas o nodos, que puede ser eventualmente vacío.*

Definición 4.1.3. *Un* grafo localmente finito $G = (V(G), E(G))$ *es aquél en el que cada vértice* $v \in V(G)$ *tiene grado finito.*

En el caso infinito, un concepto que usaremos bastante en este Trabajo es el denotado por el término *aleph*. En teoría de conjuntos, $aleph$ (primera letra del alfabeto hebreo) es un signo empleado para referirse a ciertos números transfinitos que de hecho resultan ser números ordinales iniciales y por tanto números cardinales. Es decir, coloquialmente, los términos *aleph* representarán cardinales de conjuntos infinitos.

En particular, en Análisis Matemático y en Álgebra aparecen frecuentemente $\aleph_0$ y $\aleph_1$, aunque pueden definirse números transfinitos arbitrariamente grandes más allá de estos dos. Así se tiene la siguiente:

Definición 4.1.4. *El cardinal* $\aleph_0$ *representa la cantidad de elementos del conjunto infinito de los números naturales. De hecho, este cardinal es el número transfinito más pequeño. El cardinal* $\aleph_1$ *es el número de elementos del conjunto de los números reales.*

Damos a continuación algunas definiciones y resultados básicos para grafos infinitos, cuya importancia es relevante para secciones posteriores.

Definición 4.1.5. *Sea* E *un conjunto infinito y sea* $k \in \mathbb{Z}^+$*. Llamamos* coloración k-parcial *a un par* (A, c)*, donde* A *es un subconjunto de* E *y* c *es una aplicación definida de* A *a* $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

Definición 4.1.6. *La desigualdad* $(A, c) < (B, d)$*, donde* $A \subseteq B$ *y* c *es la restricción de* d *a* A*, se denomina* desigualdad de coloraciones k-parciales.

Definición 4.1.7. *Una colección* $\mathfrak{F}$ *de* coloraciones k-parciales *se dice* prohibida *y asimismo una coloración k-parcial* (B, d) *se dice* $\mathfrak{F} - admisible$ *si no existe* $(A, c) \in \mathfrak{F}$ *tal que* $(A, c) < (B, d)$.

Se indican a continuación algunos resultados fundamentales en grafos infinitos, que suelen usarse en las demostraciones de otros resultados. Entre ellos, se tienen:

Lema 4.1.1 (Lema de Zorn)**.** *Si* M *es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cada subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior, entonces* M *tiene como mínimo un elemento maximal.*

Otro de los resultados básicos en grafos infinitos es conocido como el *Lema de König* que viene a decir que un grafo conexo es infinito si y sólo si contiene a un grafo infinito 1-camino o un grafo infinito 2-caminos, es decir, contiene a dos de las primeras figuras mostradas en la definición de grafo infinito. La formulación teórica de este Lema es la siguiente:

Lema 4.1.2 (Lema de König)**.** *Para cada vértice v_0 de un grafo infinito localmente finito y conexo G, hay un camino infinito $v_0v_1v_2\dots$ en el que la distancia en G desde el vértice v_k al vértice v_0 es k.*

Este lema se usa normalmente tanto en los grafos finitos como en los grafos numerables infinitos para probar que un grafo numerable es planar o k-coloreable si y sólo si todos los subgrafos finitos tienen la misma propiedad. Sin embargo, este lema no es condición suficiente para operaciones con grafos no numerables. Para éstos usaremos el *Teorema de selección de Rado*, que es una de las herramientas fundamentales en combinatorias infinitas.

Cottschalk dio una prueba corta de dicho teorema, basada en el *Teorema de Tychonoff* y posteriormente, Rado dio una prueba más directa, para la cual se necesitan las definiciones previamente indicadas. Con esas definiciones, ya se puede enunciar el *el Teorema de selección de Rado*, que es resultado muy notable en la teoría de grafos infinitos.

Teorema 4.1.1 (Teorema de selección de Rado)**.** *Sea E un conjunto y sea $\mathfrak{F}$ una colección de k-coloraciones prohibidas de subgrafos finitos de E. Entonces, E tiene una k-coloración $\mathfrak{F}$-admisible si y sólo si cada subconjunto de E la tiene.*

El *Teorema de Brujin* y *el Teorema de Erdös* son una consecuencia inmediata del teorema anterior. Estos teoremas afirman que un grafo es k-coloreable si todos sus subgrafos finitos lo son.

El *Teorema de Dilworth* sobre ordenes parciales afirma que para algún k entero positivo, un conjunto parcialmente ordenado M que no contiene $k+1$ elementos incompatibles 2 a 2 entre sí puede ser descompuesto en k subconjuntos totalmente ordenados.

Un *semi-árbol maximal* en un multigrafo conexo G es un bosque $\mathfrak{F}$ tal que la contracción de cada componente de $\mathfrak{F}$ a un vertice simple produce un multigrafo con conectividad infinita por aristas, o equivalentemente, tal que cada conjunto finito de aristas de cortes de G intersectan $\mathfrak{F}$.

Teorema 4.1.2. *Un multigrafo G tiene k* semi-árboles maximales disjuntos por aristas *si y sólo si en cada partición $V_1, V_2, \dots, V_m$ de $V(G)$ en un número finito de conjuntos existen por lo menos $k(m-1)$ aristas cuyos dos finales no pertenecen al mismo conjunto V_i.*

Este teorema no puede ser extendido a árboles maximales. En la Figura 4.2 se muestra un grafo que satisface sus hipótesis para $k = 2$, pero que no tiene dos árboles maximales disjuntos por aristas.

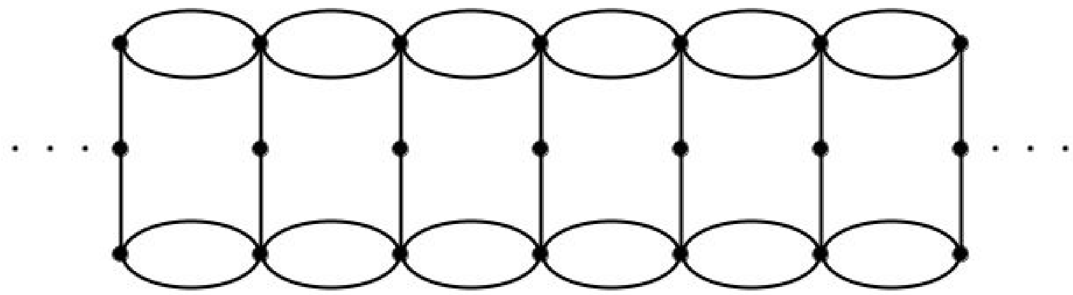

Figura 4.2: Grafo sin dos árboles maximales disjuntos por aristas.

4.2. Conectividad

El *Teorema de Menger* (debido al matemático austriaco Karl Menger (1902 - 1985), en 1927), en el caso finito afirma que *un grafo finito es k-conexo si y sólo si cada par de vértices están unidos por k caminos disjuntos por vértices*. Este teorema se interpreta en el sentido de que si G es un grafo simple finito y u, v dos vértices de G, entonces el tamaño del mínimo corte por aristas de u y v (es decir, el mínimo número de aristas cuya eliminación desconecta u y v) es igual al máximo número de arcos por aristas independientes dos a dos de u a v.

Este teorema de Menger se mantiene para el caso de grafos infinitos, y en ese contexto, se aplica al mínimo corte entre dos elementos del grafo, que sean bien vértices o bien aristas. Este resultado es debido a Halin, en 1974.

El siguiente resultado, de Ron Aharoni y Eli Berger, fue originalmente una conjetura propuesta por Erdös, conocida con el nombre de *Conjetura de Erdös-Menger*. Esta, conjetura, ya probada, que es equivalente al teorema de Menger cuando el grafo es finito, afirma que *dados V y W dos conjuntos de vértices en un digrafo infinito G, entonces, existe una familia P de V-W-arcos disjuntos y un conjunto separador que posee exactamente un vértice de cada arco en P.*

Otro resultado en el caso infinito es el siguiente, cuya prueba fue dada por Erdös.

Teorema 4.2.1. *Sean v y w vértices no adyacentes en un grafo G. Si no hay ningún conjunto de cardinal menor que α que separe a v y w, entonces hay α uv-arcos disjuntos por vértices.*

Al respecto, puede formularse la siguiente conjetura (véase [27]):

Conjetura 4.2.1. *Sea D un grafo dirigido y v y w vértices no adyacentes. Entonces, existen una colección $\mathfrak{P}$ de vw-arcos dirigidos, disjuntos por vértices y un conjunto S formado por los vértices internos de cada camino en $\mathfrak{P}$ tales que D/S contiene vw-arcos no dirigidos.*

Si D es finito, esta conjetura se reduce al *Teorema de Menger*, pero para grafos infinitos no se tiene ningún resultado, ni siquiera para el caso numerable. En todo caso, Podewski y Steffens probaron un caso particular de esta conjetura.

Teorema 4.2.2. *Sean v y w vértices no adyacentes en un grafo dirigido numerable D sin caminos infinitos dirigidos. Entonces, existe una colección $\mathfrak{F}$ de uw-arcos dirigidos disjuntos por vértices y un conjunto S de vértices internos de cada camino en $\mathfrak{F}$ tales que D/S no contiene uw-arcos dirigidos.*

Nótese que, aunque las restricciones dadas en este teorema son bastantes fuertes, dicho teorema tiene algunas aplicaciones interesantes. Por ejemplo, puede usarse para demostrar que la conjetura anteriormente indicada es cierta para grafos numerables si los arcos son reemplazado por los arcos más cortos. Esto puede ser visto considerando el grafo D' formado por todos los uv-arcos más cortos desde u hasta v. D' no tiene arcos dirigidos infinitos, por lo que se le puede aplicar el teorema.

Dirac estudió también esta conjetura y otras aplicaciones básicas de separación en grafos. Él y Thomassen caracterizaron los grafos con conectividad infinita, según:

Teorema 4.2.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo conexo infinito G:*

1. *G tiene conectividad infinita.*
2. *Todos los caminos infinitos en G pueden ser extendidos a un ciclo.*
3. *La eliminación de vértices de algún camino infinito de G produce un grafo conexo.*
4. *G no tiene puentes y la eliminación de vértices de cualquiera de sus ciclos produce un grafo conexo.*

5. *Cada secuencia finita de vértices de G está contenida en algún ciclo de G en el mismo orden.*

Sea G un grafo con conectividad infinita, sea A algún subconjunto finito de vértices de G, sean v y w vértices en A y sea k un entero positivo. En estas condiciones, de la condición 5 del teorema anterior se deduce que G tiene un uv-arco de longitud mayor o igual que k que no tiene otros vértices en A más que v y w.

Si esto se repite para otros pares en A, obtenemos una colección de arcos de todos los pares de vértices en A con ninguno de ellos encontrandose fuera intersectando entre sí. Denotemos ahora por G_1 a la unión de estos caminos. Sea $A_1 = V(G_1)$, y repitamos esta construcción con A_1, para conseguir un grafo A_2.

Reiterando este procedimiento, obtenemos una secuencia creciente de grafos finitos $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$, cuya unión tiene conectividad infinita. Por tanto, cualquier grafo con conectividad infinita tiene un subgrafo con infinita conectividad y contorno mayor, un hecho que responde a una cuestión de Erdös.

Además, se puede usar esta idea para establecer el siguiente resultado por inducción:

Teorema 4.2.4. *Sean α un cardinal infinito y k un entero positivo. Entonces, todos los grafos α-conexos tienen un subgrafo α-conexo cuyo contorno es al menos k.*

Marder ha probado que todos los grafos finitos de suficiente conectividad contienen una subdivisión de un grafo completo de mayor grado. Como el mismo observó, esto no puede ser extendido a los grafos infinitos de conectividad finita, dado que hay grafos planos infinitos de conectividad finita arbitrariamente grande.

No es difícil de ver, por otra parte, que un grafo α-conexo (con α infinito) debe contener una subdivisión del grafo completo $K_{\aleph_0}$ y así todos los grafos planares deben tener conectividad finita. La siguiente conjetura parece ser, por tanto, muy razonable:

Conjetura 4.2.2. *Para todo grafo planar finito G_0, existe un entero positivo k tal que todo grafo k-conexo G contiene un subgrafo contráctil a G_0.*

Claramente, todo grafo 3-conexo contiene una subdivisión de K_4. Al respecto, Halin y Jung han probado el siguiente:

Teorema 4.2.5. *Todo grafo 4-conexo tiene un subgrafo que puede conectarse, o bien, al grafo completo K_5 o bien al grafo octaedro.*

Este teorema sigue siendo válido también para K_5, sin más que suprimir una arista, pero no se sabe si sigue siendo cierto para el grafo del octaedro. Además, la conjetura puede ser cierta también para cada grafo no planar G_0 siempre que se le añadan algunas hipótesis al grafo G. Por ejemplo, se puede establecer la siguiente nueva conjetura:

Conjetura 4.2.3. *Todo grafo 6-conexo no planar contiene una subdivisión de* K_5.

Otra posible restricción que podría ser impuesta es que G no tenga arcos infinitos. Hang y Jung establecieron un resultado de este tipo:

Teorema 4.2.6. *Para cada* $k \in \mathbb{Z}^+$, *todos los grafos infinitos* k*-conexos con arcos infinitos 1-camino contienen una subdivisión de un grafo bipartito* $K_{k,\aleph_0}$.

A partir de este resultado pueden establecerse algunos corolarios interesantes:

Corolario 4.2.1. *Todo grafo infinito* k*-conexo que no posea ningún 1-arco infinito contiene una subdivisión de* K_{k+1}.

Corolario 4.2.2. *Todo grafo infinito 3-conexo planar contiene un arco infinito 1-camino.*

Polat ha estudiado propiedades de separación de grafos infinitos desde un punto de vista topológico y ha obtenido algunos resultados de naturaleza general sobre la estructura de grafos infinitos.

Una herramienta muy útil para trabajar con grafos infinitos es la *Teoría de Descomposición Simple*, que describimos en la siguiente sección.

4.3. Descomposiciones simples

Un resultado clásico de Wagner asegura que los grafos maximales finitos que no contienen subgrafos contraíbles a K_5 se obtienen de los grafos planares maximales y del grafo W de la Figura 4.3 mediante uniones de sucesiones de estos grafos hasta completar los subgrafos de orden dos o tres. Este resultado nos lleva al concepto de *descomposición simplicial*, por la cual estos grafos son descompuestos en subgrafos con grafos completos comunes.

Estas descomposiciones son generalizaciones de descomposiciones en bloque, y juegan un papel importante en muchos problemas extremales en la teoría de grafos finitos. Además, son también muy útiles en el estudio de grafos infinitos. Así, Halin desarrolló una teoría muy fuerte sobre ellas, muy interesante por sí misma. Aunque muchas de las propiedades de estas descomposiciones parecen bastante naturales, sin embargo, las pruebas formales son a menudo bastante complicadas. Comenzamos dando las siguientes definiciones:

Definición 4.3.1. *Sea* G *un grafo y sea* σ *un número ordinal. Para cada ordinal* $\lambda < \sigma$, *sea* G_λ *un subgrafo de* G. *Entonces, los grafos* G_λ *se dice que forman una* descomposición simplicial *de* G *si:*

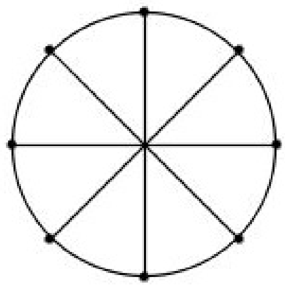

Figura 4.3: Grafo W.

1.

$$G = \bigcup_{i<\sigma} G_i.$$

2. Para cada $\tau < \sigma$, el grafo

$$(\bigcup_{i<\tau} G_i) \bigcap G_\tau = \emptyset$$

o es un subgrafo completo propio, tanto de

$$(\bigcup_{i<\tau} G_i)$$

como de G_τ

A los grafos G_λ se les llama *sumandos simples* de la descomposición.

Claramente, todo grafo constituye una descomposición simplicial de sí mismo. Además, los sumandos de una descomposición se pueden reunir para formar nuevas descomposiciones. Nosotros nos interesaremos en primer lugar por descomposiciones cuyos sumandos sean tan pequeños como sea posible.

Definición 4.3.2. *Se dice que un grafo es* primo *si no tiene un conjunto de vértices que induzca un grafo completo y cuya eliminación produzca un grafo desconexo.*

Definición 4.3.3. *Una descomposición en grafos primos se dice una* descomposición simplicial *que consiste en sumandos primos.*

Definición 4.3.4. *Una descomposición se dice* reducida *si los sumandos no contienen a ningún otro sumando.*

Halin dio un ejemplo de un grafo que no tiene una descomposición prima. Además, estableció el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1. *Cada grafo G que no contiene subgrafos completos infinitos tiene una descomposición en grafos primos reducida y los sumandos de esa descomposición son precisamente los subgrafos inducidos primos maximales de G.*

Notemos que sólo la descomposición de sumandos en la descomposición es única, el orden no, ya que, por ejemplo, cualquier sumando puede ser el inicial.

Ahora, sea $\mathcal{G}$ una colección de grafos finitos y sea G un grafo infinito que no contenga ninguna subdivisión de algún grafo en $\mathcal{G}$. Es fácil ver, usando el lema 4.1.1, que hay un grafo maximal G' con esta propiedad y conteniendo a G como un subgrafo maximal.

Nótese que por el Teorema 4.2.1, G' tiene una descomposición en grafos primos reducida y por tanto, para estudiar los grafos con la subdivisiones de grafos en $\mathcal{G}$ como subgrafos prohibidos es suficiente estudiar los grafos primos maximales.

Definición 4.3.5. *Se define una* base *de $\mathcal{G}$ como los grafos primos maximales que no contienen una subdivisión de ningún grafo en G.*

Halin ha establecido el siguiente resultado:

Teorema 4.3.2. *Cada grafo de una base de una colección de grafos finitos es finito o infinito numerable.*

En algunos casos, la base de $\mathcal{G}$ es conocida cuando $\mathcal{G}$ consiste en un grafo simple, pero para $n \geq 5$, la base de $\{K_n\}$ es desconocida. Como casos particulares, tenemos que la base de $\{K_5, K_{3,3}\}$ está formada por los grafos finitos o por los grafos numerables planares maximales 4-conexos y la base de $\{K_{3,3}\}$ es este conjunto aumentado con otro grafo, denotado K_5. Para grafos G de orden mayor que 5, la base de $\mathcal{G}$ es conocida sólo en casos muy especiales, como en el de los grafos estrellas o en los de los emparejamientos.

Con ayuda del teorema 4.2.6, puede demostrarse que la base de un arco o de un ciclo contiene sólo grafos finitos.

Las descomposiciones simpliciales pueden también ser usadas para describir grafos que no tengan subgrafos contraible a un miembro de $\mathcal{G}$. Halin obtuvo muchos resultados en este área, en particular, extendió el *Teorema de Wagner*, con el que se ha empezado esta sección, a grafos infinitos.

Teorema 4.3.3. *Si G es un grafo maximal no contraible a K_5, entonces cada sumando de una descomposición de grafos primos reducidos de G es o bien un grafo planar maximal 4-conexo o un grafo isomorfo al grafo W de la Figura 4.1.*

Halin también dio otra aplicación de las descomposiciones:

Teorema 4.3.4. *Sea G un grafo no numerable que no contenga subdivisiones de $K_{\aleph_0}$. Entonces, G tiene un conjunto finito de vértices cuya eliminación ocasiona un número de componentes no numerables.*

El siguiente resultado es una consecuencia de este teorema, el cual tiene una interesante conexión con el teorema 4.2.6. Dirac estudió el caso para $k = 2$.

Corolario 4.3.1. *Para $k < \aleph_0$, ningún grafo k-conexo no numerable contiene una subdivisión de $K_{k,\aleph_0}$.*

Los grafos G que no tienen subgrafos contráctiles a un miembro de $\mathcal{G}$ son difíciles de estudiar cuando $\mathcal{G}$ contiene grafos infinitos. Wagner se hizo esta pregunta en el caso finito, pero la respuesta es negativa. En efecto, si G consiste en el grafo completo K_3, la estrella $K_{1,3}$ y el arco 1-camino infinito, entonces el grafo G no tiene un subgrafo contraible a un elemento de G si y sólo si cada componente conexa de G es un arco finito. Si G es infinito, podemos siempre añadir una arista a G tal que cada componente del grafo resultante es un arco infinito.

4.4. Planaridad

Erdös estableció la extensión del *Teorema de Kuratowski* a grafos numerables, cuya prueba implica una simple, pero elegante, aplicación del Lema 4.1.2.

Teorema 4.4.1. *Un grafo numerable es planar si y sólo si no contiene una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.*

Una caracterización de los grafos planares no numerables está incluida en el siguiente resultado de Wagner:

Teorema 4.4.2. *Un grafo es planar si y sólo si:*

1. *no contiene una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$*
2. *su orden es como máximo $2^{\aleph_0}$*
3. *el número de sus vértices con grado mayor que 2 es al menos $\aleph_0$.*

También se han estudiado las representaciones de grafos planares que satisfacen ciertas propiedades adicionales.

Definición 4.4.1. *Una representación planar de un grafo se dice que es* libre-VAP *si el conjunto de sus vértices no tiene un punto de acumulación en el plano.*

Aquellos grafos infinitos locales que tienen representaciones libre-VAP son caracterizados por Halin, como sigue:

Teorema 4.4.3. *Un grafo localmente finito tiene una representacíon libre-VAP si y sólo si es numerable y no contiene subdivisiones de K_5, $K_{3,3}$ o algunos de los grafos de la siguiente figura:*

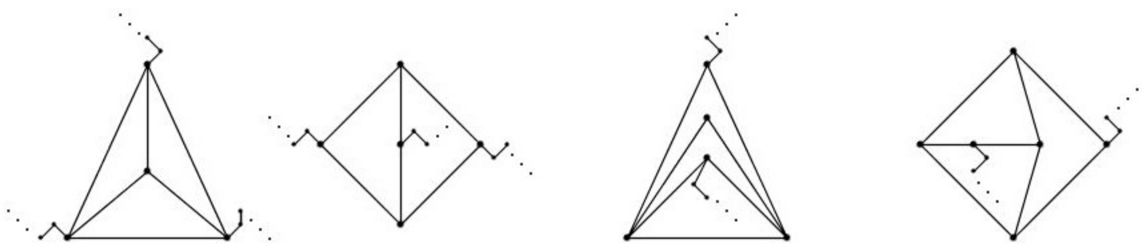

Figura 4.4: Grafos implicados en el Teorema 4.4.3.

Schmidt extendió posteriormente este teorema a todos los grafos. En su resultado hay algunos subgrafos adicionales excluidos con todos sus vértices de grado infinito. Por otra parte, Thomassen extendió a grafos infinitos el resultado en representaciones rectilíneas que se conoce como el *Teorema de Fary*, aunque Wagner lo formuló previamente a Thomassen.

Teorema 4.4.4. *Todo grafo plano tiene una representación rectilínea y todos los grafos localmente finitos con una representación libre-VAP tiene una representación lineal libre-VAP.*

Definición 4.4.2. *Una* representación convexa *de un grafo infinito es una representación lineal en la que cada cara es un conjunto convexo abierto cuyo borde es bien un ciclo o bien un 2-camino infinito.*

Tutte demostró que con una definición adecuada para grafos finitos, cada grafo finito 3-conexo tiene una representación convexa y Thomassen extendió el siguiente resultado:

Teorema 4.4.5. *Cada grafo 3-conexo localmente finito con una representación libre-VAP tiene una representación convexa.*

Se estudian ahora otras dos características bien conocidas de grafos planares, debidas a MacLane y a Whitney:

Definición 4.4.3. *Una 2-base de un grafo G es una base $\mathfrak{B}$ del espacio de los ciclos de G (que es el espacio vectorial generado por los ciclos de G como conjunto de aristas sobre el cuerpo $GF(2)$) tal que cada arista del grafo pertenece al menos a dos ciclos de $\mathfrak{B}$.*

El teorema de planaridad de MacLane afirma que un grafo finito es planar si y sólo si tiene una 2-base. Wagner se preguntó si este criterio de MacLane se podría generalizar a grafos planares infinitos. Si bien esta pregunta no había sido todavía respondida, Thomassen dio la siguiente respuesta al respecto:

Teorema 4.4.6. *Un grafo 2-conexo tiene una 2-base si y sólo si es planar y tiene una representación libre-VAP.*

Definición 4.4.4. *Dado un multigrafo G, el* dual *G^* es un multigrafo con la propiedad de que hay una correspondencia 1 a 1 entre los conjuntos de aristas de G y G^* tal que un subconjunto finito de $E(G)$ forma un ciclo si y sólo si al suprimir el correspondiente subconjunto finito de vértices $E(G^*)$ se desconecta el grafo.*

El *teorema de planaridad de Whitney* afirma que un multigrafo finito es planar si y sólo si tiene un dual.

Thomassen ha estudiado la dualidad en grafos infinitos. Su resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 4.4.7. *Un multigrafo 2-conexo G tiene un dual si y sólo si es planar y no existe ningún par de vértices unidos por infinitos arcos disjuntos dos a dos por aristas.*

Una generalización natural de grafos planares es la formada por los grafos infinitos que no contienen subdivisiones de K_5 o $K_{3,3}$. Thomassen caracterizó estos grafos con el término de *grafos solapados*, extendiendo de esa forma el criterio de planaridad de Tutte para grafos finitos, por el cual cada grafo finito planar 4-conexo es hamiltoniano.

Finalmente, indicar que Halin estudió los grafos maximales que satisfacen esta propiedad, que pueden ser construidos a partir de grafos planares maximales numerables 4-conexos.

4.5. Emparejamientos

La extensión que realizó König del *Teorema de Cantor-Bernstein* (por el cual, dados dos conjuntos A y B, si existe una función inyectiva de A en B y existe otra función inyectiva de B en A, entonces existe una correspondencia biunívoca entre A y B) es uno de los teoremas más sencillos sobre emparejamientos:

Teorema 4.5.1. *Sea G un grafo bipartito con subconjuntos de vértices A y B. Si G tiene tiene un emparejamiento M_A que cubre a A y un emparejamiento M_B que cubre a B, entonces tiene un emparejamiento perfecto contenido en $M_A \bigcup M_B$.*

Por su importancia, incluimos aquí la demostración de éste y de otros resultados de esta sección:

Demostración 4.5.1. *Sea H un subgrafo spanning de G con el conjunto de aristas $M_A \bigcup M_B$. Entonces, todos los vértices de H son de grado 1 ó 2 y es fácil ver que ninguna componente de H es un arco de longitud par.*

Entonces, toda componente de H es un arco de longitud infinita o impar o un ciclo de longitud par. Por tanto, toda componente tiene un emparejamiento perfecto, de donde sigue el resultado. $\square$

Tutte probó que un grafo localmente finito G tiene un emparejamiento perfecto si y sólo si no existe un conjunto finito de vértices S para el cual G/S tenga más componentes de orden impar que el cardinal de S. Este resultado fue extendido por McCarthy, según:

Teorema 4.5.2. *Sea A un conjunto de vértices de grado finito de un grafo G. Entonces, G tiene un emparejamiento que cubre a A si y sólo si no existe un conjunto finito S de vértices para el cual G/S tenga más componentes de orden impar que $\mid S \mid$, conteniendo solo vértices de A.*

Demostración 4.5.2. *La parte directa del teorema es trivial. Para probar el recíproco, supongamos que G no tiene emparejamiento cubriendo a A. Sea $E = E(G)$ y definamos una familia $\mathfrak{F}$ de 2-coloraciones prohibidas (colores 1 y 2) como sigue: una 2-coloración de aristas incidentes con un vértice v en A es* prohibida *si la arista no tiene color 1, y una 2-coloración de dos aristas con un final común es* prohibida *si ambas tienen color 1. Asumimos que E no tiene 2-coloraciones $\mathfrak{F}$-admisibles, así pues, por el teorema 4.1.1, E tiene un subconjunto finito E' que no tiene 2-coloraciones $\mathfrak{F}$-admisibles.*

Sea G' el subgrafo de G inducido por los vértices de G incidentes con aristas en E', y formemos un nuevo grafo H añadiendo a G' un grafo completo del mismo orden con cada vértice adyacente a estos vértices de G', que no están en A o que están en A y son adyacentes a un vértice que no está en G'. Dado que G' no tiene 2-coloraciones admisibles, H no puede tener un emparejamiento perfecto y por tanto, por el Teorema de Tutte, contiene un conjunto S' de vértices tal que $H - S'$ tiene más que $\mid S' \mid$ componentes de orden impar. Por ello, $S = S' \bigcap V(G)$ satisface la condición del teorema. $\square$

En este teorema es necesario que los vértices en A tengan grado finito. Esto está probado para el grafo bipartito completo $_{\aleph_0,\beta}$, en el que $\beta > \aleph_0$, por ejemplo.

Este último grafo tiene también la interesante propiedad de no poseer ningún conjunto de vértices que sea maximal, que pueda ser cubierto con un emparejamiento. Sin embargo, Steffens ha mostrado que los grafos numerables sí tienen ese conjunto de vértices.

El Teorema 4.5.2 se puede usar para establecer una extensión para grafos infinitos del Teorema de Hall (2.1.1) sobre sistemas de representaciones distintos:

Teorema 4.5.3. *Sea G un grafo bipartito con subconjunto de vértices A y B, siendo todos los vértices de A de grado finito. Entonces, G tiene un emparejamiento que cubre a A si y sólo si todo subconjunto finito S de A tiene al menos $|S|$ vértices adyacentes.*

El teorema 4.2.2 implica la siguiente extensión infinita del Teorema de König (4.1.2) para grafos bipartitos:

Teorema 4.5.4. *Cada grafo bipartito numerable contiene un emparejamiento M y un conjunto S de vértices cubierto por M tal que:*

1. *Ninguna arista de M une dos vértices de S.*
2. *G/S es libre por aristas.*

Es fácil encontrar emparejamientos perfectos en grafos numerables en los que cada vértice tiene grado finito. König probó un resultado más fuerte:

Teorema 4.5.5. *Sean α y β dos números cardinales con $\alpha \geq \aleph_0$ y $\alpha \geq \beta$. Sea G un multigrafo con todos los vértices de grado α en el que la multiplicidad de algunas de las aristas es como máximo β. Entonces, $E(G)$ se puede partir en α emparejamientos perfectos.*

Köning se preguntó si este resultado sigue siendo válido si la condición de multiplicidad de aristas se debilita, exigiendo *menos que* α en lugar de *como máximo* β. Esta pregunta resultó ser negativa, por el siguiente razonamiento:

Para $k = 0, 1, \ldots$, sea $\aleph_k + 1$ el cardinal más pequeño que excede a $\aleph_k$, y sea $\alpha = \sum \aleph_k$. Sea A un conjunto de cardinal α y sea G el grafo con $V(G) = A \bigcup \{x_0, x_1, \ldots\}$ (con $x_i \notin A$) y cada vértice x_i unido a cada vértice de A por $\aleph_i$ aristas múltiples. Entonces, G es α-regular ninguna multiplicidad de las aristas es α y no hay emparejamientos perfectos.

El *Teorema de Hall* (2.1.1) no ha sido extendido a los grafos infinitos en general, aunque se han obtenido algunos resultados notables en caso de ser A numerable.

El problema de encontrar una condición necesaria y suficiente para que un grafo bipartito numerable tenga un emparejamiento que cubra uno de sus subconjuntos fue primeramente resuelto por Damerell y Milner probando una conjetura previa de Nash-Williams (quien inmediatemente después dio una prueba alternativa a la de estos autores). Esta condición es bastante complicada y envuelve secuencias transfinitas de *funciones marginales*.

Posteriormente, el propio Nash-Williams obtuvo una condición más simple, que se describe a continuación, aunque para ello se nceesitan algunas definiciones previas.

Definición 4.5.1. *Se define el conjunto de los cuasi-enteros como el conjunto de los enteros junto con $+\infty$ y $-\infty$.*

La suma de cuasi enteros infinitos se define de manera natural, excepto cuando ambos $+\infty$ y $-\infty$ aparecen. En este caso, el resultado se toma como ∞. El ínfimo y el supremo de un conjunto de cuasi-enteros también se definen de forma natural y, finalmente, si λ es un límite ordinal, y si para cada $\lambda > 0$, a_0 es un cuasi-entero, entonces se define:

$$\lim_{\rho \to \lambda} a_\rho = \sup \{\inf \{a_\sigma : \theta < \sigma < \lambda\} : 0 < \lambda\}.$$

Consideremos un grafo bipartito G con conjuntos partitos A y B, siendo A numerable y B bien ordenado, esto es, escribimos $B = \{b_\theta : \theta < \lambda\}$, donde λ es un ordinal y $b_\theta \neq b_{\theta'}$ si $\theta \neq \theta'$.

A esta buena ordenación de B le asociamos una función con valores en los cuasi-enteros q, definida en los ordinales $k \leq \lambda$, de forma que $\Delta(k)$ es el conjunto de vértices de A adyacentes a vértices no pertenecientes a $\{b_\theta : \theta < k\}$ (así que $\Delta(0)$ es el conjunto de vértices aislados en A).

Ahora, sea $q(0) = - \mid \Delta(0) \mid$ y supongamos definido $q(k)$, para todo ordinal $k < \mu$. Definimos;

$$q(\mu) = \begin{cases} q(k) + 1 - \mid \Delta(\mu) - \Delta(k) \mid & \text{si } \mu \text{ es un sucesor ordinal, } \mu = k+1, \\ \lim_{k \to \mu} inf\, q(k) \mid \Delta(\mu) - \bigcup_{k<\mu} \Delta(k) \mid & \text{si } \mu \text{ es un límite ordinal} \end{cases}$$

Nash-Williams probó que si M es un emparejamiento de G cubriendo $\Delta(\mu)$, entonces el número de vértices de $\{b_\theta : \theta < \mu\}$ no cubiertos por M es como máximo $q(\mu)$. En particular, $q(\lambda) \geq 0$. Esto constituye la parte "fácil"de su resultado:

Teorema 4.5.6. *Sea G un grafo bipartito con subconjuntos de vértices A y B y supongmos que A es numerable. Entonces, G tiene un emparejamiento que cubre a A si y sólo si $q(\lambda) \geq 0$, para todo conjunto bien ordenado $b_\theta : \theta < \lambda$ de B.*

Nótese que el teorema 4.5.1 y el teorema 4.5.6 dan una condición necesaria y suficiente para la existencia de un emparejamiento perfecto en un grafo bipartito numerable.

Para terminar esta sección indicaremos que recientemente, R. Dharoni ha obtenido muchos resultados sobre emparejamiento en grafos infinitos. Por ejemplo, ha extendido el *Teorema de Köning* (teorema 4.5.4) al caso no numerable y ha usado ese resultado para extender el *Teorema de Podewski-Steffens* (teorema 4.2.2) al caso no numerable. También, muchos otros resultados de transversalidad de grafos pueden ser expresados en términos de emparejamientos en grafos bipartitos.

4.6. Grafos Eulerianos

El famoso *Teorema de Euler* sobre transversalidad de aristas de un grafo (véase Sección 2.1) ha sido extendido por Erdös, Grünwald and Vazsonyi al caso de los grafos y multigrafos infinitos 1-camino y 2-caminos, según (véase [8]):

Teorema 4.6.1. *Un multigrafo conexo tiene un recorrido infinito euleriano 1-camino empezando desde un vértice fijado v si y sólo si:*

1. *$E(G)$ es infinito numerable.*
2. *v tiene grado impar o infinito y el resto de los vértices tienen grado par o infinito.*
3. *No existe un conjunto finito de aristas cuya eliminación produza más de una componente infinita.*

Teorema 4.6.2. *Un multigrafo conexo tiene un infinito recorrido euleriano 2-camino si y sólo si:*

1. *$E(G)$ es infinito numerable.*
2. *todos los vértices tienen grado par o infinito.*
3. *No existe ningún conjunto finito de vértices cuya eliminación produzca más de dos componentes infinitas.*
4. *No existe ningún subgrafo euleriano finito en el que por eliminación de aristas se produzca más de una componente infinita.*

Nash-Willians extendió el teorema 4.6.1 a grafos dirigidos:

Teorema 4.6.3. *Sea D un multigrafo dirigido conexo y sea G su subgrafo subyacente (subgrafo obtenido al eliminar todas las aristas multiples posibles, dejando tan sólo una de ellas en cada caso). Entonces, D tiene un recorrido euleriano dirigido infinito 1-camino empezando desde un vértice dado v si y sólo si:*

1. *$E(G)$ es numerable.*
2. *Los grados de entrada y de salida de v satisfacen $\rho^+(v) = \rho^-(v) + 1$ para cada $w \neq v$ y coinciden para cualquier otro vértice distinto de v.*
3. *No hay ningún conjunto finito de aristas de G cuya eliminación produzca más de una componente infinita.*
4. *Cualquier conjunto de vértices con infinitos arcos de salidas tienen infinitos arcos de entrada.*

Nash-Williams ha encontrado también una condición necesaria y suficiente para que un multigrafo sea descomponible en 2-caminos infinitos además de en ciclos.

Además, si el corte consiste en suprimir aquellas aristas que unen un conjunto A de vértices a $V(G)/A$, entonces se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.6.4. *Un multigrafo G puede ser descompuesto en ciclos si y sólo si no tienen un conjunto de corte con un número impar de vértices.*

Aparte de todo lo anterior, se han estudiado también otras descomposiciones de grafos en arcos, caminos y ciclos. Así, Dirac se preguntó que cuándo se puede extender un recorrido cualquiera en un grafo a un recorrido euleriano. Una respuesta a esta pregunta es la siguiente:

Teorema 4.6.5. *Sea G un multigrafo con un 1-camino infinito euleriano empezando desde un vértice v. Entonces, cada recorrido empezando desde v puede ser extendido a un recorrido euleriano empezando desde v si y sólo si cada ciclo de G contiene a v o a un vértice de grafo infinito.*

4.7. Grafos Hamiltonianos

No es sorprendente que no se conozca ninguna condición necesaria y suficiente para la existencia de un arco hamiltoniano en un grafo infinito, pues como ya se comentó en la sección de preliminares de grafos finitos tampoco es conocida en éstos ninguna que sea operativa.

Con respecto a este caso infinito, obviamente un grafo hamiltoniano debe ser numerable. Otra condición necesaria es análoga a la tercera condición del teorema 4.6.1 y el teorema 4.6.2.

Un grafo se dice *k-indivisible* si la eliminación de un conjunto finito de sus vértices siempre produce un grafo con $k-1$ componentes infinitas como máximo. Claramente, cada grafo que tenga un arco hamiltoniano 1-camino infinito debe ser 2-indivisible y en el caso de arco hamiltoniano 2-camino infinito, debe ser 3-indivisible.

Nash-Williams obtuvo un análogo del *Teorema de Posa* (véase Sección 2.1) para grafos hamiltonianos finitos:

Teorema 4.7.1. *Sea G un grafo numerable con conjunto de vértices $v_1, v_2, \ldots$ Entonces:*

1. *Si G es 2-indivisible y $\rho(v_i) \geq i$ para cada i, entonces G tiene un arco hamiltoniano 1-camino infinito.*

2. *Si G es 3-indivisible y $\rho(v_i) \geq i+1$ para cada i, entonces G tiene un arco hamiltoniano 2-camino infinito.*

Otros conceptos y resultados conocidos sobre arcos o ciclos hamiltonianos en grafos finitos tienen también extensiones naturales al caso de los grafos infinitos. Así, Sekanina y Thomassen estudiaron los arcos hamiltonianos en potencias de grafos infinitos y Nash-Williams ha sugerido que el Criterio de Planaridad de Tutte puede ser extendido a los grafos infinitos:

Conjetura 4.7.1. *Cada grafo planar 2-indivisible 4-conexo tiene un arco hamiltoniano infinito.*

Thomassen trató de extender los arcos en general a arcos hamiltonianos y mostró que los grafos en los que esto puede hacerse son esencialmente los grafos con conectividad infinita.

Dirac también ha obtenido otros resultados sobre extensiones de arcos y Nash-Williams estudió las descomposiciones de grafos infinitos en arcos hamiltoniano.

Recordamos que un *tournament* (palabra inglesa que significa *torneo* en español pero que no tiene traducción apropiada en lenguaje de Teoría de Grafos) es una orientación de un grafo completo, es decir, un digrafo dirigido sin lazos en los que dos vértices cualesquiera distintos están unidos por un arco (véase [6], pág. 246). Al respecto, parece difícil extender al caso infinito el resultado que afirma que cada tournament finito tiene un arco hamiltoniano Kervin consideró tres condiciones, que juntas son suficientes para la existencia de un arco hamiltoniano 1-camino infinito en un tournament infinito. Las dos siguientes de ellas son claramente necesarias:

1. T es numerablemente infinito.

2. Para cada subconjunto cofinito A de $V(T)$, existen un subconjunto cofinito B de A y un vértice v en B tales que:

    a) $T/(B - v)$ tiene un arco hamiltoniano terminando en v.

    b) Para cada w en B, el subtournament $T(B)$ inducido por B contiene un arco dirigido desde v a w.

(recuérdese que un subconjunto cofinito de un conjunto X es un subconjunto A cuyo complementario en X es un conjunto finito).

Korwim conjeturó que estas dos condiciones son también suficientes, pero sin embargo, el siguiente tournament T, formado por el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \ldots\} \bigcup \{w_1, w_2, \ldots\}$ y cuyo conjunto de aristas está formado por las uniones $\{v_iv_j : i < j\} \bigcup \{v_iw_j : i < j\} \bigcup \{v_iw_j : i \neq 1\} \bigcup \{w_jv_i : i = 1\}$, desaprueba la conjetura.

Thomassen dio el siguiente resultado para arcos anti-dirigidos, es decir, aquéllos en los que las direcciones son alternadas:

Teorema 4.7.2. *Todo tournament numerablemente infinito tiene un 1-camino infinito y un arco hamiltoniano anti-dirigido 2-camino infinito.*

4.8. Teoría Cromática de Grafos

Como se ha mencionado anteriormente, el *Teorema de Selección de Rado* 4.1.1 implica el siguiente *Teorema de Brujin y Erdös* en coloración finita:

Teorema 4.8.1. *Sea G un grafo y sea k un entero positivo. Entonces, G es k-coloreable si y sólo si cada subgrafo finito de G lo es.*

Este resultado reduce además el estudio de grafos infinitos con número cromático finito al de grafos infinitos. Asimismo, en cierto sentido, puede ser también aplicable al caso de grafos de número cromático $\aleph_0$, porque debido al Teorema anterior, cualesquiera de tales grafos contienen una secuencia $\{G_k\}$ de grafos disjuntos dos a dos tales que $\chi(G_k) \leq k$.

Consideremos ahora algunas cuestiones sobre grafos que tienen un número cromático de, como máximo, $\aleph_0$.El primero fue formulado de forma independiente por Hadwiger y Nelson y ha sido mencionado por Erdös en muchos de sus trabajos:

Hadwiger y Nelson se preguntaron cuál es el número cromático de U, el grafo distancia unidad del plano euclídeo, cuyos vértices son los puntos del plano, y en el que dos vértices son adyacentes si y sólo si la distancia entre ellos es 1.

Al respecto, el grafo de la figura 4.5 muestra que $\chi(U) \geq 4$ y la desigualdad $\chi(U) \leq 7$ puede ser establecida tomando una teselación hexagonal del plano con hexágonos de diámetro cercano a 1, y coloreando de igual forma todos los puntos de cada hexágono.

La segunda cuestión se debe a Erdös, que se preguntó si es cierto que para cada entero positivo k, todo grafo con número cromático $\aleph_0$ contiene un subgrafo $\aleph_0$-cromático cuyo contorno es como mínimo k.

A su vez, para cada grafo cuyo número cromático sea mayor que $\aleph_0$, una de las preguntas que surgen de manera natural es si esos grafos contienen un triángulo.

Erdös y Rado respondieron negativamente a esta cuestión y por ello es sorprendente que tal grafo contenga un 4-ciclo. Ambos resultados fueron generalizados por Erdös y Hajnal, como se muestra en los dos siguientes teoremas, en los que α^+ denota al cardinal más pequeño excediendo a α:

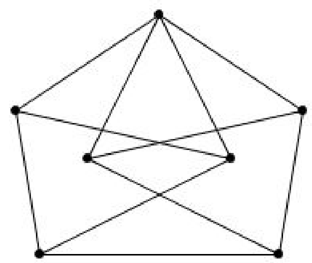

Figura 4.5: Grafo U.

Teorema 4.8.2. *Para cada entero positivo k, existe un grafo de número cromático mayor que $\aleph_0$, que no contiene ciclos impares de longitud menor que k.*

Teorema 4.8.3. *Para todo cardinal infinito α, todo grafo con número cromático excediendo a α contiene a $K_{n,\alpha}$ para cada entero positivo n.*

Teniendo en cuenta la *hipótesis generalizada del continuo* entonces la conclusión del teorema 4.8.3 se puede extender a los grafos que contengan a $k_{\beta,\alpha}$, para un cardinal β verificando $\beta^+ < \alpha$.

Más aún, también ocurre que dado un cardinal $\alpha \geq \aleph_0$, existe un α^+ grafo cromático que no contiene a $K_{\alpha,\alpha}$ ni $k_{\aleph_0}$. Halin ha probado un resultado referente a esto en particular:

Teorema 4.8.4. *Para cada cardinal infinito α, todo grafo de número cromático superior a α contiene una subdivisión de K_α.*

Halin ha considerado el problema de extender este teorema a $K_{\aleph_0}$ y dio una fórmula alternativa de esta cuestión en términos de una descomposición simplicial. Sin embargo, él mismo la respondió de forma negativa (incluso para $\aleph_1$).

Veamos ahora algunas cestiones relativos al grado. El primer resultado trata sobre grafos orientables y se debe a Fodar:

Teorema 4.8.5. *Si un grafo G se puede orientar de manera que un vértice tenga grado de salida menor que α, entonces $\chi(G) \leq \alpha$.*

Otro resultado útil, que se puede probar fácilmente sobre grafos infinitos, afirma que cada grafo k-cromático contiene un subgrafo de grado como mínimo $k-1$. Erdös y Hajnal obtuvieron un resultado análogo para grafos infinitos cuya prueba se basa en el teorema anterior:

Teorema 4.8.6. *Si G es un grafo α-cromático y $\beta < \alpha$, entonces G tiene un subgrafo cuyo grado mínimo es al menos β.*

Erdös y Hajnal dieron un ejemplo que muestran que este teorema es restringido en el hecho de que cada grafo α-cromático no necesita contener un subgrafo en el cual el grado de cada vértice es al menos α.

El siguiente resultado sigue del teorema 4.8.6:

Corolario 4.8.1. *El árbol T_α es un subgrafo de todo grafo cuyo número cromático sea mayor que α.*

Un grafo que contenga un grafo maximal enraizado normal es claramente $\aleph_0$-coloreable, dado que los vértices a distancia k de la raíz del árbol no son nunca adyacentes.

De ahí sigue que, si G tiene un número cromático mayor que $\aleph_0$, entonces, según resultados de árboles infinitos, G debe contener a $K_{\aleph_0}$ o a una subdivisión del multigrafo de orden $\aleph_0$ en el que todos los vértices estén unidos por $\aleph_1$ aristas. Un problema relacionado es el siguiente: *¿Contiene cada grafo de número cromático mayor o igual que* $\aleph_0$ *un subgrafo de conectividad infinita?*

Babai y Nesetril estudiaron las propiedades de simetría de grafos que tienen un número cromático alto y mostraron que cada grafo α-cromático G es un subgrafo inducido de un grafo α^+-cromático rígido H. Entonces, se preguntaron que si G no contiene un subgrafo k_α, ¿podía ser que H fuese α-cromático?

Finalmente, para terminar con esta sección, vamos a comentar un invariantes de grafos referido al número cromático.

Hajnal y Erdös han introducido el *número de coloración* de un grafo G , denotado $col(G)$. Este número es el cardinal más pequeño α tal que existe una buena ordenación de $V(G)$ con la propiedad de que un vértice v está unido a menos de α vértices más pequeños de v.

Al respecto, no es difícil probar que $\chi(G) \leq col(G)$. Erdös y Hajnal probaron algunos de los resultados anteriores tomando hipótesis más débiles, sin más que reemplazar el número cromático por el número de coloración. Así, probaron el siguiente teorema, análogo al Teorema 4.8.1.

Teorema 4.8.7. *Sea G un grafo y sea k un entero positivo. Si $col(G) \leq k+1$ para cada subgrafo finito H de G, entonces $col(G) \leq 2k$. Además, existe un grafo numerable G, con $col(G) = 2k$, tal que ningún subgrafo finito suyo H verifica $col(H) > k+1$.*

Bibliografía

[1] Bauer, F., Hua, B., Jost, J., The dual Cheeger constant and spectra of infinite graphs, *Adv. Math.* **251** (2014), 147–194.

[2] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, Yde Venema, Modal Logic, Cambridge University Press. 2002.

[3] Boza, L., Diánez, A., Márquez, A., The center of an infinite graph, *Discrete Math.* **161** (1996), no. 1-3, 45–52.

[4] de Bruijn, N. G., Erdös, P., A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, . *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **54** = *Indagationes Math.* **13**, (1951). 369–373.

[5] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I.M. Pelayo and M.L. Puertas, On the metric dimension of infinite graphs, *Discrete Applied Mathematics* **160** (2012) 2618-2626.

[6] John Clark and Derek Allan Holton, A first look at Graph Theory, World Scientific. Singapore, 1991.

[7] Dirac, G., A Note on infinite graphs, *Discrete Math.* **11** (1975), 107–118.

[8] P. Erdös, T. Grünwald and E. Vazsonyi, Uber Euler- Linien unendlicher Graphen, *J. Math. Phys., Mass. Inst. Techn.* **17** (1938), 59-75.

[9] Halin, Rudolf, A problem concerning infinite graphs. Recent advances in graph theory, Proceed. of the *Second Czechoslovak Sympos.*. Prague, 1974, pp. 233–237. Academia, Prague, 1975.

[10] Halin, R., A problem in infinite graph-theory, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **43** (1975), 79–84.

[11] Halin, R., Simplicial decompositions of infinite graphs, *Advances in graph theory*. Cambridge Combinatorial Conf., Trinity Coll., Cambridge, 1977. = *Ann. Discrete Math.* **3** (1978), 93–109.

[12] Halin, R., Some problems and results on infinite graphs. Graph theory in memory of G. A. Dirac (Sandbjerg, 1985), 195–210. *Ann. Discrete Math.* **41**, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[13] Halin, R., Miscellaneous problems on infinite graphs, *J. Graph Theory* **35**:2 (2000), 128–151.

[14] A. S. Kechris, Classical descriptive set theory. Graduate Texts in Mathematics, Springer. 1995.

[15] Komjáth, Péter, The chromatic number of infinite graphs—a survey, *Discrete Math.* **311**:15 (2011), 1448–1450.

[16] König, Dénes, Theory of finite and infinite graphs. Translated from the German by Richard McCoart. With a commentary by W. T. Tutte and a biographical sketch by T. Gallai. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990. vi+426 pp. ISBN: 0-8176-3389-8.

[17] Y.N. Moschovakis, Notes on set theory. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer. 2006.

[18] Y. N. Moschovakis, Descriptive set theory de(American Mathematical Society, Matheatical Surveys and Monographs, volume 155). 2009.

[19] C. St. J. A. Nash-Williams, Decomposition of Graphs into Closed und Endless Chains, *Proc. London Math. Soc.***10** (1960), 221-238.

[20] C. St. J. A. Nash-Williams, Euler Lines in Infinite Directed Graphs, *Canad. J. Math.* **18** (1966), 692-714

[21] Nash-Williams, C. St. J. A., Infinite graphs—a survey, . *J. Combinatorial Theory* **3** (1967), 286–301.

[22] W. Pohlers, Proof Theory. Universitext, Springer. 1989.

[23] R. Rado, Axiomatic Treatment of Rank in Infinite Sets, *Canad. J. Math.* **1** (1949), 337-343.

[24] R. Smullyan, First order Logic. Springer 1968.

[25] Thomassen, C., On the existence of certain subgraphs in infinite graphs, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **77** = *Indag. Math.* **36** (1974), 406–410.

[26] Thomassen, Carsten, Duality of infinite graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **33**:2 (1982), 137–160.

[27] C. Thomassen, Infinite graphs en “Further selected topics in Graph Theory"(capítulo 5). L. W. Beineke and R. J. y Wilson editors, 1983. 129-160.

[28] W. T. Tutte, The Factorization of Locally Finite Graphs, *Canad. J. Math.* **2** (1950), 44-49.