FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Trabajo de Fin de Grado:

Espacios de clausura de Čech

Autor:

Manuel Rodríguez Gómez

Tutor:

Rafael Ayala Gómez

2020-2021

Índice

1. Abstract

Čech closure spaces were defined by Čech in [3] and are obtained from Kuratowsky closure operator by omitting the idempotent condition. After many decades of their introductionn they are now becoming objects of increasing interest and importance due to their possibilities of aplication in many aplied fields such as digital topology, evolutionary biology, genetics or chemistry.
In this work, we present the basics topological properties of closure Čech spaces (separation axioms, compadness, and connectedness) and we study in what conditions they are induced by a binary relation.

2. Introducción

La Topología general, presentada habitualmente partiendo de las nociones básicas de distancia o conjunto abierto, no es el marco adecuado para estudiar los conjuntos discretos, que aparecerán en los más variados campos científicos.

Se trata, por lo general, de conjuntos que aparecen en problemas susceptibles de ser representados por grafos, y cuya solución requiere el análisis y clasificación de grandes conjuntos de datos. En ellos surge de forma natural una noción de ”proximidad” o ”vecindad” entre sus elementos, y términos topológicos relacionados con la descripción de su evolución o con cambios en las relaciones entre sus componentes como ”semejanza”, ”entorno”, ”conexión”, ”continuidad de un proceso”, etc. Pero el problema es que la formalización de esas ideas más o menos precisas no se puede realizar mediante la noción de ”abierto”, que es una idea sin relación con el mundo real que pretende trasladar las propiedades de los intervalos abiertos de números reales a espacios abstractos. Es decir, un concepto íntimamente ligado a la naturaleza ”continua” de los números, reales, incompatible con la realidad de los modelos a los que se intenta aplicar. Se trata pues, de desarrollar una idea de proximidad de naturaleza topológica, pero susceptible de ser aplicada a un mundo discreto.
Una solución a estas dificultades podría ser, como ya hizo Kuratowski en [13], tomar la noción de ”operador clausura” como punto de partida para definir espacio topológico, y se basa en la idea de posición ”cercana” o ”próxima” a una zona. Los cuatro axiomas elegidos por Kuratowski en su definición reflejarán las propiedades que se cumplen en un espacio euclídeo de que cuando a un punto se le añaden los puntos límites de sus sucesiones, se amplía el conjunto, y que dicha operación es finitamente aditiva e idempotente. Sin embargo, la propiedad de idempotencia de la clausura hace inadecuado usar esta idea cuando se estudian, por ejemplo, fenómenos de difusión o propagación en los que interesa el análisis de la evolución temporal de un conjunto cuando se le van agregando los puntos a los que se accede desde él a medida que el fenómeno actúa sobre ellos, hasta que se estabiliza. Por tanto, parece natural que se disponga de una idea de clausura de un conjunto que evolucione, que vaya cambiando en sucesivas etapas, lo que se consigue prescindiendo de la condición de idempotencia. Esta idea ya la consideró Čech al definir en [3] el concepto de ”espacio de clausura” y al desarrollar toda la topología general a partir de él. Aunque el motivo que llevó a Čech a adoptar este punto de vista fue que en ciertos espacios de funciones el operador clausura inducido por la nociones de convergencia consideradas, no era idemportente, (ver [19] para más detalles), en los últimos veinte años, los espacios de clausura han ido revelándose como unos objetos de creciente interés e importancia en topología digital ([22]), estructura de redes ([19]), genética ([25]) y biología evolutiva ([26]) y ([10]) sistemas de reacciones químicas ([27]) y estructuras de macromoléculas ([19]).

En este trabajo, dividido en nueve Capitulos, se presenta una breve introducción a las nociones y resultados básicos de los espacios de clausura de Čech o C-espacios.

En el Capitulo 1 se da un resúmen de las nociones básicas de topología que se usarán a lo largo del texto. En el Capitulo 2, se presentarán las descripciones del operador de clausura de Čech, operador interior asociado, abiertos y cerrados en un C-espacio. Se prueba cómo un C-espacio queda caracterizado por sus entornos y se indican algunos ejemplos de interés, como el C-espacio asociado a un grafo. El Capitulo 3 está dedicado a las funciones continuas entre C-espacios y el cuarto se dedica a los subespacios, productos y cocientes del C-espacio. En cuanto a los axiomas de separación, serán tratados en el Capitulo 5, conviene señalar que las nociones de C-espacio regular y completamente regular se definen en términos del operador clausura y no de conjuntos cerrados, como en el caso de los espacios topológicos. Además no existe una definición estándar de normalidad, y se indican algunas de las que se pueden encontrar en la literatura. En los Capitulos 6 y 7 se tratan los C-espacios compactos y conexos respectivamente, y en el octavo se recogen las definiciones y propiedades básicas de las relaciones binarias, como pueden ser la clausura transitiva de una relación o el algoritmo de Warshall, que es el método clásico para obtenerla. Por último, en el Capitulo 9 se tratan los C-espacios casi discretos, que son quizás los más importantes en cuanto a las aplicaciones. Estos espacios tienen dos propiedades especiales. Por un lado, en ellos, al igual que en los grafos, el operador clausura viene determinado por su valor en cada punto, y por otro, dicho operador está inducido por una relación binaria. Por tanto, un C-espacio de n elementos se puede caracterizar por una matriz booleana, y el espacio topológico asociado por la n-ésima potencia de dicha matriz.

3. Nociones preliminares de topología

Habitualmente, la noción de espacio topológico que se presenta en un primer curso de Topología se da en términos de conjuntos abiertos.

Definición 3.0.1. *Dado un conjunto X, un espacio topológico, es un par (X,τ), donde $\tau \in \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes propiedades:*

- $\emptyset$,$X \in \tau$.
- *Si* A,$B \in \tau$ *entonces* $A \cap B \in \tau$.
- *Si* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *es una familia de subconjuntos de* X *tal que* $A_i \in \tau$, *entonces* $\cup_{i\in\mathcal{I}} \in \tau$

La familia τ se llama topología sobre X, y sus elementos de llaman τ-abiertos.

Definición 3.0.2. *Un conjunto A se llama τ-cerrado si $X - A \in \tau$, si $\mathcal{F}_\tau$ es la familia de los τ-cerrados, se verifica:*

- $\emptyset$,$X \in \mathcal{F}_\tau$
- *Si* A,$B \in \mathcal{F}_\tau$ *entonces* $A \cup B \in \mathcal{F}_\tau$.
- *Si* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *es una familia de subconjuntos de* X *tal que* $A_i \in \mathcal{F}_\tau$, *entonces* $\cap_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{F}_\tau$.

En un espacio topológico (X, τ), a cada $A \subseteq X$ se le puede asociar el siguiente par de subconjuntos.

Definición 3.0.3. *La clausura o adherencia de A, denotado $\bar{A}^{\tau}$ (o simplemente $\bar{A}$) es el menor $\mathcal{F}_{\tau}$-cerrado que lo contiene. Es decir*

$$\bar{A} = \cap\{F \in \mathcal{F}_{\tau}; A \subseteq F\}$$

Dicho conjuntos satisface las siguientes propiedades llamadas propiedades características de $\bar{A}$.

- $C1)$ $\bar{\emptyset} = \emptyset$.
- $C2)$ $A \subseteq \bar{A}$.
- $C3)$ *Dados* A,$B \subseteq X$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- $C4$ $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Definición 3.0.4. *El interior de A, denotado por $i_{\tau}(A)$ o simplemente $i(A)$, es el mayor τ-abierto contenido en A, es decir,*

$$i(A) = \cup\{U \in \tau; U \subseteq A\}$$

. Dicho conjunto satisface las siguientes propiedades:

- $I1)$ $i(X) = X$.
- $I2)$ $i(A) \subseteq A$.
- $I3)$ *Dados* A,$B \subseteq X$, $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$.
- $I4)$ $i(i(A)) = i(A)$.

La relación entre $\bar{A}$ e $i(A)$ viene dada por la fórmula:

$$i(A) = X - \overline{(X - A)}$$

Otra forma de definir espacio topológico, debida a Kuratowski, consiste en tomar como punto de partida las propiedades $I1 - I4$ de la clausura de un conjunto. Este método tiene la ventaja sobre el primero de ser más geométrico e intuitivo, pues mientras que los abiertos de un espacio euclídeo no se pueden representar gráficamente, la clausura o cierre de un conjunto sí, t de hecho, los objetos más familiares de la geometría son conjuntos cerrados. La definición de Kuratowski toma como punto de partida la noción de proximidad a un conjunto, y se define a continuación.

Definición 3.0.5. *Dado un conjunto X, un operador clausura (de Kuratowski) es una aplicación $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ que cumple las siguientes condiciones.*

- $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

- $A \subseteq \varphi(A)$.
- $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.
- $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$.

Se verifica que la familia

$$\tau_\varphi = \{A \subseteq X; \varphi(X - A) = X - A\}$$

es una topología sobre X cuyos cerrados son precisamente los puntos fijos de φ. Es decir $\bar{A}^{\tau_\varphi} = A$ si y solo si $\varphi(A) = A$.

Ejemplo 3.0.6. *(Espacios pseudométicos) Una clase especialmente importante de espacios topológicos son los espacios (pseudo)métricos que constituyen una generalización de los espacios euclídeos, y que son pares* (X, d)*, donde* $d : (X \times X) \longrightarrow \mathcal{R}_+$ *es una aplicación que satisface las siguiente condiciones:*

- *d*1*)* $d(x, y) \geq 0\ \forall x, y \in X \times X$.
- *d*2*)* $d(x, y) = 0$ *si* $x = y$.
- *d*3*)* $d(x, y) = d(y, x)$.
- *d*4*)* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall x, y, z \in X \times X$.

*Cuando se cumple el recíproco de d*2*), d se llama métrica o distancia, y* (X, d) *espacio métrico.*
En un espacio (pseudo)métrico (X, d) *a cada* x *se le asocia una familia* $B_d(x; \epsilon) = \{y \in X; d(x, y) < \epsilon, \epsilon > 0\}$ *llamada familia de las bolas abiertas de centro* x *y radio* ϵ.
La topología métrica inducida por d *es la familia*

$$\tau_d = \{G \in X; \forall x \in G, \forall \epsilon > 0 \exists B_d(x; \epsilon) \subseteq G\}$$

En un espacio topológico (X, τ)*, a cada* $x \in X$ *se le puede asociar una familia de conjuntos que desempeñan un papel análogo a las bolas abiertas en un espacio métrico.*

Definición 3.0.7. *Dado un espacio topológico* (X, τ) *y* $x \in X$*,* $N \subseteq X$ *se llama* τ*-entorno de* x *o simplemente entorno de* x *si* $x \in i(N)$*, la familia de entornos de* x *de denota por* $\mathcal{W}_x^\tau$ *y permiten extender los conceptos de punto límite de una sucesión y de continuidad de una función en un punto de un espacio euclídeo.*

Nótese que $x \in \bar{A}$ si y solo si $N \cap A \neq \emptyset \forall N \in \mathcal{W}_x^\tau$.
La familia $T(X)$ de todas las topologías sobre un conjunto X es un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 3.0.8. *Si* τ,$\tau' \in T(X)$*,* $\tau \leq \tau'$ *si* $\tau \subseteq \tau'$ *y se dice que* τ' *es más fina que* τ*, o que* τ *es menos fina que* τ'*, o también que* τ *es más gruesa que* τ'.

Nótese que $\tau \leq \tau'$ si y solo si $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau'}$, es decir, si y solo si para cada $A \subseteq X$ se cumple que $\bar{A}^{\tau'} \subseteq \bar{A}^{\tau}$.

Definición 3.0.9. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \tau$, se cumple que para cada $G \in \tau$, $G = \cup_{i \in \mathcal{I}} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ se llama base de τ.*

La condición dada es equivalente a la siguiente:
Si $G \in \tau$ y $x \in G$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $B_x \in G$.
Para cada $x \in X$, una base de τ-entornos de x es una familia $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{W}_x^\tau$ tal que para cada $N \in \mathcal{W}_x^\tau$, existe $B_x \in \mathcal{B}_x$ con $x \in B_x \subseteq N$.
Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

- $B1)$ $\mathcal{B}$ es un recubrimiento de X.
- $B2)$ Si B_1,$B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Entonces existe una única topología sobre X que tiene a $\mathcal{B}$ como base, denotada por $\tau(\mathcal{B})$ y llamada topología generada por $\mathcal{B}$.
Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ es cualquier familia de subconjuntos de X, la familia $\mathcal{B}_A$ formada por $\mathcal{B} \cup \{x\}$, y las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}$, satisface las condiciones $B1$ y $B2$ y $\mathcal{A}$ se llama subbase de $\tau(\mathcal{B}_\mathcal{A})$.
Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, $\tau_{|A} = \{G \cap A; G \in \tau\}$ es una topología sobre A, llamada topología relativa sobre A o topología inducida por τ sobre A. Se cumple que si $B \subseteq A$, $\bar{B}^{\tau_{|A}} = \bar{B} \cap A$ y por tanto los cerrados de $\tau_{|A}$ son los conjuntos de la familia $\{F \cap A; F \in \mathcal{F}_\tau\}$. Si $x \in A$, se tiene que $\mathcal{W}_x^{\tau_{|A}} = \{N \cap A; N \in \mathcal{W}_x^\tau\}$ y si $B \subseteq A$, $i_{\tau_{|A}}(B) = A \cap i_\tau(B \cup (X - A))$

Definición 3.0.10. *Una aplicación $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ es continua en $x \in X$ si dado $N \in \mathcal{W}_f^{\tau'}(x)$ se cumple que $f^{-1}(N) \in \mathcal{W}_x^\tau$, y continua si lo es en cada punto de X.*

En el siguiente resultado se recogen algunas condiciones equivalentes a la continuidad de una aplicación.

Proposición 3.0.11. *Dada una aplicación $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ son equivalentes:*

- *a) f es continua.*
- *b) Si $G \in \tau'$, $f^{-1}(G) \in \tau$.*
- *c) Si $F \in \mathcal{F}_{\tau'}$, $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_\tau$.*
- *d) Si $A \subseteq X$, $f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(A)}$.*
- *e) Si $B \subseteq Y$, $\bar{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$.*
- *f) Si $B \subseteq Y$, $f^{-1}(i(B)) \subseteq i(f^{-1}(B))$.*

Nótese que si $\mathcal{B}$ es base de τ', entonces la condición b) de la proposición anterior puede sustituirse por:

b′ Si $B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \tau$.
Una aplicacion $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ que sea continua, biyectiva y con inversa continua se llama homeomorfismo de X en Y.

Los espacios métricos en los que toda sucesión admite un punto adherente, es decir, una sucesión convergente, se llaman espacios compactos. Dicha propiedad es equivalente a la propiedad de Heine-Borel-Lebesgue. Es decir, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.0.12. *Si (X, d) es un espacio métrico, son equivalentes:*

- *1) (X, d) es compacto.*
- *2) Todo recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ de x por abiertos admite un subrecubrimiento finito.*

Este resultado no es cierto en cualquier espacio topológico, si se quiere definir una noción de compacidad en términos de convergencia se puede utilizar el concepto de filtro, debido a H.Cartan,

Definición 3.0.13. *Un filtro sobre un conjunto X es una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:*

- *$F1$) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.*
- *$F3$) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.*
- *$F3$) Si A,$B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

Si (X, τ) es un espacio topológico, y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X se dice que x es adherente a $\mathcal{F}$ si $x \in \cap\{\bar{F}; F \in \mathcal{F}\}$. De este modo, el resultado anterior queda:

Proposición 3.0.14. *Si (X, τ) es un espacio topológico, son equivalentes:*

- *a) Todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X tiene al menos un punto adherente.*
- *b) (X, τ) satisface la propiedad de Heine-Borel-Lebesgue.*

Se puede utilizar cualquiera de las dos condiciones para definir espacio topológico compacto.

Recordemos, por último que dado un espacio topológico, (X, τ) y $A \subseteq X$, A se llama conexo si no existe ningún subconjunto $B \subseteq A$ propio que sea a la vez abierto y cerrado en $(A, \tau_{|A})$. Es decir si A no admite ninguna partición formada por dos subconjuntos abiertos (cerrados). Se dirá que $(A, \tau_{|A})$ es conexo por caminos si dados x,$y \in A$ existe un camino de x a y en A. Es decir, una aplicación continua $f : ([0, 1], d_e) \longrightarrow (A, \tau_{|A})$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

4. Espacios clausura de Čech

4.1. Operador clausura de Čech

Definición 4.1.1. *Dado un conjunto X, un operador clausura de Čech en X es una aplicación φ :$\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ que satisface las siguientes propiedades:*

- $\varphi(\emptyset) = \emptyset$
- *Si $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq \varphi(A)$*
- *Si $A, B \subseteq X$ entonces, $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$*

El par (X, φ) se llama espacio de clausura de Čech o simplemente C-espacio.

Observación 4.1.2. *Nótese que si $A, B \subseteq X$ y $A \subseteq B$ se tiene que $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$. En efecto, como $B = A \cup B$ entonces, $\varphi(A) \subseteq \varphi(A) \cup \varphi(B) = \varphi(A \cup B) = \varphi(B)$.*

Ejemplos de C-espacios

Ejemplo 4.1.3. *Dado un conjunto X, sea $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ y $\varphi(A) = X$ para $\emptyset \neq A \neq X$. Entonces, φ es un operador clausura de Čech llamado operador indiscreto.*

Ejemplo 4.1.4. *Si $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ viene dada por $\varphi(A) = A$ para cada $A \subseteq X$, entonces φ es un operador clausura de Čech llamado operador discreto.*

Ejemplo 4.1.5. *Sea X un conjunto. Definiendo $\varphi(A) = A$ si A es un subconjunto finito de X y $\varphi(A) = X$ si A es un subconjunto infinito, obtenemos un operador clausura φ.*

Ejemplo 4.1.6. *La construcción anterior admite la siguiente generalización. Sea X un conjunto y sea m un cardinal infinito. Se obtiene un operador de clausura φ sobre X definiendo $\varphi(X) = X$ si el cardinal de X es menor que m y $\varphi(A) = X$ en caso contrario.*
El operador del ejemplo anterior se obtiene para m finito.
El espacio (X, φ) es discreto si y solo si el cardinal de X es menor que m.

Ejemplo 4.1.7. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto bien ordenado. Entonces $\varphi(A) = \{y \in X;$ existe $x \in A$ con $x \leq y\}$ es un operador clausura. Basta comprobar que $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$, pero una inclusión es inmediata y en la otra se usa que $\leq$ es un buen orden. Si X contiene al menos tres elementos, y x es el menor de ellos, sea y el sucesor de x, entonces $\varphi(x) = \{x, y\}$, y $\varphi(\varphi(x)) = \{x, y, z\}$.*

Ejemplo 4.1.8. *Sea X un conjunto y $x \in X$. Se define la operación clausura φ en X como $\varphi(A) = A$ si A es finito y $\varphi(A) = A \cup \{x\}$ en caso contrario.*

Ejemplo 4.1.9. *Sea X un conjunto. Fijamos un punto x de X. Sea $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ y $\varphi(A) = A \cup \{x\}$ para $A \neq \emptyset$. Claramente φ es un operador clausura para X.*

Ejemplo 4.1.10. *Otros ejemplos de C-espacios son los asociados a una distancia, en efecto, si* (X, d) *es un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $A \subseteq X$ *sea* $d(x, A) = inf_{y \in A}\{d(x, y)\}$.

Definición 4.1.11. *Para cada* $\varepsilon \geq 0$*, sea* $\varphi_{d,\varepsilon} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *la aplicación dada por* $\varphi_{d,\varepsilon}(A) = \{x \in X; d(x, A) \leq \varepsilon\}$.

Proposición 4.1.12. $(X, \varphi_{d,\varepsilon})$ *es un C-espacio de clausura y* $\varphi_{d,\varepsilon}$ *es el operador asociado a él y el operador es topológico si y solo si* $\varepsilon = 0$.

Demostración. Es obvio que $\varphi_{d,\varepsilon}(\emptyset) = \emptyset$ y que $A \subseteq \varphi_{d,\varepsilon}(A)$. Por otra parte, como $d(x, A \cup B) = min\{d(x, A), d(x, B)\}$ se tiene que $x \in \varphi_{d,\varepsilon}(A) \cup \varphi_{d,\varepsilon}(B)$ si y solo si $x \in \varphi_{d,\varepsilon}(A \cup B)$ y se tiene el resultado.
Para la segunda parte del enunciado basta tener en cuenta que $d(x, A) = 0$ si y solo si $x \in \bar{A}$, siendo $\bar{A}$ la clausura de A en τ_d. □

4.2. Operador interior de un C-espacio

Definición 4.2.1. *La aplicación* $i_\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *dada por*

$$i_\varphi(A) = X - \varphi(X - A)$$

se llama operador interior de Čech asociado a un C-espacio.

Proposición 4.2.2. *El operador interior de Čech definido cumple las siguientes propiedades:*
1) $i_\varphi(X) = X$.

2) Si $A \subseteq X$*, entonces* $i_\varphi(A) \subseteq A$.

3) Si $A, B \subseteq X$ *entonces,* $i_\varphi(A \cap B) = i_\varphi(A) \cap i_\varphi(B)$.

Demostración. 1) $i_\varphi(X) = X - \varphi(\emptyset) = X$.

2) $X - A \subseteq \varphi(X - A)$, luego $A \supseteq X - \varphi(X - A) = i_\varphi(A)$.

3) $i_\varphi(A \cap B) = X - \varphi(X - (A \cup B)) = X - \varphi((X - A) \cup (X - B)) = (X - (\varphi(X - A)) \cup (X - \varphi(X - B)) = (X - (\varphi(X - A)) \cap (X - (\varphi(X - B)) = i_{\varphi(A)} \cap i_{\varphi(B)}$. □

Nota 4.2.3. *Obsérvese que si* $i_\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *es una aplicación que satisface las tres propiedades anteriores, la aplicación* $\varphi_i : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *dada por*

$$\varphi_i(A) = X - i_\varphi(X - A)$$

determina un único operador clausura de Čech sobre X *y se verifica que* $i_{\varphi_i} = i$.

Observación 4.2.4. *Nótese que un operador interior de Čech satisface las propiedades del operador interior en un espacio topológico salvo la idempotencia.*

Como en el caso de los espacios topológicos, en los C-espacios se pueden considerar las familias de los conjuntos φ-cerrados y φ-abiertos. Ahora bien, a diferencia de los espacios topológicos, estos conjuntos no tendrán un papel relevante en el estudio de las propiedades de los espacios de clausura, sino que, como veremos más adelante, este papel corresponde a los entornos de un punto o un conjunto. Una de las razones de ello, es que en ciertos C-espacios, de interés no existen subconjuntos propios abiertos o cerrados.

Definición 4.2.5. *Sea (X, φ) un C-espacio y $A \subseteq X$. Se dice que A es un conjunto φ-cerrado si $\varphi(A) = A$, y que es φ-abierto si $X - A$ es φ-cerrado.*

Proposición 4.2.6. *Un subconjunto de X es φ-abierto $\Leftrightarrow A = i_\varphi(A)$.*

Demostración. A es φ-abierto $\Leftrightarrow \varphi(X-A) = X-A \Leftrightarrow A = X - \varphi(X-A) = i_\varphi(A)$. □

Definición 4.2.7. *Si φ, φ' son aplicaciones clausura sobre X, se dirá que φ' es más fina que φ, o que φ es menor que φ', o también que φ es más gruesa que φ', si para cada $A \subseteq X$ se cumple que $\varphi'(A) \subseteq \varphi(A)$.*
Si φ es más fina que φ', se escribirá $\varphi \leq \varphi'$.
Nótese que si $\varphi \leq \varphi'$, entonces, todo conjunto C'-cerrado (abierto) es C-cerrado (abierto).

4.3. Modificación topológica de un espacio de clausura

Proposición 4.3.1. *Si (X, φ) es un espacio de clausura, la familia*

$$\tau_\varphi = \{A \subseteq X; \varphi(X \setminus A) = X \setminus A\}$$

es una topología sobre X llamada modificación topológica del operador clausura φ.

Demostración. Probemos que efectívamente τ es topología:

- $\emptyset \in \tau$ si tomamos X $\Rightarrow$ X$\setminus$X=$\emptyset$ y $\varphi(\emptyset)$=$\emptyset$.
- X$\in \tau$, el razonamiento es análogo tomando ahora $\emptyset$.
- dada $\{\mathrm{A}_i\}_i \in$I una familia de subconjuntos de X cualquiera, hemos de probar que $\cup_{\infty}^{i=1} A_i \in \tau$ veamos, $A_i \in \tau \Rightarrow \varphi(\mathrm{X}_i) = X_i \forall i$, hemos de ver que $\varphi(X \setminus \cup_{\infty}^{i=1} A_i) = X \setminus \cup_{\infty}^{i=1} A_i$,si razonamos por doble inclusión, $(\supseteq)$ ya la tenemos por definición, ahora veamos $(\subseteq)$, $\varphi(X \setminus \cup_{\infty}^{i=1} A_i) = \varphi(\cup_{\infty}^{i=1} X \setminus \mathrm{A}_i) \subseteq \cup_{\infty}^{i=1} \varphi(X \setminus A_i) = \cup_{\infty}^{i=1}(X_i)$
- el razonamiento para la intersección es análogo, pues usamos que $\cap_{\infty}^{i=1} \varphi(\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}_i))$ $(\supseteq)$ $\varphi(\cap_{\infty}^{i=1} X \setminus \mathrm{A}_i)$ y el razonamiento es el mismo.

□

Observación 4.3.2. *a) Nótese que los conjuntos τ_φ-cerrados son aquellos $A \subseteq X$ tal que $\varphi(A) = A$.*

b) Por otra parte se tiene que si $A \subseteq X$ entonces $\bar{A}^{\tau_\varphi} = \cap\{C \subseteq X; A \subseteq C$ y $\varphi(C) = C\}$.

c) Las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que un operador clausura ψ sobre X sea la modificación topológica de un espacio de Čech (X, φ): ψ es idempotente y los abiertos (cerrados) de ψ y φ coinciden.

Proposición 4.3.3. *La topología τ_φ es la más fina sobre X que es más gruesa que φ. Es decir τ_φ es más gruesa que φ, y si ψ es un operador clausura idempotente más grueso que φ, entonces ψ también es más gruesa que τ_φ.*

Demostración. Por la propiedad de idempotencia $\tau_\varphi \leq \varphi$.
Por otra parte si ψ es un operador clausura tal que $\tau_\varphi \leq \varphi$, entonces todo ψ-abierto es φ-abierto, y por tanto por definición de τ_φ está en τ_φ. Recíprocamente sea ψ un operador clausura idempotente que cumple las condiciones del enunciado.Es decir $\tau_\varphi \leq \varphi$ y si α es un operador clausura idempotente con $\alpha \leq \varphi$, entonces $\alpha \leq \psi$. Veamos que $\psi = \tau_\varphi$. Tomando $\alpha = \tau_\varphi$, resulta que $\tau_\varphi \leq \psi$, y por tanto $\tau_\varphi \leq \psi \leq \varphi$, es decir todo ψ-abierto es un φ-abierto y por tanto está en τ_φ, por definición de τ_φ. □

4.4. Entornos en un C-espacio

Definición 4.4.1. *Si (X, φ) es un espacio de clausura de Čech, y $A \subseteq X$, un φ-entorno de A es un subconjunto $U \subseteq X$ tal que $A \subseteq i_\varphi(U)$, el conjunto de φ-entornos de A se denotará por $\mathcal{W}_A^\varphi$. En el caso particular de que $A = \{x\}$ se escribirá $\mathcal{W}_x^\varphi$.*

Nota 4.4.2. *Es claro que si $A \subseteq X$ y W entorno de A en (X,τ_φ) entonces W es entorno de A en (X,φ) pero el recíproco no es cierto.*

Para probar que el recíproco no se cumple demos un contraejemplo:

Contraejemplo 4.4.3. *Sea $X = \{a, b, c\}$, definimos φ en X como sigue,*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\{a\}) & = & \{a\} \\ \varphi(\{b\}) & = & \{b, c\} \\ \varphi(\{c\}) & = & \{a, c\} \\ \varphi(\{\emptyset\}) & = & \{\emptyset\} \end{array}$$

De esta forma, φ es un operador clausura de Čech.
Aquí $\{a, c\}$ es entorno de $\{a\}$ en (X, φ), pero no es entorno de $\{a\}$ en (X, τ_φ).

Al igual que en los espacios topológicos se prueba el siguiente resultado.

Proposición 4.4.4. *a) U es entorno de A si y solo si es entorno de x $\forall x \in A$.*

b) $U \subseteq X$ es φ-abierto si y solo si es φ-entorno en cada uno de sus puntos.

c) $\mathcal{W}_A^\varphi$ es un filtro en X y $A \subseteq \cap\{U \in \mathcal{W}_A^\varphi\}$.

Definición 4.4.5. *Una familia $\mathcal{V}_A^\varphi \subseteq \mathcal{P}(X)$ se llama base de φ-entornos de A si:*

a) $\mathcal{V}_A^\varphi \subseteq \mathcal{W}_A^\varphi$

b) Dado $U \in \mathcal{W}_A^\varphi$, existe $V \in \mathcal{V}_A^\varphi$ tal que $V \subseteq U$.

Nótese que las condiciones de la definición pueden expresarse diciendo que $\mathcal{V}_A^\varphi$ es una base de filtro $\mathcal{W}_A^\varphi$.

En el siguiente resultado se caracteriza un operador clausura mediante sus entornos:

Proposición 4.4.6. *Sea (X, φ) es un espacio de clausura de Čech y $A \subseteq X$. Entonces $x \in \varphi(A)$ si y solo si $U \cap A \neq \emptyset$, para todo $U \in \mathcal{W}_A^\varphi$.*

Demostración. Si $U \in \mathcal{W}_A^\varphi$ y $U \cap A = \emptyset$ entonces $x \in i_\varphi(U) \subseteq i_\varphi(X \setminus A) = X \setminus \varphi(A)$ y por tanto $x \notin \varphi(A)$.

Recíprocamente si $x \notin \varphi(A)$ entonces $X \setminus A$ es φ-entorno de φ que no corta a A. □

Corolario 4.4.7. *Si $\mathcal{V}_A^\varphi \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base de φ-entornos de x, entonces $x \in \varphi(A)$ si y solo si $U \cap A \neq \emptyset$ $\forall U \in \mathcal{V}_A^\varphi \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

En el siguiente resultado se prueba que un espacio de Čech queda determinado al indicar la familia de entornos de cada uno de sus puntos, o en otras palabras, qué filtros en X son las bases de entornos de sus puntos.

Proposición 4.4.8. *Supongamos que para cada $x \in X$ existe una familia $\mathcal{V}_x$ que satisface las siguientes condiciones :*

a) $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$

b) Para cada $U \in \mathcal{V}_x$, $x \in U$.

c) Si $U_1 U_2 \in \mathcal{V}_x$ existe $U_3 \subseteq \mathcal{V}_x$ con $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

(Es decir, $\mathcal{V}_x$ es una base de filtro tal que todos sus elementos contienen a x).
Entonces existe un único operador clausura φ sobre X tal que $\mathcal{V}_x$ es una base de φ-entornos de x.

Demostración. Si $A \subseteq X$ se define $\varphi(x) = \{x \in X; U \cap A \neq \emptyset \text{ con } U \in \mathcal{V}_x\}$.
Veamos que φ es un operador clausura de Čech, para lo cual basta comprobar que $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

Si $x \in \varphi(A) \cup \varphi(B)$ y $U \in \mathcal{V}_x$, entonces μ corta a A o a B por tanto corta a $A \cup B$, luego $\varphi(A) \cup \varphi(B) \subseteq \varphi(A \cup B)$.
Por otra parte supongamos que $x \notin \varphi(A) \cup \varphi(B)$, por definición de φ existen $U, V \in \mathcal{V}_x$, tales que $U \cap A = \emptyset = U \cap B$, pero por la propiedad c), existe $W \in \mathcal{V}_x$ de modo que $W \subseteq V \cap U$ por lo que $W \cap (A \cup B) = \emptyset$, luego $x \notin \varphi(A \cup B)$.
Supongamos que $U \in \mathcal{V}_x$, entonces U es φ-entorno de x pues en caso contrario $x \in \varphi(X \setminus U)$, luego se tendría que $V \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ $\forall V \in \mathcal{V}_x$, en particular para $V = U$.
Por último si $W \in \mathcal{W}_x^{\varphi}$, supongamos que $\forall U \in \mathcal{V}_x$ fuera $U \setminus W = U \cap (X \setminus W) \neq \emptyset$. Entonces por definición de φ, $x \in \varphi(X \setminus W)$ y W no sería φ-entorno de x. □

4.5. C-espacios asociados a un grafo

Recordemos que un grafo simple no dirigido en un par ordenado $G = (V, A)$, donde $V \neq \emptyset$ y se llama conjunto de vértices y $A \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ (subconjuntos binarios de V), conjunto de aristas. Si $\{v.w\} \in A$ se dirá que v y w son adyacentes y que están unidos por la arista vw. El conjunto $N_v = \{w \in V; \{v.w\} \in A\}$ se llama conjunto de vértices adyacentes a v, o de vértices vecinos de v, y si es finito para cada $v \in V$ se dirá que el grafo es localmente finito y $\sharp(N_v)$ se llamará grado de v.

Todo grafo G tiene asociado de manera natural un operador clausura denotado por φ_G, que se define como $\varphi_G(v) = \{v\} \cup N_v$ para cada $v \in V$, y como $\varphi_G(A) = \cup\{N_v; v \in A\}$ para cada $A \subseteq V$.

Nótese que φ_G no es idempotente en general. De hecho los conjuntos φ_G-cerrados son las componentes conexas de G (en el sentido de la Teoría de Grafos), pues dado $A \subseteq V$, $\varphi_G(A)$ está formado por los vértices adyacentes a algún vértice de A. Por tanto, si G es conexo $\tau_{\varphi_G} = \{\emptyset, V\}$.
Nótese que si G y H son dos grafos localmente finitos, las C-aplicaciones entre τ_{φ_G} y τ_{φ_H} son los homeomorfismos de G en H que conservan las adyacencias.
Este ejemplo de C-espacio es interesante, pues es el prototipo de los C-espacios llamados casi discretos, que son análogos de los espacios topológicos de Alexandroff, y que se tratan en el Capitulo 9.

5. Aplicaciones C-continuas

Definición 5.0.1. *Una aplicación $f : (X, \varphi_1) \longrightarrow (Y, \varphi_2)$, entre espacios de clausura se dirá continua en el sentido de Čech o simplemente C-continua en $x \in X$ si para todo $A \subseteq X$ se cumple que si $x \in \varphi_1(A)$ entonces $f(x) \in \varphi_2(f(A))$.*

Se dirá que f es C-continua si lo es en cada punto, o de forma equivalente, para todo $A \subseteq X$ se cumple que si $f(\varphi_1(A)) \subseteq \varphi_2(f(A))$.

Es inmediato comprobar, al igual que se hace para aplicaciones entre espacios topológicos que se tiene:

Proposición 5.0.2. *Si para todo $B \subseteq Y$, $\varphi_1(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\varphi_2(B))$ entonces f es C-continua.*

La relación "ser más fina que" en el conjunto de operadores clausura sobre X puede expresarse en términos de continuidad.

Proposición 5.0.3. *$\varphi_1 \leq \varphi_2$ si y solo si $id : (X, \varphi_2) \longrightarrow (X, \varphi_1)$ es continua.*
Se comprueba fácilmente que la composición de aplicaciones continuas entre espacios de Čech es también continua.

Proposición 5.0.4. *Si $f : (X, \varphi_1) \longrightarrow (Y, \varphi_2)$ es C-continua en x y $g : (Y, \varphi_2) \longrightarrow (Z, \varphi_3)$ es C-continua en $f(x)$, $g \circ f$ es C-continua en x.*
(Por tanto la composición de aplicaciones continuas entre espacios de Čech es contínua)

La continuidad de una aplicación entre espacios de Čech se puede caracterizar en términos de sus entornos.

Proposición 5.0.5. *$f : (X, \varphi_1) \longrightarrow (Y, \varphi_2)$ es C-continua en x si y solo si para cada $V \in \mathcal{W}_A^{\varphi_2}$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{W}_A^{\varphi_1}$.*

Demostración. i) Si f es C-continua en x, y $U = f^{-1}(V)$, no es φ-entorno de x, entonces $x \in \varphi_1(X \setminus U)$, y por C-continuidad $f(x) \in \varphi_2(f((X \setminus U)) = \varphi_2((f(X) \setminus V)) \subseteq \varphi_2(Y \setminus V))$. Por tanto $V \notin \mathcal{W}_A^{\varphi_2}$.
ii) Recíprocamente, dado $x \in A \subseteq X$, tal que $f(x) \notin \varphi_2(f(A))$, entonces $V = Y \setminus f(A)$, es un φ_2-entorno de $f(x)$, y por hipótestis $f^{-1}(V)$ es un φ_1-entorno de x. Como $f^{-1}(V) \cap A = \emptyset$, $x \notin \varphi_1(A)$, por tanto si $x \in \varphi_1(A)$, entonces $f(x) \in \varphi_2(f(A))$, luego f es C-continua en x. □

Observación 5.0.6. *Una condición equivalente a la anterior es la siguiente:*
f es C-continua en x si la imagen inversa de un entorno de $f(x)$ es un entorno de x.

Veremos a continuación que, a diferencia de las aplicaciones entre espacios topológicos, la C-continuidad de las aplicaciones entre espacios de Čech no se caracteriza por los abiertos y cerrados de dichos espacios.

Se tiene, no obstante, el siguiente resultado:

Proposición 5.0.7. *Si $f : (X, \varphi_1) \longrightarrow (Y, \varphi_2)$ es C-continua y U es φ_2-abierto (cerrado) entonces $f^{-1}(U)$ es φ_1-abierto (cerrado).*

Demostración. Si U es φ_2-abierto, entonces U es φ_2-entorno de cada uno de sus puntos y por tanto $f^{-1}(U)$ también, luego es φ_1-abierto. □

El recíproco del resultado anterior no es cierto en general.

Contraejemplo 5.0.8. *Sea $X = \{a, b, c\}$, definimos φ_1, φ_2 en X los operadores clausura como sigue:*

$$\begin{array}{rclrcl} \varphi_1(\{a\}) & = & \{a\} & \varphi_2(\{a\}) & = & \{a, b\} \\ \varphi_1(\{b\}) & = & \{b, c\} & \varphi_2(\{b\}) & = & \{b, c\} \\ \varphi_1(\{c\}) & = & \{a, c\} & \varphi_2(\{c\}) & = & \{c\} \\ \varphi_1(\{\emptyset\}) & = & \{\emptyset\} & \varphi_2(\{\emptyset\}) & = & \{\emptyset\} \end{array}$$

Es inmediato comprobar que los cerrados de (X, φ_1), (X, φ_1) son las familias $F_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$, $F_2 = \{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$.

Si $f : (X, \varphi_1) \longrightarrow (Y, \varphi_2)$, es la aplicación dada por $f(\{a\}) = f(\{c\}) = \{c\}$, $f(\{b\}) = \{a\}$, se cumple que la antimagen por f de un φ_2-cerrado, es un conjunto φ_1-cerrado. Ahora bien, f no es C-continua como aplicación entre espacios de Čech, pues $f(\varphi_1(\{b\}) = f(\{b, c\}) = \{a, c\}$, y $\varphi_2(f(\{b\})) = \varphi_2(f(\{a\})) = \{a, b\}$.

No obstante el resultado clásico de topología se cumple si φ_2 tiene la propiedad de idempotencia, es decir si (Y, φ_2) es un espacio topológico.

Proposición 5.0.9. *Sea $f : (X, \varphi_1) \longrightarrow (Y, \varphi_2)$, donde φ_2 es un operador clausura idempotente, cada una de las siguientes afirmaciones son necesaria y suficiente para que f sea C-continua.*

i) Si O es φ_2-abierto entonces $f^{-1}(O)$ es φ_2-abierto.

ii) Si C es φ_2-cerrado entonces $f^{-1}(C)$ es φ_2 cerrado.

Demostración. Ambas condiciones son necesarias por la proposicion anterior, veamos que i) es suficiente. Sea $x \in X$, y $V \in \mathcal{W}_{f(x)}^{\varphi_2}$. Como (Y, φ_2) es un espacio topológico, existe un φ_2-entorno abierto U con $U \subseteq V$. Por hipótesis $x \in f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(U)$ φ_1-abierto, por tanto $f^{-1}(U) \in \mathcal{W}_x^{\varphi_1}$, y f es C-continua en x. □

Nota 5.0.10. *d) $i_d : (X, \varphi) \longrightarrow (X, \tau_\varphi)$ es C-contínua. (Basta comprobar que $\varphi(A) \subseteq \bar{A}^{\tau_\varphi}$, pero como $A \subseteq \bar{A}^{\tau_\varphi}$, $\varphi(A) \subseteq \varphi(\bar{A}^{\tau_\varphi}) = \bar{A}^{\tau_\varphi}$, ya que $\bar{A}^{\tau_\varphi}$ es cerrado en τ_φ.)*

El siguiente resultado proporciona una caracterización de la modificación topológica de un espacio de Čech en términos de continuidad de aplicaciones.

Proposición 5.0.11. *Sea (X, φ) un espacio de Čech, un operador ψ sobre X es τ_φ si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) ψ es idempotente.

2) Para cualquier espacio topológico (Y, τ), $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \tau)$ es continua si y solo si $f : (X, \psi) \longrightarrow (Y, \tau)$ lo es.

Demostración. Supongamos que $\psi = \tau_\varphi$, si $f : (X, \tau_\varphi) \longrightarrow (Y, \tau)$ es continua entonces es C-continua, luego como $id : (X, \varphi) \longrightarrow (X, \tau_\varphi)$ también lo es, $f = f \circ id : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \tau)$ es C-continua.
Ahora supongamos que $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \tau)$ es C-continua, entonces si $U \subseteq \tau$, $f^{-1}(U)$ es φ-abierto por tanto $f^{-1}(U) \subseteq \tau_\varphi$ por definición de τ_φ. Luego $f : (X, \tau_\varphi) \longrightarrow (Y, \tau)$ es continua.
Recíprocamente, supongamos que se cumplen las condiciones 1) y 2), como $id : (X, \varphi) \longrightarrow (X, \tau_\varphi)$ es continua, por 2) $id : (X, \psi) \longrightarrow (X, \tau_\varphi)$ es continua por lo que $\tau_\varphi \subseteq \psi$. Como $id : (X, \psi) \longrightarrow (X, \psi)$ es continua de nuevo por 2) $id : (X, \varphi) \longrightarrow (X, \psi)$ es C-continua, luego $\psi \leq \varphi$. Asi que ψ es un operador clausura idempotente más grueso que φ y más fino que τ_φ, por la proposicion 1, $\psi = \tau_\varphi$. □

Corolario 5.0.12. *Si $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ es C-continua, entonces $f : (X, \tau_\varphi) \longrightarrow (Y, \tau_\psi)$ es continua.*

Demostración. Basta tener en cuenta que $id : (X, \psi) \longrightarrow (X, \tau_\psi)$ es C-continua y aplicar la condición 2) de la proposición anterior. □

5.1. C-homeomorfismos

Damos a continuación una definición de homeomorfismo entre espacios de Čech análoga a la conocida entre espacios topológicos.

Definición 5.1.1. *Un C-homeomorfismo $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ entre espacios de Čech es una aplicación biyectiva, tal que f y f^{-1} son C-continuas.*

Al igual que en los espacios topológicos se tiene que $id : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ es un C-homeomorfismo y, la composición de C-homeomorfismos es C-homeomorfismo.

Proposición 5.1.2. *Dada $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ biyectiva, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) f es un C-homeomorfismo.

2) Si $A \subseteq X$, $f(\varphi(A)) = \psi(f(A))$

3) Para cada $x \in X$, $U \in \mathcal{W}_x^\varphi$ si y solo si $f(U) \in \mathcal{W}_{f(x)}^\varphi$.

Teniendo en cuenta el corolario anterior si $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ es un C-homeomorfismo, entonces $f : (X, \tau_\varphi) \longrightarrow (Y, \tau_\psi)$ es un homeomorfismo. Ahora bien el recíproco no es cierto, como se comprueba en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1.3. *Sea $X = \{a, b, c\}$, definimos φ, ψ en X como sigue,*

$$\begin{array}{rclrcl}
\varphi(\{a\}) & = & \{a\} & \psi(\{a\}) & = & \{a, b\} \\
\varphi(\{b\}) & = & \{b, c\} & \psi(\{b\}) & = & \{b, c\} \\
\varphi(\{c\}) & = & \{a, c\} & \psi(\{c\}) & = & \{c\} \\
\varphi(\{\emptyset\}) & = & \{\emptyset\} & \psi(\{\emptyset\}) & = & \{\emptyset\}
\end{array}$$

Entonces se comprueba fácilmente que $\tau_\varphi = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$ y $\tau_\psi = \{X, \emptyset, \{a\}\}$.

La aplicación $f : X \longrightarrow X$ dada por $f(\{a\}) = \{c\}$, $f(\{b\}) = \{a\}$ y $f(\{c\}) = \{b\}$ es un homeomorfismo de (X, τ_φ) en (X, τ_ψ), pero no es un C-homeomorfismo de (X, φ) en (X, ψ), pues $f(\varphi(\{b\})) \neq \psi(f(\{b\}))$.

6. Subespacios, productos y cocientes

6.1. Operador clausura relativo: Subespacios de Čech

Definición 6.1.1. *Si (X, φ) es un espacio clausura de Čech, y $A \subseteq X$,la aplicación $\varphi_A : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, dada por $\varphi_A(B) = A \cap \varphi(B)$ es un operador clausura de Čech sobre A llamado operador clausura de Čech relativo a A. El par (X, φ_A) se llama subespacio de clausura, o C-subespacio, de (X, φ) .*

Proposición 6.1.2. *Sea (X, φ) un espacio clausura de Čech, $A \subseteq X$ y ψ un operador clausura sobre A. Entonces $\psi = \varphi_A$ si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1) La inclusión $j_A : (A, \psi) \longrightarrow (X, \varphi)$ es C-continua.

2) ψ es el operador menos fino que cumple 1).

Es decir, φ_A es el operador clausura de Čech menos fino que hace que j_A sea C-continua.

Demostración. Supongamos que $\psi = \varphi_A$, es decir, que $\psi(B) = A \cap \varphi(B)$. Entonces, la condición 1) se cumple, ya que $j_A(\psi(B)) = \psi(B) \subseteq \varphi(B)$.
Si w es un operador clausura sobre A tal que $j_A : (A, w) \longrightarrow (X, \varphi)$, es continua, se tiene que $j_A(w(B)) \subseteq \varphi(j_A(B))$, es decir, para todo $B \subseteq A$, $w(B) \subseteq \varphi(B)$, pero $w(B) \subseteq A$, y por tanto $w(B) \subseteq A \cap \varphi(B)$, es decir, se cumple que $w(B) \subseteq \varphi_A(B)$, lo que prueba que w es más fina que φ_A.
Recíprocamente, sea ψ un operador clausura sobre A, satisfaciendo 1) y 2). Como φ_A también los satisface se tiene que ψ es más fina que φ_A, y φ_A es más fina que ψ, así que $\varphi_A = w$. □

Nota 6.1.3. *1) Si φ es idempotente, φ_A también lo es, pues $\varphi_A(B)$ será cerrado en (A, φ_A), y por tanto, $\varphi_A(\varphi_A(B)) = \varphi(B)$.*

2) Si $B \subseteq A$, entonces $(\varphi_A)_B = \varphi_B$.

Proposición 6.1.4. *Sea (X, φ) es un espacio clausura de Čech, y $A \subseteq X$. Entonces:*

a) Si B es φ-cerrado (φ-abierto), entonces $B \cap A$ es φ_A-cerrado (φ_A-abierto).

b) Si φ es idempotente, los conjuntos φ_A-cerrados son de la forma $A \cap B$, siendo B C_A-cerrado.

c) Si A es φ-cerrado (φ-abierto), y $B \subset A$ es φ_A-cerrado (φ_A-abierto), entonces B es φ-cerrado (φ-abierto).

Demostración. a) Si $B \subset A$ y $\varphi(B) = B$ entonces $\varphi_A(B \cap A) = A \cap (\varphi(B \cap A)) \subseteq A \cap \varphi(B) = A \cap B$ así que $A \cap B$ es φ_A-cerrado.

b) Si C es φ_A-cerrado, $C = \varphi_A(C) = A \cap \varphi(C)$, y se toma $B = \varphi(C)$.

c) Si $\varphi(A) = A$ y $\varphi_A(B) = A \cap \varphi(B) = B \subseteq A$, entonces $\varphi(B) \subseteq \varphi(A) = A$, y por tanto, $\varphi(B) = \varphi(B) \cap A = \varphi_A(B) = B$. □

Si φ no es idempotente, un conjunto φ_A-cerrado (φ_A-abierto), no tiene por qué ser intersección de A con un φ-cerrado (φ-abierto), de hecho se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.1.5. *(X, φ) es un espacio topológico si y solo si para todo $A \subseteq X$ los conjuntos φ-cerrados (φ-abiertos) son de la forma $A \cap B$ con $\varphi(B) = B$, ($\varphi(X - B) = X - B$).*

Demostración. La condición es necesaria por el apartado b) de la proposición anterior. Supongamos ahora que φ no es idempotente, entonces existe $B \subseteq X$ tal que $\varphi(\varphi(B)) \neq \varphi(B)$, y si se considera el subespacio $A = B \cup \varphi(\varphi(B)) - \varphi(B)$, B es φ_A-cerrado. Sin embargo, si C es φ-cerrado con $B = A \cap C$, se tiene que $\varphi(\varphi(B)) \supseteq C$, y por tanto $C \cap A = A$, luego $C \cap A \neq B$. □

En cuanto a la relación entre $\tau_{\varphi|A}$, y τ_{φ_A} se tiene:

Proposición 6.1.6. *$\tau_{\varphi|A} \subseteq \tau_{\varphi_A}$*

Demostración. Si B es cerrado en $\tau_{\varphi|A}$, entonces $B = A \cap F$ para algún cerrado de τ_φ. Pero como $\varphi(B) \subseteq \varphi(F) = F$, $\varphi_A(B) = A \cap \varphi(B) \subseteq A \cap F = B$. Por tanto $\varphi_A(B) = B$, luego B es un cerrado de $\tau_{\varphi A}$. □

Ejemplo 6.1.7. *En general* $\tau_{\varphi|A} \neq \tau_{\varphi_A}$ *como se prueba en el siguiente ejemplo: Sea* $X = \{a, b, c\}$*,* $A = \{a, c\}$ *definimos el operador clausura de Čech* φ *en* X *como sigue,*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\{a\}) & = & \{a, b\} \\ \varphi(\{b\}) & = & \{b, c\} \\ \varphi(\{c\}) & = & \{a, c\} \\ \varphi(\{\emptyset\}) & = & \{\emptyset\} \end{array}$$

Entonces los conjuntos φ*-cerrados son* $\mathcal{F}_\varphi = \{\emptyset, X\}$*, luego* $\mathcal{F}_\varphi \neq \{\emptyset, X\}$*. Por otra parte* φ_A *viene dada por* $\varphi_A(\{a\}) = (\{a\})$ *y* $\varphi_A(\{c\}) = (\{A\})$*, luego* $\mathcal{F}_{\varphi_A} = \{\emptyset, \{a\}, A\}$*.*

6.2. Productos de espacios de clausura de Čech

Definición 6.2.1. *Sea* $\{X_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ *una familia de espacios de clausura de Čech*

$$X = \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} X_\alpha$$

su producto cartesiano y $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ *las proyecciones canónicas dadas por* $\pi_\alpha(x) = x(\alpha) = x_\alpha$ *para cada* $x \in X$*.*
Para cada $x \in X$*, sea:*

$$\mathcal{V}_x = \{\pi_\alpha(V)^{-1}; \alpha \in \mathcal{I}, V \in \mathcal{W}^{\varphi_A}_{\pi_\alpha(x)}\}$$

Por la Proposición 4.4.7 *existe un único operador de clausura de Čech* φ_π *tal que las intersecciones finitas de elementos de* $\mathcal{V}_x$ *constituyen una base de entornos de* x*.*

Para (X, φ_π) se verifican las propiedades usuales de la topología producto.

Proposición 6.2.2. *a)* φ_π *es el operador clausura menos fino sobre*

$$X = \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} X_\alpha$$

tal que las aplicaciones π_φ *son continuas.*

b) Si O *es* φ_π*-abierto, entonces* $\pi_\alpha(O)$ *es* φ*-abierto para cada* $\alpha \in \mathcal{I}$*.*

c) Una aplicación $f : (Y, \varphi) \longrightarrow (X, \varphi_\pi)$ *es C-continua si y solo si lo son las aplicaciones* $\pi_\alpha \circ f$*.*

En el siguiente ejemplo se comprueba que, en general, dados dos espacios de clausura (X, φ) e (Y, ψ), no se cumple que $X \times Y$ con la topología producto $\tau_\varphi \times \tau_\psi$ es homeomorfo a $X \times Y$ con la topología $\tau_{\varphi \times \psi}$, es decir, la modificación topológica del operador clausura no es la topología producto de las modificaciones topológicas respectivas.

Ejemplo 6.2.3. *Sea $X = \{a, b, c\}$, definimos el operador clausura de Čech φ en X como sigue,*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\{a\}) & = & \{a\} \\ \varphi(\{b\}) & = & \{b, c\} \\ \varphi(\{c\}) & = & \{a, c\} \\ \varphi(\{\emptyset\}) & = & \{\emptyset\} \end{array}$$

Se tiene que $\tau_\varphi = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$, por tanto la topología producto $\tau_\varphi \times \tau_\varphi$ es la familia $\tau_\varphi \times \tau_\varphi = \{\emptyset, X \times X, \{(b, b)\}, \{(b, b), (b, c)\}, \{(b, b), (c, b)\}, \{(b, b), (b, c), (c, c), (c, b)\}\}$.
Sin embargo, en $X \times X$, existen conjuntos $\tau_{\varphi\times\varphi}$-abiertos que contienen al punto (a, b): por ejemplo el conjunto $\{(a, b), (b, b), (c, b)\}$ por tanto $\tau_\varphi \times \tau_\varphi \neq \tau_{\varphi\times\varphi}$.

6.3. Cocientes de espacios de clausura de Čech

Al igual que en los espacios topológicos existe la noción de topología final sobre un conjunto Y asociada a una aplicación $f : (X, \tau) \longrightarrow Y$, para los espacios de Čech podemos considerar la siguiente definición:

Definición 6.3.1. *Si $f : (X, \tau) \longrightarrow Y$ es una aplicación sobreyectiva, se define el operador clausura cociente asociado a f como $\varphi_f(V) = f(\varphi(f^{-1}(V)))$ para cada $V \subseteq Y$.*

Es inmediato comprobar que φ_f es un operador clausura de Čech, y se tiene el siguiente resultado que prueba que la definición de φ_f es análoga a la de topología final asociada a f.

Proposición 6.3.2. *Sea $f : (X, \varphi) \longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva entonces φ_f es el operador de clausura más fino que hace C-continua a f.*

Demostración. Supongamos que ψ es un operador clausura con $\varphi_f \lneq \psi$, y $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ C-continua, entonces existe $V \subseteq Y$ tal que $\psi(V) = \psi(f(f^{-1}(V))) \subsetneq \varphi_f(V) = f(\varphi(f^{-1}(V)))$, pero por la C-continuidad de ψ se tendría que:

$$f(\varphi(f^{-1}(V))) \subseteq \psi(f(f^{-1}(V))) = \psi(V)$$

□

Ejemplo 6.3.3. *Puede ocurrir que φ sea idempotente, es decir, que (X, φ) sea un espacio topológico, pero que φ_f no lo sea. En efecto, sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$ con $f : X \longrightarrow Y$, dada por $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ y $f(4) = c$.*
Si φ es el operador clausura dado por $\varphi(\{1\} = \{1, 2\}$, $\varphi(\{2\} = \{2\}$, $\varphi(\{3\} = \{3, 4\}$ y $\varphi(\{4\} = \{4\}$, φ es idempotente. Por otra parte, el operador φ_f viene dado por $\varphi_f(\{a\} = \{a, b\}$, $\varphi_f(\{b\} = \{b, c\}$, $\varphi_f(\{c\} = \{c\}$ e (Y, φ_f) no es topológico ya que $\varphi_f^2(\{a\} = \{a, b, c\} \neq \{a, b\} = \varphi_f\{a\}$.

De modo análogo a como se hace entre espacios topológicos, se podría definir una aplicación cociente entre espacios de Čech como una aplicación $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ sobreyectiva que cumple que $\psi = \varphi_f$, y se tiene el siguiente resultado.

Proposición 6.3.4. *Sea $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ una aplicación sobreyectiva tal que $\psi = \varphi_f$. Entonces $F \subseteq Y$ es ψ-cerrado si y solo si $f^{-1}(F)$ es φ-cerrado.*

Demostración. Como se supone que $\psi = \varphi_f$, f es C-continua. Por tanto basta probar que si $f^{-1}(F)$ es φ-cerrado, entonces F es ψ-cerrado. Pero si $f^{-1}(F)$ es φ-cerrado, entonces $\varphi(f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$, luego $f(\varphi(f^{-1}(F))) = \psi(F) = f(f^{-1}(F) = F$. □

Proposición 6.3.5. *Si $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ es sobreyectiva, C-continua y ψ es idempotente, entonces $\psi = \varphi_f$ si y solo si para todo $B \subseteq Y$, $f(\varphi(f^{-1}(B)))$ es ψ-cerrado.*

Demostración. Si $\psi = \varphi_f$, y $B \subseteq Y$, entonces, $\psi(B) = f(\varphi(f^{-1}(B)))$ y por ser ψ idempotente, $\psi(f(\varphi(f^{-1}(B)))) = \psi(\psi(B)) = \psi(B) = f(\varphi(f^{-1}(B)))$, luego $f(\varphi(f^{-1}(B)))$ es ψ-cerrado.

Recíprocamente, supongamos que para todo $B \subseteq Y$, $f(\varphi(f^{-1}(B)))$ es ψ-cerrado, veamos que $\psi(B) = \varphi_f(B)$. Por ser φ_f un operador clausura se tiene que $B \subseteq \varphi_f(B)$, luego, $\psi(B) \subseteq \psi(f(\varphi(f^{-1}(B)))) = f(\varphi(f^{-1}(B)))$, la inclusión recíproca se tiene por ser f C-continua. □

Veamos que en las hipótesis del resultado anterior se tiene que toda aplicación cociente es hereditariamente cociente, es decir.

Proposición 6.3.6. *Sea $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ una aplicación cociente, y ψ idempotente. Entonces, para todo $B \subseteq Y$, $g = f_{|f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \longrightarrow B$ es una aplicación cociente.*

Demostración. Si $B \subseteq Y$, y $f_{|f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \longrightarrow B$ es C-continua y sobreyectiva. Por el resultado anterior, para probar que g es cociente, hay que probar que si $C \subseteq B$, $D = g(\varphi_{|g^{-1}(C)}(g^{-1}(C))$ es cerrado en $(B, \psi_{|B})$. Pero $D = g(\varphi(g^{-1}(C))) \cap g^{-1}(C) = f(\varphi(f^{-1}(B))) \cap f^{-1}(B) = f(\varphi(f^{-1}(B))) \cap B$, que es ψ-cerrado en B, ya que por la proposición anterior $f(\varphi(f^{-1}(B)))$ es ψ-cerrado. □

7. Axiomas de separación en C-espacios

En este capítulo se estudiarán los axiomas de separación en los C-espacios. Como en el caso de los espacios topológicos se distinguirán tres tipos: axiomas de separación de puntos, (es decir las propiedades T_0, T_1 y T_2), los axiomas de separación de puntos y cerrados (espacios regulares o completamente regulares de de Tychonoff y los axiomas de separación de cerrados (espacios normales).

7.1. C-espacios T_0, T_1 y T_2

Los axiomas T_0, T_1 y T_2 para C-espacios se enuncian de la misma forma que en los espacios topológicos.

Definición 7.1.1. *Un C-espacio (X, φ) se llama:*

(T_0): Si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $W_x \in \mathcal{W}_x^\varphi$, tal que $y \notin W_x$ o existe $W_y \in \mathcal{W}_y^\varphi$ tal que $x \notin W_y$.

(T_1): Si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $W_x \in \mathcal{W}_x^\varphi$, $W_y \in \mathcal{W}_y^\varphi$ tales que $x \notin W_y$ y $y \notin W_x$.

(T_2): Si $x \neq y$, existen $W_x \in \mathcal{W}_x^\varphi$, $W_y \in \mathcal{W}_y^\varphi$ tales que $W_y \cap W_x = \emptyset$.

Estas definiciones pueden expresarse en términos de φ:

Proposición 7.1.2. *a) (X, φ) es T_0 si y solo si dados $x \neq y$, $x \notin \varphi(y)$ o $y \notin \varphi(x)$.*

b) (X, φ) es T_1 si y solo si para cada $x \in X$, $\varphi(x) \subseteq \{x\}$. (Es decir, si cada subconjunto unitario es φ-cerrado)

c) (X, φ) es T_2 si y solo si dados $x \neq y$, existe $W_x \in \mathcal{W}_x^\varphi$ tal que $y \notin \varphi(W_x)$.

Demostración. a) Es consecuencia inmediata de la caracterización de φ mediante entornos.

b) Si $x \neq y$, existe $W_y \in \mathcal{W}_y^\varphi$ tal que $x \notin W_y$ y por tanto $y \notin \varphi(x)$. Recíprocamente sean $x \neq y$. Como $y \notin \varphi(x)$, existe $W_y \in \mathcal{W}_y^\varphi$ tal que $x \notin W_y$, y como $x \notin \varphi(y)$ existe $W_x \in \mathcal{W}_x^\varphi$ tal que $y \in \varphi(x)$.

c) Si $x \neq y$, la propiedad de ser T_2 es equivalente a la existencia de $W_x \in \mathcal{W}_x^\varphi$, $W_y \in \mathcal{W}_y^\varphi$ tales que $W_y \cap W_x = \emptyset$. Como $W_y \subseteq X - W_x$, $i_\varphi(W_y) \subseteq i_\varphi(X - W_x)$. Por tanto es equivalente a la existencia de $W_x \in \mathcal{W}_x^\varphi$, $W_y \in \mathcal{W}_y^\varphi$ tales que $y \in i_\varphi(W_y) \subseteq i_\varphi(X - W_x)$, y por tanto a la existencia de $W_x \in \mathcal{W}_x^\varphi$ tal que $X - W_x \in \mathcal{W}_y^\varphi$. Es decir, (X, φ) es T_2 si y solo si existe $W_x \in \mathcal{W}_x^\varphi$ tal que $y \notin \varphi(W_x)$. □

Nota 7.1.3. *Al igual que en el caso de los espacios topológicos, las propiedades de ser T_0, T_1 y T_2 en los C-espacios son hereditarias y se conservan por C-homeomorfismos.*

7.2. C-espacios regulares y completamente regulares

En los espacios topológicos, los conceptos de espacio regular y espacio completamente regular se establecen en términos de los subconjuntos cerrados. Sin embargo, puesto que en los C-espacios, la noción fundamental es el operador φ, parece natural que este aparezca explícitamente en su definición. Si (X,τ) es un espacio topológico, la propiedad de ser regular garantiza que un conjunto cerrado y un punto fuera de él puedan incluirse en abiertos disjuntos. Es decir,

Definición 7.2.1. *(X,τ) se llama regular si dados $A \subseteq X$ cerrado y $x \notin A$, existan U,$V \in \tau$ tales que $A \subseteq U$ y $x \in V$.*

Es fácil probar que la definición dada es equivalente a la siguiente

Definición 7.2.2. *Si $W \in \mathcal{W}_x^\tau$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq \mathcal{W}$. Es decir, para cada $x \in X$ los entornos cerrados de x forman una base de entornos.*

La primera definición sugiere la siguiente extensión directa a los C-espacios de regularidad.

Definición 7.2.3. *Un C-espacio (X,φ) se llama regular si dados $A \subseteq X$ y $x \notin \varphi(A)$, existen $U \in \mathcal{W}_x^\varphi$ y $V \in \mathcal{W}_A^\varphi$ tales que $U \cap V = \emptyset$.*

Se tiene el siguiente resultado que es análogo a la equivalencia de las dos primeras definiciones para espacios topológicos.

Proposición 7.2.4. *Si (X,φ) es un C-espacio, son equivalentes:*

a) (X,φ) es regular.

b) Para todo $x \in X$, si $W \in \mathcal{W}_x^\varphi$, existe $U \in \mathcal{W}_x^\varphi$ tal que $\varphi(U) \subseteq W$.

Demostración. Supongamos que se cumple a). Si $W \in \mathcal{W}_x^\varphi$ y $A = X - W$, entonces $x \notin \varphi(A)$. Por tanto, existen $U \in \mathcal{W}_x^\varphi$, $V \in \mathcal{W}_x^\varphi$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Como $U \subseteq X - V$, $\varphi(U) \subseteq \varphi(X - V)$, luego $i_\varphi(V) = X - \varphi(X - V) \subseteq X - \varphi(U)$. Por tanto, $A \subseteq i_\varphi(V) \subseteq X - \varphi(U)$, luego $\varphi(U) \subseteq X - A = W$.

Supongamos que se cumple b). Si $x \notin \varphi(A)$, sea $W \in \mathcal{W}_x^\varphi$ tal que $W \subseteq X - A$. Entonces existe $U \in \mathcal{W}_x^\varphi$ tal que $\varphi(U) \subseteq W \subseteq X - A$. Por tanto $A \subseteq X - \varphi(U) = i_\varphi(X - U)$ y basta tomar $V = X - U$. $\square$

Observación 7.2.5. *Como en los espacios topológicos, un C-espacio (X,φ) se llama T_3 si es regular y T_1, y se cumple que $T_3 \Rightarrow T_2$.*

La definición de espacio completamente regular es también una analogía de la definición conocida en espacios topológicos:

Definición 7.2.6. *Un C-espacio (X,φ) se llama completamente regular si dados $\emptyset \neq A \subseteq X$ y $x \notin \varphi(A)$ existe una aplicación C-continua $v : (X,\varphi) \longrightarrow ([0,1])$ tal que $v(x) = 0$ y $v(\varphi(A)) = 1$.*

Proposición 7.2.7. *Si (X,φ) es un C-espacio, son equivalentes:*

a) (X, φ) *es completamente regular.*

b) Si $W \in \mathcal{W}_x^\varphi$*, existen* $W' \in \mathcal{W}_x^\varphi$ *y* $f : (X, \varphi) \longrightarrow ([0,1], d_e)$ *tal que* $f(W') = 0$ *y* $f(X - W) = 1$

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Si $W \in \mathcal{W}_x^\varphi$ entonces $x \notin \varphi(X - W)$. Por tanto, tomando $A = X - W$, existe $f : (X, \varphi) \longrightarrow ([0,1], d_e)$ C-continua tal que $f(x) = 0$ y $f_{|\varphi(X-W)} = 1$. Si $W' = f^{-1}(0, \frac{1}{4})$ entonces $W' \in \mathcal{W}_x^\varphi$ y $W' \subseteq X - \varphi(X - W) = i_\varphi(W) \subseteq W$. Componiendo f con la aplicación $g : ([0,1]) \longrightarrow ([0,1])$ definida por $g([0, \frac{1}{4}]$ y $g([\frac{1}{4}, 1] = ([0,1])$ se tiene el resultado.

b) $\Rightarrow$ a).Si $x \notin \varphi(A)$, existe $W \in \mathcal{W}_x^\varphi$ tal que $W \cap A = \emptyset$. Por a) existen $W' \subseteq W$ tal que $W' \in \mathcal{W}_x^\varphi$ y una aplicación C-continua $f : (X, \varphi) \longrightarrow ([0,1], d_e)$ con $f(W') = 0$ y $f(X - W) = 1$. $\square$

Nota 7.2.8. *En el teorema* 15 *de [23] se da una demostración directa de que si* (X, φ) *es completamente regular, entonces* φ *es idempotente, sin necesidad de usar el concepto de espacio uniformizable como hace Čech en su libro.*

Definición 7.2.9. *Los C-espacios completamente regulares y* T_1 *se llaman espacios* $T_{3\frac{1}{2}}$.

7.3. C-espacios normales

En las secciones anteriores se ha comprobado que los axiomas de separación T_0, T_1, T_2, T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$ para los C-espacios se enuncian de forma análoga a como se hace en los espacios topológicos. Ello se debe, esencialmente, a que en las definiciones correspondientes se han usado los conceptos de operador clausura y de los entornos asociados a él, que, de hecho lo caracterizan. Ahora bien, la propiedad de que un espacio topológico sea normal significa que, dados dos cerrados disjuntos, existen entornos disjuntos que los contienen, es decir, se pueden separar por abiertos y no se pueden expresar mediante propiedades sobre los entornos de sus puntos. Ello, unido a que los cerrados de un C-espacio no caracterizan el operador clausura, hace que no haya una definición canónica o estándar de ”normalidad” sobre dichos espacios y diversos autores han utilizado el término ”normal” para referirse a propiedades distintas. En [11], [23] ó [9] se dan las siguientes variantes de la definición de C-espacio normal y se estudian las relaciones entre ellas:

Definición 7.3.1. *Un C-espacio* (X, φ) *se llama:*

(QN) Casi normal: Si dados $A, B \subseteq X$ *con* $\varphi(A) \cap \varphi(B) = \emptyset$*, existen* $U \in \mathcal{W}_A^\varphi$ *y* $V \in \mathcal{W}_B^\varphi$ *tales que* $U \cap V = \emptyset$.

(N) Normal: Si $\emptyset \neq A = \varphi(A)$ *y* $W \in \mathcal{W}_A^\varphi$*, existe* $U \in \mathcal{W}_A^\varphi$ *tal que* $\varphi(U) \subseteq W$.

(TN) T-normal: Si $\emptyset \neq A = \varphi(A)$ y $W \in \mathcal{W}_A^{\varphi}$, existe $U \in \mathcal{W}_A^{\varphi}$ tal que $U = \varphi(U) \subseteq W$

(QTN) Casi t-normal Si dados $A, B \subseteq X$ son φ-cerrados disjuntos no vacíos, existen $U \in \mathcal{W}_A^{\varphi}$ y $V \in \mathcal{W}_B^{\varphi}$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

En [23] se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 7.3.2. *Si (X, φ) es un C-espacio se tiene: a) (QN) $\Rightarrow$ (N) $\Rightarrow$ (QTN), y (TN) $\Rightarrow$ (N).*
b) Si φ es idempotente, todas las condiciones de la definición son equivalentes.

8. Espacios de clausura de Čech compactos

La definición de compacidad dada por Čech para los espacios de clausura es la misma que para los espacios topológicos y está anunciada en términos de convergencia de filtros.
Es natural que sea así, pues de este modo, la noción de compacidad en un espacio de clausura puede expresarse en función de la noción fundamental de este tipo de espacio, no la de abierto y cerrado, sino la de operador clausura.
Al fin y al cabo, la idea de espacio compacto surge para destacar la propiedad de ciertos espacios métricos de que todas sus sucesiones admiten una subsucesión convergente. Es decir, en último término, descansa en la noción de convergencia. Fue la propiedad de Borel-Lebesgue la que permitió extender el concepto de compacidad a la clase de espacios topológicos, y de hecho se usaba el término bicompacto para nombrar a aquellos que la satisfacían, hasta que la introduccíon del concepto de filtro por Cartan permitió definir espacio compacto en general basándose en la la idea de convergencia de filtros, con la ventaja adicional de una versión del teorema de Tychonoff sobre la compacidad del producto de espacios compactos.
Por tanto, siguiendo la idea de Cartan, siempre que se disponga de una concepto de adherencia en operador clausura será posible definir punto adherente de un filtro, y, a partir de él, una cierta noción de compacidad. Otra cuestión será relacionarla con una propiedad análoga a la de Borel-Lebesgue para ciertos tipos de recubrimiento, (véase [4] para un tratamiento extenso y detallado de estos problemas).

Definición 8.0.1. *Un espacio de clausura (X, φ) se llama C-compacto, si todo filtro $\mathcal{F}$ en X admite al menos un punto adherente, es decir, si $\cap\{\varphi(F); F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.*

Esta definición de compacidad puede caracterizarse mediante una propiedad del tipo Borel-Lebesgue de los llamados recubrimientos por φ-interiores de X.

8.1. Recubrimiento por φ-interiores en un C-espacio

Definición 8.1.1. *Sea (X,φ) un espacio de Čech y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento por φ-interiores de X si $\cup\{i_\varphi(U_\alpha); U_\alpha \in \mathcal{U}\} = X$. Es decir si y solo si $x \in X$ tiene un φ-entorno en la familia $\mathcal{U}$.*

Ejemplo 8.1.2. *1) Todo recubrimiento de (X,φ) por conjuntos φ-abiertos es un recubrimiento por φ-interiores.*

2) Sea $G = (V, E)$ el grafo C_4 dado por:
$V = \{A, B, C, D\}$, y $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}\}$

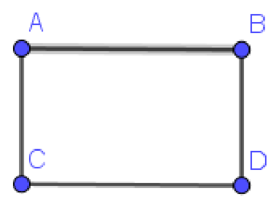


Figura 1: Grafo C_4

Si φ es el operador clausura asociado a G, es decir, determinado por $\varphi(A) = \{A, B, D\}$, $\varphi(B) = \{B, A, C\}$, $\varphi(C) = \{C, B, D\}$, y $\varphi(D) = \{D, A, C\}$. la familia $\mathcal{U} = \{\varphi(v); v \in V\}$ es un recubrimiento de (V,φ) por φ-interiores, ya que si $v \in V$,$i_\varphi(\varphi(v)) = \{v\}$. La familia $\mathcal{U} = \{\varphi(A), \varphi(C)\}$ es un recubrimiento de (V,φ) por φ-abiertos, pero no por φ-interiores, ya que los vértices A y C, no están en ningún φ-interior de ningún conjunto de $\mathcal{U}$.

3) En el ejemplo anterior, la familia $\mathcal{U} = \{\varphi(0), \varphi(2)\}$ es un recubrimiento de (V,φ) por φ-abiertos, pero no por φ-interiores, ya que los vértices B y C no están en el φ-interior de ningún conjunto de $\mathcal{U}$.

8.2. Teoremas de caracterización de C-espacios compactos

Veamos que los recubrimientos por φ-interiores es la clase adecuada de recubrimientos para caracterizar la definición de C-compacidad de Čech.

Teorema 8.2.1. *(X,φ) es C-compacto si y solo si todo recubrimiento por φ-interiores admite un subrecubrimiento finito.*

Demostración. Supongamos que (X,φ) es C-compacto, y que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es un recubrimiento de X por φ-interiores tal que $\forall\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ finito, $\cup\{U_j; j \in \mathcal{J}\} \neq X$. Entonces

$X - \cup\{U_j; j \in \mathcal{J}\} \neq \emptyset$ para $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ finito, luego $\cap\{X - U_j; j \in \mathcal{J}\} \neq \emptyset$. Es decir, la familia $\mathcal{B} = \{X - U_i; i \in \mathcal{I}\}$ es una base de filtro, luego como (X, φ) es C-compacto, existe $x \in \cap\varphi(X - U_i) = \cap(X - i_\varphi(U_i)) = X - \cup(i_\varphi(U_i)$, luego $\mathcal{U}$ no sería un recubrimiento de X por φ-interiores de X.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es un filtro en (X, φ) con $\cap\{\varphi(F); F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$, entonces $X - \cap\{\varphi(F); F \in \mathcal{F}\} = \cup\{X - \varphi(F); F \in \mathcal{F}\} = \cup\{i_\varphi(F); F \in \mathcal{F}\} = X$, por lo que $\mathcal{U} = \{X - F; F \in \mathcal{F}\}$ sería un recubrimiento por φ-interiores de X que no admite ningún subrecubrimiento finito. □

Observación 8.2.2. *Nótese que si se considera como definición de compacidad por recubrimientos de un espacio de clausura (X, φ), la condición de que todo recubrimiento por φ-abiertos de X admita un subrecubrimiento finito, entonces, todo grafo infinito $\mathcal{G} = (V, E)$ con el operador clausura canónico $\varphi_\mathcal{G}$ sería C-compacto, pues los únicos $\varphi_\mathcal{G}$-abiertos serían $\emptyset$ y V.*

Además, como se prueba en el siguiente ejemplo, no es cierto en general que en un C-espacio compacto (X, φ) todo recubrimiento por φ-interiores admite un subrecubrimiento finito por φ-interiores.

Ejemplo 8.2.3. *Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathcal{N}\}$ con la topología euclídea inducida sobre $\mathcal{R}$, y $x \notin X$. (por ejemplo, $x = i$, la unidad imaginaria).*

Se definirá un operador de C-clausura φ sobre $Y = X \cup \{x\}$ indicando los φ-entornos de cada punto.

- Para x se considera $\mathcal{W}_x^\varphi = \{\{x\} \cup \{\frac{1}{2n}\}; n \geq 1\}$.
- Para 0 se considera $\mathcal{W}_0^\varphi = \{V \subseteq X; 0 \in V$ y $V - \{\frac{1}{2n-1}\}; n \geq 1$ es finito$\}$. Por tanto, la familia $\mathcal{V}_k = \{\{0\} \cup \{\frac{1}{2k-1}\}; k \geq n\}$ es base de φ-entornos para 0.
- Para $y = \frac{1}{n}$ se considera la base de entornos $\mathcal{W}_y^\varphi = \{\frac{1}{n}\}$.

Se tiene que (Y, φ) es un C-espacio compacto. En efecto, dada una familia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{\{i\in\mathcal{I}\}}$ con $Y = \cup_{i_\varphi}(U_i)$, sean $U_{i(x)}$ y $U_{i(0)}$ los conjuntos de $\mathcal{U}$ que contienen a 0 y x respectivamente.
Entonces $U_{i(x)} = \{\{x\} \cup \{\frac{1}{2n-1}\}; n \geq 1\}$ y existe $n_0 \geq 1$ tal que $U_{i(0)} \supseteq \mathcal{V}_{n_0}$. Por tanto $Y - U_{i(x)} \cup U_{i(0)} = A$ es finito y la familia $\{U_{i(x)}, U_{i(0)}\} \cup \{U_{i(z)}\}$ donde $U_{i(z)}$ es un conjunto de $\mathcal{U}$ que contiene a cada $z \in X$ y recubre a Y.
Sin embargo, si consideramos la familia $\mathcal{U}$ formada por los conjuntos $U_x = \{\{x\} \cup \{\frac{1}{2n-1}\}; n \geq 1\}$, $U_0 = \{\{0\} \cup \{\frac{1}{2n-1}\}; n \geq 1\}$ y $U_n = \{\frac{1}{2n}; n \geq 1\}$, resulta que $U_x \cup U_0 = Y$, pero para cada $n \geq 1$ el único conjunto de la familia cuyo φ-interior contiene a $\{\frac{1}{2n}\}$ es U_{2n}, en efecto, $U_x \notin \mathcal{W}^\varphi_{\frac{1}{2n}}$ pues $U_x - X \neq \emptyset$.

Como en el caso de espacios topológicos, los C-espacios compactos se pueden caracterizar mediante la propiedad de la intersección finita (PIF) de una cierta familia:

Proposición 8.2.4. *Un C-espacio (X, φ) es C-compacto si y solo si para toda familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ no vacía tal que $\varphi(\mathcal{F}) = \cup\{\varphi(F_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ tiene la PIF, se cumple que $\cap\{\varphi(F_i)\}_{i\in\mathcal{I}} \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea (X, φ) C-compacto y $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia tal que $\cap\{\varphi(F_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ tiene la PIF. Si $\cap_{i\in\mathcal{I}}\varphi(F_i) = \emptyset$, entonces $\cup_{i\in\mathcal{I}}X - \varphi(F_i) = X$. Es decir, $\{U_i\} = \{\varphi(F_i)\}$ sería un recubrimiento por φ-interiores de X y por hipótesis existe $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ finito tal que $\{\varphi(F_i)\}_{i\in\mathcal{J}}$ recubre X. Pero entonces, $\varphi(\mathcal{F})$ no tendría la PIF.
Recíprocamente sea (X, φ) un C-espacio verificando que si $\mathcal{F}$ es una familia cuya $\varphi(\mathcal{F})$ tiene la PIF, entonces $\cap\{\varphi(F_i)\}_{i\in\mathcal{I}} = \emptyset$.
Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es un recubrimiento de X por φ-interiores $\cap_{i\in\mathcal{I}}\varphi(X - U_i) = \emptyset$, luego existe $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ finito tal que $\cap_{i\in\mathcal{J}}\varphi(X - U_i) = \emptyset$, por tanto $\{\varphi(X - U_i)\}_{i\in\mathcal{J}}$ sería un recubrimiento finito de X por φ interiores. Ahora bien, $\cup_{i\in\mathcal{J}}U_i \supseteq \cup_{i\in\mathcal{J}}i_\varphi(U_i) = X$. □

9. Espacios de clausura de Čech conexos

El concepto de conexión está muy ligado al concepto de separación de espacios de clausura de Čech.

Definición 9.0.1. *Sea (X, φ) un espacio de Čech. $A, B \subseteq X$ se llaman φ-semiseparados si existen φ-entornos U, V de A y B respectivamente tales que $A \cap V = \emptyset = U \cap B$.*

Definición 9.0.2. *A y B se llaman separados si admiten C-entornos disjuntos.*

Proposición 9.0.3. *En un espacio de Čech (X, φ), $A, B \subseteq X$ se llaman φ-semiseparados si y solo si $\varphi(A) \cap B = A \cap \varphi(B) = \emptyset$.*

Demostración. Si A y B son φ-semiseparados, existen U, V tal que $A \subseteq i_\varphi(U)$, $B \subseteq i_\varphi(V)$ con $A \cap V = \emptyset = U \cap B$.
Pero si $V \subseteq X - A$ entonces $B \subseteq i_\varphi(V) \subseteq i_\varphi(X - A) \subseteq X - B$. Se prueba análogamente que $\varphi(B) \subseteq X - A$. Recíprocamente supongamos que $\varphi(A) \cap B = \emptyset = A \cap \varphi(B)$. Entonces $B \subseteq X - \varphi(A) = i_\varphi(X - A)$ por tanto $V = X - A$ es φ-entorno de B y $A \cap V = \emptyset$. Del mismo modo se prueba que $U = X - B$ es φ-entorno de A. □

Nota 9.0.4. *Obsérvese que si $A, B \subseteq X$ son φ-cerrados, en (X, φ) entonces son φ-semiseparados si y solo si $A \cap B = \emptyset$. Si $A, B \subseteq X$ son φ-abiertos entonces son φ-semiseparados si y solo si son disjuntos*

Definición 9.0.5. *$Z \subseteq X$ se llama conexo en (X, φ) o C-conexo si no existe ningún subconjunto propio $A \subseteq Z$ tal que A y $Z - A$ sean φ-semiseparados, en otros términos, $Z \subseteq X$ se llama conexo en (X, φ) si para todo subconjunto propio $A \subseteq Z$ se cumple que*

$$(\varphi(A) \cap (Z - A)) \cup (A \cap \varphi(Z - A)) = \emptyset$$

.

Otra forma de expresar la C-conexión de Z es: si $Z = A \cup B$ con $(\varphi(A) \cap B) \cup (A \cap \varphi(B)) = \emptyset$ entonces $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.
Dicha propiedad se conoce como condición de Hausdorff-Lennes.
La siguiente proposición prueba que la C-conexión se conserva por aplicaciones C-continuas. Para su demostración se usa el siguiente lema.

Lema 9.0.6. *Sea $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ C-continua y A y $B \subseteq Y$ conjuntos semiseparados. Entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ también lo son.*

Demostración. Supongamos que $\psi(A) \cap B = \emptyset$, como f es C-continua se tiene que $\varphi(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(\psi(A))$. Luego $\varphi(f^{-1}(B)) \cap f^{-1}(A) = \emptyset$. □

Proposición 9.0.7. *Si $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ C-continua, y $A \subseteq X$ es C-conexo, entonces $f(A)$ es C-conexo.*

Demostración. Supongamos que $f(A)$ fuese la unión disjunta de los conjuntos semiseparados U, V. Entonces, por el lema anterior, $A' = A \cap f^{-1}(U)$ y $A'' = A \cap f^{-1}(V)$ sería semiseparados y se tendría que $A = A' \cup A''$ y por tanto A no sería C-conexo. □

A continuación, se prueba que al igual que ocurre en los espacios topológicos, en los C-espacios, la C-conexión es equivalente a la no existencia de una partición del espacio por conjuntos φ-cerrados (abiertos).

Proposición 9.0.8. *(X, φ) es C-conexo si y solo si X no es la unión disjunta de dos subconjuntos propios φ-cerrados (φ-abiertos).*

Demostración. Supongamos que $X = A \cup B$ siendo A, B subconjuntos propios disjuntos y φ-cerrados. Entonces A y B serían semiseparados y X no sería C-conexo.
Recíprocamente supongamos que $A, B \subseteq X$ fuesen subconjuntos propios semiseparados con $A \cup B = X$. Entonces se tendría que $(\varphi(A) \cap B) \cup (A \cap \varphi(B)) = \emptyset$. Como $A \cap \varphi(B) = \emptyset$ se tendría que $\varphi(B) \subseteq X - A \subseteq B$, es decir, B sería φ-cerrado.
Análogamente se prueba que A sería φ-cerrado, lo que es una contradicción con la hipótesis. □

De hecho se tiene el siguiente resultado.

Proposición 9.0.9. *(X, φ) es C-conexo si y solo si (X, τ_φ) es conexo.*

Demostración. Como $id : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \tau_\varphi)$ es C-continua por la proposición anterior, si (X, φ) es C-conexo, (X, τ_φ) también lo es.
Recíprocamente, si (X, φ) no es C-conexo, por la proposición anterior existirá un subconjunto propio $A \subseteq X$ que sería a la vez φ-abierto y φ-cerrado. Entonces A tendría las mismas propiedades en (X, τ_φ).. □

Ejemplo 9.0.10. *Si $\mathcal{G} = (V, E)$ es un grafo (simple) y $\varphi_{\mathcal{G}}$ es el C-operador definido como $\varphi_{\mathcal{G}}(v) = \{v\} \cup \mathcal{W}_v$, $A, B \subseteq V$ son semiseparados si ningun par de vértices $v \in A$, $w \in B$ son adyacentes.*

Ejemplo 9.0.11. *Si (X, d) es conexo y $\varepsilon > 0$ entonces $\tau_{\varphi_{d,\varepsilon}} = \{X, \emptyset\}$.*

Veamos que si $A \subseteq X$ es un φ-cerrado no vacío entonces $A = X$, pero si $A = \varphi_{d,\varepsilon}(A)$, entonces A es cerrado en τ_d. Por otra parte $\mathcal{V}_{d,\varepsilon}(A) = \{x \in X; d(x, A) < \varepsilon\}$ es τ_d-abierto. Veamos que para todo $y \in \mathcal{V}_{d,\frac{\varepsilon}{2}}$, $B_d(y; \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq A$, en efecto, si $z \in B_d(y; \frac{\varepsilon}{2})$, $d(z, A) \leq d(y, A) + d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por tanto $A \subseteq \mathcal{V}_{d,\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq \varphi_{d,\varepsilon}(A) \subseteq A$, es decir , $A = \mathcal{V}_{d,\frac{\varepsilon}{2}}$ y por tanto, $A \in \tau_d$.

Proposición 9.0.12. *Si (X, φ) es un C-espacio e $Y \subseteq X$, entonces $A, B \subseteq Y$ son φ-semiseparables si y solo si son C_A-semiseparados.*

Demostración. Supongamos que A, B son φ-semiseparables, entonces existen $U, V \subseteq Y$ tales que $A \subseteq i_\varphi(U)$, $B \subseteq i_\varphi(V)$ con $A \cap V = \emptyset = U \cap B$. Por la proposición anterior, $A \subseteq i_\varphi(U) \cup (X - Y)$ y $B \subseteq i_\varphi(V) \cup (X - Y)$. Entonces $U' = U \cup (X - Y) \in \mathcal{W}_\varphi(A)$, $V' = V) \cup (X - Y) \in \mathcal{W}_\varphi(B)$ con $U' \cap B = V' \cap A = \emptyset$, es decir, A y B son semiseparados.

Recíprocamente, si A y B son φ-semiseparados, entonces, $\varphi(A) \cap B = \emptyset = \varphi(B) \cap A$, y por tanto $\varphi_{|Y}(A) \cap B = \varphi(A) \cap Y \cap B = \varphi(A) \cap Y = \emptyset$, y $\varphi_{|Y}(B) \cap A = \emptyset$. □

Proposición 9.0.13. *Sea $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ una aplicación cociente entre C-espacios tal que $f^{-1}(Y)$ es φ-conexo para todo $y \in Y$. Entonces $B \subseteq Y$ es ψ-conexo si y solo si $f^{-1}(B)$ es φ-conexo.*

Demostración. Si $f^{-1}(B)$ es φ-conexo, entonces $B = f(f^{-1}(B))$ es ψ-conexo por ser f C-continua.

Recíprocamente supongamos que B es ψ-conexo. Veamos por reducción al absurdo que $f^{-1}(B)$ es φ-conexo, en caso contrario, $f^{-1}(B) = X_1 \cup X_2$, siendo X_1 y X_2 conjuntos φ-semiseparados en $f^{-1}(B)$, es decir, satisfaciendo que $X_1 \cap \varphi(X_2) = \emptyset = \varphi(X_1) \cap X_2$. Sea $Y_i = f(X_i)$, $i = 1, 2$. Se tiene que $Y_1 \cup Y_2 = f(f^{-1}(B)) = B$, y por ser $f^{-1}(Y)$ φ-cociente se cumple que $\psi(Y_2) = f(\psi(f^{-1}(Y_2)))$, sería $f^{-1}(\psi(Y_2) \cap B) = f^{-1}(\psi(Y_2)) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(f(\psi(f^{-1}(Y_2)))) \cap f^{-1}(B) = \varphi(f^{-1}(Y_2)) \cap f^{-1}(B)$, luego tendríamos, $\psi(Y_2) \cap B = f(\varphi(f^{-1}(Y_2) \cap f^{-1}(B)))$ y sería $Y_1 \cap \psi(Y_2) = Y_1 \cap \psi(Y_2) \cap B = Y_1 \cap f(\varphi(f^{-1}(Y_2) \cap f^{-1}(B))) = f(X_1) \cap f(\varphi(X_2) \cap (X_1 \cup X_2)) = f(X_1) \cup f(X_2) = Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.

Razonando análogamente se probaría que $\psi(Y_1) \cap Y_2 = \emptyset$ y por tanto, Y_1 e Y_2 serían ψ-semiseparados en B, por lo que B no sería ψ-conexo. □

Ejemplo 9.0.14. *El resultado anterior no es cierto en general para aplicaciones cociente entre espacios topológicos. En efecto, sean $\{a, b, c, d\}$ e $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, dotados* *de las topologías $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{d\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}\}$ y $\tau' = \{\emptyset, Y, \{\beta,\gamma\}, \{\beta\}\}$ respectívamente, la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ dada por $f(a) = \alpha$, $f(b) = f(c) = \gamma$ y $f(d) = \beta$, es una aplicación cociente, pues se comprueba sin dificultad que $O \in \tau'$ si y solo si $f^{-1}(O) \in \tau$. Además, $f^{-1}(\alpha)$, $f^{-1}(\beta)$ y $f^{-1}(\gamma)$ son subconjuntos conexos de (X, τ). Ahora bien, $B = \{\alpha, \beta\}$ es conexo en (Y, τ'), pues $\tau'_{|B} = \{\emptyset, B, \{\beta\}\}$ pero $A = f^{-1}(B) = \{a, d\}$, no es conexo, ya que $\tau'_{|A} = \{\emptyset, A, \{d\}, \{a\}\}$.*

10. Relaciones binarias y matrices booleanas

En este capítulo se exponen las propiedades y definiciones básicas de las relaciones binarias y las matrices y digrafos asociados a ellas, una exposición muy clara y detallada de ellas se da en el capítulo 4 de [12].

10.1. Matrices booleanas

Definición 10.1.1. *Una matriz A se dice booleana si sus elementos son 0 o 1.*

Si A y B son dos matrices booleanas de orden $m \times p$, su suma booleana o unión $A \vee B$ es la matriz $C = c_{(i,j)}$ de orden $m \times p$ dada por $c_{(i,j)} = a_{(i,j)} \vee b_{(i,j)}$ donde $x \vee y = max\{x, y\}$. Si A y B son dos matrices booleanas de orden $m \times n$ y $n \times p$ respectivamente, su producto booleano $A \odot B$ es la matriz $C = c_{(i,j)}$ de orden $m \times p$ dada por $c_{(i,j)} = \bigvee a_{(j,k)} \wedge b_{(k,j)}$, donde $x \wedge y = min\{x, y\}$.

Veamos un ejemplo de matrices booleanas y como operan entre si.

Ejemplo 10.1.2. *Sean las siguientes matrices booleanas:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces $A \vee B = C, A \odot B = D$, con C, D respectivamente:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10.2. Relaciones binarias, operaciones entre ellas y matrices asociadas

Definición 10.2.1. *Dados A y B dos conjuntos, una relación binaria R de A en B es un subconjunto de $A \times B$.*
Si $(a, b) \in R$, diremos que a está relacionado con b por R, y usualmente escribiremos aRb. Cuando $A = B$, diremos que R es una relación en A.

Algunos tipos de relaciones binarias especialmente interesantes son las siguientes:
Relaciones reflexivas e irreflexivas:
Una relación $R \subseteq A \times A$ se dice **reflexiva** si el par $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$, e **irreflexiva** si cumple que el par $(a, a) \notin R$ para todo $a \in A$.

Relaciones simétricas, antisimétricas y asimétricas:
Una relación $R \subseteq A \times A$ se dice **simétrica** si cumple que si aRb entonces bRa. R se dice **asimétrica** si cumple que si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \notin R$.
Una relación R en A se dice **antisimétrica** si cumple que si aRb y bRa entonces $a = b$.

Relaciones transitivas:
Sea A un conjunto, diremos que una relación R en A es **transitiva** si cumple que dados $a, b, c \in A$, si aRb y bRc entonces aRc.

Definición 10.2.2. *Una relación se dice de* ***equivalencia*** *si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*

Definición 10.2.3. *Sean $A = \{x_1, .., x_n\}$ y $B = \{s_1, .., s_p\}$, la matriz asociada a una relación binaria $R \subseteq A \times B$, es $M_R = (m)_{i,j}$, de orden $n \times p$, donde $(m)_{i,j} = 1$ si $(x_i, s_j) \in R$ y 0 en caso contrario.*

Ejemplo 10.2.4. *Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{r, s\}$, entonces $R = \{(1, r), (2, s), (3, r)\}$ es una relación de A en B.*

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Observación 10.2.5. *Es inmediato comprobar que una relación es reflexiva en un conjunto A, es reflexiva si todos los elementos de su diagonal son unos y es simétrica si su matriz asociada es simétrica.*

Ejemplo 10.2.6. *Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ un conjunto, y sea:*

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$$

veamos que efectivamente es una relación de equivalencia.

En este caso se pordrían comprobar a mano las propiedades por tener R tan pocos elementos. Pero la complejidad de tratar así el problema aumenta cuando R aumenta el número de elementos de forma que es muy complicado y costoso. En cambio intentemos comprobar por medio de su matriz asociada que efectivamente es una relación de equivalencia.
En este caso su matriz está dada por:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que efectivamente las propiedades simétrica y reflexiva se tienen trivialmente viendo la matriz pero la transitividad no y se presenta el problema de caracterizar la transitividad de manera efectiva cuando se manejan conjuntos de mayor tamaño.

Un intento de resolver este problema es usar una representación geométrica de la relación mediante un digrafo, llamado grafo de la relación.

Definición 10.2.7. *Si R es una relación binaria, su digrafo asociado G_R es el que tiene como conjunto de vértices los elementos de A y una arista de a_i al vértice a_j si a_iRa_j, es decir, las aristas los pares de R.*

Ejemplo 10.2.8. *Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ un conjunto, y sea*
$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (b, e), (e, b), (e, d), (d, e), (c, d), (d, c)\}$
Su digrafo asociado es:

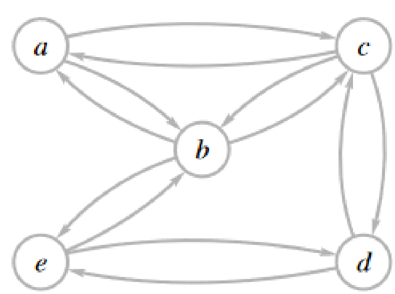


Figura 2: Digrafo de R

y la relación no es transitiva, porque hay una arista de d a c, otra de c a b, pero ninguna de d a b.
Notese que este método parece más sencillo o más visual, pero tampoco es efectivo cuando hay un elevado número de vértices o aristas.

Definición 10.2.9. *Sean R y S relaciones de un conjunto A en un conjunto B. Entonces, como R y S son subconjuntos de $A \times B$, se pueden considerar las siguientes operaciones entre R y S.*
La relación complementaria de R, $\bar{R}$, se define como $a\bar{R}b$ si $(a, b) \notin R$.
La intersección $R \cap S$ se define como $a(R \cap S)b$ si aRb y aSb y la unión $a(R \cup S)b$ si aRb o aSb.
Un tipo diferente de operación en una relación R de A a B, que no está dado por una

operación entre conjuntos es la formación de la relación inversa, denotada por R^{-1}, *y definida como* $bR^{-1}a$ *si* aRb. *De esto se desprende claramente que* $(R^{-1})^{-1} = R$.

Ejemplo 10.2.10. *Sea* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $B = \{a, b, c\}$
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$.
Sean $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, b), (4, a)\}$ *y* $S = \{(1, b), (2, c), (3, b), (4, b)\}$.
Si (a) $\bar{R}$; *(b)* $R \cap S$; *(c)* $R \cup S$; *y (d)* R^{-1}, *entonces se tiene:*

(a) El complemento de R *en* $A \times B$ *es* $\bar{R} = \{(1, c), (2, a), (3, a), (3, c),$
$(4, b), (4, c)\}$

(b) $R \cap S = \{(1, b), (3, b), (2, c)\}$.

(c) $R \cup S = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, b), (4, a), (4, b)\}$.

(d) $R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2), (b, 3), (a, 4)\}$.

Ejemplo 10.2.11. *Sea* $A = \mathbb{R}$ *y sean* R *y* S *las relaciónes* $\leq$ *y* $\geq$ *en* A *respectivamente. Entonces el complemento de* R *es la relación* $>$, *ya que* $a \nleq b$ *significa que* $a > b$. *Del mismo modo,* $\bar{S}$ *es* $<$.
Por otro lado, $R^{-1} = S$, *ya que dados* a *y* $b \in \mathbb{R}$ *entonces* $aR^{-1}b$ *si y solo si* bRa; *es decir* $b \leq a$ *si y solo si* $a \geq b$. *De manera similar, tenemos* $S^{-1} = R$.
Además, nótese que $R \cap S$ *es la relación de igualdad, ya que* $a(R \cap S)b$ *si y solo si* $a \leq b$ *y* $a \geq b$; *es decir* $a = b$.

Dados cualesquiera a *y* b, $a \leq b$ *o* $a \geq b$ *debe cumplirse, vemos que* $R \cup S = A \times A$; *es decir,* $R \cup S$ *es la llamada relación universal en la que cualquier* a *se relaciona con cualquier* b.

Ejemplo 10.2.12. *Sea* $A = \{1, 2, 3\}$ *y sean* R *y* S *relaciones en* A, *cuyas matrices son:* R *y* S *son*

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene

$$M_{\bar{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{R \cap S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{R \cup S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Definición 10.2.13. *Sean* A, B *y* C *conjuntos,* R *una relación de* A *a* B *y* S *una relación de* B *a* C. *Entonces se define una nueva relación, llamada composición de* R *y* S, *denotada por* $S \circ R$, *del siguiente modo:*

Si $a \in A$ y $c \in C$, entonces $a(S \circ R)c$ si y solo si para algún b en B, tenemos aRb y bSc.

En lo que sigue, denotaremos por R^n como R compuesto consigo mismo n veces. Es inmediato comprobar que $M_{R^n} = (M_R)^n$.

En otras palabras, a está relacionada con c por $S \circ R$ si podemos relacionar a con c en dos etapas usando un elemento intermedio: primero relacionamos a con b por la relación R y luego de b a c por la relación S. La relación $S \circ R$ podría pensarse como "S siguiendo R"ya que representa el resultado de combinar dos relaciones, primero R, luego S.
Obsérvese que si R y S son funciones la composición es la composición de funciones.

Ejemplo 10.2.14. *Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ y $S = \{(1, 4), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$.*
Dado que $(1, 2) \in R$ y $(2, 3) \in S$, entonces $(1, 3) \in S \circ R$.
De manera similar, dado que $(1, 1) \in R$ y $(1, 4) \in S$, vemos que $(1, 4) \in S \circ R$.
Procediendo de esta manera, se obtiene que $S \circ R = \{(1, 4), (1, 3), (1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$.

El siguiente resultado muestra cómo obtener la composición de de dos relaciones sobre un conjunto.

Proposición 10.2.15. *Sea R una relación de A a B y sea S una relación de B a C. Entonces, si A_1 es cualquier subconjunto de A, tenemos $(S \circ R)(A_1) = S(R(A_1))$*

Demostración. Si un elemento $z \in C$ está en $(S \circ R)(A_1)$, entonces $x(S \circ R)z$ para alguna x en A_1. Por la definición de composición, esto significa que xRy y ySz para algún y en B y $\in \varphi_R(x)$, entonces $z \in S(R(x))$. Dado que $\{x\} \subseteq A_1$, sabemos que $S(R(x)) \subseteq S(R(A_1))$. Por tanto, $z \in S(R(A1))$, se tiene que $(S \circ R)(A_1) \subseteq S(R(A_1))$.
Recíprocamente, supongamos que $z \in S(R(A_1))$. Entonces $z \in S(y)$ para algún y en $R(A_1)$ y, de manera similar, $y \in R(x)$ para algun x en A_1. Esto significa que xRy y ySz, entonces $x(S \circ R)z$. Por lo tanto, $z \in (S \circ R)(A_1)$, luego $S(R(A_1)) \subseteq (S \circ R)(A_1)$ y se tiene el resultado. □

Proposición 10.2.16. *Supongamos que R y S son relaciones de A y B.*

(a) Si $R \subseteq S$, entonces $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

(b) Si $R \subseteq S$, entonces $\bar{S} \subseteq R$.

(c) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ y $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

(d) $\overline{R \cap S} = \bar{R} \cup \bar{S}$ y $\overline{R \cup S} = \bar{R} \cap \bar{S}$.

Demostración. Los apartados (b) y (d) son casos particulares de propiedades generales del conjuntos.
Probemos el apartado (a). Supongamos que $R \subseteq S$ y sea $(a,b) \in R^{-1}$. Entonces $(b,a) \in R$, por lo que $(b,a) \in S$.
Luego, a su vez, implica que $(a,b) \in S^{-1}$, por lo que se tiene el resultado.

A continuación probamos la parte (c). Para la primera parte, supongamos que $(a,b) \in (R \cap S)^{-1}$. Entonces $(b,a) \in R \cap S$, por lo que $(b,a) \in R$ y $(b,a) \in S$. Esto significa que $(a,b) \in R^{-1}$ y $(a,b) \in S^{-1}$, luego $(a,b) \in R^{-1} \cap S^{-1}$. La inclusión inversa se puede probar invirtiendo los pasos. Con un argumento similar se prueba que $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$. □

10.3. Clausuras o cierres de una relación binaria

Si R es una relación en un conjunto A, puede suceder que R carezca de algunas de las propiedades relacionales tratadas, especialmente reflexividad, simetría y transitividad. Si R no posee una propiedad particular, es posible que interese agregar pares a R hasta que obtengamos una relación que tenga la propiedad requerida. Naturalmente, sería conveniente agregar la menor cantidad posible de pares nuevos, por lo que lo que necesitamos encontrar la relación más pequeña R_1 sobre A que contiene R y posee la propiedad que deseamos.R_1 se llamará cierre o clausura de R con respecto a la propiedad en cuestión. Especialmente interesante por sus aplicaciones es el cierre transitivo de una relación.

Definición 10.3.1. *El cierre transitivo de una relación R es la relación transitiva más pequeña que contiene R, y se denotará por $t(R)$.*

Supongamos que R es una relación en un conjunto A y que R no es transitiva.
Veamos a continuación el siguiente resultado de gran interés práctico.

Proposición 10.3.2. $t(R) = R^\infty$*, donde* $R^\infty = R^1 \cup R^2 \cup R^3 ...$

Demostración. Recordemos que si a,$b \in A$ están en el conjunto A, entonces $aR^\infty b$ si y solo si hay un camino en G_R de a a b. Ahora bien, R^∞ es transitiva ya que, si $aR^\infty b$ y $bR^\infty c$, la composición de los caminos de a a b y de b a c forma un camino de a a c en R, y entonces $aR^\infty c$.
Para mostrar que R^∞ es la relación transitiva más pequeña que contiene R, debemos probar que si S es una relación transitiva en A y $R \subseteq S$, entonces $R^\infty \subseteq S$.
Sabemos que si S es transitivo, entonces $S^n \subseteq S$ para todo n; es decir, si a y b están conectados por un camino de longitud n, entonces aSb. Resulta pues que $S^\infty = S^n \subseteq S$.
También es cierto que si $R \subseteq$ S, entonces $R^\infty \subseteq S^\infty$, ya que cualquier camino en R es también un camino en S. Teniendo en cuenta estas propiedades vemos que si $R \subseteq S$ y S es transitivo en A, entonces $R^\infty \subseteq S^\infty \subseteq S$. Esto significa que R^∞ es la más pequeña de todas las relaciones transitivas en A que contienen a R. □

Observación 10.3.3. *De la proposición anterior se deduce que R^∞ tiene varias interpretaciones. Desde un punto de vista geométrico, se llama relación de conectividad, ya que indica qué vértices de G_R están conectados (por caminos) a otros vértices, por otra parte, desde un punto de vista algebraico es también la clausura transitiva de R como hemos probado en el teorema anterior.*

Veremos en el siguiente ejemplo cómo se calcula R^∞ usando ambas interpretaciones.

Ejemplo 10.3.4. *Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $R= \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1)\}$.*
Veamos como se obtiene R^∞.
Método 1

para obtener R^∞ : El dígrafo de R se muestra en la Figura. Dado que R^∞ es el cierre transitivo

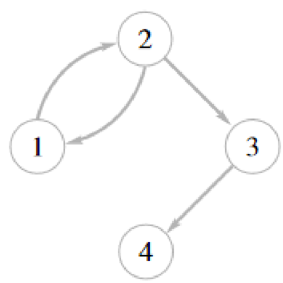


Figura 3: Digrafo de R

podemos proceder geométricamente calculando todos los caminos.
Vemos que desde el vértice 1 existen caminos a los vértices 2, 3, 4 y 1. Tengamos en cuenta que el camino de 1 a 1 procede de 1 a 2 seguido del camino de 2 a 1.
Así vemos que los pares ordenados (1, 1), (1, 2), (1, 3), y (1, 4) están en R^∞. Comenzando desde el vértice 2, tenemos caminos a los vértices 2, 1, 3 y 4, por lo que los pares ordenados (2, 1), (2, 2), (2, 3) y (2, 4) están en R^∞.
El único camino que queda es el que va del vértice 3 al vértice 4, por lo que tenemos:

$R^\infty = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Método 2:
La matriz de R es

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos proceder algebráicamente y calcular las potencias de M_R. Por lo tanto

$$M_R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Continuando de esta forma, se comprueba que $M_R^n = M_R^2$ si n es par, y $M_R^n = M_R^3$ si n es impar y mayor que 1.
Por lo tanto:

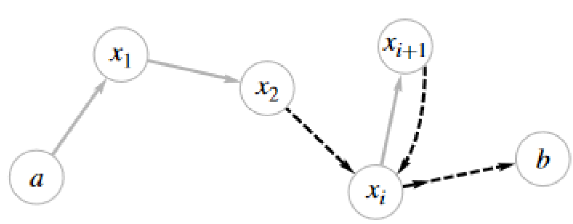
$$M_R^\infty = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto obtenemos la misma relación que el Método 1.

Observación 10.3.5. *Como se observa en el ejemplo anterior no es necesario considerar todas las potencias R^n para obtener R^∞.*
Esta propiedad es cierta siempre que el conjunto A sea finito, como demostraremos ahora.

Proposición 10.3.6. *Sea A un conjunto con $\sharp(A) = n$, y sea R una relación en A, entonces $R^\infty = R \cup R^2 \cup ... \cup R^n$.*
En otras palabras, no se necesitan potencias de R mayores que n para calcular R^∞.

Demostración. Sean $a, b \in A$, y supongamos que $a, x_1, x_2, ..., x_m, b$ es un camino desde a hasta b en R; es decir, (a, x_1), $(x_1, x_2), ..., (x_m, b)$ están todos en R. Si x_i y x_j son el mismo vértice, con $i < j$, entonces el camino se puede dividir en tres partes.
Primero, un camino de a a x_i, luego un camino de x_i a x_j, y finalmente un camino de x_j a b. El camino intermedio es un ciclo, ya que $x_i = x_j$, así que lo eliminamos y colocamos los dos caminos restantes juntos. Esto nos da un camino más corto desde a hasta b.



Ahora sea $a, x_1, x_2, ..., x_k, b$ el camino más corto de a a b. Si $a \neq b$, entonces todos los vértices $a, x_1, x_2, ..., x_k, b$ son distintos. De lo contrario, siguiendo el razonamiento anterior podríamos encontrar un camino más corto. Por lo tanto, la longitud del camino es como máximo $n - 1$ (ya que $\sharp(A) =$ n).
Si $a = b$, entonces, por razones análogas, los vértices $a, x_1, x_2, ..., x_k$ son distintos, por lo que la longitud de la ruta es como máximo n. En otras palabras, si $aR^{\infty}b$, entonces $aR^k b$, para algun k, $1 \leq k \leq n$. Por tanto, $R^{\infty} = R \cup R^2 \cup \, ... \, \cup R^n$. □

Los métodos utilizados para resolver el ejemplo anterior tienen cada uno ciertas dificultades.
El método gráfico no es práctico para conjuntos y relaciones grandes y no es sistemático.

El método matricial se puede utilizar en general y es lo suficientemente sistemático para ser programado, pero es ineficiente y, para matrices grandes, puede ser demasiado costoso.
Afortunadamente, se dispone de un algoritmo más eficiente para calcular el cierre transitivo que se llama como algoritmo de Warshall, en honor a su creador, y se decribe en la siguiente sección.

10.4. Algoritmo de Warshall

Sea R una relación en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Si $x_1, x_2, ..., x_m$ es un camino en R, entonces cualquier vértice que no sea x_1 y x_m se llama vértice interior del camino.
Ahora, para $1 \leq k \leq n$, definiremos una matriz booleana W_k de la siguiente manera.

W_k tiene un 1 en posición (i, j) si y solo si hay un camino de a_i a a_j en R cuyos vértices interiores, si los hay, proceden del conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$.
Dado que cualquier vértice debe provenir del conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, se deduce que la matriz W_n tiene un 1 en la posición (i, j) si y solo si algun camino en R conecta a_i con a_j. En otras palabras, $W_n = M_R^{\infty}$.
Si definimos W_0 como M_R, entonces tendremos una sucesión $W_0, W_1, ..., W_n$ cuyo primer término es M_R y cuyo último término es M_R^{∞} .
Veamos como se calcula cada matriz W_k a partir de la matriz anterior W_{k-1}.
De este modo, comenzaremos con la matriz de R y avanzaremos paso a paso hasta que, tras n pasos, se obtiene la matriz de M_R^{∞}.
Este procedimiento se llama algoritmo de Warshall.
Nótese que las matrices W_k son diferentes de las potencias de la matriz W, y esta diferencia supone un ahorro considerable de pasos en el cálculo del cierre transitivo de R.

Supongamos que $W_k = t(i, j)$ y $W_{k-1} = s(i, j)$. Si $t(i, j) = 1$, entonces tiene que existir un un camino de a_i a a_j cuyos vértices interiores provienen del conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$.

Si el vértice a_k no es un vértice interior de este camino, es porque todos los vértices interiores deben en realidad estar en conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}$, entonces $s(i,j) = 1$.
Si a_k es un vértice interior del camino, como en el teorema anterior podemos suponer que todos los vértices interiores son distintos, así que a_k aparece solo una vez en el camino, por lo que todos los vértices interiores de las caminos parciales 1 y 2 deben provenir del conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_{(k-1)}\}$. Esto significa que $s(i,k) = 1$ y $s(k,j) = 1$.
Por lo tanto, $t(i,j) = 1$ si y solo si
(1) $s(i,j) = 1$ o (2) $s(i,k) = 1$ y $s(k,j) = 1$.

Esta es la base del algoritmo de Warshall. Si W_{k-1} tiene un 1 en la posición (i,j) entonces, por (1), también lo tendrá la W_k. Por (2), se puede agregar un nuevo 1 en la posición (i,j) de W_k si y solo si la columna k de W_{k-1} tiene un 1 en la posición i y la fila k de W_{k-1} tiene un 1 en la posición j.
Por lo tanto, tenemos el siguiente procedimiento para calcular W_k a partir de W_{k-1}.

Paso 1 Transferir a W_k todos los 1 en W_{k-1}.

Paso 2 Enumerar las posiciones $p_1, p_2, ...$, en la columna k de W_{k-1}, donde la entrada es 1, y las posiciones $q_1, q_2, ...$, en la fila k de W_{k-1}, donde la entrada es 1.

Paso 3 Poner 1 en todas las posiciones (p_i, q_j) de W_k (si aún no están allí).

Ejemplo 10.4.1. *Considere la relación R definida en el ejemplo anterior. Entonces*

$$W_0 = M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $n = 4$.

Primero obtenemos W_1 de modo que $k = 1$. W_0 tiene unos en la posicion $(2,1)$ y $(1,2)$. Por lo tanto, W_1 es simplemente W_0 con un nuevo 1 en la posición $(2,2)$.

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos W_2. Debemos examinar la columna 2 y la fila 2 de W_1. La matriz W_1 tiene unos en las posiciones 1 y 2 de la columna 2 y las posiciones 1, 2 y 3 de la fila 2.

Por tanto, para obtener W_2, debemos poner unos en las posiciones $(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,1)$; $(2,2)$; y $(2,3)$ de la matriz W_1 (si no hay unos en ellas).

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Continuando de esta manera, vemos que la columna 3 de W_2 tiene unos en las posiciones 1 y 2, y la fila 3 de W_2 tiene un 1 en la posición 4. Para obtener W_3, debemos poner unos en las posiciones 1, 4 y 2, 4 de W_2, entonces

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, W_3 tiene unos en las posiciones 1, 2, 3 de la columna 4 y ningún uno en la fila 4, por lo que no se agregan nuevos unos y $M_R^{\infty} = W_4 = W_3$. Vemos que hemos obtenido el mismo resultado que en el ejemplo anterior. Una aplicación interesante del cierre transitivo es a las relaciones de equivalencia.
Mostramos que si R y S son relaciones de equivalencia en un conjunto A, entonces $R \cap S$ también es una relación de equivalencia en A. La relación $R \cap S$ es la relación de equivalencia mas grande contenida tanto en R como en S, ya que es el subconjunto más grande de $A \times A$ contenida en ambos R y S. Nos gustaría conocer la menor equivalencia relación que contiene tanto R como S. El candidato natural es $R \cup S$, pero esta relación no es necesariamente transitiva. La solución se da en el siguiente teorema.

Proposición 10.4.2. *Si R y S son relaciones de equivalencia en un conjunto A, entonces la relación de equivalencia más pequeña que contiene tanto R como S es $(R \cup S)^{\infty}$.*

Demostración. Recordemos que si Δ es la relación de igualdad en A, una relación es reflexiva si y solo si contiene Δ. Entonces $\Delta \subseteq R$, $\Delta \subseteq S$ ya que ambas son reflexivas, luego $\Delta \subseteq R \cup S \subseteq (R \cup S)^{\infty}$, y $(R \cup S)^{\infty}$ también es reflexiva.
Dado que R y S son simétricas, $R = R^{-1}$ y $S = S^{-1}$, entonces $(R \cup S)^{-1} = (R^{-1} \cup S^{-1}) = (R \cup S)$, y $(R \cup S)$ también es simétrica. Debido a esto, todos los caminos en $R \cup S$ son "calles de dos sentidos", y de las definiciones se sigue que $(R \cup S)^{\infty}$ también debe ser simétrica. Como ya sabemos que $(R \cup S)^{\infty}$ es transitivo, es una relación de equivalencia que contiene $(R \cup S)$. Es la más pequeña, porque no puede haber otro conjunto más pequeño que contenga a $(R \cup S)$ sino su cierre transitivo, por definición del cierre transitivo. $\square$

Ejemplo 10.4.3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$

$S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$.

La partición A/R de A correspondiente a R es $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$, y la partición A/R de A correspondiente a S es $\{\{1\},\{2\},\{3\}\{4,5\}\}$.

Encontremos la relación de equivalencia más pequeña que contenga R y S, y calculemos la partición de A que produce.

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $M_{(R\cup S)^\infty}$ mediante el algoritmo de Warshall.
Primero, $W_0 = M_{(R\cup S)}$.
A continuación, se calcula W_1, por lo que $k = 1$. Dado que W_0 tiene unos en las posiciones1 y 2 de la columna 1 y en las posiciones1 y 2 de la fila 1, llegamos a que no se deben agregar nuevos 1 a W_1.
Por lo tanto $W_1 = W_0$.
Ahora calculamos W_2, por lo que $k = 2$. Dado que W_1 tiene unos en las posiciones1 y 2 de columna 2 y en las posiciones1 y 2 de la fila 2, encontramos que no se deben agregar nuevos 1 a W_1.
Por lo tanto $W_2 = W_1$.
A continuación, calculamos W_3, por lo que $k = 3$. Dado que W_2 tiene unos en las posiciones3 y 4 de columna 3 y en las posiciones3 y 4 de la fila 3, encontramos que no se deben agregar nuevos 1 a W_2.
Por lo tanto $W_3 = W_2$. Ahora calculemos W_4. Dado que W_3 tiene 1 en las posiciones 3, 4 y 5 de la columna 4 y en las posiciones 3, 4 y 5 de la fila 4, debemos agregar nuevos 1 a W_3 en las posiciones 3, 5 y 5, 3.

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se verifica que $W_5 = W_4$ *y por lo tanto* $(R \cup S)^\infty = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),$ $(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$*. La partición correspondiente de* A *es entonces* $\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$*.*

11. C-espacios y relaciones binarias

11.1. C-espacios casi discretos

Los espacios de clausura casi discretos son unos de los tipos más importantes de espacios de clausura, esto principalmente es por sus interesantes aplicaciones a la topología digital (ver [22]). Se sabe que los espacios de clausura discretos son automaticamente casi discretos. En esta sección vamos a dar algunos resultados sobre estos espacios así como vamos a tratar de caracterizarlos.

Definición 11.1.1. *Un C-espacio* (X, φ) *se llama casi discreto si para todo* $A \subseteq X$ *se cumple que* $\varphi(A) = \cup\{\varphi(x); x \in A\}$*.*

Proposición 11.1.2. *Sea* (X, φ) *un espacio de clausura, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *a) Cada* $x \in X$ *admite un* φ*-entorno mínimo* N_x*. Es decir,* N_x *es* φ*-entorno de* x*, y dado* $N \in \mathcal{W}_x^\varphi$ *se cumple que* $N_x \subseteq N$*.*
- *b)* (X, φ) *es casi discreto.*

Demostración. a)⇒b). Para cada $x \in A$, $\varphi(x) \subseteq \varphi(A)$ por tanto $A \subseteq X, \varphi(A) \subseteq \cup_{x \in A}\varphi(x)$ para probar la otra inclusión supongamos $y \in \varphi(A)$ vamos a probar que $y \in \varphi(x)$ para algún $x \in A$. Razonamos por reducción al absurdo y supongamos que esto no ocurre. Por la definición de entorno N_y tenemos que $x \in N_y \Leftrightarrow y \in \varphi(x)$, por tanto $x \notin N_y$, $N_y \subseteq A^c$ entonces el $i_\varphi(N_y) \subseteq i_\varphi(A^c) = \varphi(A)^c$, por tanto N_y no es un entorno de y, por lo que llegamos a contradicción.

b)⇒a). Para la otra implicación vamos a suponer que se cumple b) y vamos a probar que tenemos un espacio casi discreto, sea $x \in X$, y sea $N_x = \cap\{N; x \in i_\varphi(N)\}$ vamos a mostrar que $x \in N_x$, supongamos que esto no ocurre, entonces $x \in \varphi(N_x^c) = \cup\{\varphi(y); y \in N_x^c\}$, entonces tenemos un elemento $y \in N_x^c$ y $x \in \varphi(y)$, por la definición de N_x tenemos que $y \in \cup\{N^c; x \in i_\varphi(N)\}$ por tanto tenemos un entorno N de x tal que $y \in N^c$. De $x \in \varphi(y)$ y $y \in N^c$ tenemos que $x \in \varphi(N^c)$, lo que contradice el hecho de ser N entorno de x. □

Nota 11.1.3. *Obsérvese que la condición a) es análoga a la propiedad que caracteriza a los espacios topológicos de Alexandroff o A-espacios. Por ello, dos C-espacios casi discretos se llaman también C-espacios de Alexandroff. Las aplicaciones C-continuas definidas en los C-espacios casi discretos admiten la siguiente caracterización:*

Proposición 11.1.4. *Sea (X, φ) un espacio de clausura casi discreto, una aplicación $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ es C-continua si y solo si para cada $x \in X$ se tiene que $f(\varphi(x)) \subseteq \psi(f(x))$*

Demostración. La implicación directa es trivial, para la inversa, sea $A \subseteq X$, entonces $f(\varphi(A)) = f(\cup\{\varphi(x); x \in A\}) = \cup\{f(\varphi(x)); x \in A\}) \subseteq \cup\{\psi(f(x)); x \in A\}) \subseteq \psi(f(A))$. □

Ejemplo 11.1.5. *Si X es un conjunto y $\rho : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ es una aplicación tal que $x \in \rho(x)$, es inmediato verificar que la aplicación φ_ρ :$\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $\varphi_\rho(A) = \cup\{\rho(x); x \in A\}$ para cada $A \subseteq X$ es un operador clausura de Čech.*

11.2. C-espacios inducidos por relaciones binarias

Entre los C-espacios más interesantes por la importancia de sus aplicaciones están las inducidas por una relación binaria R sobre un conjunto X

Definición 11.2.1. *Sea R una relación binaria sobre X y $\rho_R : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ la aplicación dada por:*

$$\rho_R(x) = \{x\} \cup \{y \in X; xRy\}$$

Entonces, φ_ρ :$\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $\cup\{\varphi_\rho(x); x \in A\}$ es un operador clausura de Čech, véase el ejemplo anterior.

Nótese que: $\varphi_\rho(A) = A \cup \{y \in X; \exists x \in A \text{ con } xRy\}$.

Observación 11.2.2. *El operador interior i_{φ_R} viene dado por $i_{\varphi_R}(A) = X - \varphi_R(X - A) = X - ((X - A) \cup \{y \in X; \exists x \in X - A \text{ con } xRy\} = A \cap \{y \in X; \exists x \in X - A \text{ con } xRy\}^c = A \cap \{y \in X; \forall x \in X - A \text{ con } x\bar{R}y\} = \{x \in A; y \in X, \, xRy \Rightarrow y \in A\}$.*

Es decir, $i_{\varphi_R}(A)$ son los elementos de A que no están R-relacionados con elementos fuera de A.

Proposición 11.2.3. *(X, φ_R) es un espacio topológico si y solo si $R^=$ es transitiva ($R^=$ es la clausura reflexiva de R).*

Demostración. Supongamos que $R^=$ es transitiva y sea $x \in \varphi_R(\varphi_R(A))$ entonces $xR^=y$ para algún $y \in \varphi_R(A)$. Como $yR^=z$ para algún $z \in X$, por la transitividad de $R^=$,

$xR^{=}z$, luego $x \in \varphi_R(A)$, y por tanto $\varphi_R^2 = \varphi_R$.
Recíprocamente, supongamos que $\varphi_R^2 = \varphi_R$, si $xR^{=}y$ y $yR^{=}z$ entonces $x \in \varphi_R(\{y\})$ e $y \in \varphi_R(\{z\})$, por tanto $xR^{=}z$ y $R^{=}$ es transitiva. □

Corolario 11.2.4. *Si R es transitiva, (X, φ_R) es un espacio topológico.*

Demostración. Basta tener en cuenta que si R es transitiva, $R^{=}$ también los es. □

A continuación veremos que todo C-espacio discreto (X, φ) está inducido por una relación binaria R sobre X.

Proposición 11.2.5. *Un C-espacio (X, φ) es casi discreto si y solo si existe una relación reflexiva R tal que $\varphi = \varphi_R$.*

Demostración. Si R es una relación binaria, se tiene que (X, φ_R) es un C-espacio. Veamos que es casi discreto. Para ello dado $x \in X$ consideremos $N_x = \{y \in X; xRy\}$. Es inmediato que $x \in N_x$, y que para todo $y \in X$, si xRy, entonces $y \in N_x$, luego por la observación anterior, $N_x \in \mathcal{W}_x^{\varphi_R}$. Por otra parte, si $N \in \mathcal{W}_x^{\varphi_R}$, $x \in i_{\varphi_R}(N)$, luego xRy si y solo si $y \in N$, por tanto $N_x \subseteq N$. Luego N_x es el φ-entorno mínimo de x y se tiene el resultado.
Recíprocamente si (X, φ) es casi discreto sea R la relación dada por xRy si $x \in \varphi(\{y\})$ (es decir, xRy si y solo si $y \in N_x$). Entonces se tiene que $y \in \varphi_R(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$ tal que $y = x$ o $xRy \Leftrightarrow \exists x \in A$ tal que $y \in \varphi(\{x\})$ (pues $x \in \varphi(\{x\})$) $\Leftrightarrow y \in \cup\{\varphi(x); x \in A\} = \varphi(A)$.
Luego $\varphi = \varphi_R$. □

ø Si $R \subseteq S$, entonces $\varphi_R(A) \subseteq \varphi_S(A)$, es decir φ_R es más fina que φ_S. Como consecuencia de las definiciones y resultados anteriores, se tiene

Proposición 11.2.6. *$\varphi_R(x) = N_x$ si y solo si R es simétrica.*

Demostración. Si R es simétrica, entonces $N_x = \{y \in X; xRy\} = \{x\} \cup \{y \in X; yRx\} = \varphi_R(\{x\})$.
Recíprocamente supongamos que $N_x = \varphi_R(\{x\})$ y que yRx, entonces $y \in \varphi_R(\{x\})$, luego $y = x$ o xRy, por lo que R es simétrica. □

11.3. Conexión en espacios casi discretos

En esta sección se estudia cómo la noción ”natural” de conexión en los C-espacios discretos es la que se considera en los grafos simples no dirigidos. Para ello se utilizará el teorema de caracterización de los C-espacios en términos de relaciones binarias.

Definición 11.3.1. *Sea (X, φ) un espacio casi discreto, se dirá que los puntos $x, y \in X$ están enlazados si existe una sucesión $x = x_0, x_1, .., x_n = y$, $(n \geq 0)$ tal que para*

$i = 1..n$ o bien $x_{i-1}Rx_i$ o bien x_iRx_{i-1} en este caso se escribirá $x \sim^R y$ y la sucesión $x = x_0, x_1, .., x_n$ se llama camino que enlaza x con y o camino de x a y.

Nótese que $\sim^R$ es la clausura transitiva de R y como consecuencia del siguiente resultado de caracterización de la conexión (X, φ_R) se tendrá que sus clases de equivalencia serán las componentes φ-conexas de (X, φ_R).

Proposición 11.3.2. *Un C-espacio casi discreto (X, φ_R) es C-conexo si y solo si para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \sim^R y$.*

Demostración. Supongamos que todo par de puntos está enlazado y que $X = Y \cup Z$, y que $Y \cap Z = \emptyset$. Si $y \in Y$, y $z \in Z$ por hipótesis existe un camino (y_i) de $y = y_0$ a $z = y_n$. Si $1 \leq y \leq n$ es el mayor valor tal que $y_i \in Y$ entonces $y_{i+1} \in X - Y = Z$, por definición de camino, ha de ser y_iRy_{i+1} o bien $x_{i+1}Ry_i$, en el primer caso, por la observación 11.12.2 $y_i \notin i_{\varphi_R}(Y)$, por los que Y no sería φ-abierto. Por la misma razón si se dirá el segundo caso, Z no seria φ-abierto, es decir X no se puede expresar como unión de dos φ-abiertos disjuntos, por lo que es φ-conexo.
Recíprocamente supongamos que (X, φ) es C-conexo y que $y, z \in X$ son dos puntos no enlazados, sea $Y = \{x \in X; y \sim^R x\}$. Veamos que Y es φ-abierto, en efecto, sea $u \in Y$ y uRv. Como $y \sim^R u$, $y \sim^R v$ y a que todo camino de y a u se le puede añadir uRv, por tanto se tiene que $v \in Y$ y que $u \in i_{\varphi_R}(Y)$. El conjunto $X - Y$ también es φ-abierto, pues si no, existirían puntos $w \in X - Y$ y $t \in Y$ tales que tRw. Entonces, puesto que $y \sim^R t$, tendríamos que $y \sim^R w$, luego $w \in Y$, lo que es una contradicción. Como $z \in X - Y$, X será la unión de dos φ-abiertos disjuntos y por tanto no será C-conexo. $\square$

Nota 11.3.3. *Como se ha probado, en los espacios casi discretos (X, φ), la propiedad de la C-conexión se puede expresar como en los grafos simples, pues la relación R que induce φ, hace el papel de la relación de adyacencia en un grafo simple; más aún, en (X, φ) se dispone de un concepto de distancia análogo al de los grafos:*

Definición 11.3.4. *En (X, φ_R), la distancia entre dos puntos x, y denotada por $d_R(x, y)$ es el menor n tal que existe un camino $x = x_0, x_1, .., x_n = y$ entre x e y.*

11.4. C-espacios casi discretos finitos

En esta sección estudiaremos algunas propiedades específicas de los C-espacios finitos. Al tratarse de espacios casi discretos, su operador clausura está inducido por una relación binaria, caracterizada a su vez por una matriz booleana.

Definición 11.4.1. *Sea (X, φ) un C-espacio con $\sharp(X) < \infty$. Entonces $\varphi = \varphi_R$ para una única relación reflexiva R, y si $X = \{x_1, .., x_n\}$, se denotará por M_{φ_R} la matriz booleana asociada a φ_R.*

Por tanto, $M_{\varphi_R} = (m_{i,j})$ *donde :*

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \quad x_i \in \varphi_R(x_j) \\ \\ 0 & si \quad x_i \in \varphi_R(x_j) \end{cases}$$

.

Dado $A \subseteq X$, si χ_A es su función característica, A se puede representar como un vector columna booleano, denotado también por χ_A y definido como: $\chi_A = (v_{A,1}, .., v_{A,i}, .., v_{A,n})^t$ siendo

$$v_{A,i} = \begin{cases} 1 & si \quad \chi_A(x_i) = 1 \\ \\ 0 & si \quad \chi_A(x_i) = 0 \end{cases}$$

Es decir, la i-ésima componente de χ_A es 1 si y solo si $x_i \in A$. El conjunto $\varphi_R(A)$ es pues el vector $\chi_{\varphi_R(A)}$ dado por:

$$\chi^t_{\varphi_R(A)} = M_{\varphi_R} \odot \chi^t_A$$

Como $\varphi_R(A) = \cup\{\varphi_R(x_i); x_i \in A\}$, bastará obtener los vectores $M_{\varphi_R} \odot (0, 0, .., 1, .., 0)$ (el uno en la posición i), y sus componentes no nulas, (y por tanto iguales a 1), serán los elementos correspondientes al conjunto $\varphi_R(\{x_i\})$.
Si se denota por T la relación binaria que induce la modificación topológica $\psi = \tau_{\varphi_R}$ de φ_R se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 11.4.2. *Si* (X, φ) *es un C-espacio finito,* T *es la clausura transitiva de* R*, y* $M_\psi = (M_{\varphi_R})^n = M_{\varphi_R^n}$*.*

Demostración. Puesto que (X, ψ) es un espacio topológico, por la proposición anterior se tiene que T, la relación binaria que induce ψ es una relación transitiva. Entonces, $R \subseteq t(R) \subseteq T$ y se tiene que ψ es más fina que $\varphi_{t(R)}$ que a su vez es más fina que φ_R. Pero $(X, \varphi_{t(R)})$ es un espacio topológico, y por la caracterización de la modificación topológica, es un C-operador $\varphi_{t(R)} \subseteq \psi$, luego $\varphi_{t(R)} = \psi$, y como $M_{t(R)} = (M_{\varphi_R})^n$, (ver 10.2.3) se tiene el resultado. □

Ejemplo 11.4.3. *Sea* $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* φ *el operador dado por* $\varphi(1) = \{1, 4\}$*,* $\varphi(2) = \{1, 2\}$*,* $\varphi(3) = \{2, 3\}$ *y* $\varphi(4) = \{4\}$*. Entonces la relación asociada a* φ *es* $R_\varphi = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ *y su matriz booleana es*

$$M_{R_\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz de $t(R)$ es:

$$M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y según la proposición anterior, la modificación topológica de φ es el operador asociado a dicha matriz, es decir, viene dada por $\tau_\varphi(1) = \{1, 4\}$, $\tau_\varphi(2) = \{1, 2, 4\}$, $\tau_\varphi(3) = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\tau_\varphi(4) = \{4\}$.

Referencias

[1] Bubenick, P.; Milicevic,N. (2021): *Applied Topology using Čech's closure spaces.* arXiv; 2104.10206v.2.

[2] Cartan, H. (1937): *Theorie des filtres.* Acad. Sci. Paris 205: 595-598.

[3] Čech, E. (1966) *Topological Spaces.* Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences.

[4] Dolecki, S. (2002):*Convergence-theoretic characterizations of compactness.* Topology and its Applications,125(3): 393-417

[5] Elzenati, A.K.; Habil, E.D. (2006): *Connectedness in isotomic spaces.* Turkish Journal of Mathematics 30: 247-262.

[6] Elzenati, A.K.; Habil, E.D. (2008): *Topological properties in isotonic spaces.* Islamic University Journal 16(2): 1-14.

[7] Engelking, R. (1989): *General Topology.* Heldermann Verlag Berlin.

[8] Garnim M.H.; Tantawy, O.A.; Shaker M.A. (1993): *On compact closure spaces.* Delta J.Sci 17(3): 57-70

[9] Galton, A, (2003): *A generalized topological view of motion in discrete space.* Theoretical Computer Science 305: 111-134.

[10] Flamm, C.; Stadler B.M.R; Stadler P.F. (2015): *Generalized topologies: hipergraphs, chemical reactions and biological evolution.* In Advanced in Mathematical chemistry and Applications (Basck, S.C.; Restrepo, G.; Villareces, J.L., eds) 300-328 Bentham Elsevies.

[11] Habil, E.D. (2009): *Hereditary properties in isotonic spaces.* Islamic University Journal 20: 1-12.

[12] Kolman, B.; Busby, R.C.; Ross, S.C. (2004): *Discrete mathematical structure* 5th. Ed, Prentice Hall.

[13] Kuratowsky, K. (1922): *Sur l'operation $\bar{A}$ de l'analyse situs.* Fund. Math 3: 182-199.

[14] Liu, G. (2010): *Closures and topological closures in quasi-discrete closures spaces .* Aplied Mathematical Letters 23: 772-776.

[15] Mirhosseinkhani, G (2011): *On some classes of quotient maps in closure spaces.* International Mathematical Forum 6(24): 1155-1161

[16] Mashhour, A.S.; Ghanim, M.H. (1983): *On closures spaces .* Indian J. Pure appl. Math 14: 680-691

[17] Pfaltz, J.L.; Slapal, J. (2017): *Closure operators with networks* Haced. J. Math. Stat. 46: 91-101.

[18] Rao, K.C.; Gowri, R.; Swaminathan, V. (2009): *Čech closure space in structural configuration of proteins.* Advanced Studies in Biology 1(2): 95-104.

[19] Renfro, D.L. (https://mathoverflow.net/users/15780/dave-l-renfro) *General topological space with closure operation as in Russian translation of Haussdorff's 1914 and 1927 Mengelehre.* URL (version: 2019-10-10): https://mathoverflow.net/q/343400

[20] Rieser, A. (2021): *Čech closures spaces: A unified framework for discrete and continous homotopy.* Topology and its aplications 296:107613.

[21] Roth, D.N.; Carlson, J.W. (1980): *Čech closure spaces.* Kyungpook. Math. J. 20: 11-30.

[22] Slapal, J. (2017): *Alexandroff pretopologies for structuring the digital plane* Discrete Aplied Mathematics 216: 323-335.

[23] Stadler B.M.R; Stadler P.F. (2002): *Basic properties of closure spaces* J.Chem. Inf. Comput. Sci, 42: 577–585.

[24] Stadler B.M.R; Stadler P.F. (2003): *Higher separation axioms in generalized closure spaces* Commentationes Mathematical Warszawa, Ser.I. 43: 257-273.

[25] Stadler P.F.; Stadler B.M.R (2006): *Genotype, phenotype maps.* Biological Theory. 3: 268-279.

[26] Stadler B.M.R; Stadler P.F. (2006): *The topology of evolutionary biology.* In Cioban, ed. Modeling in Molecular Biology. Natural Computing Series, 267-286.

[27] Stadler B.M.R; Stadler P.F. (2018): *Reachability, connectivity and proximity in chemical spaces* Match Commun Math. Computer Chem 80: 639-659

[28] Thron, W.J. (1981): *What results are valid on closure spaces Topology proceedings.* G: 135-158.

[29] Sunitha, T.A. (1994) *A study of Čech closure spaces.* Ph.D.Thesis School of Mathematics India, Cochin, India.