

**DESPLAZAMIENTO DE LA ZONA NO DESLIZANTE DEL CONTACTO EN FRETTING FATIGA CON CONTACTO ESFÉRICO Y CARGA AXIAL**

Carlos Navarro, Jaime Domínguez  
 Dpto. de Ingeniería Mecánica y de los Materiales  
 E.S.I de Sevilla, Avda. Descubrimientos s/n, 41092 SEVILLA

**Resumen.** Este artículo analiza las condiciones de contacto y las tensiones producidas durante un ensayo de fretting fatiga con carga axial utilizando un puente de fretting y elementos de contacto esférico. Este análisis tiene en cuenta el desplazamiento de la zona no deslizante producido por la tensión axial a la que se somete la probeta. Describe una aproximación analítica para calcular el tensor de tensiones bajo la zona de contacto incluyendo el efecto de este desplazamiento. Finalmente, se hace una comparación entre las tensiones que se obtienen con esta aproximación y las calculadas con la aproximación de Mindlin-Cattaneo que no tiene en cuenta el efecto de la tensión axial.

**Abstract.** This paper analyses the contact conditions and stresses induced during fretting fatigue tests of uniaxial specimens using fretting bridges with spherical-tip contact pads. This analysis considers the displacement of the stick zone induced by the variable bulk stress applied to the specimen. It describes an approach to, analitically, calculate the stress tensor under the contact zone including this stick zone displacement. Finally, the analitically calculated stresses are compared to those obtained using the classical Mindlin-Cattaneo approach which does not consider the bulk stress.

**1. INTRODUCCIÓN**

El fenómeno llamado fretting es un tipo especial de fatiga en el que las principales tensiones son debidas a que hay dos piezas en contacto que tienden a deslizar una sobre la otra. Si además de las tensiones generadas en el contacto, se le añade una carga cíclica a una de las dos piezas, se le llama fretting fatiga. Este tipo de fatiga es más perjudicial al unirse los dos efectos. En la zona de contacto entre los dos cuerpos se generan una serie de grietas que pueden crecer hasta provocar la rotura del material o simplemente deteriorar la superficie por desprendimiento de lascas y desgaste. El fenómeno del fretting puede ser observado en servicio en piezas tales como uniones atornilladas y roblonadas, acoplamientos con ajuste en caliente, cadenas, etc.[1].

El primer paso a la hora de estudiar el fretting es entender cómo se transmiten las cargas de una pieza a otra y cómo es la zona de contacto. La distribución de estas cargas y la zona de contacto pueden ser muy diversas y dependen del tipo de material, de las fuerzas normal y tangencial, de la geometría del contacto y otros.

Hertz fue el primero en desarrollar, en 1882, una teoría sobre las tensiones normales en el contacto entre dos sólidos cuando no hay rozamiento. Más adelante otros investigadores se han dedicado a analizar las tensiones en el contacto, sin embargo todavía queda camino por recorrer en este campo.

El problema del contacto se complica cuando se aplican cargas tangenciales pero no lo suficientemente grandes como para que se produzca el deslizamiento total de los dos cuerpos. Cattaneo y Mindlin [2-4] por separado fueron los primeros en proponer una solución a este problema en el caso del contacto de una esfera y un plano. Hills y Nowell [5] resolvieron el problema cilíndrico cuando además se aplica una tensión axial a una de las piezas.

En este artículo se desarrolla una solución a este problema, calcular las tensiones en el contacto, cuando se tiene una esfera y un plano en contacto y se aplica una tensión axial.

**2. CONTACTO ESFERA-PLANO SIN TENSIÓN AXIAL**

El radio,  $a$ , de la zona de contacto entre una esfera y un plano para una fuerza normal,  $N$ , y un radio de la esfera,  $R$ , se obtiene de la teoría de Hertz

$$a = \left( \frac{3NR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (1)$$

donde

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (2)$$

Si las dos piezas en contacto son del mismo material, no se produce deslizamiento entre las dos superficies y por lo tanto no aparece una carga tangencial. La presión de contacto,  $p(r)$ , se obtiene igualmente de la teoría de Hertz

$$p(r) = \frac{3N}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (3)$$

donde  $p_0$  es la máxima tensión normal en la zona de contacto. Si se aplica una fuerza tangencial  $Q < \mu N$ , dentro de la zona de contacto aparece un anillo exterior concéntrico donde se produce el deslizamiento y una zona central de radio  $c$  donde no lo hay (fig. 1).

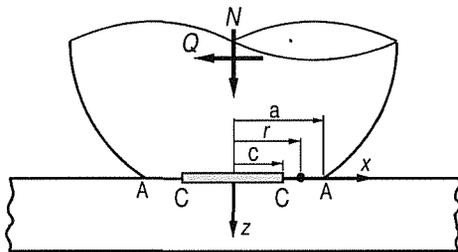


Fig. 1. Esquema de la zona de contacto en  $y=0$ .

Al ser  $Q < \mu N$  no se produce el deslizamiento total. Si los dos materiales son iguales, los problemas normal y tangencial no están acoplados y se pueden resolver por separado. La distribución de presión normal sigue siendo la de Hertz, ecuación (3), y la distribución de la tensión tangencial en la superficie se supone que es toda paralela a la dirección de  $Q$ . Para hallar estas tensiones, Mindlin superpone el efecto de dos distribuciones

$$q'_x(r) = \frac{3\mu N}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad 0 \leq r \leq a \quad (4)$$

que correspondería al caso en que hubiera deslizamiento en todos los puntos más

$$q''_x(r) = -\frac{c}{a} \frac{3\mu N}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}} \quad 0 \leq r \leq c \quad (5)$$

donde  $c$  es el radio de la zona de no deslizamiento. Imponiendo que la integral de las tensiones tiene que ser igual a la fuerza tangencial aplicada  $Q$ , se obtiene el tamaño de la zona de no deslizamiento

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{Q}{\mu N}\right)^{1/3} \quad (6)$$

Una vez conocidas las tensiones normales y tangenciales en la superficie se pueden calcular las

tensiones en cualquier punto de los sólidos en contacto utilizando la solución de Hamilton y Goodman [6]. Las expresiones explícitas fueron obtenidas más tarde por Hamilton [7] y por Sackfield y Hills [8], las cuales son más sencillas de manejar.

### 3. CONTACTO CILINDRO-PLANO CON TENSIÓN AXIAL

Si además se aplica una fuerza  $P$  sobre el espécimen, se tiene un sistema como el de la figura 2, donde la zona de contacto está sometida a las tensiones que producen  $N$ ,  $Q$  y  $P$ . Esta última fuerza provoca una tensión axial sobre el espécimen o probeta que hace que la zona de no deslizamiento se desplace sobre el eje  $x$  una cantidad  $e$ .

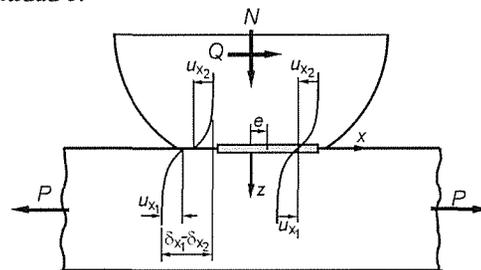


Fig. 2. Esquema de la zona de contacto con carga axial.

Para analizar el efecto de esta tensión axial en contactos cilíndricos, Hills y Nowell consideraron el problema como una perturbación del problema de Mindlin. Consideraron que el tamaño de la zona de no deslizamiento era el mismo que sin carga axial, pero que estaba desplazada una cantidad  $e$ . La relación entre el semiancho de la zona de no deslizamiento y el semiancho de la zona de contacto resulta ser

$$\frac{b}{a} = \left(1 - \frac{Q}{\mu N}\right)^{1/2} \quad (7)$$

La tensión tangencial en la zona de deslizamiento es

$$q(x) = \mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (8)$$

y la distribución de tensiones tangenciales dentro de la zona de no deslizamiento es

$$q(x) = \mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{b}{a} \mu p_0 \sqrt{1 - \frac{(x-e)^2}{b^2}} \quad |x-e| \leq b \quad (9)$$

Y el valor que se obtiene de este desplazamiento es

$$e = \frac{\sigma_{ax} a}{4\mu p_0} \quad (10)$$

donde  $\sigma_{ax}$  es la tensión debida a la fuerza axial  $P$ .

#### 4. CONTACTO ESFERA-PLANO CON TENSIÓN AXIAL

Si en vez de un cilindro se tiene una esfera, se puede hacer un desarrollo parecido al caso anterior. La distribución de tensiones tangenciales será, al igual que hizo Mindlin, la superposición de dos efectos

$$q'_x = \frac{3\mu N}{2\pi a^3} (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} = \mu p(r) \quad r \leq a \quad (11)$$

y

$$q''_x = -\frac{c}{a} \frac{3\mu N}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r_e^2}{c^2}} \quad r_e \leq c \quad (12)$$

donde

$$r_e = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \quad (13)$$

Los ejes  $x$  y  $z$  son los mismos que los que aparecen en la figura 2, y el eje  $y$  es perpendicular a ellos dos. La diferencia con Mindlin es que la segunda ecuación, (12), se aplica sobre un círculo que está desplazado con respecto al centro de la zona de contacto una distancia  $e$ .

De ahora en adelante el subíndice 1 hará referencia al plano y el 2 a la esfera. La distribución de tensiones dada por la ecuación (11) provoca unos desplazamientos en la pieza esférica en la dirección  $x$  de

$$u'_{x2} = -\frac{\pi\mu p_0}{32Ga} [4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] \quad (14)$$

Las tensiones de la ecuación (12) produce unos desplazamientos en la pieza esférica en la zona de no deslizamiento según la dirección  $x$  de

$$u''_{x2} = \frac{c}{a} \frac{\pi\mu p_0}{32Gc} [4(2-\nu)c^2 - (4-3\nu)(x-e)^2 - (4-\nu)y^2] \quad (15)$$

Estas expresiones se pueden encontrar en [9]. En la superficie plana las tensiones tangenciales son las

mismas pero cambiadas de signo, por lo tanto los desplazamientos referidos a los mismos ejes son

$$u'_{x1} = -u'_{x2} \quad (16)$$

$$u''_{x1} = -u''_{x2} \quad (17)$$

Sin embargo, en este caso aparece un desplazamiento adicional debido a la tensión axial,  $\sigma_a$ , que se aplica a la probeta. Suponiendo deformación plana, es decir,  $\epsilon_y^a = 0$ , la deformación según  $x$  debido a  $\sigma_a$  es

$$\epsilon_x^a = \frac{\sigma_a}{E} (1-\nu^2) \quad (18)$$

Tomando como referencia el centro de la zona de contacto e integrando la ecuación (18) se obtiene que el desplazamiento en la probeta debido a la tensión axial es

$$u_{x1}^a = \frac{\sigma_a}{E} (1-\nu^2)x = \frac{\sigma_a}{2G} (1-\nu)x \quad (19)$$

Sumando las expresiones (16), (17) y (19) se obtiene el desplazamiento total en la pieza plana para la zona de no deslizamiento

$$u_{x1} = \frac{\pi\mu p_0}{32Ga} [4(2-\nu)(a^2 - c^2) - (4-3\nu) \cdot (2ex - e^2)] + \frac{\sigma_a}{2G} (1-\nu)x \quad (20)$$

y sumando las expresiones (14) y (15) se obtiene el desplazamiento de los puntos que están en la esfera

$$u_{x2} = -\frac{\pi\mu p_0}{32Ga} [4(2-\nu)(a^2 - c^2) - (4-3\nu) \cdot (2ex - e^2)] \quad (21)$$

Por definición, en la zona de no deslizamiento, el deslizamiento es igual a cero. Esta condición según el eje  $x$  se traduce en

$$s_x = u_{x1} - u_{x2} - \delta_x = 0 \quad \forall x, y \quad (22)$$

donde  $\delta_x$  es una constante que representa el desplazamiento en la dirección  $x$  entre dos puntos que se encuentran cada uno en un sólido y muy distantes uno del otro. Introduciendo (20) y (21) en (22) se obtiene que el desplazamiento de la zona de no deslizamiento en el caso de deformación plana es igual a

$$e = \frac{4\sigma_a a}{\pi\mu p_0} \frac{1-\nu}{4-3\nu} \quad (23)$$

Se ha utilizado sólo una de las dos condiciones de no deslizamiento para obtener  $e$ . La otra condición es la siguiente

$$s_y = u_{y1} - u_{y2} = 0 \quad \forall x, y \quad (24)$$

Ahora hay que comprobar si esta condición se cumple o no. Los desplazamientos en la pieza plana dentro de la zona de no deslizamiento y según el eje  $y$  son

$$u'_{y1} = \frac{\pi\mu p_0}{32Ga} 2vxy \quad (25)$$

$$u''_{y1} = -\frac{c}{a} \frac{\pi\mu p_0}{32Gc} 2v(x-e)y \quad (26)$$

$$u^a_{y1} = 0 \quad (27)$$

La última ecuación es nula porque estamos en el caso de deformación plana,  $\varepsilon_y = 0$ . El desplazamiento total es

$$u_{y1} = \frac{\pi\mu p_0}{32Ga} 2vey = -u_{y2} \quad (28)$$

Si ahora sustituimos  $e$  por su valor y restamos uno del otro debería dar cero

$$u_{y1} - u_{y2} = \frac{\sigma_a}{2G} v \frac{1-v}{4-3v} y \neq 0 \quad (29)$$

Esto quiere decir que las superficies tienden a deslizar una respecto a la otra en la dirección  $y$ . Para evitar este deslizamiento aparecerá una componente de las tensiones según el eje  $y$ ,  $q_y$ , que en un principio se había supuesto cero. Esta nueva componente hace que varíen no sólo la dirección de las tensiones sino su distribución.

El deslizamiento que se produce es simétrico respecto al eje  $x$  y se hace nulo en  $y=0$ . Este hecho hace que sobre el eje  $x$  se cumplan las dos condiciones de deslizamiento, como consecuencia, el tamaño de la zona no deslizante sobre este eje no variará. Muy cerca de este eje tendería a producirse ya el deslizamiento según la ecuación (29), pero al ser tan pequeño éste, la tensión  $q_y$  que se genera más la ya existente  $q_x$  no son suficientes para que se produzca el deslizamiento. A medida que nos alejamos del eje  $x$  tiende a producirse un deslizamiento mayor; llegará un momento, cerca del borde de esta zona, en el que realmente se produzca el deslizamiento. Debido a este efecto, la zona de no deslizamiento ve reducido su tamaño y deja de ser un círculo.

Para saber si esta distribución de tensiones,  $q_y$ , que aparece es importante o no, se va a comparar el máximo deslizamiento relativo según  $y$  ( $s_y$ ) con el deslizamiento relativo que se produciría en la dirección  $x$  si el plano y la esfera estuvieran deslizando en todos los puntos salvo uno en el centro y si no hubiera tensión axial ( $s'_x$ ). La razón de utilizar este criterio es la siguiente, se está haciendo la suposición de que hay una proporcionalidad entre deslizamiento relativo y las tensiones que se originarían para anular este deslizamiento en el límite de la zona de no deslizamiento. Según la nomenclatura utilizada hasta ahora sería

$$\begin{aligned} \frac{s_{y(x=0, y=c)}}{s'_{x(x=c, y=0)}} &= \frac{u_{y1} - u_{y2}}{u'_{x1} - u'_{x2} - \delta'_x} = \\ &= \frac{\frac{\sigma_a}{2G} v \frac{1-v}{4-3v} c}{-2 \frac{\pi\mu p_0}{32Ga} (4-3v)c^2} = \frac{2v}{4-3v} \frac{e}{c} \end{aligned} \quad (30)$$

Para un valor de  $v = 0.33$  (Aluminio) y valores pequeños de la tensión axial, esta relación es igual a

$$\frac{s_y}{s'_x} = 0.219 \frac{e}{c} = 0.219 \cdot 0.1 = 0.0219 \quad (31)$$

Por lo tanto, una aproximación a la relación entre las tensiones en el borde de la zona de no deslizamiento sería

$$\frac{q_y}{q_x} \approx \frac{0.0219 \frac{c}{a} \mu p(x, y)}{\mu p(x, y)} \approx 0.02 \quad (32)$$

Esto quiere decir que el error que se está cometiendo al suponer una distribución de tensiones tangenciales paralela al eje  $x$  en la superficie es muy pequeño.

El desarrollo anterior se ha hecho para el caso de deformación plana, si en lugar de esto, se supone tensión plana, las ecuaciones varían ligeramente. En este caso los desplazamientos debidos a la tensión axial son

$$u^a_{x1} = \frac{\sigma_a}{E} x \quad (33)$$

$$u^a_{y1} = -\frac{v}{E} \sigma_a x \quad (34)$$

De la misma forma que se hizo antes se llega a la expresión del desplazamiento de la zona no deslizante en tensión plana

$$e = \frac{4\sigma_a a}{\pi\mu p_0} \frac{1}{(1+\nu)(4-3\nu)} \quad (35)$$

La diferencia entre los dos casos es pequeña, para un material como el Aluminio con  $\nu=0.33$  la relación entre ambas es

$$\frac{e_{\epsilon_y^a=0}}{e_{\sigma_y^a=0}} = 1 - \nu^2 = 0.89 \quad (36)$$

En tensión plana el deslizamiento que se produce en la dirección del eje  $y$  es mayor que en deformación plana.

$$\begin{aligned} u_{y1} - u_{y2} &= 2 \frac{\pi\mu p_0}{32Ga} 2\nu e y - \nu \frac{\sigma_a}{2(1+\nu)G} y = \\ &= -\frac{\sigma_a}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} 3 \frac{1-\nu}{4-3\nu} y \end{aligned} \quad (37)$$

La relación entre ambas es

$$\frac{s_{y(\epsilon_y^a=0)}}{s_{y(\sigma_y^a=0)}} = -\frac{1+\nu}{3} = (\nu = 0.33) = -0.44 \quad (38)$$

La expresión equivalente a la ecuación (30) en tensión plana es

$$\begin{aligned} \frac{s_{y(x=0, y=c)}}{s'_{x(x=c, y=0)}} &= \frac{-\frac{\sigma_a}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} 3 \frac{1-\nu}{4-3\nu} c}{-2 \frac{\pi\mu p_0}{32Ga} (4-3\nu) c^2} = \\ &= 6\nu \frac{1-\nu}{4-3\nu} \frac{e}{c} = 0.44 \frac{e}{c} = 0.044 \end{aligned} \quad (39)$$

Esta vez la relación entre las tensiones tangenciales en el borde de la zona de no deslizamiento es aproximadamente

$$\frac{q_y}{q_x} \approx \frac{0.044 \frac{c}{a} \mu p(x, y)}{\mu p(x, y)} \approx 0.04 \quad (40)$$

Tanto en un caso como en el otro  $q_y$  es de un orden de magnitud menor que  $q_x$ , y los errores que se cometen al suponer  $q_y=0$  son pequeños.

En la figura 3 se muestra una foto de la huella dejada en una probeta de Aluminio en un ensayo de fretting

fatiga donde se puede apreciar la zona de contacto (círculo exterior) y la zona de no deslizamiento (círculo interior).

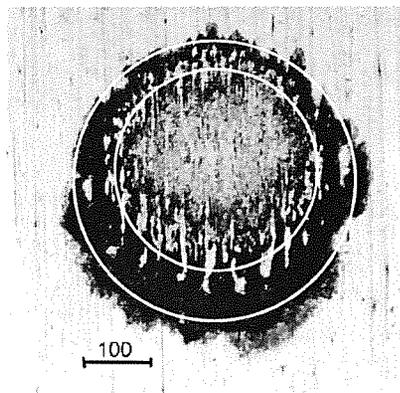


Fig 3. Huella producida en un ensayo de fretting.

## 5. COMPARACIÓN CON EL MÉTODO MINDLIN-CATTANEO

No tener en cuenta el desplazamiento de la zona de no deslizamiento (Mindlin-Cattaneo) supone subestimar las tensiones que se producen en la zona de contacto.

A continuación se analizan las tensiones para un caso concreto donde se tienen en contacto una esfera de radio  $R = 25.4$  mm y un plano, los dos de Aluminio. Las fuerzas en el contacto son  $N = 12$  N y  $Q = \pm 9$  N, y la tensión axial  $\sigma_a = \pm 83$  MPa.

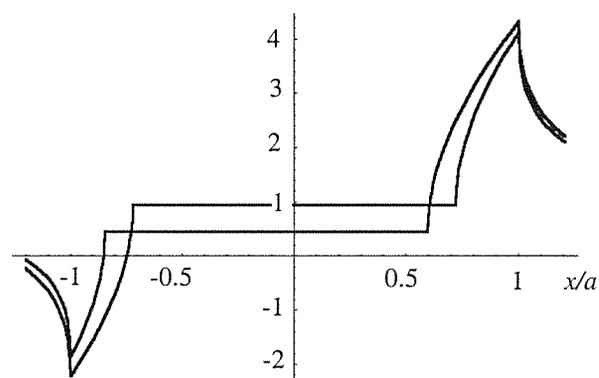


Fig 4.  $\Delta\sigma_x$  normalizado con  $p_0$  en  $y=0, z=0$ .

En la figura 4 se muestra el rango de variación de la tensión  $\sigma_x$  a lo largo de la línea  $y=0, z=0$ . El eje de abscisas se ha adimensionalizado con el radio  $a$  de la zona de contacto y el eje de ordenadas con la máxima presión de contacto  $p_0$ . Se observa que cuando se tiene en cuenta el desplazamiento  $e$ , el rango máximo aumenta en un 6%. Sin embargo, este aumento es mayor si lo que se está analizando es el incremento de la tensión equivalente de Von Mises, que sufre un incremento del 8% como se puede ver en la figura 5.

Se puede hacer un análisis parecido a una profundidad de  $z = 0.1 a$ . Los incrementos de tensiones son menores en este caso que en la superficie, aunque se aprecia que al tener en cuenta el desplazamiento de la zona no deslizante, el incremento en la tensión máxima es mayor. En la figura 6 se muestra  $\Delta\sigma_x$ , el incremento de la misma es de un 9%. En el caso de la tensión de Von Mises este incremento llega hasta el 12%, figura 7.

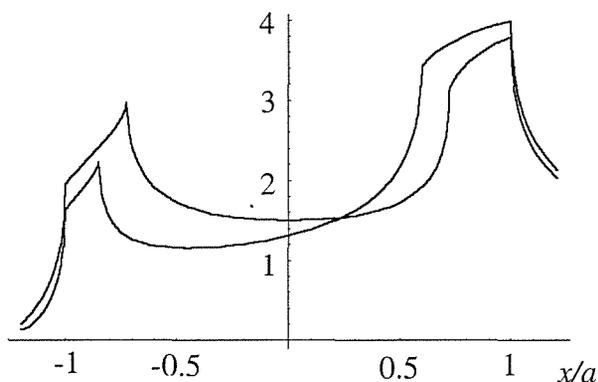


Fig 5. Incremento de la tensión de Von Mises normalizado con  $p_0$  en  $y=0, z=0$ .

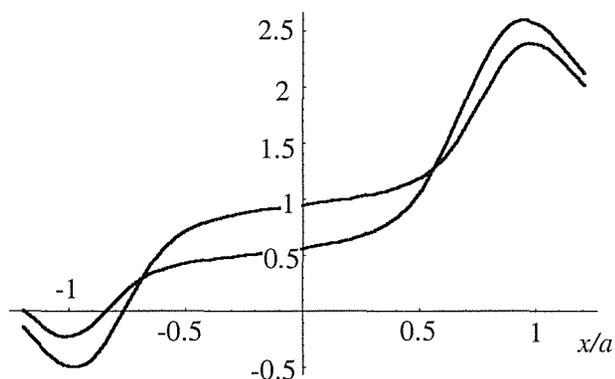


Fig 6.  $\Delta\sigma_x$  normalizado con  $p_0$  en  $y=0, z=0.1a$ .

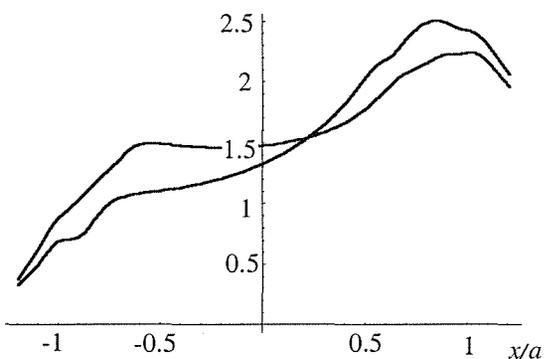


Fig 7. Incremento de la tensión de Von Mises normalizado con  $p_0$  en  $y=0, z=0.1a$ .

En el caso que se ha analizado aquí se obtiene un valor de  $e$  pequeño; en situaciones donde la tensión axial sea mayor, y por lo tanto  $e$  también sea mayor, el error que

se comete en las tensiones al despreciar este desplazamiento será mayor del 10%.

## 6. CONCLUSIONES

Se ha obtenido una expresión analítica para el desplazamiento de la zona no deslizante cuando, en un ensayo de fretting con contacto esférico, se aplica una carga axial. Se han distinguido dos situaciones para su cálculo, tensión y deformación plana.

Esta expresión es una aproximación al caso real, puesto que se está suponiendo que la distribución de tensiones tangenciales sobre la superficie es paralela a la fuerza  $Q$ . Sin embargo, la relación entre las tensiones que se están despreciando,  $q_y$ , y las que se están usando,  $q_x$ , es pequeña, por lo que se puede decir que la desviación respecto al caso real va a ser despreciable.

Se ha comprobado analíticamente que si se calculan las tensiones sin tener en cuenta este desplazamiento se está cometiendo un error que puede ser importante, más de un 10%.

## 7. REFERENCIAS

- [1] Waterhouse, R. B. and Lindley, T. C., *Fretting Fatigue*,ESIS Publication No 18, European Structural Integrity Society. Mechanical Engineering Publications Limited, London, 1994.
- [2] Cattaneo, C., "Sul Contatto di Due Corpi Elastici: Distribuzione Locale degli Sforzi," *Reconditi dell Accademia Nazionale dei Lincei*, Vol. 27, 1938, pp. 342–348, 434–436, 474–478.
- [3] Mindlin, R. D., "Compliance of Elastic Bodies in Contact," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 16, 1949, pp. 259–268.
- [4] Mindlin, R. D. and Deresiewicz, H., "Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 20, 1953, pp. 327–344.
- [5] Nowell D., Hills D.A., "Mechanics of Fretting Tests", *Int. J. Mech. Sci.*, 29 (1987) 5, 355-365.
- [6] Hamilton, G. M. and Goodman, L. E., "The Stress Field Created by a Circular Sliding Contact," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, 1966, pp. 371–376.
- [7] Hamilton, G. M., "Explicit Equations for the Stresses Beneath a Sliding Spherical Contact," *Proc. of the Institution of Mechanical Engineering*, Vol. 197C, 1983, pp. 53–59.
- [8] Sackfield, A. and Hills, D., "A Note on the Hertz Contact Problem: a Correlation of Standard Formulae," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 18, 1983, pp. 195–197.
- [9] Johnson K.L., *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985.