

Interacción electrón-nucleón y estudio de la estructura interna del nucleón



Trabajo Fin de Grado

Jaime del Palacio Lirola

Tutores:

Juan Antonio Caballero Carretero
Guillermo Daniel Megías Vázquez

Doble Grado en Física e Ingeniería de
Materiales
Promoción 2017/2022

Agradecimientos

Tras estos meses de trabajo, no tengo más que palabras de gratitud para Guillermo. Sin las revisiones para las que ha sacado tiempo semanalmente, este proyecto no podría haber sido terminado a tiempo para presentarlo en julio. Su perseverante apoyo resolviendo mis dudas y ayudándome con la búsqueda de bibliografía han sido esenciales para el desarrollo de, no solo este proyecto, sino también de mi formación en los temas estudiados en este.

Por supuesto, también quiero tener unas palabras de agradecimiento con Juan Antonio Caballero. Fue su asignatura la que me introdujo al mundo de la física de partículas en el que tengo ahora tanto interés. Tras tenerlo como profesor, supe donde quería centrar mi Trabajo de Fin de Grado, y fue gracias a él que pude obtener la oportunidad de elegir el tema de este proyecto.

Abstract

Este trabajo constituye un estudio profundo y detallado de la dispersión elástica electrón-protón, y una breve incursión al caso de dispersión cuasielástica electrón-núcleo. A través del formalismo de la electrodinámica cuántica, se describe la dinámica de las partículas y se desarrollan expresiones analíticas para las secciones eficaces de los procesos.

Las expresiones extraídas del desarrollo electrón-protón son útiles para el estudio de los factores de forma del protón. En el trabajo, se introducen varias parametrizaciones teóricas que luego se comparan con datos experimentales para valorar sus ajustes.

La descripción de la dispersión cuasielástica se lleva a cabo modelando el núcleo mediante el Gas de Fermi Relativista. Esto permite analizar uno de los posibles regímenes de interacción electrón-núcleo y ver la relevancia de los efectos nucleares en la dispersión.

El propósito de este proyecto es servir como introducción al cálculo teórico de secciones eficaces desde la ecuación de Dirac en el marco de la mecánica cuántica relativista. Los dos casos estudiados proporcionan una buena base sobre la que desarrollar el formalismo para otras interacciones del mundo subatómico que se estudian hoy en día, así como para introducir modelos nucleares más complejos.

Índice

I	Introducción	1
1.	Introducción general	1
1.1	Motivación y objetivos del trabajo	2
1.2	La ecuación de Dirac. Descripción del desarrollo analítico electrón-protón.....	2
1.3	Estructura interna del nucleón: factores de forma	3
1.4	Extensión al caso de un protón en un núcleo: Modelo del Gas de Fermi.....	3
1.5	Aplicación e interés	4
1.6	Situación experimental	4
II	Dispersión elástica electrón-protón	5
2.	Formalismo de la interacción electromagnética para el estudio de la dispersión elástica e-p	5
2.1	La ecuación de Dirac	6
2.2	Forma covariante de la ecuación de Dirac.....	7
2.3	Soluciones de partícula libre de la ecuación de Dirac	8
2.4	El lagrangiano de la interacción electromagnética	8
2.5	La matriz S.....	9
2.6	Campo generado por un protón. Introducción de la estructura interna del protón	10
2.7	Sección eficaz	12
2.8	El cálculo de la amplitud invariante. Tensor leptónico y tensor hadrónico.....	13
2.10	Elección del sistema de referencia. Sección eficaz diferencial	14
2.11	Aproximación de electrones ultrarrelativistas. Fórmula de Rosenbluth.....	17
3.	Análisis y discusión de resultados de la sección eficaz e-p.....	20
3.1	El resultado sin estructura. Comportamiento general.....	20
3.2	Parametrización de los factores de forma	23
3.3	Comparación de las distintas parametrizaciones con datos experimentales.....	29
III	Dispersión cuasielástica electrón-núcleo	32
4.	Dispersión cuasielástica electrón-núcleo: Modelo del Gas de Fermi Relativista... 32	32
4.1	Dispersión cuasielástica	32
4.2	Modelo nuclear: Gas de Fermi Relativista	34
4.3	Estudio de la cinemática del proceso. Sección eficaz.....	34
5.	Análisis y discusión de resultados de la sección eficaz cuasielástica.....	38
5.1	Primeras observaciones y comparación con el caso e-p	38
5.2	Desajuste con datos experimentales. <i>Shift</i> de energía.....	39
5.3	Efecto de los parámetros del modelo: <i>shift</i> de energía y momento de Fermi.....	40
5.4	Comparación con distintos casos experimentales. Efecto de otros regímenes de interacción.....	42
IV	Resumen y conclusiones	46
6.	Resumen y conclusiones finales	46

V Apéndices	48
Apéndice A	48
Apéndice B	48
Apéndice C	48
Apéndice D	50
Apéndice E	51
Apéndice F	51
Referencias	54

Parte I

Introducción

En esta parte se introduce la temática del trabajo. Se establece el marco global que permite definir todos aquellos conceptos e ingredientes adicionales que permitirán analizar el problema planteado y que se desarrollará en detalle en capítulos posteriores. Adicionalmente, se justifica el tema estudiado en el trabajo y se describe la situación experimental complementaria al desarrollo teórico.

Capítulo 1

Introducción general

La interacción electromagnética domina de la escala mesoscópica a la atómica, rigiendo el comportamiento de las partículas cargadas que conforman la materia. En especial, una de las partículas cargadas más común y la que más peso tiene en el estudio del electromagnetismo es el electrón. La interacción de electrones con otras partículas cargadas es de vital importancia. Primero, por su naturaleza elemental, y segundo, por la facilidad a nivel experimental de su uso y control.

El electrón interactúa con todo el resto de partículas o sistemas con carga: otros leptones, piones, nucleones, núcleos..., de manera que proporciona información muy precisa sobre la estructura del blanco. Para el estudio de esta interacción, en este trabajo se hace uso de la teoría más precisa de la que se dispone en la actualidad, la electrodinámica cuántica.

La electrodinámica cuántica es el área de la mecánica cuántica relativista centrada en el estudio de la interacción electromagnética. En este formalismo, se busca combinar la idea de la mecánica de Schrödinger con las nociones relativistas propuestas por Einstein. Por esto, para seguir este trabajo con comodidad es necesario tener una buena base de ambas teorías.

A través de la electrodinámica cuántica se consigue una descripción del comportamiento de partículas cargadas lo suficientemente precisa y fiel a observaciones experimentales para poder detectar los pequeños cambios que surgen por la estructura interna que presentan muchas de las partículas sensibles al campo electromagnético.

Este trabajo se va a centrar en la interacción electrón-protón, pero es fácilmente extrapolable a otros leptones y bariones, ampliando el abanico de utilidad que tiene este formalismo. Además, se va a estudiar algo más cualitativamente el formalismo para la interacción cuasielástica electrón-núcleo, donde un protón es arrancado del núcleo por el electrón, como siguiente paso en la extensión del formalismo.

En las siguientes subsecciones de este capítulo se introducen los conceptos que se van a desarrollar a lo largo del trabajo y se describe el interés y la situación experimental de la interacción electrón-protón.

1.1 Motivación y objetivos del trabajo

El motivo principal que impulsó el inicio de este trabajo es el interés en el desarrollo teórico de las interacciones entre partículas subatómicas. Por esto, se ha desarrollado un proyecto que introduce el formalismo usado para el caso particular de la interacción electromagnética electrón-protón que sirve como caso base para la descripción de otras muchas interacciones del mundo subatómico no necesariamente limitadas al caso electromagnético.

El objetivo de este trabajo es servir como introducción general a la mecánica cuántica relativista y al desarrollo analítico de secciones eficaces relacionadas con esta. En concreto, se estudia la electrodinámica cuántica a través del caso electrón-protón y se introduce el caso más complejo de la interacción cuasielástica electrón-núcleo.

1.2 La ecuación de Dirac. Descripción del desarrollo analítico electrón-protón

La herramienta principal de este trabajo y de la mecánica cuántica relativista para la descripción de partículas con espín $\frac{1}{2}$ es la ecuación de Dirac. Como se desarrolla más adelante, esta ecuación surge del intento de encontrar una ecuación con la misma forma que la de Schrödinger, pero que sea consistente con los principios de la teoría relativista especial.

Esta ecuación es la que va a permitir definir las funciones de onda que representan los estados iniciales y finales de las partículas estudiadas. Además, para el desarrollo de la dinámica de las partículas y la introducción del hamiltoniano del campo electromagnético, se usan las bases y conceptos ya estudiados de la mecánica cuántica, pero adaptándolos al espacio 4-dimensional que surge al introducir la relatividad.

Desde esta ecuación aplicada a un electrón / protón se avanza apoyándose en teoría de propagadores para poder describir la interacción entre estos. Se hace uso de la aproximación de primer orden, donde solo se intercambia un único fotón, para simplificar el desarrollo y porque es el término más relevante en el análisis perturbativo de los diagramas de Feynman.

Finalmente, se llega a una expresión de la sección eficaz del proceso donde se hace uso de la aproximación de electrones ultrarrelativistas, la cual es válida en las cinemáticas que se estudian y en el rango de energías de datos experimentales empleados.

1.3 Estructura interna del nucleón: factores de forma

Los resultados experimentales de la interacción de leptones con protones muestran una desviación notable con respecto a los resultados esperados de la interacción entre dos partículas cargadas puntuales. Esto se explica por la presencia de una estructura interna en el protón, es decir, el protón no es una partícula elemental, si no que está formado por subcomponentes (quarks y gluones que los mantienen unidos) y presenta una distribución espacial de carga en su interior.

En este trabajo se incluye la estructura interna del protón en el cálculo introduciendo unas funciones dependientes de la energía y momento intercambiados en la interacción conocidas como factores de forma. Estos factores de forma se puede demostrar que están relacionados con la distribución de carga en el interior del protón y sus propiedades eléctricas y magnéticas.

En principio, uno puede pensar que la desviación comentada antes también podría ser por las otras fuerzas fundamentales que pueden participar en la interacción: la gravitatoria y la débil. Pero, observando las escalas de las desviaciones, son fácilmente descartables ya que ambas son demasiado tenues como para explicar lo observado.

	Gravitatoria	Débil	Electromagnética
Magnitud (a la escala de protones)	10^{-36}	10^{-7}	1

Tabla 1.1. Comparación de la magnitud de la interacción electrón-protón para las fuerzas que pueden afectar a esta.

1.4 Extensión al caso de un protón en un núcleo: Modelo del Gas de Fermi

Tras el desarrollo central de la interacción e-p, para la extensión a modelos más complejos se estudia la interacción análoga a la primera, pero para el caso con un núcleo. Para esto, se modela el núcleo como un Gas de Fermi Relativista, donde los nucleones se describen como partículas no interaccionantes ligadas en el núcleo hasta que alcanzan un momento mínimo con el que pueden escapar.

Se estudia el caso simplificado en el que tan solo un nucleón interacciona con el electrón incidente, y este es arrancado del núcleo, que se puede describir de manera similar a una interacción electrón-protón, pero introduciendo unas condiciones iniciales y de contorno al nucleón. Este caso se conoce como dispersión cuasielástica electrón-núcleo.

1.5 Aplicación e interés

El estudio de la interacción electrón-protón a través de la electrodinámica cuántica es de vital importancia para derivar muchos otros resultados del mundo subatómico.

Para empezar, sirve como base del formalismo para muchos otros cálculos al ser la interacción electromagnética más conocida, permitiendo realizar paralelismos a otras interacciones entre otras partículas. Es posible adaptar el cálculo para otros leptones entre sí, y para leptones con hadrones cargados y hadrones cargados entre sí se puede hacer un desarrollo similar al del protón para tener en cuenta la estructura interna.

Además, el formalismo teórico de la interacción débil tiene partes, asociadas a la componente vector, que son análogas en su desarrollo analítico.

En cuanto a la dispersión del electrón con un núcleo modelado como un gas de Fermi, adaptando el formalismo se pueden estudiar propiedades nucleares y los distintos regímenes que surgen al describir la interacción del electrón con el nucleón en el medio nuclear.

Actualmente, una de las aplicaciones más importantes del estudio de la interacción de electrones consiste en la corroboración de modelos para interacciones de partículas menos accesibles. Por ejemplo, en oscilaciones de neutrinos, es difícil controlar la energía de estos y ello hace que los resultados experimentales sean difíciles de comparar con las predicciones teóricas. Por esto, cuando se introduce un posible modelo teórico para la interacción neutrino-núcleo, se estudia también para el caso de electrones, como método de valoración inicial, donde el análisis experimental es más sencillo y controlado y donde parte del formalismo teórico es similar.

1.6 Situación experimental

El estudio de la dispersión electrón-protón se centra en el estudio de los factores de forma y la estructura interna del nucleón. Concretamente, se busca la dependencia de estos con la energía intercambiada en la interacción, y se proponen distintas parametrizaciones de las funciones para mejorar el ajuste entre los modelos teóricos y los datos experimentales.

La otra aplicación más relevante es en lo ya mencionado anteriormente; la validación de modelos que se pueden aplicar tanto a electrones como a otras partículas cuya descripción teórica o análisis experimental es más complejo, así como el estudio de los distintos regímenes nucleares y los efectos del medio nuclear sobre las partículas interaccionantes. Se diseñan experimentos para comprobar estos modelos, pero adaptados al caso del electrón ya que este es fácil de aislar y controlar.

Con todo esto en mente se puede apreciar por qué se ha seleccionado el tema del trabajo y su interés, y en el resto de capítulos se desarrolla en detalle el formalismo necesario para el análisis de los procesos mencionados.

Parte II

Dispersión elástica electrón-protón

En esta segunda parte, se desarrolla de manera explícita el cálculo de la sección eficaz de la dispersión elástica electrón-protón desde la ecuación de Dirac, se analiza la expresión resultante y se compara con datos experimentales. Esta parte constituye el grueso del trabajo.

Capítulo 2

Formalismo de la interacción electromagnética para el estudio de la dispersión elástica e-p

La cinemática del proceso de dispersión e-p se ilustra esquemáticamente en la siguiente figura.

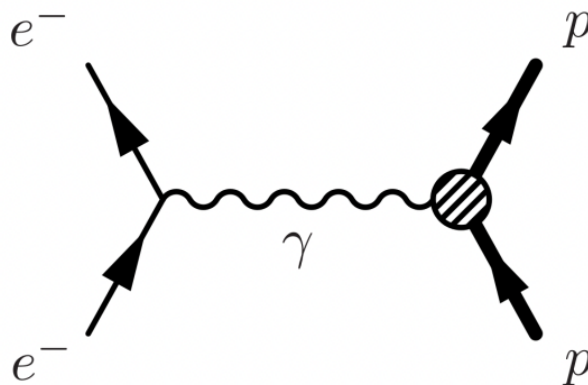


Figura 2.1. Diagrama de Feynman de la dispersión e-P por interacción electromagnética. Imagen adaptada de [10].

Al trabajar en el marco relativista, se usan cuadvectores (4-vectores). La notación empleada para la cinemática relativista es, usando el sistema natural de unidades, que es el que se va a usar de aquí en adelante:

k_i^μ - 4-momento del electrón inicial; $k_i^\mu = (\varepsilon_i, \vec{k}_i)$.

P_i^μ - 4-momento del protón inicial; $P_i^\mu = (E_i, \vec{P}_i)$.

Q^μ - 4-momento transferido; $Q^\mu = (\omega, \vec{Q})$.

k_f^μ - 4-momento del electrón final; $k_f^\mu = (\varepsilon_f, \vec{k}_f)$.

P_f^μ - 4-momento del protón final; $P_f^\mu = (E_f, \vec{P}_f)$.

Esta es la notación que se usará más adelante en el desarrollo para llegar a la sección eficaz del proceso.

Con el objetivo de poder tener en cuenta la estructura interna del nucleón y trabajar a altas energías, se busca usar una teoría que combine la mecánica cuántica y la relatividad para obtener una predicción teórica lo más precisa posible. La mecánica cuántica relativista proporciona el marco más adecuado para el estudio de la dispersión elástica electrón-protón, y es lo que se va a desarrollar en este capítulo. Las bases de la mecánica cuántica y de la física de partículas necesaria para entender este trabajo se pueden consultar en [4,14] y [5], respectivamente, y de mecánica cuántica relativista en [6].

2.1 La ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac surge en 1928. La idea de Dirac se basa en encontrar una ecuación similar a la de Schrödinger, pero que tenga en cuenta la relatividad y que trate las variables espaciales y temporal de manera simétrica. También busca que sea de primer orden en estas variables, y por lo tanto debe tener la forma general:

$$i\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi . \quad (2.1)$$

Dirac también exige que tenga una norma conservada definida positiva (lo cual implica que el operador \hat{H} sea hermítico) y que sea manifiestamente covariante.

La expresión relativista de la energía, rescribiéndola como una ecuación lineal, queda:

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M . \quad (2.2)$$

Donde los coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$ y β deben ser tales que al determinar el cuadrado de la expresión anterior se obtenga $E^2 = p^2 + M^2$.

Combinando las ecuaciones 2.1 y 2.2 junto al principio de correspondencia se llega a:

$$i\partial_t\Psi = -i\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\Psi + \beta M\Psi \equiv \hat{H}\Psi . \quad (2.3)$$

Los coeficientes α_i y β deben en general ser matrices para poder cumplir todo lo que se le exige a la ecuación. En consecuencia, las funciones de onda Ψ tienen que ser vectores cuyo número de componentes está relacionado con la dimensión de las matrices. Además, estas matrices tienen que verificar ciertas relaciones por la misma razón.

Trabajando estas relaciones se llega a que la dimensión de las matrices de Dirac debe ser par, y como tienen que haber al menos 4 matrices que anticonmuten entre sí y sus trazas sean cero la dimensión mínima a considerar es $N = 4$. Una elección posible de las matrices de Dirac es:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Siendo σ_i las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Una explicación más explícita y extensa se puede encontrar en [1].

2.2 Forma covariante de la ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac, para demostrar que es una ecuación covariante Lorentz y en general para operar con ella, se reescribe en notación cuadri-dimensional. Para esto se introducen las matrices

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad (2.7)$$

$$\gamma^i \equiv \beta \alpha_i, \quad (2.8)$$

cuyas propiedades son muy útiles para los cálculos que se desarrollarán más adelante. Las matrices γ^i son unitarias y antihermíticas mientras que la matriz γ^0 es unitaria y hermítica.

Con estas matrices se introduce la notación “slash” de Feynman. Para un cuadrivector genérico A^μ se define:

$$\not{A} \equiv \gamma_\mu A^\mu = \gamma^\mu A_\mu, \quad (2.9)$$

donde

$$\gamma^\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}) \Rightarrow \gamma_\mu = (\gamma^0, -\boldsymbol{\gamma}), \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3), \quad (2.11)$$

y entonces el operador nabla slash es

$$\not{\partial} \equiv \gamma_\mu \partial^\mu = \gamma^0 \partial_t + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}. \quad (2.12)$$

Introduciendo todo esto la ecuación de Dirac 2.3 simplemente queda

$$(i\not{\partial} - M)\Psi = 0. \quad (2.13)$$

Haciendo uso del principio de correspondencia $\hat{P}^\mu \rightarrow i\partial^\mu \Rightarrow \not{P} \rightarrow i\not{\partial}$, la ecuación de Dirac para partículas libres se expresa:

$$(\not{P} - M)\Psi = 0. \quad (2.14)$$

2.3 Soluciones de partícula libre de la ecuación de Dirac

Para expresar los estados iniciales y finales de las partículas se necesita hacer uso de las soluciones de la ecuación de Dirac para el caso de partículas libres. Estas soluciones se pueden expresar de la forma:

$$\Psi_P(x, t) = \sqrt{\frac{E + M}{2EV}} \begin{pmatrix} \varphi_0^u \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\lambda E + M} \varphi_0^u \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda Et)}, \quad (2.15)$$

donde $\lambda = 1$ corresponde a soluciones de energías positivas (partículas) y $\lambda = -1$ a energías negativas (antipartículas).

$\boldsymbol{\sigma}$ es un vector cuyas componentes son las matrices de Pauli, con lo que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_- \\ p_+ & -p_z \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Con esto y tomando solo las soluciones de energía positiva (ya que se va a trabajar exclusivamente con partículas) se puede escribir

$$\Psi_P(x, t) = \sqrt{\frac{M}{EV}} u_p e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}, \quad (2.17)$$

$$u_p = \sqrt{\frac{E + M}{2M}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \frac{p_z u_1 + p_- u_2}{E + M} \\ \frac{p_+ u_1 - p_z u_2}{E + M} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donde u_p se conocen como los espinores de Dirac.

Estas van a ser las funciones de onda que van a representar los estados iniciales y finales de las partículas consideradas en la interacción electrón-protón.

2.4 El lagrangiano de la interacción electromagnética

Para estudiar la interacción electrón-protón la fuerza dominante es la electromagnética. El conocimiento de la densidad lagrangiana o hamiltoniana es necesario para el cálculo de las secciones eficaces de la interacción, como se verá más adelante.

Siguiendo el formalismo de la teoría cuántica de campos ([3]), se propone la densidad lagrangiana de la partícula libre

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(X)[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi(X), \quad (2.19)$$

que conduce a la ecuación de Dirac de la partícula libre ya vista en la ecuación 2.14

$$(\not{p} - M)\Psi = 0. \quad (2.20)$$

Por acoplamiento mínimo, el operador potencial electromagnético debe estar al mismo nivel que el operador momento. Es decir:

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - eA^\mu \Rightarrow \not{p} \rightarrow \not{p} - e\not{A}. \quad (2.21)$$

Entonces la ecuación de Dirac en presencia de potencial electromagnético es:

$$(\not{p} - e\not{A} - M)\Psi = 0, \quad (2.22)$$

y una densidad lagrangiana que conduce a esta ecuación es:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(X)[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi(X) - e\bar{\Psi}(X)\gamma_\mu \Psi(X)A^\mu(x), \quad (2.23)$$

con

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0. \quad (2.24)$$

2.5 La matriz S

En la teoría de propagadores se estudian los operadores que permiten calcular la función de onda en una posición e instante concretos a partir de la función de onda en un instante anterior.

Desde un punto de vista de colisiones, se especifica totalmente el estado inicial del sistema ($|\varphi_i\rangle = |\varphi(-\infty)\rangle$) y se propone encontrar el estado final ($|\varphi_f\rangle = |\varphi(+\infty)\rangle$), que están relacionados por la matriz de interacción S

$$|\varphi(+\infty)\rangle = S|\varphi(-\infty)\rangle. \quad (2.25)$$

El elemento de matriz de este operador que conecta los estados finales con el inicial permitirá calcular la amplitud de transición y por lo tanto secciones eficaces.

El elemento de matriz, donde se hace uso de la teoría de propagadores y del propagador de la interacción electromagnética en aproximación de primer orden [7-8], queda

$$\langle \varphi_f | S | \varphi_i \rangle = -i \int d^4X \mathcal{H}_I \equiv S_{fi}, \quad (2.26)$$

donde \mathcal{H}_I es la densidad hamiltoniana de interacción evaluada con las funciones de ondas iniciales y finales.

La densidad hamiltoniana \mathcal{H} es la densidad hamiltoniana total y se puede descomponer en una parte asociada la partícula libre \mathcal{H}_0 y en otra correspondiente a la interacción \mathcal{H}_I , quedando, por lo tanto

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I. \quad (2.27)$$

Y de manera correspondiente, la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I . \quad (2.28)$$

Si la densidad lagrangiana de interacción no depende de las derivadas temporales de los campos (como es el caso generalmente), los campos canónicos conjugados de los campos de interacción coinciden con los de los campos libres.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}_\alpha} . \quad (2.29)$$

En este caso, la densidad hamiltoniana de interacción coincide con la densidad lagrangiana de interacción, pero con el signo opuesto, debido a

$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_{\alpha} \pi_{\alpha} \dot{\psi}_{\alpha}}_{\mathcal{H}_0} - \underbrace{\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_I}_{\mathcal{H}_I} . \quad (2.30)$$

Esto permite usar la densidad lagrangiana introducida anteriormente en la ecuación 2.23 para obtener la hamiltoniana de interacción, que queda

$$\mathcal{H}_I = e \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Psi A_{\mu} . \quad (2.31)$$

Y finalmente

$$S_{fi} = -i \int d^4 X e \bar{\Psi}(X) \gamma_{\mu} \Psi(X) A^{\mu}(x) , \quad (2.32)$$

donde $e \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi$ es la densidad de probabilidad de corriente del electrón j_{μ} .

Este elemento de matriz al cuadrado dará la probabilidad de transición correspondiente al proceso de dispersión estudiado.

2.6 Campo generado por un protón. Introducción de la estructura interna del protón

En la expresión del hamiltoniano de interacción aparece el campo creado por el protón. Este campo normalmente viene dado por:

$$A^{\mu}(X) = (D_f^{\mu\nu} * J_{\nu})(X) = \int d^4 Y D_f^{\mu\nu}(X - Y) J_{\nu}(Y) , \quad (2.33)$$

donde el asterisco indica el producto de convolución y $D_f^{\mu\nu}$ es el propagador electromagnético proveniente de la teoría de propagadores:

$$D_f^{\mu\nu}(X) = g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} e^{-iQ \cdot X} \frac{-4\pi}{Q^2} . \quad (2.34)$$

J^μ es la corriente de probabilidad del protón, que si no se tiene en cuenta la estructura interna de este debe ser igual a la del electrón, pero con carga opuesta:

$$J^\mu = -e\bar{\Phi}_f\gamma^\mu\Phi_i. \quad (2.35)$$

Para introducir la estructura interna del protón y su momento magnético anómalo se usa $\hat{\Gamma}^\mu$ en vez de γ^μ . Para la construcción de $\hat{\Gamma}^\mu$ se hace uso de los covariantes bilineales de la teoría de Dirac, quedando

$$\hat{\Gamma}^\mu = (F_1(Q) + F_2(Q))\gamma^\mu - \frac{1}{2M}F_2(Q)(P_i + P_f)^\mu, \quad (2.36)$$

donde M es la masa invariante del protón.

Introduciendo todo esto en la expresión de S_{fi}

$$S_{fi} = -i \int d^4Xd^4Y \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} [e\bar{\Psi}(X)\gamma_\mu\Psi(X)] \frac{-4\pi}{Q^2} [-e\bar{\Phi}_f(Y)\hat{\Gamma}^\mu\Phi_i(Y)] e^{-iQ\cdot(X-Y)}, \quad (2.37)$$

y usando ahora la ecuación 2.17, se llega a

$$e\bar{\Psi}_f(X)\gamma_\mu\Psi_i(X) = \frac{em}{V\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_f}} \bar{u}_f\gamma_\mu u_i e^{i(k_f-k_i)X}, \quad (2.38)$$

$$-e\bar{\Phi}_f(Y)\hat{\Gamma}^\mu\Phi_i(Y) = \frac{-eM}{V\sqrt{E_iE_f}} \bar{U}_f\hat{\Gamma}^\mu U_i e^{i(P_f-P_i)Y}, \quad (2.39)$$

$$S_{fi} = -ie^2 \frac{Mm}{(2\pi)^4 V^2 \sqrt{E_iE_f\varepsilon_i\varepsilon_f}} \int d^4Xd^4Y d^4Q [\bar{u}_f\gamma_\mu u_i] e^{i(k_f-k_i)X} \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right) \cdot [\bar{U}_f\hat{\Gamma}^\mu U_i] e^{i(P_f-P_i)Y} e^{iQ(X-Y)}, \quad (2.40)$$

donde $u_{i,f}$ y $U_{i,f}$ hacen referencia a los espinores de, respectivamente, el electrón y protón, iniciales y finales.

Las integrales en X y en Y quedan

$$\int dX^4 e^{i(k_f-k_i+Q)X} = (2\pi)^4 \delta^4(k_f - k_i + Q), \quad (2.41)$$

$$\int dY^4 e^{i(P_f-P_i-Q)Y} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i - Q), \quad (2.42)$$

por lo que resulta

$$S_{fi} = -ie^2 \frac{(2\pi)^4 Mm}{V^2 \sqrt{E_iE_f\varepsilon_i\varepsilon_f}} [\bar{u}_f\gamma_\mu u_i] \cdot [\bar{U}_f\hat{\Gamma}^\mu U_i] \int d^4Q \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right) \delta^4(k_f - k_i + Q) \delta^4(P_f - P_i - Q), \quad (2.43)$$

y resolviendo esta última integral

$$S_{fi} = -ie^2 \frac{Mm}{V^2 \sqrt{E_i E_f \varepsilon_i \varepsilon_f}} \frac{4\pi}{Q^2} (2\pi)^4 \delta^4(k_f + P_f - k_i - P_i) [\bar{u}_f \gamma_\mu u_i] \cdot [\bar{U}_f \hat{\Gamma}^\mu U_i]. \quad (2.44)$$

La probabilidad de transición viene dada por $|S_{fi}|^2$, que queda

$$|S_{fi}|^2 = \frac{M^2 m^2}{V^4 E_i E_f \varepsilon_i \varepsilon_f} \cdot [(2\pi)^4 \delta^4(k_f + P_f - k_i - P_i)]^2 \cdot |M_{fi}|^2, \quad (2.45)$$

con

$$M_{fi} \equiv \frac{4\pi e^2}{Q^2} [\bar{u}_f \gamma_\mu u_i] [\bar{U}_f \hat{\Gamma}^\mu U_i], \quad (2.46)$$

que se denomina la amplitud invariante.

2.7 Sección eficaz

Para encontrar la probabilidad por unidad de volumen y de tiempo (ω) se puede escribir una de las deltas de la ecuación 2.45 explícitamente:

$$\begin{aligned} & [(2\pi)^4 \delta^4(k_f + P_f - k_i - P_i)]^2 = \\ & = (2\pi)^4 \delta^4(k_f + P_f - k_i - P_i) \int dX^4 e^{-i(k_f + P_f - k_i - P_i)X}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

y usando propiedades del cuadrado de la delta de Dirac

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4(k_f + P_f - k_i - P_i) \int dX^4 e^{-i(k_f + P_f - k_i - P_i)X} = \\ & = (2\pi)^4 \delta^4(k_f + P_f - k_i - P_i) \int dX^4 = (2\pi)^4 \delta^4(k_f + P_f - k_i - P_i) VT. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Con esto

$$\omega \equiv \frac{|S_{fi}|^2}{VT} = (2\pi)^4 \delta^4(k_f + P_f - k_i - P_i) \frac{M^2 m^2}{V^4 E_i E_f \varepsilon_i \varepsilon_f} |M_{fi}|^2 \quad (2.49)$$

Para llegar a la expresión final de la sección eficaz diferencial, primero se define $d\omega$ como la probabilidad por unidad de volumen y de tiempo para, partiendo de un estado inicial bien definido, llegar a una región en el espacio de momentos alrededor del espacio final. Esto se consigue multiplicando la densidad de estados finales dN_f por ω .

$$d\omega \equiv dN_f \cdot \omega, \quad (2.50)$$

$$dN_f = \prod_f \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}_f = V^2 \frac{d^3 \vec{k}_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{P}_f}{(2\pi)^3}. \quad (2.51)$$

Finalmente, dividiendo por la densidad de partículas en el blanco ($1/V$, ya que se asume un solo protón blanco) y por el flujo de partículas incidentes ($\phi_{inc} = \frac{|v_{rel}|}{V}$, con v_{rel} la velocidad relativa entre el blanco y las partículas incidentes) queda

$$d\sigma = \frac{d\omega}{\frac{1}{V}\phi_{inc}} = \omega \frac{V^4}{|v_{rel}|} \frac{d^3\vec{k}_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{P}_f}{(2\pi)^3}, \quad (2.52)$$

que es la sección eficaz diferencial del proceso de dispersión.

2.8 El cálculo de la amplitud invariante. Tensor leptónico y tensor hadrónico

Se desarrolla ahora el cuadrado de la amplitud invariante definida en la ecuación 2.46. Para tener en cuenta los distintos estados de spin, los cuales no se miden, se promedian los iniciales y se suman los finales. Con esto:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} \left| \frac{4\pi e^2}{Q^2} [\bar{u}_f \gamma_\mu u_i] [\bar{U}_f \hat{\Gamma}^\mu U_i] \right|^2. \quad (2.53)$$

Desarrollando ahora el siguiente término, como se muestra en el apéndice A, se llega a

$$\begin{aligned} & \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} |[\bar{u}_f \gamma_\mu u_i] [\bar{U}_f \hat{\Gamma}^\mu U_i]|^2 = \\ & = Tr \left[\frac{\not{k}_f + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{k}_i + m}{2m} \gamma_\nu \right] Tr \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right] = 2L_{\mu\nu} \cdot 2H^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde se han definido los tensores leptónico y hadrónico, respectivamente,

$$L_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} Tr \left[\frac{\not{k}_f + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{k}_i + m}{2m} \gamma_\nu \right], \quad (2.55)$$

$$H^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} Tr \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right]. \quad (2.56)$$

Introduciendo esto en 2.53 queda

$$|M_{fi}|^2 = \frac{16\pi^2 e^4}{Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \quad (2.57)$$

Para trabajar la expresión del tensor leptónico, se desarrolla por linealidad

$$Tr \left[\frac{\not{k}_f + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{k}_i + m}{2m} \gamma_\nu \right] = \frac{1}{4m^2} Tr \left[\not{k}_f \gamma_\mu \not{k}_i \gamma_\nu + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \right] =$$

$$= \frac{1}{4m^2} \left(Tr \left[\not{k}_f \gamma_\mu \not{k}_i \gamma_\nu \right] + Tr \left[m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \right] \right). \quad (2.58)$$

Ahora, haciendo uso de los teoremas de trazas del apéndice B, se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4m^2} \left(Tr \left[\not{k}_f \gamma_\mu \not{k}_i \gamma_\nu \right] + Tr \left[m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \right] \right) = \\ &= \frac{1}{4m^2} \{ 4[k_\mu^i k_\nu^f + k_\mu^f k_\nu^i - g_{\mu\nu} (k_i \cdot k_f)] + 4[m^2 g_{\mu\nu}] \} = \\ &= \frac{1}{m^2} [k_\mu^i k_\nu^f + k_\mu^f k_\nu^i - g_{\mu\nu} (k_i \cdot k_f - m^2)], \end{aligned} \quad (2.59)$$

y por lo tanto, en tensor leptónico definido en la ecuación 2.17 queda

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2} [k_\mu^i k_\nu^f + k_\mu^f k_\nu^i - g_{\mu\nu} (k_i \cdot k_f - m^2)]. \quad (2.60)$$

Para el caso del tensor hadrónico, el desarrollo es similar pero más extenso, y se puede ver en detalle en el apéndice C. El tensor hadrónico definido en la ecuación 2.56 queda entonces

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2M^2} (F_1 + F_2)^2 [P_i^\mu P_f^\nu + P_f^\mu P_i^\nu - (P_i \cdot P_f - M^2) g^{\mu\nu}] \\ + \frac{1}{8M^2} \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right] (P_i + P_f)^\mu (P_i + P_f)^\nu &\equiv H_{(1)}^{\mu\nu} + H_{(2)}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde se han dividido los dos sumandos de la expresión en dos partes distintas del tensor para un desarrollo en el cálculo más fácil de seguir más adelante.

El siguiente paso en el desarrollo es calcular la contracción del tensor leptónico y tensor hadrónico

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = L_{\mu\nu} H_{(1)}^{\mu\nu} + L_{\mu\nu} H_{(2)}^{\mu\nu}. \quad (2.62)$$

Es un cálculo simple pero largo, que se detalla en el apéndice D, donde queda

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} H_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{2m^2 M^2} [(k_i \cdot P_i)(k_f \cdot P_f) + (k_i \cdot P_f)(k_f \cdot P_i) \\ &\quad - (k_i \cdot k_f) M^2 - (P_i \cdot P_f) m^2 + 2m^2 M^2], \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} H_{(2)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{16m^2 M^2} [2(P_i + P_f) \cdot k_f (P_i + P_f) \cdot k_i - (P_i + P_f) \\ &\quad \cdot (P_i + P_f)(k_i \cdot k_f - m^2)] \\ &\quad \times \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.10 Elección del sistema de referencia. Sección eficaz diferencial

Para poder continuar evaluando la sección eficaz se elige un sistema de referencia. Se escoge el sistema de referencia con el protón en reposo. Queda entonces:

$$k_f^\mu = (\varepsilon_f, \vec{k}_f), \quad (2.65)$$

$$k_i^\mu = (\varepsilon_i, \vec{k}_i), \quad (2.66)$$

$$P_i^\mu = (M_0, \vec{0}), \quad (2.67)$$

$$(k_i + P_i)^\mu = (k_f + P_f)^\mu \rightarrow P_f = k_i + P_i - k_f. \quad (2.68)$$

El siguiente objetivo es calcular la sección eficaz diferencial para electrones dispersados a un ángulo sólido $d\Omega$ centrado en un ángulo de dispersión θ . Por lo tanto, la expresión diferencial $d\sigma$ tendrá que ser integrada en todas las variables de momento excepto en el ángulo de dispersión θ .

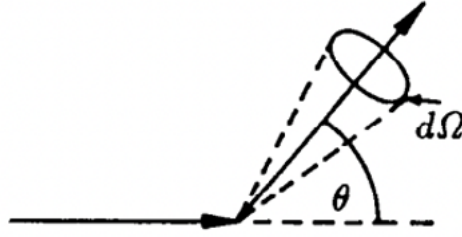


Figura 2.2. El electrón es dispersado a un elemento de ángulo sólido $d\Omega$ en la dirección θ .
Imagen adaptada de [7].

El elemento de volumen del momento final del electrón se puede reescribir como:

$$d^3\vec{k}_f = |\vec{k}_f|^2 d|\vec{k}_f| d\Omega = |\vec{k}_f| \varepsilon_f d\varepsilon_f d\Omega, \quad (2.69)$$

ya que

$$\varepsilon_f^2 = \vec{k}_f^2 + m^2 \rightarrow |\vec{k}_f| d|\vec{k}_f| = \varepsilon_f d\varepsilon_f. \quad (2.70)$$

Para una integración más fácil respecto del momento final del protón \vec{P}_f se introduce la función escalón de Heaviside Θ :

$$\frac{d^3\vec{P}_f}{E_f} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4P_f \delta(P_f^2 - M^2) \Theta(P_f^0). \quad (2.71)$$

Combinando 2.69 y 2.71 con la expresión de $d\sigma$ de 2.52 e integrando con respecto a ε_f :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \int_0^\infty d\varepsilon_f \int_{\mathbb{R}^4} d^4P_f \frac{2}{(2\pi)^2} \delta^4(k_f + P_f - k_i - P_i) \frac{M^2 m^2}{E_i \varepsilon_i} |M_{fi}|^2 \frac{1}{|v_{rel}|} |\vec{k}_f| \delta(P_f^2 - M^2) \Theta(P_f^0) = \\ &= \frac{M^2 m^2}{4\pi^2 E_i \varepsilon_i |v_{rel}|} \int_0^\infty d\varepsilon_f |M_{fi}|^2 |\vec{k}_f| \Theta(k_i^0 + P_i^0 - k_f^0) \delta\left((k_i + P_i - k_f)^2 - M^2\right) = \\ &= \frac{M^2 m^2}{2\pi^2 E_i \varepsilon_i |v_{rel}|} \int_m^{\varepsilon_i} d\varepsilon_f |M_{fi}|^2 |\vec{k}_f| \delta(2m^2 - 2M(\varepsilon_f - \varepsilon_i) - 2\varepsilon_i \varepsilon_f + 2|\vec{k}_i| |\vec{k}_f| \cos \theta). \quad (2.72) \end{aligned}$$

Para los límites de integración, se usa la función escalón para el límite superior y m para el límite inferior ya que siempre $m < \varepsilon_f$. Con un cálculo ordenado de la delta que se obtiene, usando

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x_k}}, \quad (2.73)$$

queda

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{M^2 m^2}{4\pi^2 E_i \varepsilon_i |v_{rel}|} \frac{1}{|\vec{k}_f|} \frac{|M_{fi}|^2}{M + \varepsilon_i - \varepsilon_f \frac{|\vec{k}_i|}{|\vec{k}_f|} \cos \theta}. \quad (2.74)$$

De la conservación de la energía de la delta de la ecuación 2.72 obtiene

$$\varepsilon_f (M + \varepsilon_i) - |\vec{k}_i| |\vec{k}_f| \cos \theta = \varepsilon_i M + m^2. \quad (2.75)$$

Es interesante para aproximaciones que se van a usar más adelante reescribir parte de la anterior expresión.

$$\begin{aligned} \frac{Mm}{E_i \varepsilon_i |v_{rel}|} &= \frac{Mm}{E_i \varepsilon_i |\vec{v}_i - \vec{V}_i|} = \frac{Mm}{E_i \varepsilon_i |\vec{v}_i - \vec{V}_i|} = \frac{Mm}{E_i \varepsilon_i \sqrt{\vec{v}_i^2 + \vec{V}_i^2 - 2\vec{v}_i \vec{V}_i}} = \\ &= \frac{Mm}{\sqrt{\vec{k}_i E_i + \vec{P}_i \varepsilon_i - 2\vec{k}_i \vec{P}_i E_i \varepsilon_i}}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Esto se puede demostrar (apéndice E) que es, aproximadamente

$$\frac{Mm}{\sqrt{\vec{k}_i E_i + \vec{P}_i \varepsilon_i - 2\vec{k}_i \vec{P}_i E_i \varepsilon_i}} \approx \frac{Mm}{\sqrt{(k_i P_i)^2 - m^2 M^2}}, \quad (2.77)$$

y en el sistema de referencia escogido

$$\frac{Mm}{E_i \varepsilon_i |v_{rel}|} \approx \frac{Mm}{\sqrt{(k_i P_i)^2 - m^2 M^2}} = \frac{Mm}{\sqrt{\varepsilon_i^2 M^2 - m^2 M^2}} = \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - m^2}} = \frac{m}{|\vec{k}_i|}. \quad (2.78)$$

Entonces, sustituyendo en 2.74:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Mm^2}{4\pi^2} \frac{|\vec{k}_f|}{|\vec{k}_i|} \frac{|M_{fi}|^2}{M + \varepsilon_i - \varepsilon_f \frac{|\vec{k}_i|}{|\vec{k}_f|} \cos \theta}. \quad (2.79)$$

Para futura referencia, es interesante también en vez de integrar sobre la energía en el paso de la ecuación 2.72, dejar expresada la sección eficaz doble con respecto a $d\Omega d\varepsilon_f$. Con el mismo desarrollo posterior, queda

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\varepsilon_f} = \frac{Mm^2}{4\pi^2} \frac{|\vec{k}_f|}{|\vec{k}_i|} |M_{fi}|^2 \delta\left((k_i + P_i - k_f)^2 - M^2\right). \quad (2.80)$$

Además, si se juega con el argumento de la delta

$$\begin{aligned} (k_i + P_i - k_f)^2 - M^2 &= \left((k_i - k_f) + P_i\right)^2 - M^2 = \\ &= (Q + P_i)^2 - M^2 = Q^2 + 2\omega M + M^2 - M^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\omega = \frac{|Q^2|}{2M}, \quad (2.82)$$

$$\delta\left((k_i + P_i - k_f)^2 - M^2\right) = \frac{1}{M} \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M}\right), \quad (2.83)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\varepsilon_f} = \frac{m^2}{4\pi^2} \frac{|\vec{k}_f|}{|\vec{k}_i|} |M_{fi}|^2 \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M}\right). \quad (2.84)$$

2.11 Aproximación de electrones ultrarrelativistas. Fórmula de Rosenbluth

Para simplificar los cálculos, se toma la aproximación de electrones ultrarrelativistas, es decir

$$\frac{m}{\varepsilon_i} \ll 1, \quad (2.85)$$

que implica:

$$|\vec{k}_i| = \sqrt{\varepsilon_i^2 - m^2} \approx \varepsilon_i, \quad (2.86)$$

$$|\vec{k}_f| = \sqrt{\varepsilon_f^2 - m^2} \approx \varepsilon_f. \quad (2.87)$$

La expresión de la sección eficaz diferencial de 2.79 queda entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{Mm^2}{4\pi^2} \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \frac{|M_{fi}|^2}{M + \varepsilon_i - \varepsilon_f \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f} \cos \theta} = \\ &= \frac{m^2}{4\pi^2} \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \frac{|M_{fi}|^2}{1 + \frac{\varepsilon_i}{M} - \frac{\varepsilon_i}{M} \cos \theta} = \frac{m^2}{4\pi^2} \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \frac{|M_{fi}|^2}{1 + \frac{2\varepsilon_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

En el límite de electrones ultrarrelativistas también se simplifica la expresión de $L_{\mu\nu}H^{\mu\nu}$. Tras el cálculo desarrollado en el apéndice F queda

$$L_{\mu\nu}H_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{(F_1 + F_2)^2}{m^2} \varepsilon_i \varepsilon_f \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (2.89)$$

$$L_{\mu\nu}H_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2} \varepsilon_i \varepsilon_f \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[F_2^2 \left(2 - \frac{Q^2}{2M^2} \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right]. \quad (2.90)$$

Con esto, sumando las dos partes de la contracción y usando

$$Q^2 \approx -2\varepsilon_f \varepsilon_i (1 - \cos \theta) = -4\varepsilon_f \varepsilon_i \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2.91)$$

que viene de combinar F.2 y F.3, se tiene

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= \frac{16\pi^2 e^4}{Q^4} (L_{\mu\nu}H_{(1)}^{\mu\nu} + L_{\mu\nu}H_{(2)}^{\mu\nu}) = \\ &= \frac{\pi^2 e^4}{\varepsilon_f \varepsilon_i \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{(F_1 + F_2)^2}{m^2} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &+ \frac{\pi^2 e^4}{\varepsilon_f \varepsilon_i \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[F_2^2 \left(2 - \frac{Q^2}{2M^2} \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right] = \\ &= \frac{\pi^2 e^4}{\varepsilon_f \varepsilon_i \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{m^2} \left[(F_1 + F_2)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - (F_1 + F_2)^2 \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} F_2^2 \left(2 - \frac{Q^2}{2M^2} \right) - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} F_2(F_1 + F_2) \right] = \\ &= \frac{\pi^2 e^4}{\varepsilon_f \varepsilon_i \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{m^2} \left[\left(F_1^2 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (F_1 + F_2)^2 \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (2.92) \end{aligned}$$

Finalmente, combinando todos los resultados conseguidos, introduciendo 2.91 en 2.88 y con 2.92 queda

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{m^2}{4\pi^2} \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \frac{1}{1 + \frac{2\varepsilon_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &\times \frac{\pi^2 e^4}{\varepsilon_f \varepsilon_i \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{m^2} \left[\left(F_1^2 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (F_1 + F_2)^2 \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= \frac{e^4}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)} \left[\left(F_1^2 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (F_1 + F_2)^2 \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (2.93) \end{aligned}$$

que se reescribe como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} \left[\left(F_1^2 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) - (F_1 + F_2)^2 \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (2.94)$$

donde se ha usado $\alpha = e^2$ (en el sistema natural de unidades), con $\alpha \approx \frac{1}{137}$.

Este resultado se conoce como la fórmula de Rosenbluth ([9]). Se ha dejado Q^2 sin sustituir por la expresión de 2.91 porque habitualmente se expresa, en vez de en función de F_1 y F_2 , en función de los factores eléctrico y magnético de forma de Sachs. Estos son:

$$\begin{cases} G_E = F_1 - \tau F_2 \\ G_M = F_1 + F_2 \\ \tau = -\frac{Q^2}{4M^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1^2 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 = \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \\ -(F_1 + F_2)^2 \frac{Q^2}{2M^2} = 2\tau G_M^2 \end{cases}, \quad (2.95)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} \left[\left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \right) + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (2.96)$$

Tiene dimensiones de área y para volver al SI se multiplica por $(\hbar c)^2$.

De nuevo, para futuras referencias, la sección eficaz doble de la ecuación 2.84 se desarrolla exactamente igual y queda

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\varepsilon_f} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[\left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \right) + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M} \right). \quad (2.97)$$

El factor global que aparece delante del corchete en 2.97 es lo que se conoce como sección eficaz de Mott (σ_{Mott}), que coincidiría con la dispersión de un electrón por una carga puntual sin espín.

Capítulo 3

Análisis y discusión de resultados de la sección eficaz e-p

Teniendo ya la expresión que describe la dispersión del electrón con el protón (sujeta a varias aproximaciones), en este capítulo se estudia dicha expresión y qué limitaciones tiene. Asimismo, se describe su utilidad experimental, dónde se puede aplicar y, además, se entra en más detalle en los factores de forma y se comparan con datos experimentales.

3.1 El resultado sin estructura. Comportamiento general

Para empezar, es interesante estudiar también el caso que no incluye la estructura interna del protón. Se empieza por este caso ya que es en principio el más simple.

Para llegar a la expresión que no tiene en cuenta la estructura, simplemente se sustituye la corriente hadrónica por la expresión 2.35. Es fácil ver que esto es equivalente a usar:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} G_E = 1 \\ G_M = 1 \end{cases}. \quad (3.1)$$

Usando la expresión 2.94 queda

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} \left[1 - \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}\right]. \quad (3.2)$$

Para poder evaluar la sección eficaz diferencial en función únicamente del ángulo θ , se usa 2.91 y F.5 para obtener

$$Q^2 \approx -4 \frac{\varepsilon_i^2}{\left(1 + \frac{2\varepsilon_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.3)$$

Es importante también ver aquí como varía el módulo de Q^2 con el ángulo de dispersión. Es fácil ver que cuando $\theta \rightarrow 0$, $|Q^2| \rightarrow 0$, lo cual implica que no hay interacción, ya que como se ve en la ecuación 2.82, $|Q^2|$ es proporcional a la energía intercambiada por conservación de la energía.

Entonces, fijando la energía inicial del electrón $\varepsilon_i = 500 \text{ MeV}$ a modo de ejemplo, asegurando así que se está en el límite ultrarrelativista, queda

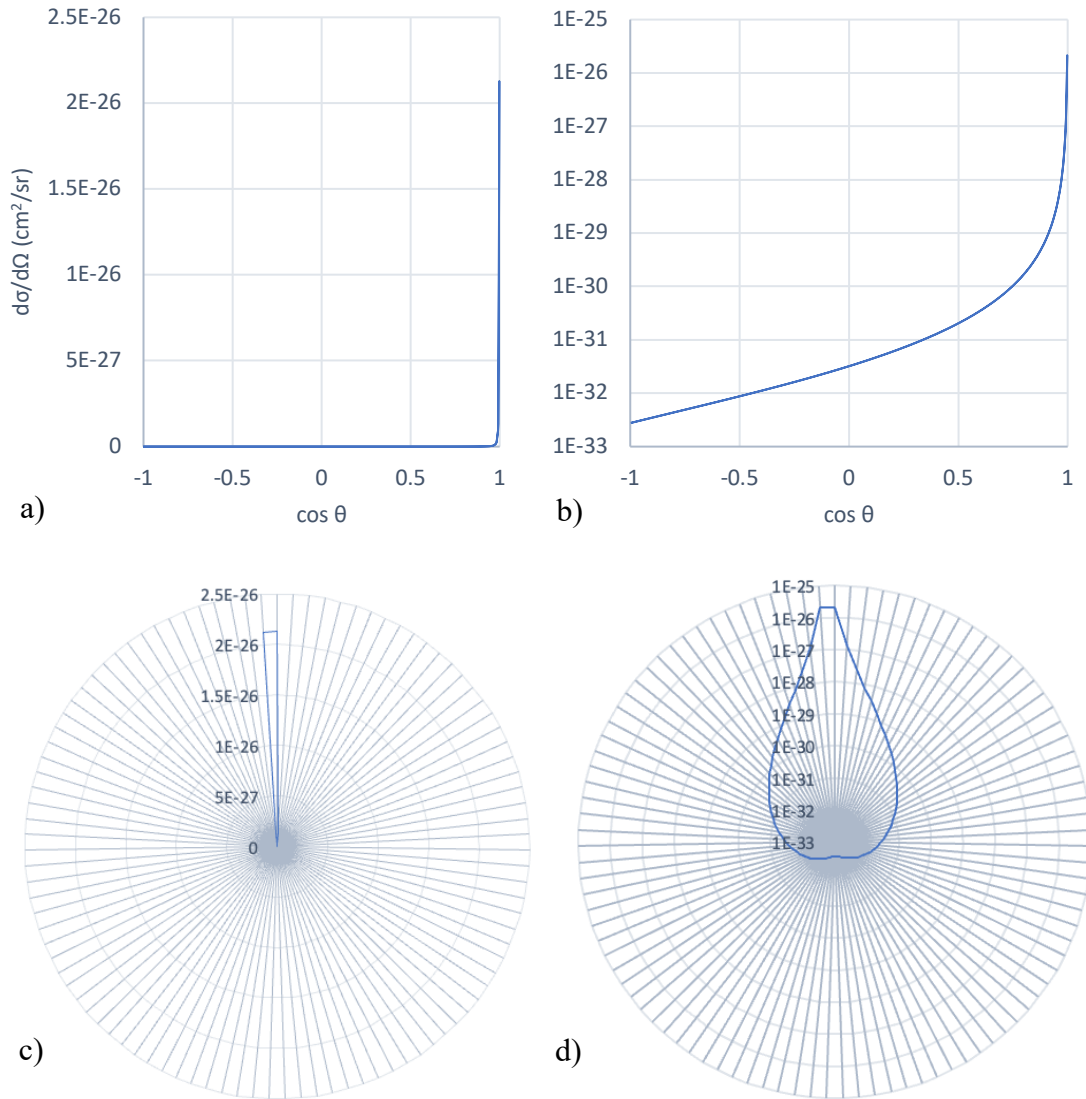


Figura 3.1. Sección eficaz diferencial frente al coseno del ángulo de dispersión con $\varepsilon_i = 500 \text{ MeV}$. Las figuras c) y d) son gráficos circulares representando la sección eficaz diferencial a cada ángulo. Las figuras a) y c) están en escala lineal y las b) y d) en escala logarítmica.

Estas figuras muestran claramente un problema que ya se podía prever de la expresión de la sección eficaz, su comportamiento en $\theta = 0$. En $\theta = 0$ la sección a eficaz tiende a infinito:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = +\infty. \quad (3.4)$$

Este comportamiento en principio parece que carece de sentido físico, ya que la sección eficaz es proporcional a la probabilidad, y una probabilidad infinita es absurda. La explicación de este resultado viene de que en el desarrollo para llegar a esta expresión se ha usado el hamiltoniano de un campo de rango infinito (el electromagnético) y se ha integrado en todas las infinitas posiciones relativas del electrón y el protón (X e Y). Por

esto, los infinitos casos donde no hay o apenas hay interacción se agrupan alrededor de $\theta = 0$, ya que $\theta = 0$ implica $|Q^2| = 0$, es decir, sin interacción.

Para eliminar dichas divergencias se tendría que reconsiderar los límites físicos de los integrados previos y establecer límites para el parámetro de impacto. En cualquier caso, introducir dicha limitación no es necesario para comparar con datos experimentales donde dichas medidas están asociadas a secciones eficaces diferenciales en función de la energía del electrón incidente y del ángulo de dispersión.

Si se toman entonces los ángulos no tan cercanos a cero se tiene una distribución con una escala más adecuada ya que se evita la divergencia, como se muestra en las siguientes figuras.

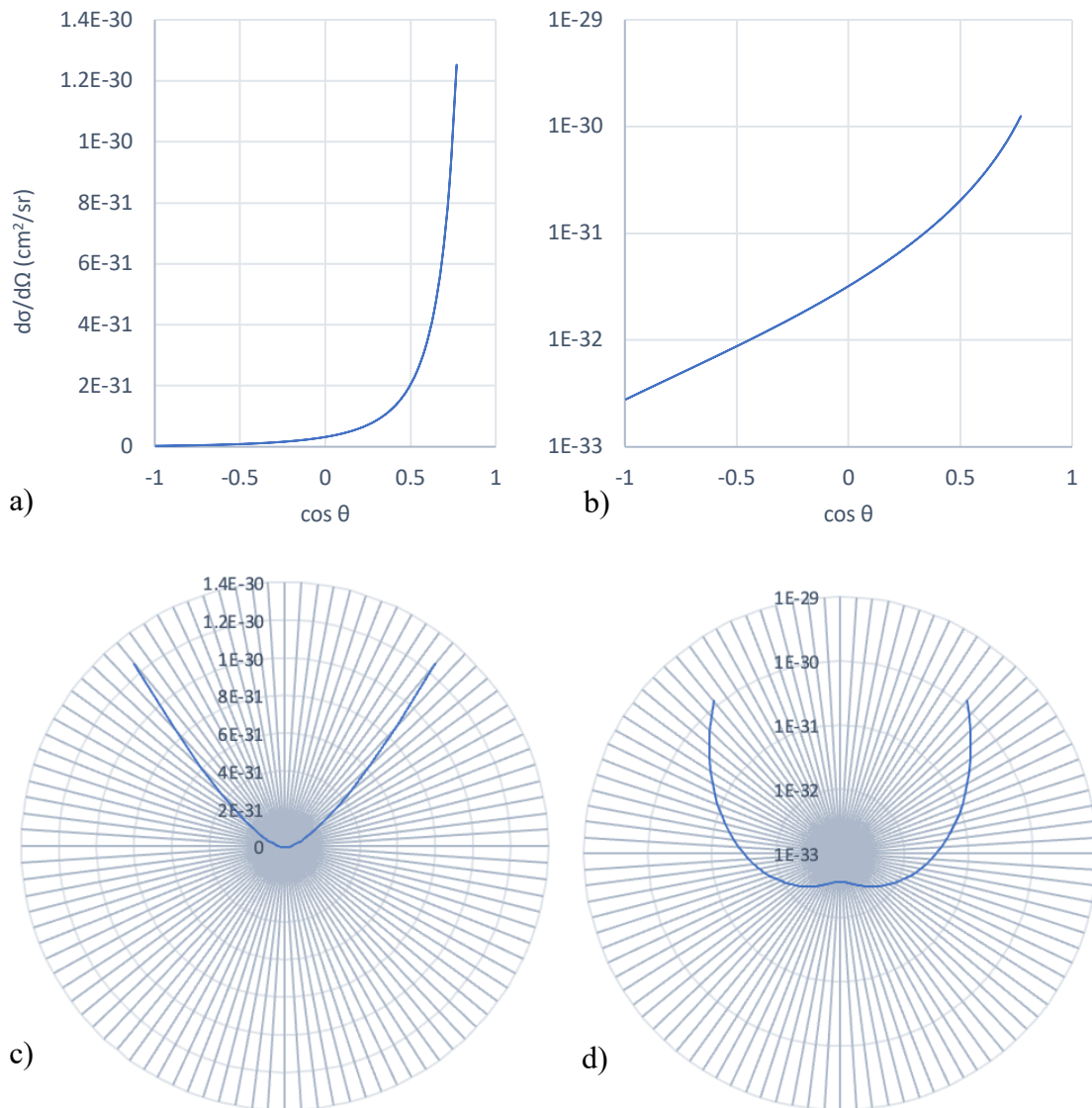


Figura 3.2. Datos de la figura 3.1 eliminando el caso de ángulos cercanos a 0.

Si se representa en vez de frente al coseno del ángulo frente a $|Q^2|$ se obtiene la misma información ya comentada antes debajo de la ecuación 3.3, y estos comportamientos son los mismos en la expresión en la que se añaden los factores de forma.

En interesante comparar también distribuciones con distintas energías del electrón incidente, lo cual se muestra en la siguiente figura.

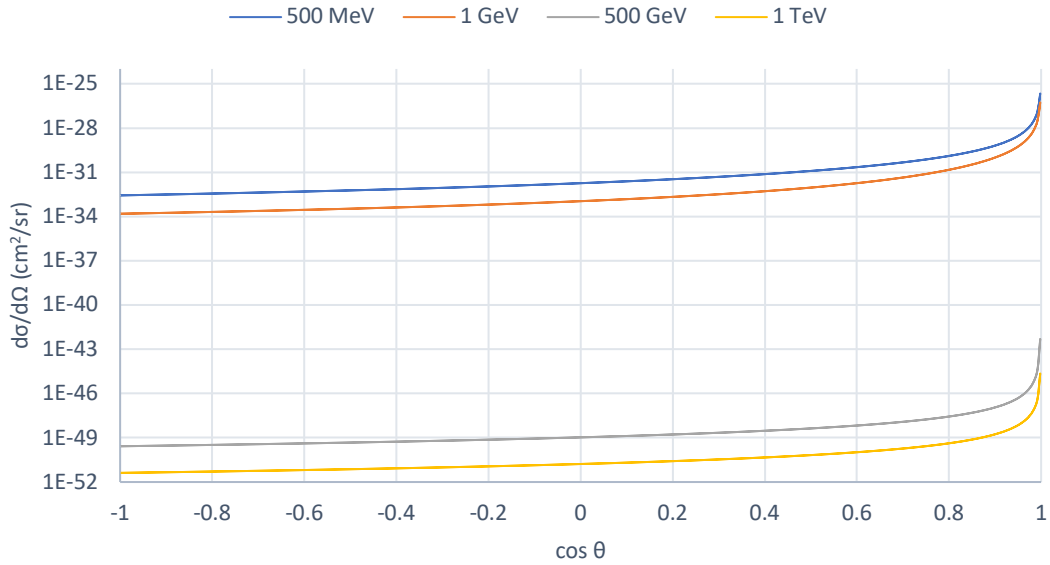


Figura 3.3. Comparación de la sección eficaz frente al coseno del ángulo a distintas energías del electrón incidente.

Se observa que a medida que la energía del electrón incidente aumenta, menor es la sección eficaz de los ángulos no muy próximos a 0. Esto es lo esperado, a mayor energía del electrón incidente, mayor velocidad y por lo tanto va a interactuar de manera más débil con el protón, $|Q^2| \rightarrow 0$. Y $|Q^2| \rightarrow 0$ implica ángulos de dispersión más cercanos a cero, por lo que la probabilidad de los ángulos de dispersión grandes es menor.

Aquí de nuevo hay un límite que diverge,

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = +\infty. \quad (3.5)$$

al considerar este caso, que para lo que se va a comentar no pierde sentido en el límite ultrarrelativista, el electrón está en reposo en el estado inicial. La sección eficaz se va a infinito ya que no si no hay momento inicial el ángulo de dispersión θ carece de sentido, y por lo tanto el $d\Omega$.

3.2 Parametrización de los factores de forma

Para poder estudiar el efecto de los factores de forma y comparar los resultados con los datos experimentales se usan distintas parametrizaciones de estos.

Parametrización dipolar de Galster

Esta parametrización es simple y comúnmente usada, y presenta buenas correlaciones con los datos experimentales para valores de $|Q^2| < 1 \text{ GeV}^2$. Se basa en una forma funcional dipolar la cual usa

$$G_E(Q^2) = G_D(Q^2), \quad (3.6)$$

$$G_M(Q^2) = \mu_P G_D(Q^2), \quad (3.7)$$

$$G_D(Q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{|Q^2|}{M_V^2}\right)^2}, \quad (3.8)$$

donde M_V se denomina masa vector y es un parámetro de ajuste con valor $M_V = 0,843 \text{ GeV}$.

Parametrización de Kelly

Una parametrización algo más compleja que desarrolla algo más la expresión dipolar de Galster es la propuesta por J.J. Kelly en 2004. Los factores de forma eléctrico y magnético resultantes se ajustan muy razonablemente a los determinados experimentalmente. Estos vienen dados por:

$$G(Q^2) \propto \sum_{k=0}^n a_k \tau^k / \left(1 + \sum_{k=1}^{n+2} b_k \tau^k\right). \quad (3.9)$$

Con los parámetros usados en la referencia [11], que son:

	a_0	a_1	b_1	b_2	b_3
G_E	1	-0.24	10.98	12.82	21.97
G_M/μ_P	1	0.12	10.97	18.86	6.55

Tabla 3.1. Parámetros de Kelly ajustados en su artículo a datos sobre los factores de forma para el protón.

Para comparar estas parametrizaciones se hace una primera representación de la sección eficaz con estructura interna.

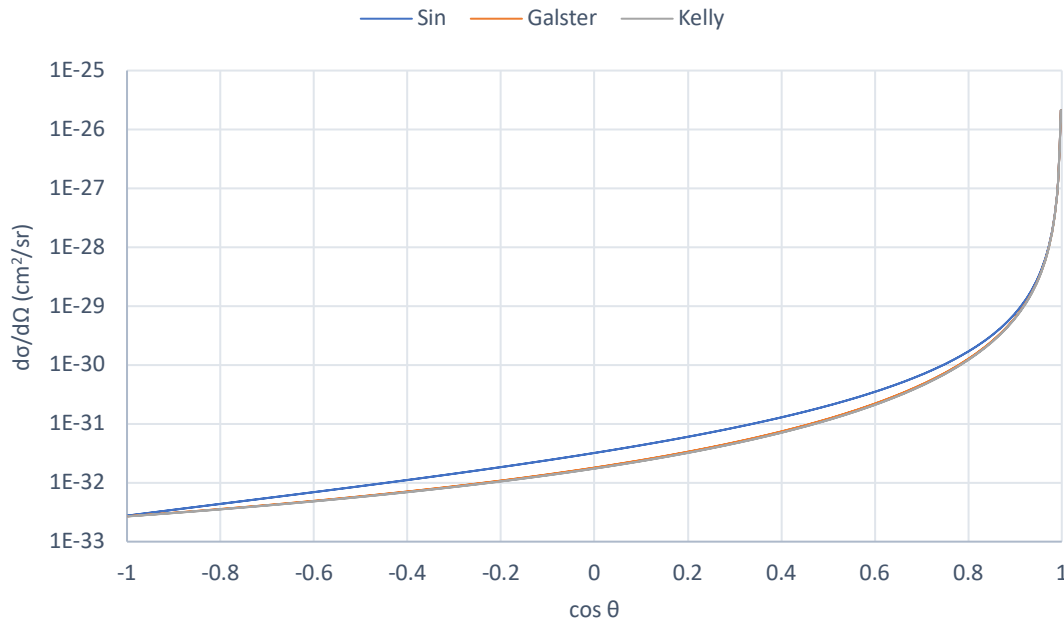


Figura 3.4. Sección eficaz diferencial frente al coseno del ángulo de dispersión con $\varepsilon_i = 500\text{MeV}$, sin estructura interna y con las parametrizaciones de Galster y Kelly.

Se puede apreciar cambio entre sin estructura y con ella, sobre todo en ángulos algo alejados de cero, como es de esperar. Pero a esta escala, las curvas de la parametrización del Galster y la de Kelly quedan básicamente superpuestas. Por esto, y para tener una representación en la que se vean mejor las diferencias, se representa ahora el cociente entre la sección eficaz con estructura y sin ella.

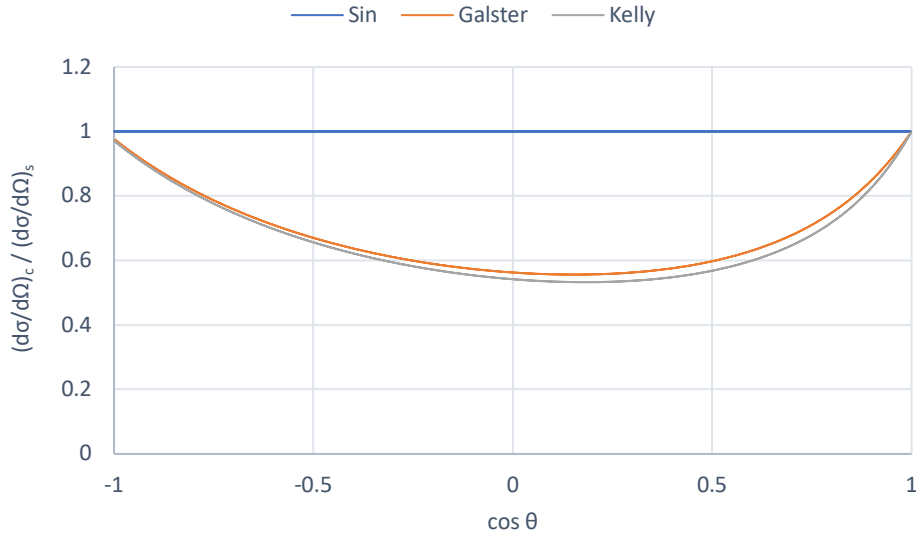
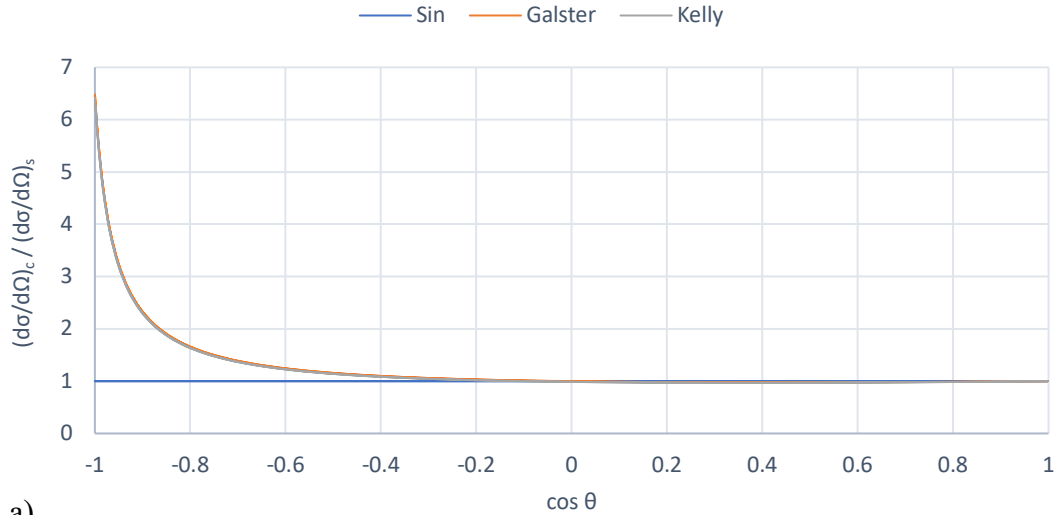


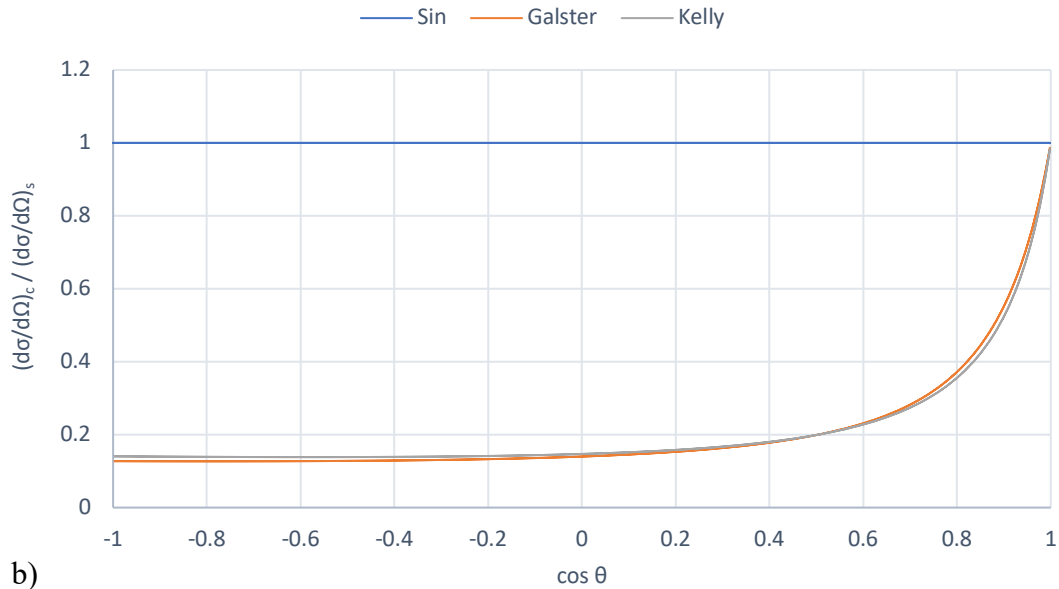
Figura 3.5. Cociente entre las secciones eficaces con distintas parametrizaciones entre la sin estructura interna con $\varepsilon_i = 500\text{MeV}$.

En esta representación, se ve claramente la diferencia que introduce la consideración de los factores de forma, y ahora se observa la diferencia entre la parametrización de Galster y la de Kelly. De nuevo, se ve que en los ángulos próximos a cero tiende al caso sin estructura, llegando a diferenciarse hasta en un $\sim 45\%$ dependiendo del ángulo.

Es importante recordar que la expresión 3.3 muestra que Q^2 depende de la energía del electrón incidente, y son las funciones $G(Q^2)$ las que determinan la diferencia entre el caso elemental y con estructura. Se representa entonces la misma curva que en la figura 3.5 pero para unas energías incidentes distintas;



a)



b)

Figura 3.6. Misma representación que en la figura 3.5, pero en a) se tiene $\varepsilon_i = 100\text{MeV}$ y en b) $\varepsilon_i = 1\text{GeV}$.

Considerando estos resultados, se observa que a energías bajas las parametrizaciones se asemejan más al caso sin estructura excepto a ángulos de retrodispersión, y a energías altas se empieza a observar el efecto de la estructura interna del protón. La figura 3.5 muestra un caso intermedio.

El comportamiento previo es el esperado. A energías intercambiadas altas, ya sea por ángulos de dispersión mayores o por energías iniciales mayores, el efecto de la estructura interna será proporcionalmente más intenso. La dependencia de los factores de forma con Q^2 se analiza más explícitamente en la subsección 3.3.

Para una comparación entre las parametrizaciones de Galster y Kelly más con más detalle, se representa ahora el cociente de ambas: Kelly/Galster.

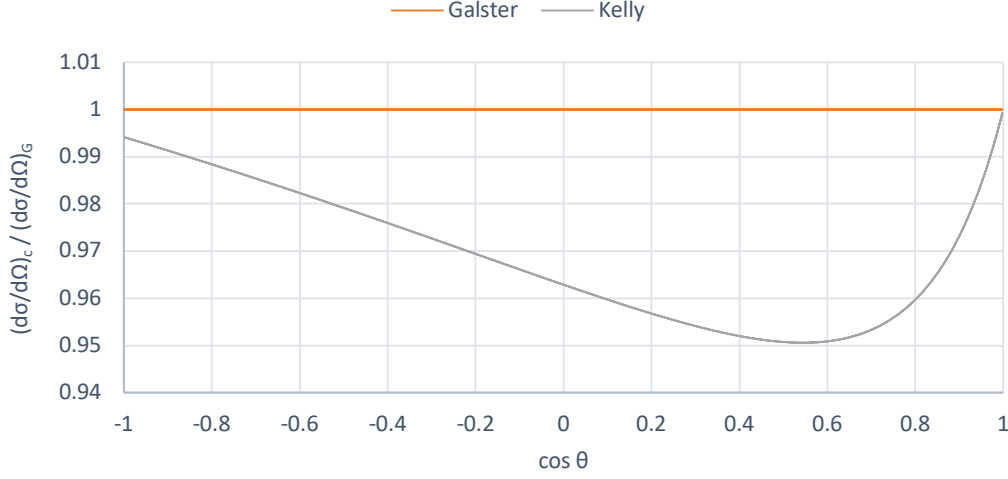


Figura 3.7. Cociente entre las secciones eficaces con las parametrizaciones de Kelly y Galster con $\varepsilon_i = 500\text{MeV}$.

La diferencia entre las dos parametrizaciones es notablemente menor que cuando se comparan con los resultados sin considerar la estructura interna del protón, tan solo se diferencian en menos de un 5%, siendo lo más notable a ángulos alrededor de 60° . Pero como se verá más adelante, esta diferencia hace que la parametrización de Kelly se ajuste mejor a los datos experimentales.

Determinación experimental de los factores de forma

Para una obtención más sencilla de los factores de forma a partir del análisis de datos experimentales se hace la siguiente reordenación:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} \left[\left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \right) + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \equiv \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0} = \left[\left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \right) + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.12)$$

Con esto, si se representa $\frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0}$ frente a $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ se obtendrá una recta cuya pendiente y ordenada en el origen serán, respectivamente

$$a = 2\tau G_M^2, \quad (3.13)$$

$$b = \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau}. \quad (3.14)$$

Para obtener los datos adecuados para esta recta se tienen que representar puntos de $|Q^2|$ constante por la dependencia que tienen los factores de forma con $|Q^2|$.

Experimentalmente, para obtener estos datos se toman datos a angulaciones constantes mientras se cambia la energía del electrón incidente para varios ángulos no muy cercanos a cero. Conociendo el ángulo de dispersión y la energía se puede determinar $|Q^2|$ con la ecuación 3.3.

Por ejemplo, los datos experimentales serían del tipo:

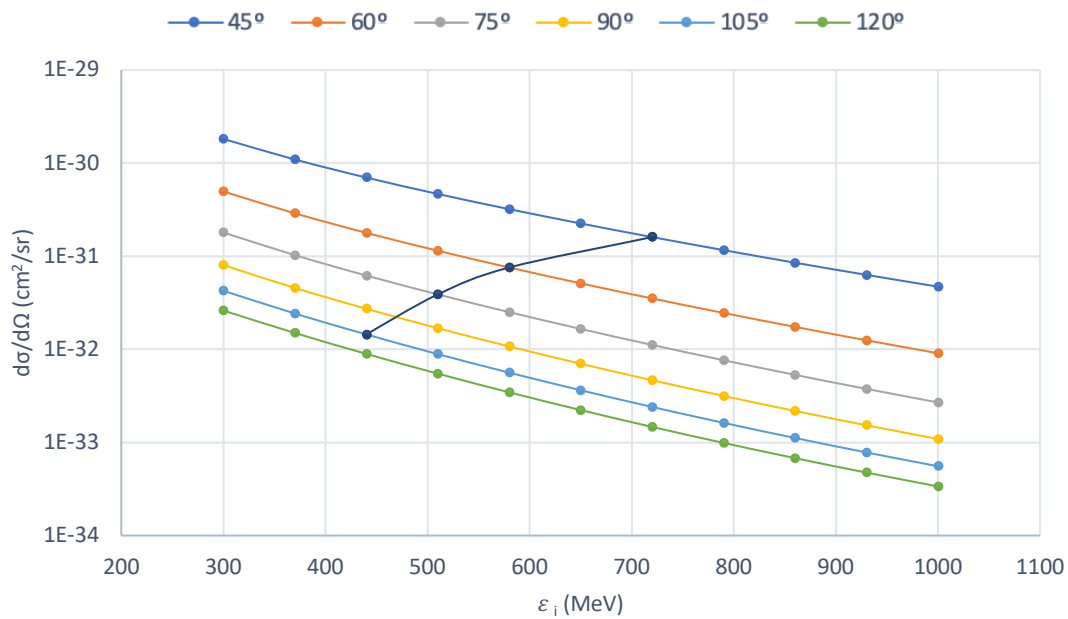


Figura 3.8. Sección eficaz frente a la energía del electrón incidente para distintos ángulos de dispersión.

Señalados en azul oscuro están los puntos con $|Q^2| = 2.5 \cdot 10^5 (MeV/c)^2$, y usando estos datos se haría:

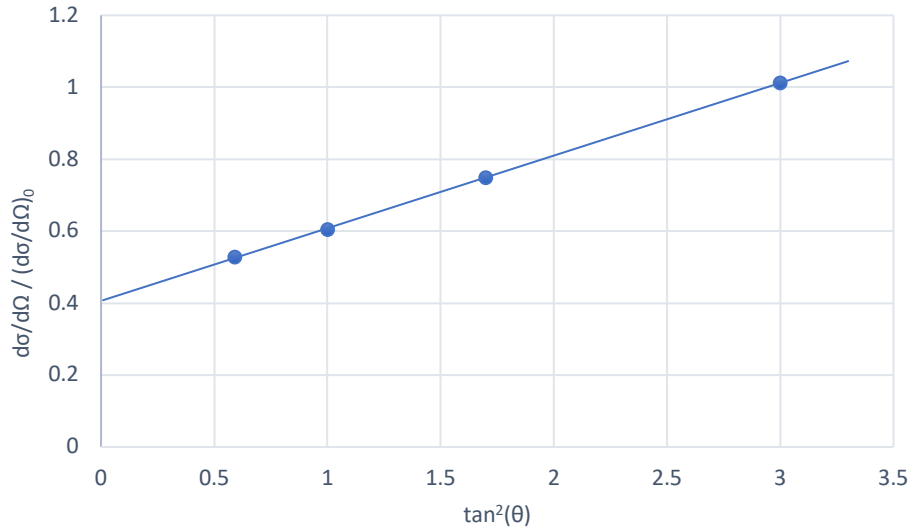


Figura 3.9. Recta de ajuste para determinar los factores de forma eléctrico y magnético para una $|Q^2|$ determinada.

Una vez se conoce el ajuste, se pueden despejar fácilmente los valores experimentales de los factores de forma para la $|Q^2|$ seleccionada. Este proceso se repite para distintos valores de $|Q^2|$ para obtener los valores experimentales de los factores de forma en función de $|Q^2|$.

3.3 Comparación de las distintas parametrizaciones con datos experimentales

La fuente [12] proporciona valores experimentales de los factores de forma del protón en función de $|Q^2|$ de distintos artículos con los que se pueden contrastar las predicciones teóricas de las distintas parametrizaciones introducidas. Para empezar, si se representan los factores de forma eléctricos y magnéticos experimentales junto a las predicciones teóricas se tiene

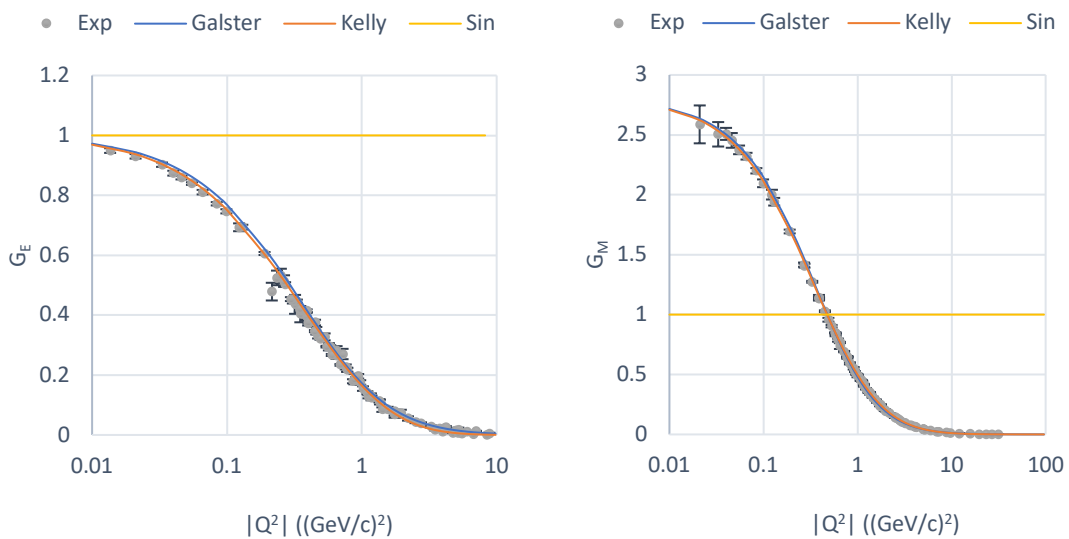


Figura 3.9. Datos experimentales de los factores de forma eléctrico y magnético del protón junto a las predicciones teóricas de las distintas parametrizaciones.

En cuanto a la parte eléctrica, para empezar, se llegan a conclusiones similares a las mencionadas en la figura 3.6. Es decir, a energías bajas se aprecia mucho menos la estructura interna del protón. En cuanto a la magnética, el caso sin estructura falla incluso a energías bajas porque no tiene en cuenta el momento magnético del protón. Si bien se pone de manifiesto la necesidad de considerar la estructura interna del nucleón, no se observan grandes diferencias entre las parametrizaciones de Galster y Kelly

Entonces, para ahora observar mejor la comparación respecto al modelo de Galster y el de Kelly se representan los cocientes de estos dos modelos entre G_D de la ecuación 3.8, junto a los datos experimentales también normalizados de la misma forma.

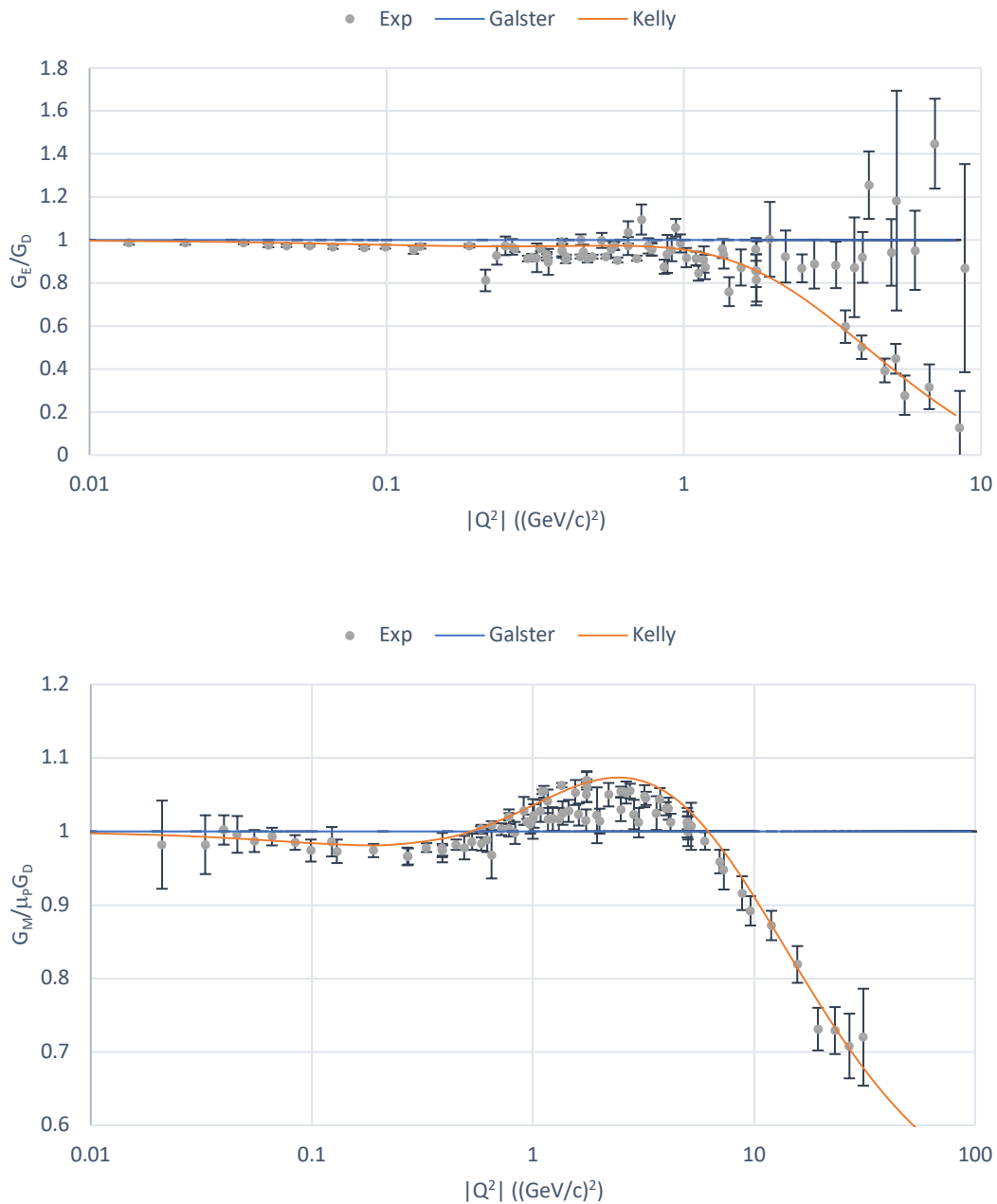


Figura 3.10. Cociente de los modelos de Kelly y Galster para una mejor comparación entre estos.

Empezando de nuevo por la parte eléctrica, se observa que a bajas energías ambos modelos son prácticamente equivalentes y se ajustan bien a los datos experimentales. A altas energías, los datos más fiables, es decir los de menor error, se ajustan mejor al modelo de Kelly, pero hay bastante dispersión en los datos experimentales en estos rangos de energía.

En cuanto al factor de forma magnético, otra vez a bajas energías ambos modelos son aceptables, pero a altas energías el modelo de Kelly se ajusta mucho mejor a los datos experimentales y además en este caso no hay tanta dispersión como en los datos para el factor de forma eléctrico. Esto se debe a que el modelo de Kelly es más sofisticado, emplea un mayor número de parámetros y datos para proporcionar una mejor descripción de la estructura interna. Otros factores de forma basados en distintas prescripciones pueden encontrarse en [12].

Con esto, se concluye el estudio de la dispersión elástica electrón-protón, que sirve como introducción detallada a conceptos fundamentales de secciones eficaces en mecánica cuántica. También, sirve como punto de partida para modelos más complejos como el que se ve en la siguiente parte.

Parte III

Dispersión cuasielástica electrón-núcleo

En esta parte, se introduce brevemente el caso análogo a la dispersión elástica electrón-protón, pero para el caso de dispersión cuasielástica electrón-núcleo. Para esto, se introduce el Modelo de Gas de Fermi Relativista, que se usa como primera aproximación de la estructura interna del núcleo. De nuevo, se analizan los resultados teóricos y se comparan con experimentales.

Capítulo 4

Dispersión cuasielástica electrón-núcleo: Modelo del Gas de Fermi Relativista

En este capítulo se explora de manera conceptual el caso de dispersión cuasielástica de un electrón contra un núcleo. Para un desarrollo más explícito, se pueden consultar las referencias [10] y [13].

4.1 Dispersión cuasielástica

En el caso de la interacción electrón-núcleo, el núcleo presenta varios regímenes de respuesta dependiendo de la energía intercambiada en la interacción, siendo necesario un modelo mucho más complejo que el introducido para el protón para modelizar todas estas interacciones.

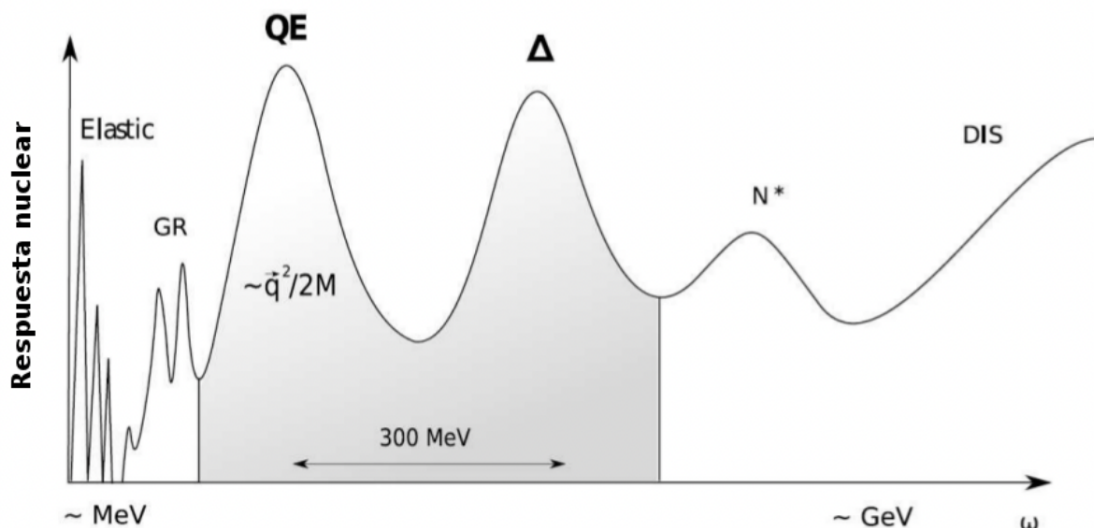
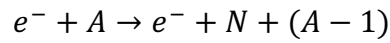


Figura 4.1. Regímenes de respuesta nuclear en función de la energía transferida para un valor de \vec{Q} fijo. Imagen tomada de [10].

Aun así, es interesante estudiar una de las posibles interacciones ya que se asemeja al caso electrón-protón, pero añade un nivel más de complejidad. Esta interacción es la dispersión cuasielástica, donde el electrón incidente arranca un nucleón del núcleo al transferirle energía (QE en la figura 5.1). La reacción entonces queda:



donde A es el núcleo blanco y $(A - 1)$ es el núcleo tras haber perdido un nucleón.

En el análisis teórico de esta interacción se suele usar la Aproximación de Impulso, que implica que el electrón solo interactúa con el nucleón que arranca del núcleo, y el resto de componentes del núcleo son meros espectadores del proceso. La situación se visualiza en la siguiente figura.

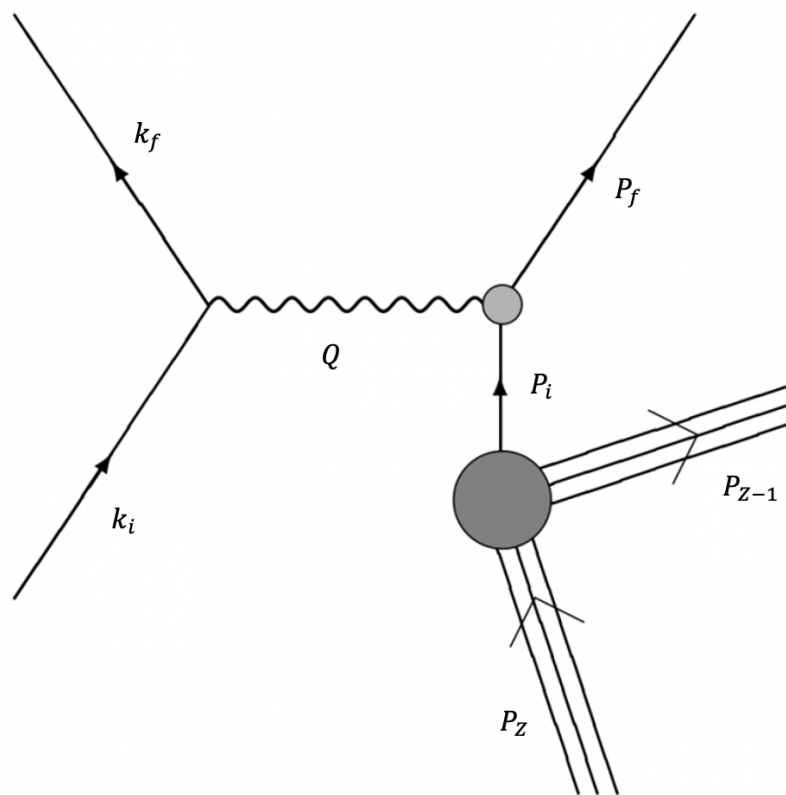


Figura 4.2. Representación del proceso de dispersión electrón-núcleo en la Aproximación de Impulso. Imagen adaptada de [10].

Una importante diferencia con el caso electrón-protón surge de que ahora el nucleón al que se le transfiere la energía no puede considerarse en reposo. La elección del sistema de referencia en el que el blanco, o sea el núcleo, está en reposo es la más adecuada y con sentido experimental, y esto implica que el nucleón tiene un rango de momentos iniciales posibles dentro del núcleo.

4.2 Modelo nuclear: Gas de Fermi Relativista

Para poder introducir en el desarrollo analítico la situación inicial en la que se encuentra el nucleón, es decir, como parte de un núcleo, se introduce un modelo para la estructura nuclear.

En este caso, el núcleo se describe como un conjunto de partículas libres a través del Modelo de Gas de Fermi Relativista. En este marco, los nucleones se encuentran ligados al núcleo y es necesario que alcancen un momento superior al valor de Fermi k_F para que puedan salir de este. Dentro del núcleo, los nucleones tienen una distribución de momentos uniforme entre 0 y k_F , como se aprecia en la siguiente figura,

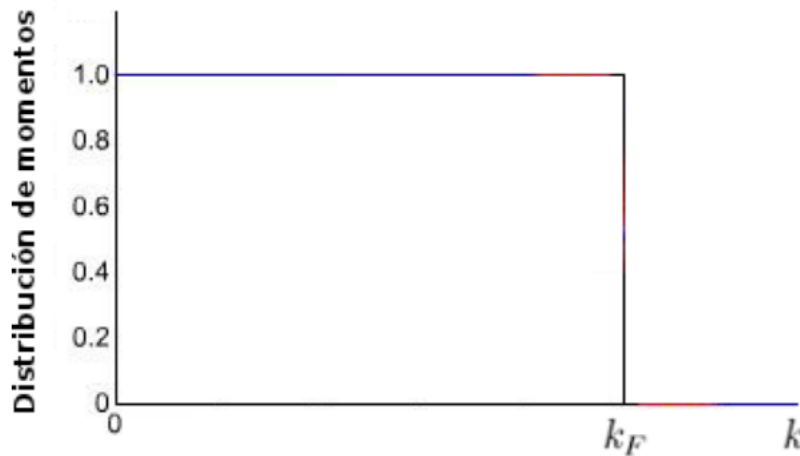


Figura 4.3. Distribución de momentos para nucleones ligados al núcleo. Imagen tomada de [10].

donde k_F es un parámetro del modelo que difiere para distintos núcleos, ya que presentan distintas densidades.

El modelo de Gas de Fermi es relativamente simple y permite un desarrollo completamente analítico de la formulación relativista del proceso de dispersión llegando hasta las expresiones de la sección eficaz, pero no tiene en cuenta otros efectos como la energía de ligadura y el efecto conocido como *Pauli Blocking*, que surge del principio de exclusión de Pauli, los cuales pueden incluirse de manera aproximada en el modelo como se ve en [13,15].

4.3 Estudio de la cinemática del proceso. Sección eficaz

Para el estudio de la cinemática, primero se fija el sistema de referencia en el que se va a trabajar, que es el mencionado ya antes. En este sistema, el núcleo blanco se encuentra en reposo, mientras que el nucleón tiene un momento inicial \vec{P}_i , con $|\vec{P}_i| < k_F$.

En el estado final el nucleón tendrá que cumplir por conservación de energía-momento $P_f = P_i + Q$ y por el Modelo de Gas de Fermi $|\vec{P}_f| = |\vec{P}_i + \vec{q}| > k_F$.

En el proceso de dispersión el momento inicial y final del electrón y el momento transferido están en un mismo plano, mientras que el momento final del nucleón puede no estarlo por ese momento inicial que tiene dentro del núcleo. Esto se puede visualizar con la figura 4.4.

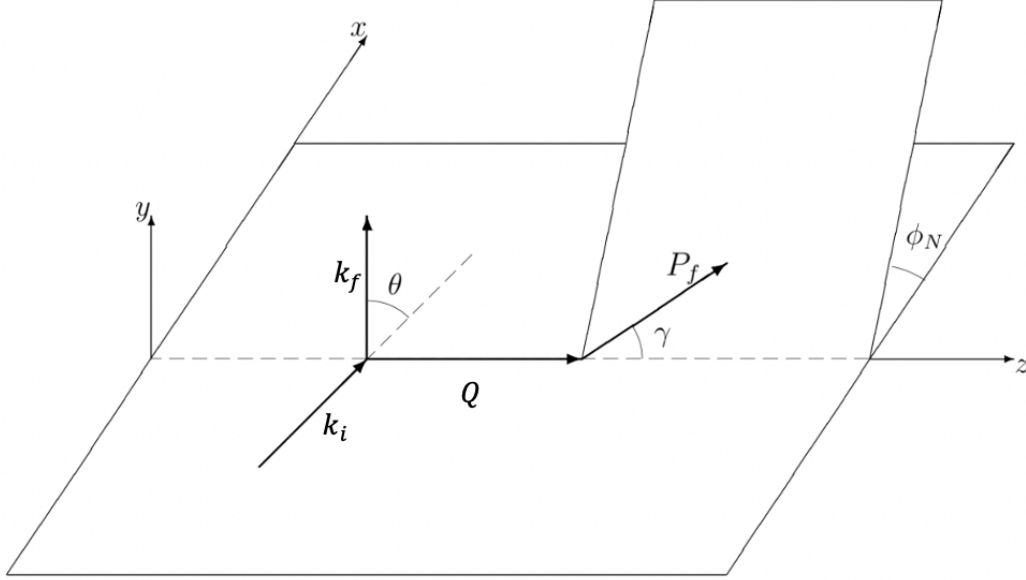


Figura 4.4. Representación ejemplo de los planos de dispersión del proceso. Imagen adaptada de [10].

Haciendo uso de la conservación de energía-momento e integrando sobre la distribución de momentos del protón dentro del núcleo del Modelo del Gas de Fermi se llega a la siguiente expresión para el tensor nuclear:

$$W^{\mu\nu} = \frac{3NM^2}{4\pi k_f^3} \int \frac{d^3 P_i}{E(\vec{P}_i)E(\vec{P}_i + \vec{q})} \Theta(k_f - |\vec{P}_i|) \Theta(|\vec{P}_i + \vec{q}| - k_F) \times \delta(\omega - [E(\vec{P}_i + \vec{q}) - E(\vec{P}_i)]) H^{\mu\nu}(P_i + Q, P_i). \quad (4.1)$$

En esta expresión, vuelve a aparecer la función escalón de Heaviside Θ , y $H^{\mu\nu}(P_i + Q, P_i)$ es el tensor hadrónico que se definió en el caso electrón-protón (ecuación 2.61) al cual se le ha aplicado una transformación de Lorentz para tenerlo en el sistema de referencia en el que el protón tiene un momento inicial \vec{P}_i . \mathcal{N} está asociado al número de nucleones del núcleo y M es la masa del nucleón.

En este caso, el observable de interés es la sección eficaz diferencial doble con respecto a $d\Omega d\varepsilon_f$. En el caso de dispersión electrón-protón esta sección eficaz es una delta de Dirac y por eso no se ha explorado en el análisis del capítulo anterior, ya que si se escogía un ángulo de dispersión solo había una energía final posible. En este caso, por el grado extra de libertad que añade el Modelo de Gas de Fermi en el momento inicial del protón, sí que tiene interés la sección eficaz doble.

Desarrollando la expresión de $H^{\mu\nu}(P_i + Q, P_i)$ e integrando para luego hacer la contracción con el tensor leptónico, y después integrando sobre el momento del núcleo hijo \vec{P}_{Z-1} ya que este no se mide (o equivalentemente, sobre el momento inicial del protón \vec{P}_i), queda

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon_f} = \sigma_{Mott} \left[\left(\frac{Q^2}{q^2} \right)^2 R_L(q, \omega) + \left[\frac{1}{2} \left| \frac{Q^2}{q^2} \right| + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] R_T(q, \omega) \right], \quad (4.2)$$

donde σ_{Mott} es la sección eficaz de Mott que estaba presente en la expresión electrón-protón, que es

$$\sigma_{Mott} = \left[\frac{\alpha \cos \frac{\theta}{2}}{2\varepsilon_i \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2. \quad (4.3)$$

En este caso, también se incluye la posibilidad de interacción con un neutrón, no solo con un protón. El neutrón se modela como un protón con factor de forma eléctrico prácticamente cero a energías bajas y ligeramente creciente a medida que se llega a energías altas.

En la expresión de $R_{L,T}$, que son las funciones respuesta que quedan tras el desarrollo, se usan las funciones respuesta del caso electrón-protón que se pueden observar en la expresión 2.96, y que están asociadas las componentes 00 de la contracción $L_{\mu\nu}H_{\mu\nu}$ para R_L , y 11 y 22 para R_T (ver [20-22] para más detalles).

$$W_1(\tau) = \tau G_M^2(\tau), \quad (4.4)$$

$$W_2(\tau) = \frac{1}{1 + \tau} [G_E^2(\tau) + \tau G_M^2(\tau)]. \quad (4.5)$$

Para expresar de manera aún más compacta las funciones $R_{L,T}$, se definen las siguientes variables adimensionales

$$\kappa \equiv \frac{|\vec{Q}|}{2M}, \quad (4.6)$$

$$\lambda \equiv \frac{\omega}{2M}, \quad (4.7)$$

$$\eta \equiv \frac{|\vec{P}_i|}{M}, \quad (4.8)$$

$$\eta_F \equiv \frac{k_F}{M}, \quad (4.9)$$

$$\epsilon_F = \sqrt{1 + \eta_F^2}, \quad (4.10)$$

$$\tau = \kappa^2 - \lambda^2 \quad (4.11)$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_F}} \frac{\lambda - \tau}{\sqrt{(1 + \lambda)\tau + \kappa\sqrt{\tau(1 + \tau)}}}. \quad (4.12)$$

Entonces las funciones respuesta adquieren la forma relativamente simple de

$$R_L = \frac{3\mathcal{N}}{4M\kappa\eta_F^3} \frac{\kappa^2}{\tau} [W_1(\tau) + W_2(\tau)\Delta], \quad (4.13)$$

$$R_T = \frac{3\mathcal{N}}{4M\kappa\eta_F^3} [2W_1(\tau) + W_2(\tau)\Delta], \quad (4.14)$$

donde se ha definido la función

$$\Delta \equiv \frac{\tau}{\kappa^2} \left[-\frac{(\lambda - \tau)^2}{\tau} + \epsilon_F \left[(1 + \lambda)(1 + \psi^2) + \frac{\epsilon_F}{3} (1 + \psi^2 + \psi^4) \right] \right]. \quad (4.15)$$

que es un término de segundo orden que no aparece en el caso electrón-protón y que está asociado al desarrollo del cálculo en el marco del RFG y las integrales previas.

Como se puede observar, la expresión analítica en este caso es notablemente más extensa que en el primero, por lo que se hace uso de un código sencillo para poder evaluarla más cómodamente en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Análisis y discusión de resultados de la sección eficaz cuasielástica

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos para secciones eficaces diferenciales electrón-núcleo en el régimen cuasielástico y haciendo uso del modelo de Gas de Fermi Relativista. Se discuten los resultados considerando diversas situaciones cinemáticas y teniendo en cuenta la contribución de tanto protones como neutrones.

5.1 Primeras observaciones y comparación con el caso e-p

Para empezar, es apropiado comparar el caso e-núcleo y el e-p. Recordando que la expresión de la sección eficaz doble para el caso e-p era (2.97)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\varepsilon_f} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[\left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \right) + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M} \right), \quad (5.1)$$

se pueden representar ambas en una situación ejemplo, para un valor de \vec{Q} fijo, y usando la parametrización de Galster para los factores de forma.

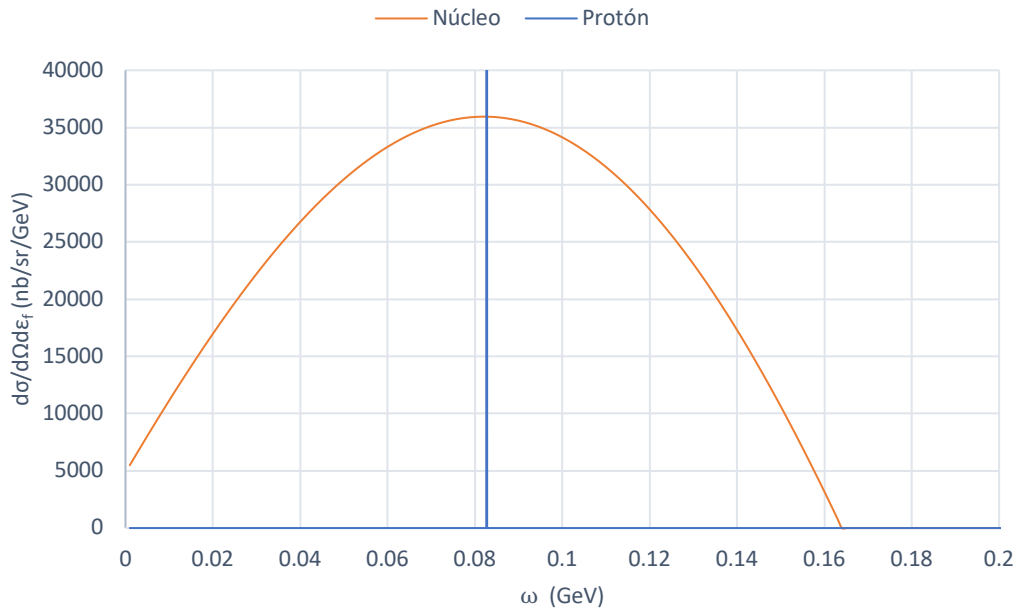


Figura 5.1. Sección eficaz doble frente a la energía intercambiada de la dispersión e-p y e-núcleo con un núcleo de ^{12}C como ejemplo. $\varepsilon_i = 0.68$ GeV, $\theta = 36^\circ$. El valor de literatura de k_f para el ^{12}C es 0.228 GeV ([15]). Para las unidades de área de la sección eficaz doble se usan nanobarns ($1\text{nb} = 10^{-33}\text{cm}^2$), ya que es lo que se usa en los datos experimentales que se usan más adelante.

Como se puede ver, la delta de Dirac del caso elástico coincide con lo que se conoce como pico cuasielástico, es decir, el máximo de la contribución QE

Al igual que en el caso e-p, que se representa como una delta en la figura 5.1, a medida que se aumenta la energía inicial o el ángulo de dispersión, la distribución del caso e-núcleo se mueve a la derecha, ya que, en promedio, aumenta la energía intercambiada. En cambio, la altura de esta disminuye a mayores energías y ángulos de dispersión ya que la probabilidad de interacción de electrones incidentes con alto momento es más baja.

5.2 Desajuste con datos experimentales. *Shift* de energía.

Si se representa la curva e-núcleo teórica de la figura 5.2 junto a datos experimentales tomados de la base de datos de [16]; se obtiene:

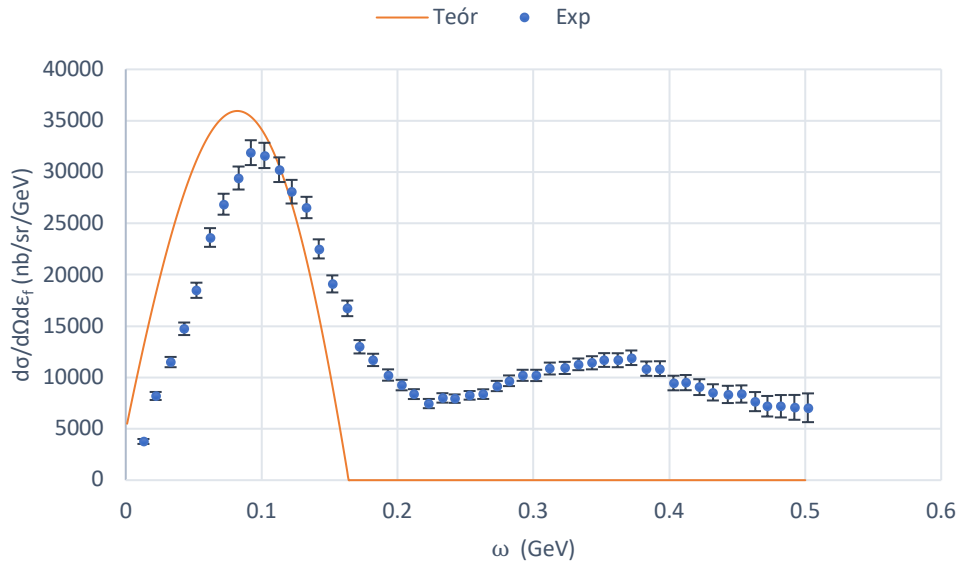


Figura 5.2. Primera comparación con datos experimentales. De nuevo se usa un núcleo de ^{12}C con $\varepsilon_i = 0.68 \text{ GeV}$, $\theta = 36^\circ$, parametrización de Galster.

En primer lugar, es importante señalar el hecho de que la gráfica llegue hasta cero en ω estrictamente se debe a que no se están considerando efectos de *Pauli Blocking* ni de ligaduras de los nucleones al núcleo, ya que en ese caso si no se transfiere energía suficiente para arrancar un nucleón no habría proceso QE.

La figura muestra que el centro del pico cuasielástico de la predicción teórica está desplazado con respecto al de los datos experimentales, y este desplazamiento se observa similar en todos los casos con el mismo núcleo. El segundo pico que se observa más a la derecha es causado por otros procesos posibles no incorporados en la descripción usada, como se explicaba en la figura 4.1. En particular, se debe fundamentalmente al pico asociado a resonancias nucleónicas donde la predominante es la resonancia Δ ([2]).

Se propone que este desajuste es principalmente causa de la energía de ligadura del nucleón en el núcleo, por lo que para introducirlo en el modelo se resta E_{shift} a la energía intercambiada $\omega' = \omega - E_{shift}$. Este nuevo parámetro se ajusta para cada núcleo independientemente. Para el ^{12}C el valor por defecto en la literatura es $E_{shift} = 0.020 \text{ GeV}$ ([15]), que resulta:

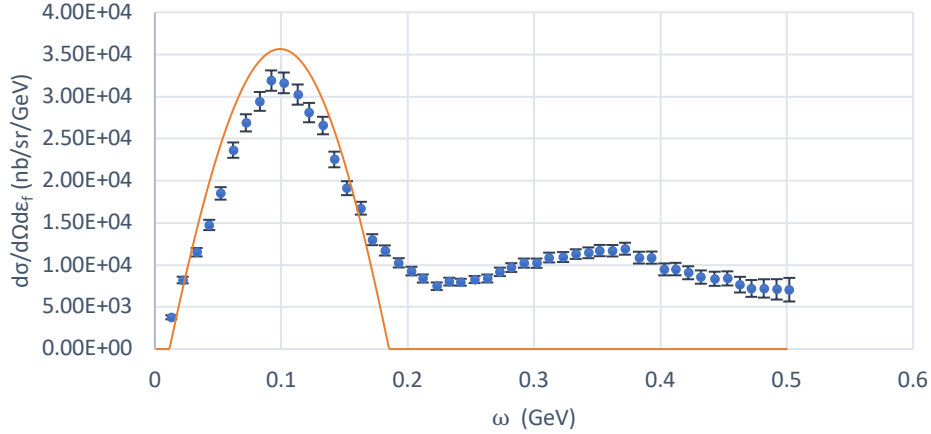


Figura 5.3. Ajuste de la figura 5.2 con el nuevo parámetro $E_{shift} = 0.020$ GeV.

Ahora ya no se observa sección eficaz en $\omega = 0$ a diferencia del caso anterior. Además, el centro de ambos picos cuasielásticos, experimental y teórico, coinciden, pero la curva sigue algo desajustada, hay una sobreestimación. Esto ocurre ya que el modelo RFG proporciona una descripción excesivamente simple de la dinámica nuclear implicada en el proceso. La introducción de una descripción considerando las distintas capas del núcleo, las interacciones entre los nucleones en el estado inicial, y las posibles interacciones finales de las partículas emitidas con el núcleo residual, modificarían la forma de la curva reduciéndola y haciéndola más asimétrica, lo que ajustaría mejor con los datos.

5.3 Efecto de los parámetros del modelo: *shift* de energía y momento de Fermi

Ahora que se tiene el modelo final y completo, se puede estudiar cómo afectan los parámetros de ajuste a la curva resultante. Los dos parámetros de ajuste son E_{shift} y k_F .

El efecto de E_{shift} ya se puede ver comparando las figuras 5.2 y 5.3, pero para una comparación más explícita:

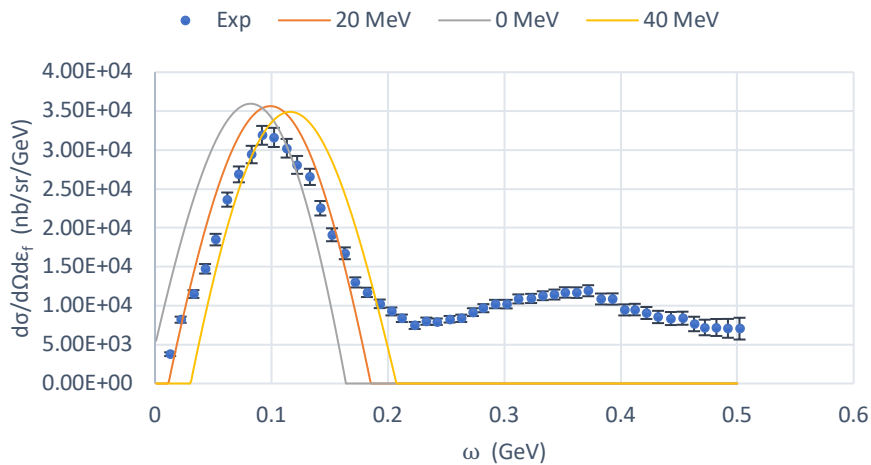


Figura 5.4. Comparación de varias curvas teóricas con distintos valores de E_{shift} . En la leyenda aparecen los valores usados para cada curva.

Como ya se ha explicado antes, el efecto más notable de este parámetro es el movimiento del centro de la curva teórica, y se tiene que ajustar para cada núcleo por sus distintas energías de ligadura.

Para el segundo parámetro de ajuste k_F , de nuevo se muestra un ejemplo:

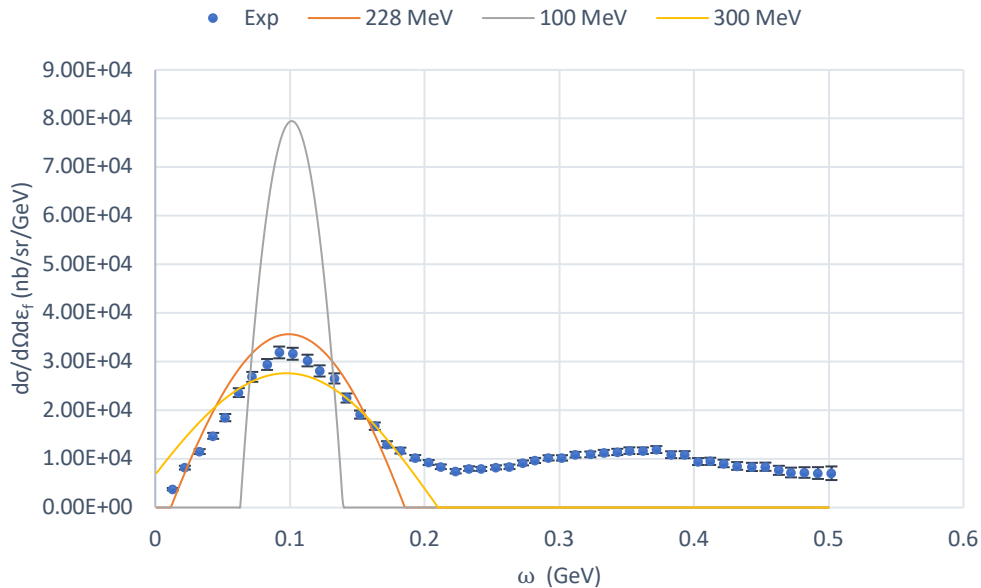


Figura 5.5. Comparación de varias curvas teóricas con distintos valores de k_F . En la leyenda aparecen los valores usados para cada curva.

En este caso, el valor de k_F afecta a la distribución de energía en torno al valor central. A valores más altos se aplanan la distribución, mientras que cuando el valor tiende a cero se tiende a la delta de Dirac. Esto es consistente con la definición de k_F , asociada a la distribución de partículas ligadas en el núcleo, y se ve que al reducir k_F nos aproximamos al caso de una delta de Dirac como en el caso de un nucleón libre.

Con esto en mente, se podría elegir valor distinto para k_F del de literatura para un ajuste mejor en la figura 5.2, pero entonces al añadir los efectos de las otras interacciones, que la literatura sí que tiene en cuenta, el ajuste sería peor.

Adicionalmente, también se pueden comparar los modelos de Galster y de Kelly para el caso electrón-núcleo. De la misma forma que se comparan en la figura 3.7, con el cociente entre ambos queda:

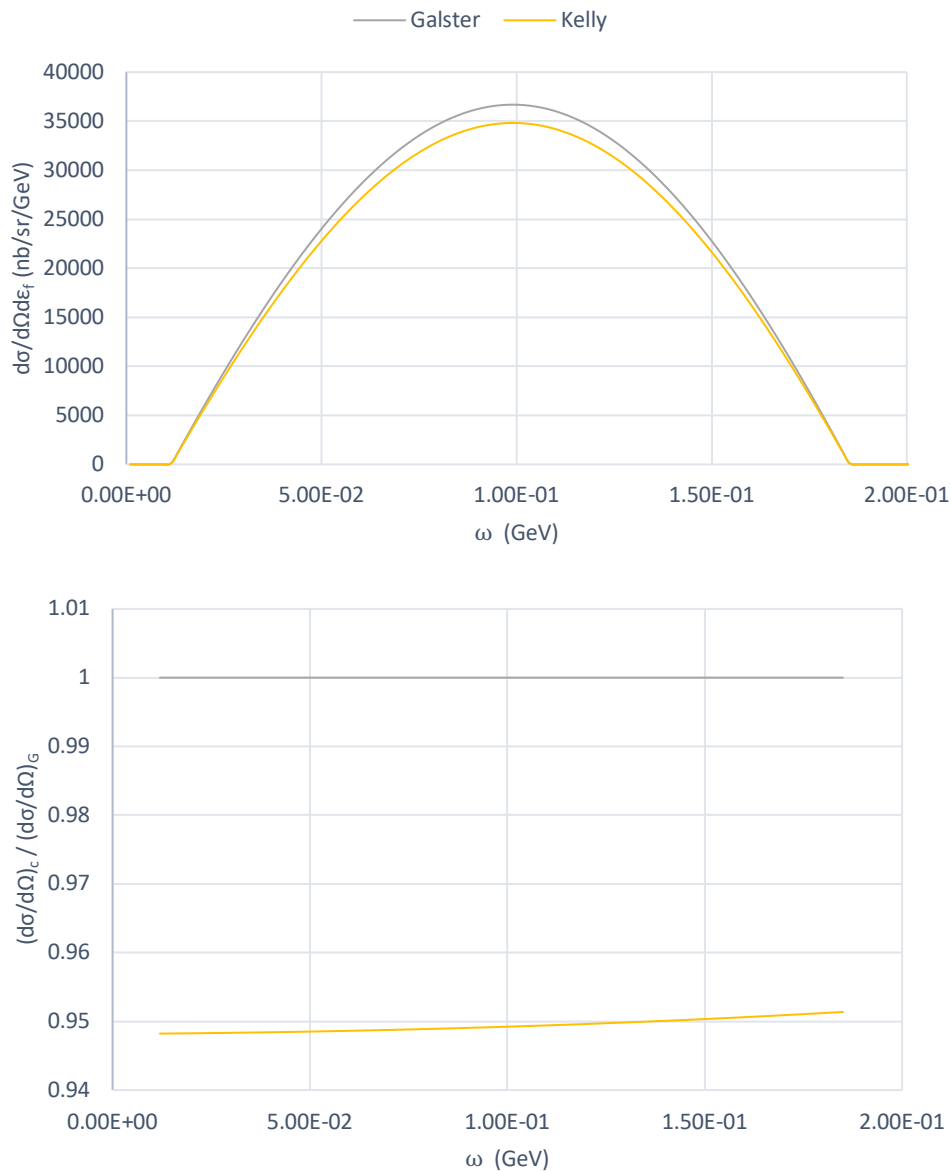


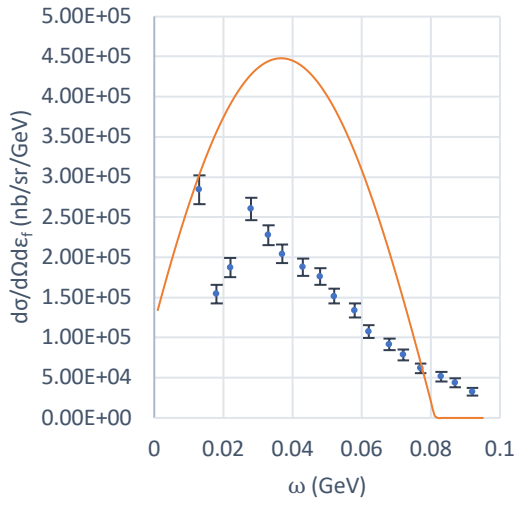
Figura 5.6. Comparación y cociente entre las secciones eficaces con las parametrizaciones de Kelly y Galster con un núcleo de ^{12}C con $\varepsilon_i = 0.68 \text{ GeV}$, $\theta = 36^\circ$.

La diferencia entre las dos parametrizaciones es de alrededor de un 5% a lo largo del intervalo de energía intercambiada considerado, siendo tan solo ligeramente más grande a bajas energías, lo cual es un resultado similar al observado en el caso e-p.

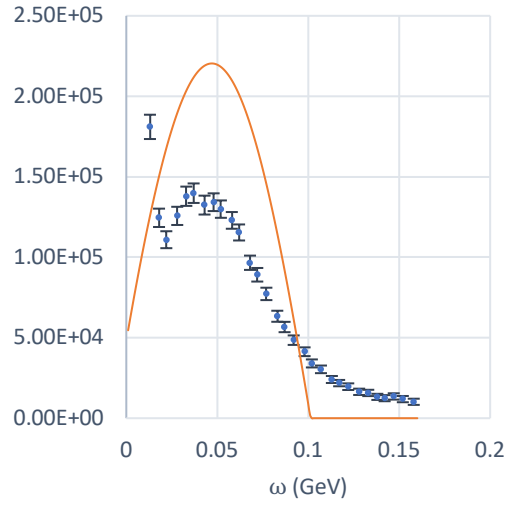
5.4 Comparación con distintos casos experimentales. Efecto de otros regímenes de interacción

Para ahora profundizar en la comparación con datos experimentales, se representan más ejemplos para distintos casos de ángulo de dispersión, energía del electrón incidente y núcleo blanco.

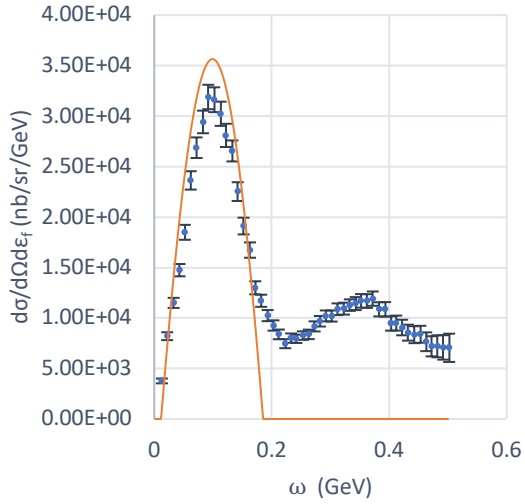
a) ^{12}C , $\theta=36^\circ$, $\varepsilon_i=320$ MeV



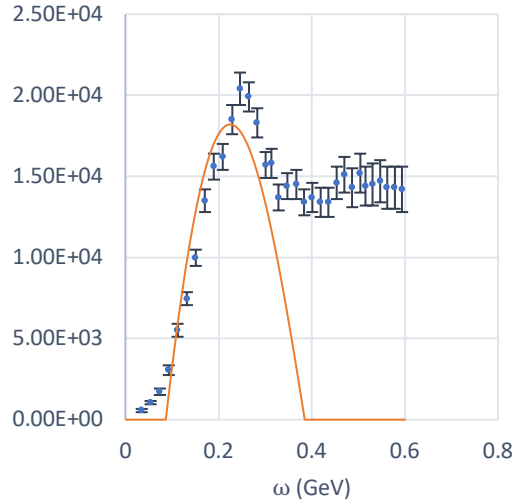
b) ^{12}C , $\theta=36^\circ$, $\varepsilon_i=400$ MeV



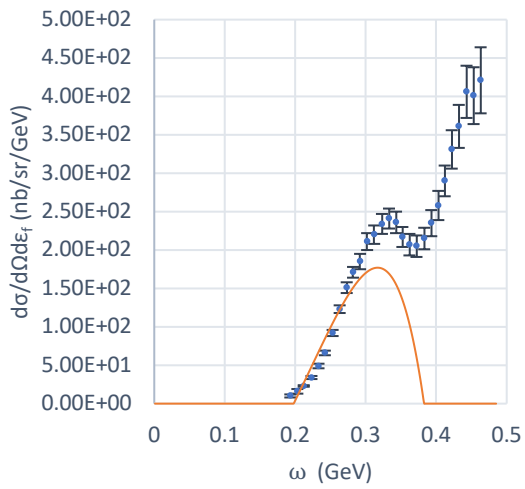
c) ^{12}C , $\theta=36^\circ$, $\varepsilon_i=680$ MeV



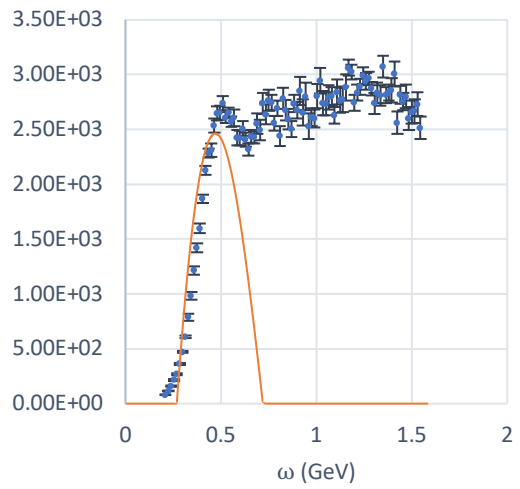
d) ^{12}C , $\theta=18^\circ$, $\varepsilon_i=2130$ MeV



e) ^{12}C , $\theta=145^\circ$, $\varepsilon_i=560$ MeV



f) ^{12}C , $\theta=16^\circ$, $\varepsilon_i=3595$ MeV



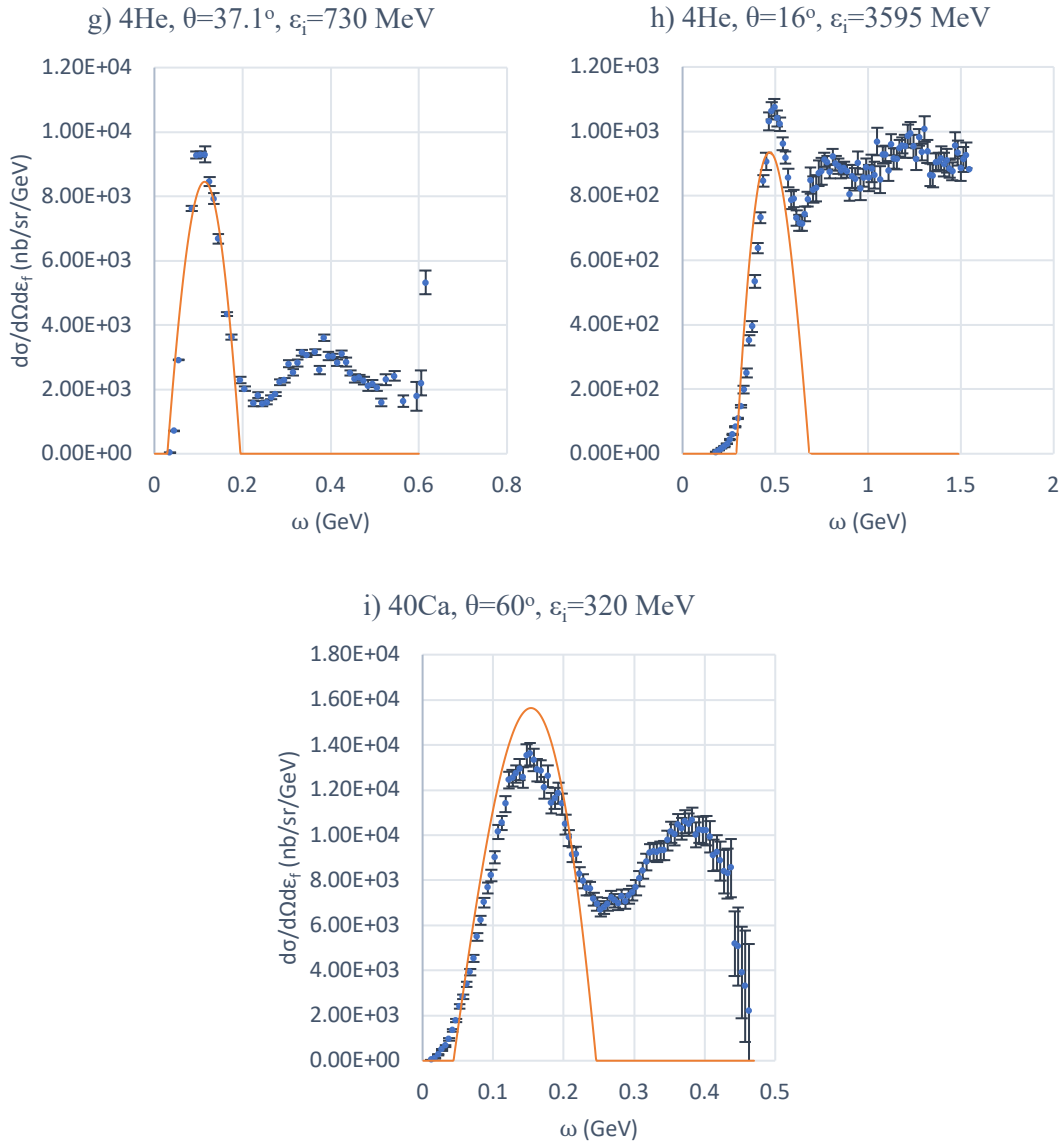


Figura 5.7. Ejemplos de distintas situaciones de energía inicial del electrón, ángulo de dispersión del electrón y especie del núcleo blanco. Valores de E_{shift} y k_F tomados de la referencia [15]. Parametrización de Galster.

Empezando por el efecto de la energía del electrón incidente, se comparan las gráficas a), b), c), d) y f). A bajas energías se produce una sobreestimación importante, esto se explica por el efecto del *Pauli Blocking* y por la ausencia de efectos nucleares como el efecto del potencial nuclear sobre las partículas emitidas, el cual es más notable cuando las energías son más pequeñas. Además, se empieza a ver un pico a la izquierda de la gráfica, que puede ser por resonancias gigantes (excitaciones nucleares), que son más probables a energías bajas que no corresponden al régimen QE.

A energías altas, otros regímenes de interacción, como las resonancias Δ (excitación del nucleón) o los efectos multinucleónicos, se vuelven más prominentes, y su efecto se solapa con la dispersión cuasielástica, por eso la sección eficaz aumenta notablemente a la derecha del pico cuasielástico. Es tan solo las energías intermedias, donde la interacción cuasielástica es dominante, cuando se ajusta bien la curva teórica.

El efecto de un ángulo de dispersión más grande es similar al de energía alta, ya que es consecuencia de una energía intercambiada más alta. En la gráfica e), se puede reconocer de nuevo el solape del pico de la resonancia Δ con el cuasielástico.

Finalmente, si se cambia el núcleo blanco, como es el caso en g), h) e i) en comparación con las otras gráficas, en principio parece que el modelo se comporta igual. Lo que es interesante en este caso es ver cómo la comparación entre los valores de E_{shift} y de k_F de los distintos núcleos, y las energías de ligadura que en principio los justifican.

	${}^4\text{He}$ (1s)	${}^{12}\text{C}$ (1s)	${}^{12}\text{C}$ (1p)	${}^{12}\text{C}$ (media ponderada)
Energía de ligadura (MeV)	19.81	40.50	14.46	23.14

${}^{40}\text{Ca}$ (1d _{3/2})	${}^{40}\text{Ca}$ (2s _{1/2})	${}^{40}\text{Ca}$ (1d _{5/2})	${}^{40}\text{Ca}$ (1p _{1/2})	${}^{40}\text{Ca}$ (1p _{3/2})	${}^{40}\text{Ca}$ (1s _{1/2})	${}^{40}\text{Ca}$ (media ponderada)
8.5	11	15.7	29.8	34.7	53.6	22.79

Tabla 5.1. Valores de energía de ligadura de distintos estados del protón en los núcleos ejemplo y media ponderada. Datos para el He tomados de [17], de [18] para el C y de [19] para el Ca.

	${}^4\text{He}$	${}^{12}\text{C}$	${}^{40}\text{Ca}$
E_{shift} (MeV)	15	20	28

Tabla 5.2. Valores de E_{shift} para los distintos núcleos ejemplo. Datos tomados de [15].

	${}^4\text{He}$	${}^{12}\text{C}$	${}^{40}\text{Ca}$
k_F (MeV)	200	228	241

Tabla 5.3. Valores k_F para los distintos núcleos ejemplo. Datos tomados de [15].

Si se comparan tan solo los valores de las energías de ligadura promedias, las diferencias entre los distintos núcleos no justifican el creciente valor de los parámetros de ajuste. Esto puede ser porque el modelo no tiene en cuenta el potencial nuclear, que será más fuerte en núcleos más pesados y afectará a las partículas que salen dispersadas en el estado final. Por lo tanto, la interpretación de los parámetros de ajuste es sutil, por la opuesta simpleza del modelo del Gas de Fermi Relativista.

En cualquier caso, se observa que la energía de ligadura crece conforme nos vamos a núcleos más pesados, lo que es consistente. También hay que considerar que en núcleos con muchos nucleones como el ${}^{40}\text{Ca}$, será más probable arrancar nucleones más externos con lo que la media de ese E_{shift} no tiene por qué ser la media ponderada ya que será más probable arrancar nucleones de capas más externas.

De forma similar, el valor de k_F aumenta para núcleos más pesados, lo que es consistente con la definición de k_F como el momento necesario para escapar del núcleo. Los núcleos más pesados crearán campos más fuertes y difíciles de escapar.

Finalizado el análisis del caso electrón-núcleo, se concluye el cuerpo principal del proyecto que constituyen las partes II y III.

Parte IV

Resumen y conclusiones

En esta parte se discuten las conclusiones más importantes del trabajo realizado, indicando aquellos aspectos más llamativos o interesantes. El TFG forma parte de la titulación del Grado, y su objetivo es afianzar conocimientos previos, así como aprender nuevas técnicas, métodos y desarrollos que permiten adquirir una visión más amplia de un campo de la Física y una mayor solidez en la formación recibida. En este capítulo final se realiza un esfuerzo para mostrar estos y otros aspectos esenciales en la elaboración de este trabajo.

Capítulo 6

Resumen y conclusiones finales

El objetivo principal del trabajo ha sido desarrollar de manera explícita el estudio de la dispersión elástica electrón-protón a través de la electrodinámica cuántica, con el propósito de servir como introducción y base del cálculo de secciones eficaces en mecánica cuántica.

La primera parte sirve como introducción para poner en contexto el trabajo. Se explica la motivación, aplicación, interés y situación experimental del tema estudiado, y se introducen los conceptos clave del trabajo.

En la segunda parte, se han plasmado la mayoría de los pasos del cálculo analítico que son necesarios para el estudio de la interacción e-p, y el razonamiento detrás de estos. Después, tras llegar a la expresión final de la sección eficaz buscada, se han analizado las consecuencias de las dependencias con las variables dinámicas que resultan.

Además, en el cálculo se introduce la estructura interna del protón a través del uso de factores de forma, los cuales se modelan con distintas parametrizaciones y se comparan con datos experimentales.

En la tercera parte se da un paso más allá y se introduce la interacción cuasielástica electrón-núcleo, como ejemplo de un cálculo más complejo de una interacción subatómica, pero de manera menos explícita. Para introducir la estructura del núcleo en el cálculo, se usa el Modelo de Gas de Fermi Relativista.

Se elige este caso ya que es fácil ver el paralelismo con la interacción elástica electrón-protón, y se compara el resultado final de ambas. En este caso, la comparación con datos experimentales se hace con la expresión de la sección eficaz doble.

En cuanto a la comparación con datos experimentales, en el caso de los factores de forma se consiguen ajustes mucho mejores que si no se tiene en cuenta la estructura interna del protón. Si se observa de manera más detallada, se aprecia que los datos experimentales se ajustan mejor a la segunda parametrización introducida, aunque hay otras parametrizaciones más complejas y sofisticadas que no se han explorado en este trabajo.

Los datos experimentales de los factores de forma tienen una dispersión apreciable, causada por la toma de datos de varias fuentes distintas, algunas de las cuales tienen una incertidumbre muy alta, que justifica en parte por qué hay puntos que se desvían bastante de la predicción teórica.

En el caso de la sección eficaz doble de la colisión cuasielástica electrón-núcleo, gracias a la comparación con datos experimentales, se han podido ver las limitaciones del modelo usado. En el Modelo de Gas de Fermi con la Aproximación de Impulso solo se tiene en cuenta la contribución a la sección eficaz de la dispersión cuasielástica, y esta es solo uno de los regímenes de interacción posible en la interacción electrón-núcleo. En energías del electrón incidente donde la interacción cuasielástica es la dominante se ajusta bien el modelo, pero a energías más altas o bajas se aleja de los datos experimentales porque entran en juego los efectos de los otros regímenes.

Así pues, este proyecto ha resultado una introducción satisfactoria al formalismo del cálculo de secciones eficaces en el marco de la mecánica cuántica, así como una base para el desarrollo de otras interacciones distintas a la estudiada, como podrían ser las interacciones débiles con neutrinos. Además, se ha trabajado con un modelo nuclear, que supone el siguiente paso en el estudio de sistemas más complejos.

El desarrollo de este TFG ha permitido afianzar muchos de los conceptos adquiridos en asignaturas previas: Mecánica Cuántica, Mecánica Cuántica Relativista, Física de Partículas, aplicando dichos conceptos al cálculo desarrollado de varios procesos de dispersión de electrones por núcleos y hadrones. Procesos que han sido ampliamente usados por la comunidad científica durante años como el método más preciso para adquirir información sobre la estructura y dinámica interna tanto de hadrones como núcleos.

Parte V

Apéndices

Por la gran cantidad de desarrollo explícito en el trabajo completo, se han colocado los desarrollos de cálculos más largos como apéndices para facilitar la lectura del documento.

Apéndice A

$$\begin{aligned}
 \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} |[(\bar{u}_f \gamma_\mu u_i)[\bar{U}_f \hat{\Gamma}^\mu U_i]|^2 &= \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} [(\bar{u}_f \gamma_\mu u_i)(\bar{U}_f \hat{\Gamma}^\mu U_i)]^\dagger [(\bar{u}_f \gamma_\nu u_i)(\bar{U}_f \hat{\Gamma}^\nu U_i)] = \\
 &= \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} (\bar{u}_i \gamma_\mu u_f \bar{U}_i \hat{\Gamma}^\mu U_f) (\bar{u}_f \gamma_\nu u_i \bar{U}_f \hat{\Gamma}^\nu U_i) = \\
 &= \sum_{s_i, S_i} \bar{u}_i \gamma_\mu \left(\sum_{s_f} u_f \bar{u}_f \right) \gamma_\nu u_i \bar{U}_i \hat{\Gamma}^\mu \left(\sum_{s_f} \bar{U}_f U_f \right) \hat{\Gamma}^\nu U_i = \\
 &= \sum_{s_i, S_i} \left[\bar{u}_i \gamma_\mu \frac{\not{k}_f + m}{2m} \gamma_\nu u_i \right] \left[\bar{U}_i \hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_f + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu U_i \right] = \\
 &= \left[\sum_{s_i} (\bar{u}_i u_i)_{\alpha\beta} \left(\gamma_\mu \frac{\not{k}_f + m}{2m} \gamma_\nu \right)_{\beta\alpha} \right] \left[\sum_{S_i} (\bar{U}_i U_i)_{\alpha\beta} \left(\hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_f + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right)_{\beta\alpha} \right] = \\
 &= Tr \left[\frac{\not{k}_f + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{k}_i + m}{2m} \gamma_\nu \right] Tr \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right] = 2L_{\mu\nu} \cdot 2H^{\mu\nu}. \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

Apéndice B

- La traza de un número impar de matrices γ es nula.

$$- Tr[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu}. \quad (B.1)$$

$$- Tr[\not{A} \gamma_\mu \not{B} \gamma_\nu] = 4(A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu - g_{\mu\nu} A \cdot B). \quad (B.2)$$

Apéndice C

Para el caso del tensor hadrónico, por linealidad de la traza

$$\begin{aligned}
 H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} Tr \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right] = \frac{1}{2} Tr \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right] = \\
 &= \frac{1}{2} Tr \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \left((F_1 + F_2) \gamma^\mu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\mu \right) \frac{\not{P}_i + M}{2M} \left((F_1 + F_2) \gamma^\nu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\nu \right) \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8M^2} \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M) \left((F_1 + F_2) \gamma^\mu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\mu \right) (\not{P}_i + M) \left((F_1 + F_2) \gamma^\nu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\nu \right) \right]. \quad (\text{C.1})$$

La mitad de los 16 términos que surgen del producto se anulan por tener un número impar de matrices γ , quedando entonces

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M) \left((F_1 + F_2) \gamma^\mu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\mu \right) (\not{P}_i + M) \left((F_1 + F_2) \gamma^\nu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\nu \right) \right] = \\ & = (F_1 + F_2)^2 \text{Tr} [\not{P}_i \gamma^\mu \not{P}_f \gamma^\nu] + \left(\frac{F_2}{2M} \right)^2 (P_f + P_i)^\mu (P_f + P_i)^\nu \text{Tr} [\not{P}_i \not{P}_f] \\ & - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\mu M (F_1 + F_2) \text{Tr} [\not{P}_i \gamma^\nu] - (F_1 + F_2) M \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\nu \text{Tr} [\not{P}_i \gamma^\mu] \\ & - M (F_1 + F_2) \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\nu \text{Tr} [\gamma^\mu \not{P}_f] + M (F_1 + F_2) M (F_1 + F_2) \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \\ & - M \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)^\mu \text{Tr} [\not{P}_f \gamma^\nu] + M^2 \left(\frac{F_2}{2M} \right)^2 (P_f + P_i)^\mu (P_f + P_i)^\nu \text{Tr} [\mathbf{1}] = , \end{aligned}$$

desarrollando las trazas de cada término,

$$\begin{aligned} & = 4(F_1 + F_2)^2 [P_i^\mu P_f^\nu + P_i^\nu P_f^\mu - g^{\mu\nu} P_f \cdot P_i] + F_2^2 (P_f + P_i)^\mu 4P_i \cdot P_f \\ & - \frac{F_2}{2} (F_1 + F_2) (P_f + P_i)^\mu 4P_i^\nu - \frac{F_2}{2} (F_1 + F_2) (P_i + P_f)^\nu 4P_i^\mu \\ & - \frac{F_2}{2} (F_1 + F_2) (P_f + P_i)^\nu 4P_f^\mu + 4M^2 (F_1 + F_2)^2 g^{\mu\nu} \\ & - \frac{F_2}{2} (F_1 + F_2) (P_f + P_i)^\mu 4P_f^\nu + F_2^2 4(P_f + P_i)^\mu (P_f + P_i)^\nu = , \end{aligned}$$

agrupando,

$$\begin{aligned} & = 4(F_1 + F_2)^2 [P_i^\mu P_f^\nu + P_i^\nu P_f^\mu - g^{\mu\nu} (P_f \cdot P_i - M^2)] \\ & + \frac{F_2^2}{M^2} [(P_f + P_i)^\mu (P_f + P_i)^\nu] (P_i \cdot P_f) - 2F_2 (F_1 + F_2) (P_f + P_i)^\mu (P_f + P_i)^\nu \\ & - 2F_2 (F_1 + F_2) (P_f + P_i)^\mu (P_f + P_i)^\nu + F_2^2 (P_f + P_i)^\mu (P_f + P_i)^\nu = \\ & = 4(F_1 + F_2)^2 [P_i^\mu P_f^\nu + P_i^\nu P_f^\mu - g^{\mu\nu} (P_f \cdot P_i - M^2)] \\ & + [F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2 (F_1 + F_2)] (P_i + P_f)^\mu (P_i + P_f)^\nu . \quad (\text{C.1}) \end{aligned}$$

Queda entonces

$$\begin{aligned} & H^{\mu\nu} = \frac{1}{2M^2} (F_1 + F_2)^2 [P_i^\mu P_f^\nu + P_f^\mu P_i^\nu - (P_i \cdot P_f - M^2) g^{\mu\nu}] \\ & + \frac{1}{8M^2} \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2 (F_1 + F_2) \right] (P_i + P_f)^\mu (P_i + P_f)^\nu \equiv H_{(1)}^{\mu\nu} + H_{(2)}^{\mu\nu} . \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

Apéndice D

$$L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = L_{\mu\nu}H_{(1)}^{\mu\nu} + L_{\mu\nu}H_{(2)}^{\mu\nu}. \quad (\text{D.1})$$

Empezando entonces por $L_{\mu\nu}H_{(1)}^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}H_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{4m^2M^2} [k_\mu^i k_\nu^f + k_\mu^f k_\nu^i - g_{\mu\nu}(k_i \cdot k_f - m^2)] \\ &\quad \times [P_i^\mu P_f^\nu + P_f^\mu P_i^\nu - (P_i \cdot P_f - M^2)g^{\mu\nu}] = \\ &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{4m^2M^2} [(k_f \cdot P_f)(k_i \cdot P_i) + (k_f \cdot P_i)(k_i \cdot P_f) + (k_f \cdot P_i)(k_i \cdot P_f) \\ &\quad + (k_i \cdot P_i)(k_f \cdot P_f) - 2(k_i \cdot k_f)(P_f \cdot P_i - M^2) - 2(P_i \cdot P_f)(k_f \cdot k_i - m^2) \\ &\quad + 4(k_f \cdot k_i - m^2)(P_f \cdot P_i - M^2)] = \\ &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{4m^2M^2} [2(k_i \cdot P_i)(k_f \cdot P_f) + 2(k_i \cdot P_f)(k_f \cdot P_i) - 4(k_i \cdot k_f)(P_i \cdot P_f) \\ &\quad + 2(k_i \cdot k_f)M^2 + 2(P_i \cdot P_f)m^2 + 4(k_i \cdot k_f)(P_i \cdot P_f) + 4m^2M^2 - 4(k_i \cdot k_f)M^2 \\ &\quad - 4(P_i \cdot P_f)m^2] = \\ &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{2m^2M^2} [(k_i \cdot P_i)(k_f \cdot P_f) + (k_i \cdot P_f)(k_f \cdot P_i) \\ &\quad - (k_i \cdot k_f)M^2 - (P_i \cdot P_f)m^2 + 2m^2M^2]. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}H_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{2m^2M^2} [(k_i \cdot P_i)(k_f \cdot P_f) + (k_i \cdot P_f)(k_f \cdot P_i) \\ &\quad - (k_i \cdot k_f)M^2 - (P_i \cdot P_f)m^2 + 2m^2M^2]. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Y de forma análoga para $L_{\mu\nu}H_{(2)}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}H_{(2)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{16m^2M^2} [k_\mu^i k_\nu^f + k_\mu^f k_\nu^i - g_{\mu\nu}(k_i \cdot k_f - m^2)] \\ &\quad \times (P_i + P_f)^\mu (P_i + P_f)^\nu \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right] = \\ &= \frac{1}{16m^2M^2} [2(P_i + P_f) \cdot k_f (P_i + P_f) \cdot k_i - (P_i + P_f) \cdot (P_i + P_f)(k_i \cdot k_f - m^2)] \\ &\quad \times \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Apéndice E

$$\begin{aligned}
& \frac{Mm}{\sqrt{(k_i P_i)^2 - m^2 M^2}} = \frac{Mm}{\sqrt{(\varepsilon_i E_i - \vec{k}_i \cdot \vec{P}_i)^2 - m^2 M^2}} = \\
& = \frac{Mm}{\sqrt{\varepsilon_i^2 E_i^2 - 2\varepsilon_i E_i \vec{k}_i \cdot \vec{P}_i + (\vec{k}_i \cdot \vec{P}_i)^2 - m^2 M^2}} = \\
& = \frac{Mm}{\sqrt{(m^2 + \vec{k}_i^2)(M^2 + \vec{P}_i^2) - 2\varepsilon_i E_i \vec{k}_i \cdot \vec{P}_i + (\vec{k}_i \cdot \vec{P}_i)^2 - m^2 M^2}} = \\
& = \frac{Mm}{\sqrt{\vec{k}_i^2 E_i^2 + m^2 \vec{P}_i^2 - 2\varepsilon_i E_i \vec{k}_i \cdot \vec{P}_i + (\vec{k}_i \cdot \vec{P}_i)^2}} \approx \\
& \approx \frac{Mm}{\sqrt{\vec{k}_i^2 E_i^2 + m^2 \vec{P}_i^2 - 2\varepsilon_i E_i \vec{k}_i \cdot \vec{P}_i + \vec{k}_i^2 \vec{P}_i^2}} = \\
& = \frac{Mm}{\sqrt{\vec{k}_i^2 E_i^2 + \vec{P}_i^2 \varepsilon_i - 2\varepsilon_i E_i \vec{k}_i \cdot \vec{P}_i}}. \tag{E.1}
\end{aligned}$$

En el penúltimo paso se asume $(\vec{k}_i \cdot \vec{P}_i)^2 = \vec{k}_i^2 \vec{P}_i^2$, que solo se cumple si los vectores velocidad son colineales. Con eso se deduce lo mencionado en la ecuación 2.29.

$$\frac{Mm}{\sqrt{\vec{k}_i E_i + \vec{P}_i \varepsilon_i - 2\vec{k}_i \vec{P}_i E_i \varepsilon_i}} \approx \frac{Mm}{\sqrt{(k_i P_i)^2 - m^2 M^2}}. \tag{E.2}$$

Apéndice F

En el límite de electrones ultrarrelativistas también se simplifica la expresión de $L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$. Empezando por $L_{\mu\nu} H_{(1)}^{\mu\nu}$, Introduciendo primero el sistema de referencia elegido

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} H_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{2m^2 M^2} [(k_i \cdot P_i)(k_f \cdot P_f) + (k_i \cdot P_f)(k_f \cdot P_i) \\
&\quad - (k_i \cdot k_f)M^2 - (P_i \cdot P_f)m^2 + 2m^2 M^2] = \\
&= \frac{(F_1 + F_2)^2}{2m^2 M^2} [\varepsilon_i M k_f \cdot (P_i + k_i - k_f) + \varepsilon_f M k_i \cdot (P_i + k_i - k_f) - M^2 k_i \cdot k_f \\
&\quad - m^2 M(M + \varepsilon_i - \varepsilon_f) + 2m^2 M^2] = \\
&= \frac{(F_1 + F_2)^2}{2m^2 M^2} [\varepsilon_i M(\varepsilon_f M + k_i \cdot k_f - m^2) + \varepsilon_f M(\varepsilon_i M + m^2 - k_i \cdot k_f) - M^2 k_i \cdot k_f \\
&\quad - m^2 M^2 - m^2 M \varepsilon_i + m^2 M \varepsilon_f + 2m^2 M^2] = \\
&= \frac{(F_1 + F_2)^2}{2m^2 M^2} [\varepsilon_i \varepsilon_f M^2 - k_i \cdot k_f (M^2 + M(\varepsilon_f - \varepsilon_i)) + 2m^2 M(\varepsilon_f - \varepsilon_i)]. \tag{F.1}
\end{aligned}$$

Usando ahora:

$$\begin{aligned} Q^2 &= (k_f - k_i)^2 = 2m^2 - 2k_f \cdot k_i = 2(m^2 - \varepsilon_f \varepsilon_i + \vec{k}_f \cdot \vec{k}_i) = \\ &= 2(m^2 - \varepsilon_f \varepsilon_i + |\vec{k}_f| |\vec{k}_i| \cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Se tiene también, con el límite de electrones ultrarrelativistas

$$k_f \cdot k_i = m^2 - \frac{Q^2}{2} \approx -\frac{Q^2}{2}, \quad (\text{F.3})$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} H_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{2m^2 M^2} \left[\varepsilon_i \varepsilon_f M^2 - k_i \cdot k_f (M^2 + M(\varepsilon_f - \varepsilon_i)) + 2m^2 M(\varepsilon_f - \varepsilon_i) \right] \approx \\ &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{m^2} \varepsilon_i \varepsilon_f \left[1 + \frac{Q^2}{4\varepsilon_i \varepsilon_f} \left(1 + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_i}{M} \right) - \frac{m^2}{2\varepsilon_i \varepsilon_f} \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_i}{M} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

E introduciendo ahora el resultado de la ecuación 2.28, pero con el límite de electrones ultrarrelativistas se llega a

$$\begin{aligned} \varepsilon_f (M + \varepsilon_i) - |\vec{k}_i| |\vec{k}_f| \cos \theta &= \varepsilon_i M + m^2 \\ \varepsilon_f \varepsilon_i - |\vec{k}_i| |\vec{k}_f| \cos \theta - m^2 &= (\varepsilon_i - \varepsilon_f) M \\ \varepsilon_f \varepsilon_i (1 - \cos \theta) &\approx (\varepsilon_i - \varepsilon_f) M \\ \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_i}{M} &\approx -\frac{2\varepsilon_f \varepsilon_i}{M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Se simplifica a, despreciando el término con $\frac{m^2}{M^2}$, se simplifica a

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} H_{(1)}^{\mu\nu} &\approx \frac{(F_1 + F_2)^2}{m^2} \varepsilon_i \varepsilon_f \left[1 + \frac{Q^2}{4\varepsilon_i \varepsilon_f} - \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m^2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \approx \\ &\approx \frac{(F_1 + F_2)^2}{m^2} \varepsilon_i \varepsilon_f \left[1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= \frac{(F_1 + F_2)^2}{m^2} \varepsilon_i \varepsilon_f \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Estudiando ahora el otro sumando de la contracción de los tensores leptónico y hadrónico (2.23), al usar el sistema de referencia elegido, parte de la expresión se simplifica como

$$\begin{aligned} &[2(P_i + P_f) \cdot k_f (P_i + P_f) \cdot k_i - (P_i + P_f) \cdot (P_i + P_f)(k_i \cdot k_f - m^2)] = \\ &= [2(2P_i + k_i - k_f) \cdot k_f (2P_i + k_i - k_f) \cdot k_i - (P_i^2 + P_f^2 + 2P_i P_f)(k_i \cdot k_f - m^2)] = \\ &= [2(2P_i + k_i - k_f) \cdot k_f (2P_i + k_i - k_f) \cdot k_i \\ &\quad - (P_i^2 + (P_i + k_i - k_f)^2 + 2P_i(P_i + k_i - k_f))(k_i \cdot k_f - m^2)] \approx \\ &\approx 8M^2 \varepsilon_f \varepsilon_i - 4M^2 (k_i \cdot k_f) \approx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx 8M^2 \varepsilon_f \varepsilon_i - 4M^2 \varepsilon_i \varepsilon_f (1 - \cos \theta) = 4M^2 \varepsilon_i \varepsilon_f (1 + \cos \theta) = \\
&= 8M^2 \varepsilon_i \varepsilon_f \cos^2 \frac{\theta}{2},
\end{aligned} \tag{F.7}$$

donde se ha usado

$$\begin{aligned}
(k_i \cdot k_f - m^2) &\approx k_i \cdot k_f = \varepsilon_i \varepsilon_f - \vec{k}_f \cdot \vec{k}_i = \varepsilon_i \varepsilon_f - |\vec{k}_f| |\vec{k}_i| \cdot \cos \theta \approx \\
&\approx \varepsilon_i \varepsilon_f - \varepsilon_i \varepsilon_f \cos \theta = \varepsilon_i \varepsilon_f (1 - \cos \theta).
\end{aligned} \tag{F.8}$$

Entonces 2.23 queda

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} H_{(2)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{16m^2 M^2} [2(P_i + P_f)k_i(P_i + P_f) - (P_i + P_f) \\
&\cdot (P_i + P_f)(k_i \cdot k_f - m^2)] \times \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right] = \\
&= \frac{1}{16m^2 M^2} \cdot 8M^2 \varepsilon_i \varepsilon_f \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right],
\end{aligned} \tag{F.9}$$

y usando

$$P_i \cdot P_f = P_i \cdot (P_i + k_i - k_f) = M^2 + M(\varepsilon_i - \varepsilon_f) \approx M^2 \left(1 - \frac{Q^2}{2M^2} \right), \tag{F.10}$$

se llega finalmente a

$$L_{\mu\nu} H_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2} \varepsilon_i \varepsilon_f \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[F_2^2 \left(2 - \frac{Q^2}{2M^2} \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right]. \tag{F.11}$$

Referencias

- [1] J. A. Caballero Carretero, apuntes del curso “Mecánica cuántica relativista”, Universidad de Sevilla, Máster interuniversitario en Física Nuclear.
- [2] J. Segovia, apuntes del curso “Teoría cuántica relativista y procesos nucleares”, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, Máster interuniversitario en Física Nuclear.
- [3] I. Gallardo Fuentes, Notas de electrodinámica cuántica, de la asignatura de Teoría Cuántica de Campos.
- [4] D. Griffiths y D. Schroeter, Introduction to quantum mechanics, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [5] D. Griffiths, Introductory to elementary particles, 1ra ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [6] W. Greiner, Relativistic quantum mechanics, 3ra ed. New York: Springer, 1997.
- [7] W. Greiner y J. Reinhardt, Quantum electrodynamics, 3ra ed. Berlin: Springer, 2003.
- [8] D. R. Entem, Scattering Theory. Relativistic Quantum Theory: Nuclear processes, Universidad de Salamanca, Máster interuniversitario en Física Nuclear.
- [9] M. Thomson, Particle Physics: Electron-Proton Scattering, Michaelmas Term 2009.
- [10] G. D. Megías Vazquez, Interacción neutrino-núcleo mediada por corrientes cargadas, TFM, Máster Interuniversitario en Física Nuclear Curso 2011/2012.
- [11] J. Kelly, "Simple parametrization of nucleon form factors", Physical Review C, vol. 70, no. 6, 2004. Disponible en: [10.1103/physrevc.70.068202](https://doi.org/10.1103/physrevc.70.068202).
- [12] R. González-Jiménez, J. Caballero y T. Donnelly, "Parity violation in elastic electron–nucleon scattering: Strangeness content in the nucleon", Physics Reports, vol. 524, no. 1, pp. 1-35, 2013. Disponible en: [10.1016/j.physrep.2012.10.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.10.003).
- [13] W. Alberico, A. Molinari, T. Donnelly, E. Kronenberg y J. Van Orden, "Scaling in electron scattering from a relativistic Fermi gas", Physical Review C, vol. 38, no. 4, pp. 1801-1810, 1988. Disponible en: [10.1103/physrevc.38.1801](https://doi.org/10.1103/physrevc.38.1801).
- [14] J. Taylor, Scattering theory. Mineola, NY: Dover Publications, 2006.
- [15] C. Maieron, T. Donnelly y I. Sick, "Extended superscaling of electron scattering from nuclei", Physical Review C, vol. 65, no. 2, 2002. Available: [10.1103/physrevc.65.025502](https://doi.org/10.1103/physrevc.65.025502).
- [16] O. Benhar. An archive for quasi-elastic electron-nucleus scattering data. arXiv:nucl-ex/0603032 (2006).

- [17] "NuDat 3", Nndc.bnl.gov, 2022. [Online]. Available: <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/>. [Accedido: 19- May- 2022].
- [18] R. González-Jiménez, A. Nikolakopoulos, N. Jachowicz y J. Udías, "Nuclear effects in electron-nucleus and neutrino-nucleus scattering within a relativistic quantum mechanical framework", *Physical Review C*, vol. 100, no. 4, 2019. Disponible en: 10.1103/physrevc.100.045501.
- [19] L. Liang, Determination of the argon spectral function from (e,e'p) data. arXiv:2203.01748 [nucl-ex] (2022)
- [20] J. Amaro, M. Barbaro, J. Caballero, R. González-Jiménez, G. Megias y I. Simo, "Electron- versus neutrino-nucleus scattering", *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 47, no. 12, p. 124001, 2020. Disponible en: 10.1088/1361-6471/abb128.
- [21] J. Segovia, D. Rodríguez y J. A. Caballero, *Relativistic Quantum Theory: Nuclear Processes*, Universidad Pablo de Olavide, Universidad de Salamanca & Universidad de Sevilla, Máster interuniversitario en Física Nuclear.
- [22] G. D. Megias, *Relativistic Quantum Mechanics: Electron-Nucleus Scattering*, Universidad de Sevilla.